Einige unstetige stochastische Prozesse

Doctoral Thesis

Author(s):

Dalcher, Andreas

Publication date:

1956

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000089794>

Rights / license:

In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

Einige unstetige stochastische Prozesse

VON DER
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
IN ZÜRICH

ZUR ERLANGUNG
DER WÜRDE EINES DOKTORS DER MATHEMATIK

GENEHMIGTE
PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON
ANDREAS DALCHER

VON
PRATTELN (BL)

Referent: Herr Prof. Dr. W. Saxer

Korreferent: Herr Prof. Dr. A. Pfluger

BASEL
Buchdruckerei Birkhäuser AG.
1956

Einige unstetige stochastische Prozesse

Von ANDREAS DALCHER, Zug

Inhalt

<i>1. Kapitel: Allgemeines</i>	3
§ 1. Einleitung	3
§ 2. Beispiele	5
§ 3. Die Hauptformel	6
<i>2. Kapitel: Lösung durch Integralgleichungen</i>	7
§ 4. Herleitung der Integralgleichung	7
§ 5. Eigenschaften der Kerne und elementare Lösungsmethoden für Volterra-Gleichungen	9
§ 6. Anwendungen	15
<i>3. Kapitel: Lösung durch die Laplace-Transformation</i>	18
§ 7. Herleitung der Differentialgleichung	18
§ 8. Lösung der Gleichungen erster Ordnung	19
§ 9. Die Gleichungen höherer Ordnung im stationären Fall	22
§ 10. Partielle Gleichungen zweiter Ordnung	27
§ 11. Stationärer Zustand bei exponentiell verteilter Sprunghöhe.	28
<i>4. Kapitel: Diverses</i>	31
§ 12. Ansatz für den mehrdimensionalen Fall	31
§ 13. Berechnung von Näherungen	31
§ 14. Anmerkungen über Existenzsätze	33
Literaturverzeichnis	33

1. Kapitel: Allgemeines

§ 1. Einleitung

a) Das Problem. Gegeben sei eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung. Die Zeit t sei die unabhängige, x die abhängige Variable. Die Gleichung kann in der Form

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(x, t) \quad (1)$$

geschrieben werden. Wir betrachten nun den folgenden stochastischen Prozess $x(t)$.

In jedem Zeitintervall $(t, t + dt)$ besteht eine Wahrscheinlichkeit $w(x, t) dt$, dass x einen Sprung ausführt. Wenn dieser zur Zeit t stattfindet und wenn die abhängige Variable in $(t - 0)$ den Wert y angenommen hat, so hat x unmittelbar nachher die Verteilung $G(y, x, t)$. Vom so erreichten Punkt x aus folgt der Prozess bis zum nächsten Sprung der durch (x, t) gehenden Lösung der Differentialgleichung. In Figur 1 sind einige Kurven der Lösungsschar und ein möglicher

Figur 1
Möglicher Verlauf eines Prozesses.

Verlauf des Prozesses $x(t)$ dargestellt. Der Anfang des Prozesses sei durch die Verteilung $F(x, 0)$ gegeben.

Wir kennen also

die Differentialgleichung	$\dot{x}(x, t)$,
die Dichte der Sprünge	$w(y, t)$,
die Verteilung nach diesen	$G(y, x, t)$,
die Anfangsverteilung	$F(x, 0)$

und wollen berechnen¹⁾

die Verteilung von x zu irgendeiner Zeit	$F(x, t)$.
--	-------------

b) Methoden und Resultate. Die Lösungen werden auf zwei Arten erhalten. Mit Integralgleichungen gewinnt man einen besondern Aspekt und allgemeinere Ergebnisse des «Queueing»-Problems und ähnlicher Fragen (vgl. KENDALL[6]²⁾). Durch die Laplace-Transformation lässt sich unter anderem das «Geräusch-

¹⁾ Auf das Problem der Verteilung im Funktionenraum [im Lehrbuch von DOOB [3] mit Ω bezeichnet: $x_t(\omega)$, $\omega \in \Omega$] treten wir hier nicht ein. Auch die Autokorrelation des Prozesses wird nicht untersucht.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 33.

problem» behandeln. Hier wird die Störung jedoch als unstetig angenommen, während in der Literatur das Hauptgewicht auf den kontinuierlichen Fall gelegt wird.

§ 2. Beispiele

a) Wir betrachten ein Reservoir in einer wasserarmen Gegend (zum Beispiel Jura). Dieses werde direkt durch Regenwasser und nicht durch eine Quelle gespeisen. $x(t)$ sei das Volumen des gespeicherten Wassers. Wir nehmen an, Regengüsse erfolgen mit einer Wahrscheinlichkeitsdichte $w(t)$ und seien nur von kurzer Dauer. Wenn das Wasser sofort in das Reservoir geleitet wird, so nimmt x jeweils sprunghaft zu. $-\dot{x}(x, t)$ ist die pro Zeiteinheit gebrauchte Wassermenge. Bei leerem Reservoir ist $\dot{x}(0, t) = 0$. Wenn mehr Wasser als die maximale Kapazität A anfällt, so überläuft es sofort. Dies bedeutet $\dot{x}(x, t) = -\infty$ für $x \geq A$. Im Intervall $0 < x < A$ ist $\dot{x}$ negativ.

Ähnlich verhält es sich mit Stauseen für Kraftwerke. Die Bedingung, dass das Regenwasser sofort in den See gelangt, ist allerdings oft nicht erfüllt, besonders wenn Gletscher oder Wälder im Einzugsgebiet liegen. Ein stetiger Zufluss kann jedoch berücksichtigt werden, indem dieser zu $\dot{x}$ addiert wird. Für die folgenden Rechnungen muss aber $\dot{x}$ eine bestimmte Funktion von x und t sein. Weder der allfällige stetige Teil des Zuflusses noch der für die Kraft-erzeugung benötigte Abfluss dürfen ein stochastisches Element enthalten.

b) Im Lagerungsproblem ist $x(t)$ die Menge der zur Zeit t gelagerten Güter. w ist die Wahrscheinlichkeitsdichte, dass eine neue Sendung eintrifft. $G(y, x, t)$ ist die Verteilung von x nach deren Ankunft, wenn vorher die Warenmenge y betragen hat. Wir nehmen an, der Verkauf erfolge stetig. $-\dot{x}$ ist die Verkaufsgeschwindigkeit. Auch hier hat man die Bedingung

$$\dot{x}(0, t) = 0, \quad \dot{x}(x, t) < 0 \quad \text{für} \quad x > 0.$$

c) Auch das Warteproblem (queueing problem) kann in dieser Form dargestellt werden. $x(t)$ ist jedoch nicht die Anzahl wartender Personen, sondern die durch diese für den Bedienenden aufgespeicherte Arbeit. $w(y)$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte, dass sich jemand anschliesst, wenn die Länge der Schlange, ausgedrückt in Arbeit, y beträgt. $G(x - y)$ ist die Verteilung der Arbeit, die ein Ankommender bringt. $-\dot{x}(x, t)$ ist die Geschwindigkeit, mit welcher der Bedienende arbeitet.

d) Ein Geiger-Müller-Zählrohr löst bei jedem registrierten Partikel einen kurzen Stromstoss aus. Dieser gelange auf einen CR -Kreis. Wie lautet die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Spannung x am Kondensator? Bei jedem Stromstoss nimmt letztere sprunghaft zu und folgt zwischen den Unstetigkeiten der Differentialgleichung

$$\dot{x} = -\frac{x}{CR}.$$