

DISSERTATION ETH Nr. 12894

# Robuste Schätzverfahren für die Parameterschätzung in geodätischen Netzen

ABHANDLUNG

zur Erlangung des Titels



DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

der

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE  
ZÜRICH

vorgelegt von

Fridolin Wicki

Dipl. Verm.-Ing. ETH Zürich

geboren am 7. März 1964  
von Escholzmatt / LU

Angenommen auf Antrag von:

Referent:

Prof. Dr. A. Carosio, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie  
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

Korreferent:

Prof. Dr. A. Marazzi, Institut Universitaire de Médecine Sociale et Préventive  
Université de Lausanne

# 1. Kurzfassung und Arbeitsgliederung

---

Die traditionelle Aufgabe der Geodäsie besteht darin, reelle Objekte einzumessen und in einem, meist mathematischen Modell abzubilden. Die unbekannt Parameter dieses Modells sind, ausgehend von den mit kleineren oder grösseren Fehlern behafteten Messungen, zu schätzen.

Anfang des 19. Jahrhunderts wurde von C. F. Gauss und A. M. Legendre die Schätzung nach der Methode der kleinsten Quadrate (MdkQ) entworfen, die sich seither zum Standardverfahren für die Ausgleichung geodätischer Beobachtungen entwickelt hat. Der Erfolg dieses Schätzverfahrens liegt hauptsächlich in seiner einfachen, übersichtlichen und rechnerisch beherrschbaren Art begründet, obwohl die dem Verfahren zugrundeliegende Modellannahme, die Normalverteilung der Messfehler, in der Praxis nicht zwingend erfüllt werden.

In den 60iger Jahren wurde damit begonnen, Methoden der mathematischen Statistik in der geodätischen Parameterschätzung zu integrieren und auf geodätische Problemstellungen anzuwenden. In diesem Zusammenhang sei vor allem auf Hypothesentests, Intervallschätzungen und Varianzkomponentenschätzungen hingewiesen. Diese Methoden erlauben, die immer komplexer und allgemeiner werdenden Modelle zu interpretieren und bezüglich ihrer Güte zu beurteilen.

Der erste Teil der vorliegenden Arbeit vermittelt im wesentlichen einen Überblick über diese Grundlagen. So behandelt das Kap. 5 gewisse, für die Arbeit relevante Elemente der mathematischen Statistik und das Kap. 6 die Methode der kleinsten Quadrate.

Seit Mitte der 60iger Jahre wurden in der mathematischen Statistik Schätzverfahren entwickelt, die auch bei Modellannahmen, die nicht den Voraussetzungen der MdkQ entsprechen, qualitativ gute Schätzungen der unbekannt Parameter ergeben. Zusätzlich ermöglichen diese *robusten Schätzverfahren* die automatische Lokalisierung grober Fehler im Datenmaterial, was zu einer markanten Vereinfachung und Effizienzsteigerung der Datenbereinigung, Datenanalyse und Auswertung führt.

Im 2. Teil dieser Arbeit werden Grundlagen der robusten Parameterschätzung erläutert. Insbesondere befasst sich das Kap. 7 mit dem mathematischen Modell der robusten Parameterschätzung, das Kap. 8 mit den Eigenschaften dieser robusten Schätzverfahren und im Kap. 9 werden verschiedene gebräuchliche Schätzfunktionen dargestellt.

Die enorme Entwicklung der Computertechnik in den letzten Jahren ermöglicht es, robuste Schätzverfahren in der geodätischen Praxis zu verwenden. Das Ziel dieser Arbeit war es, ein praxistaugliches robustes Schätzverfahren für die Parameterschätzung in geodätischen Netzen zu entwickeln und dieses im geodätischen Standardauswerteprogramm der Schweiz als Alternative zur Schätzung nach der MdkQ zu integrieren. Damit wurde das Verfahren rasch einem sehr grossen Benutzerkreis innerhalb des schweizerischen Vermessungswesens zugänglich gemacht.

Die Häufigkeit grober Fehler in geodätischen Beobachtungen ist erfahrungsgemäss, unter anderem bedingt durch umfassende Kontrollen der Daten vor der Parameterschätzung, relativ klein. Daher ist es von besonderer Bedeutung, dass das entwickelte robuste Schätzverfahren sich durch eine enge Verwandtschaft mit der MdkQ auszeichnet. Bei Beobachtungen ohne grobe Fehler werden im Normalfall sogar identische Resultate erzielt, bei mit groben Fehlern behaftetem Beobachtungsmaterial werden die Parameter in den meisten Fällen sehr realitätsnah geschätzt und die groben Fehler äusserst effizient lokalisiert.

