Ein Verfahren zur Stabilitätsfrage bei Matrizen-Eigenwertproblemen

Doctoral Thesis**Author(s):**

Schwarz, Hans Rudolf

Publication date:

1956

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000091928>

Rights / license:

In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

Ein Verfahren zur Stabilitätsfrage bei Matrizen-Eigenwertproblemen

VON DER
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
IN ZÜRICH

ZUR ERLANGUNG
DER WÜRDE EINES DOKTORS DER MATHEMATIK

GENEHMIGTE
PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON
HANS-RUDOLF SCHWARZ

dipl. Mathematiker ETH.

von ZÜRICH

Referent: Herr Prof. Dr. E. Stiefel

Korreferent: Herr Prof. Dr. H. Hopf

BASEL
Buchdruckerei Birkhäuser AG.
1956

Ein Verfahren zur Stabilitätsfrage bei Matrizen-Eigenwertproblemen

VON HANS-RUDOLF SCHWARZ, Zürich¹⁾

1. Einleitung und Problemstellung

Zahlreiche technische Fragen führen auf das mathematische Problem, für das Matrizen-Eigenwertproblem $(A - \lambda E) x = 0$ die Anzahl der Eigenwerte mit positivem Realteil zu bestimmen, wobei die Eigenwerte selbst meistens gar nicht interessieren. Diese Problemstellung nennt man kurz die Stabilitätsfrage. Um diese zu beantworten, sind verschiedene klassische Kriterien bekannt, welche aber alle vom charakteristischen Polynom $P(\lambda)$ ausgehen, also bedingen, dass dasselbe explizit ermittelt wird. So erwähne ich die Kriterien von ROUTH [1]²⁾ und HURWITZ [2], welche in ihrer ursprünglichen Formulierung auf Polynome mit reellen Koeffizienten Anwendung finden, im übrigen aber gleichbedeutend sind. Das Ortskurvenkriterium von NYQUIST [3] bestimmt auf graphischem Weg die Anzahl der Nullstellen der charakteristischen Gleichung $P(\lambda) = 0$ mit negativem Realteil. Eine unmittelbare Folge davon ist das Lagen- oder Lücken-kriterium [4], welches aussagt, dass dann und nur dann sämtliche Nullstellen von $P(\lambda) = 0$ negative Realteile aufweisen, wenn die Wurzeln von Real- und Imaginärteil von $P(i y) = \operatorname{Re}(y) + i \operatorname{Im}(y)$ reell sind und sich gleichzeitig gegenseitig trennen. Das bekannteste numerische Verfahren zur Beantwortung der Stabilitätsfrage dürfte wohl die Methode der Sturmschen Kette [5] sein, wonach aus dem Real- und Imaginärteil von $P(i y) = \operatorname{Re}(y) + i \operatorname{Im}(y)$ durch fortgesetzte Division mit Rest eine Folge von Polynomen absteigenden Grades gebildet wird. Die Anzahl der Eigenwerte in der linken komplexen Halbebene $\operatorname{Re} z < 0$ lässt sich dann aus dem Unterschied der Zeichenwechsel in der Polynomfolge für $y = -\infty$ und $y = +\infty$ angeben. Damit äquivalent ist das Stabilitätskriterium von WALL [6], welches die Aussage in die Form eines Kettenbruches kleidet. Daneben finden sich in der Literatur einerseits noch verschiedene numerische Verfahren, welche vermittels eines Reduktionsprozesses aus dem charakteristischen Polynom eine Folge von Polynomen bestimmen, aus denen die Frage beantwortet werden kann, und andererseits auch einige graphische Methoden.

¹⁾ Institut für angewandte Mathematik der ETH.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 30.

Auf der andern Seite führt jedes gangbare numerische Verfahren zur expliziten Entwicklung des charakteristischen Polynoms von $(A - \lambda E) x = 0$ auf eine Folge von Polynomen, deren Grad sich bei jedem Schritt um 1 erhöht und die mit dem charakteristischen Polynom endigt. Ich verweise auf das Verfahren von WEBER-VOETTER [7], auf die Methode von HESSENBERG [8] und den Biorthogonalisierungsprozess von LANZOS [9], welche alle über eine Reihe von Polynomen aufsteigenden Grades zum charakteristischen Polynom führen.

Um dann die allein interessierende Stabilitätsfrage beantworten zu können, muss eine Polynomfolge absteigenden Grades ermittelt werden. Um den Weg über eine aufsteigende und dann über eine absteigende Kette von Polynomen zu vermeiden, in welcher das charakteristische Polynom als solches von höchstem Grad meist gar nicht interessiert, gab mir Herr Professor Dr. E. STIEFEL (ETH) die Anregung, folgende Frage zu untersuchen:

Problem: Man berechne das charakteristische Polynom $P(\lambda)$ aus der Matrix A über eine solche aufsteigende Kette von Polynomen, aus welcher schon selbst die Stabilitätsfrage beantwortet werden kann.

Dieser Wunsch führte zu einem Verfahren, unter Umgehung des charakteristischen Polynoms die gegebene Matrix A mit Hilfe von elementaren Transformationen auf eine Normalform zu bringen, deren Elemente allein schon das Stabilitätsproblem lösen. Die beschriebene Methode weist den Vorteil auf, dass die anzuwendenden Rechenoperationen von grosser Einheitlichkeit sind, was das Programmieren auf Rechenautomaten erleichtert. Bei der klassischen Methode der Sturmschen Kette stützt sich die ganze Entscheidung der Stabilität auf eine längere Rechnung, welche vom charakteristischen Polynom ausgeht. Die Koeffizienten dieses Polynoms enthalten sicher weniger Information als die ursprünglich gegebenen Matricelemente. Es ist zu hoffen, dass unsere Methode, die die Matricelemente in mehr direkter Weise verwendet, in manchen Fällen numerisch stabiler verläuft. Ob diese Hoffnung berechtigt ist, können allerdings erst umfangreichere Versuche entscheiden.

An dieser Stelle möchte ich den Herren Professoren Dr. E. STIEFEL und Dr. H. RUTISHAUSER, die mit ihren wertvollen Hinweisen zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, meinen besten Dank aussprechen.

I. Das Stabilitätskriterium

2. Das Kettenbruchkriterium von WALL [6]

Es sei $P(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + c_{n-2}z^{n-2} + \dots + c_1z + c_0$ ein Polynom n -ten Grades mit komplexen Koeffizienten $c_k = p_k + i q_k$. Aus diesem bilde man $Q(z) = [P(z) - (-1)^n \overline{P(-z)}]/2$, worin $P(z)$ das Polynom mit den konjugiert