Das mathematische Modell dieses Schätzverfahrens ist im Kap. 11 detailliert beschrieben. Das Kap. 12 befasst sich mit möglichen Berechnungsverfahren des entstehenden, nichtlinearen Gleichungssystems. Die folgenden Kapitel sind der Schätzung stochastischer Unbekannten gewidmet. Im Kap.13 wird die Schätzung der Standardabweichung der Gewichtseinheit beschrieben, das Kap. 14 befasst sich mit der Schätzung der Kovarianzmatrix und das Kap. 15 mit der Definition der Zuverlässigkeit und der Bestimmung von Zuverlässigkeitsindikatoren. Dabei wurde besonders Wert darauf gelegt, dass die aus der Schätzung nach der MdkQ bekannten Indikatoren und Testgrössen, soweit sinnvoll, weiterhin auch beim robusten Schätzverfahren Verwendung finden.

Im Kap. 16 ist der programmtechnische Berechnungsablauf mit allenfalls auftretenden numerischen Problemen und die Integration in der bestehenden Software beschrieben. Das Kap. 18 demonstriert typische Merkmale des Schätzverfahrens anhand von Beispielen aus der Praxis.

## 2. Abstracts and organization

---

The traditional task of geodesy consists of measuring real objects and representing them mostly with a mathematical model. Based on measurements that are always associated with smaller or larger inaccuracies, the unknown parameters of the mathematical model have to be estimated.

At the beginning of the nineteenth century C.F. Gauss and A. M. Legendre developed the method of the least squares (MLS) and set the standard used to this day for the calculation of adjustments. The success of this method is due to its simplicity, clarity and calculational ease in application. In spite of its wide use however, the principal hypothesis of normal distribution of measurement errors is not necessarily fulfilled in all practical applications.

In the nineteen sixties, for the first time methods of mathematical statistics were integrated in the estimation of geodetic parameters. In this context, hypothesis testing, interval estimation and variance analysis should be mentioned. These methods allow the interpretation and validity-assessment of the increasingly complex and broad models that are used.

The first part of this paper gives an overview of the relevant segments of these fundamentals. Chapter 5 presents the relevant elements of the mathematical statistics and Chapter 6 presents the method of least squares.

In the middle of the sixties, estimation procedures in mathematical statistics were developed which provide qualitatively good estimates of the unknown parameters even in the case of model assumptions which do not fulfill the requirements of the method of least squares. In addition, these robust estimation procedures automatically locate large errors in the data set, which lead to a significant simplification and an increase of efficiency of the process of data preparation and analysis.

The second part of the paper explains the fundamentals of the mathematical model of the robust parameter estimation. The mathematical model for the robust estimation of the parameters is defined in Chapter 7. Chapter 8 treats the model's specific characteristics and Chapter 9 presents the different commonly used approximation functions.

The significant advances in computer technology in the last few years has made it possible to apply robust parameter estimation procedures to the geodetic adjustments. The main goals of this paper are to develop a practical robust estimation procedure for the parameter estimation

in geodetic networks and to integrate this method in the standard geodetic programs of Switzerland, as an alternative to the method of least squares. Through the latter, the new method should be made accessible to a wide circle of users within the Swiss land surveying community.

Experience shows a relatively low occurrence of major errors in geodetic observations not in the least due to extensive checking and verification of the data material before the parameter estimation procedure. Therefore, it is important that the new method is in a close relationship to the traditional MLS method. Under the normal conditions of geodetic observation without any large errors the parameter estimation leads to identical results as the MLS; in the case of large errors in the observations, the estimation of the parameters leads to very realistic results and any large errors are easily and precisely located.

A detailed description of the mathematical model of the new method is given in Chapter 11. Various approaches to solving the resulting non-linear equations are presented in Chapter 12. The subsequent chapters treat the estimations of the unknown stochastic parameters. Chapter 13 describes the estimation of the standard deviation of the weights. Chapter 14 describes the estimation of the covariance matrix and Chapter 15 describes the definition of the reliability and the determination of the reliability indicators. To the degree possible, indicators and standard test measures that are utilized in the method of MLS were also used in the new robust estimation procedure.

Chapter 16 describes the implementation of the new algorithms in the existing software and addresses possible associated numerical problems. Finally, typical characteristics of the robust estimation procedures are demonstrated with real world examples in Chapter 18.