Berechnung gewölbter Platten

Doctoral Thesis**Author(s):**

Keller, Huldreich

Publication date:

1912

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000091960>

Rights / license:

In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

Berechnung gewölbter Platten.

Von der
Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich
zur Erlangung der
Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften
genehmigte

Promotionsarbeit

vorgelegt von
Huldreich Keller, Dipl.-Ing.
aus Arbon (Schweiz).

Referent: Herr Professor Dr. E. Meissner.
Korreferent: Herr Professor Dr. A. Stodola.

Berlin 1912.

Der Verfasser vorliegender Arbeit wurde geboren am 16. März 1868 in A r b o n am Bodensee. Ich besuchte während sechs Jahren die Primar- und sodann während drei Jahren die Sekundarschule meines Geburtsortes und im Anschluss daran dreieinhalb Jahre hindurch die technische Abteilung der thurgauischen Kantonsschule in F r a u e n f e l d.

Alsdann machte ich drei Jahre Werkstattpraxis teils in den Werkstätten meines Vaters, teils in den Maschinen-Fabriken von B a u m und von S a u r e r in Arbon.

Vom Oktober 1889 bis März 1893 besuchte ich die mech. technische Abteilung des eidgenössischen Polytechnikums in Zürich und erhielt daselbst zum Schluss das Diplom eines Maschineningenieurs. Während des darauffolgenden Jahres war es mir vergönnt, eine Assistentenstelle bei Herrn Professor Stodola einzunehmen. Sodann bekleidete ich die Stelle eines Konstruktionsingenieurs in der Dampfmaschinen-Abteilung von Escher Wyss & Cie. in Zürich. Im Sommer-Semester 1895 war ich aushilfsweise als Lehrer am Technikum Winterthur verpflichtet.

Vom Herbst 1896 bis Ende 1908 war ich bei der A E G Berlin engagiert und zwar etwa sieben Jahre lang in der Maschinenfabrik Brunnenstrasse und fünf Jahre lang in der neugegründeten Turbinenfabrik Huttenstrasse. An beiden Orten war mir insbesondere das mechanische Laboratorium unterstellt. Zu Ende 1908 kehrte ich wieder zu Escher Wyss & Cie. in Zürich zurück, wo ich seither dem Literarischen und dem Patentbureau vorstehe.

Berechnung gewölbter Platten.

Von Ingenieur **Huldreich Keller** in Zürich.

Durch vorliegende Arbeit soll der Weg gezeigt werden für eine annäherungsweise Berechnung von gewölbten Platten. Er ist ähnlich demjenigen, den ich einer früheren Arbeit über die Berechnung von umlaufenden Radscheiben zugrunde gelegt habe¹⁾. Das Hauptkennzeichen dieses Rechnungsverfahrens liegt darin, daß man die Differentialgleichungen, auf die man gelangt, durch das annäherungsweise »Rechnen mit kleinen Differenzen« löst.

Unsere neue Aufgabe ist aber wesentlich umfangreicher, als die Berechnung von Radscheiben, weil zu den Normalspannungen in radialer und tangentialer Richtung, wie sie in Radscheiben fast allein vorkommen, in einer einseitig belasteten, gewölbten Platte noch Schub- und Biegungsspannungen hinzutreten.

Der Zweck vorliegender Arbeit soll insbesondere auch darin bestehen, die teils ziemlich verwickelten Formeln in eine möglichst einfache Form zu bringen, wie sie für ein am Konstruktionstisch gefordertes, hinreichend zuverlässiges Rechnen brauchbar ist, das nicht allzusehr ermüdet.

Die Berechnung soll die Möglichkeit schaffen, in einer als Drehkörper durchgebildeten, gewölbten (oder ebenen) Platte, welche von einer Seite durch einen Gas- oder Flüssigkeitsdruck belastet ist, in jedem Punkt die Beanspruchung und die Formänderung zu ermitteln. Es kommen also Platten in Frage, wie sie als Deckel und Zwischenböden in Dampfturbinen, als Böden von Dampfkesseln oder andern Hochdruckgefäßen Verwendung finden.

Das Verfahren setzt voraus, daß die Dicke der Platte im Verhältnis zum Krümmungshalbmesser des Meridians klein, der Stoff durchaus homogen und daß jede schroffe Querschnittänderung vermieden sei. Ferner soll die Formänderung entsprechend der für den gebogenen Balken aufgestellten Bernoullischen Annahme derart vor sich gehen, daß alle Punkte der Platte, welche vor der Biegung auf einer zur Plattenwölbung senkrechten Geraden lagen, auch nach der Durchbiegung auf einer Geraden liegen, die senkrecht steht zur Mittelfläche²⁾.

In die Rechnung führen wir folgende, aus Fig. 1 ersichtliche Bezeichnungen ein:

¹⁾ Siehe »Schweizerische Bauzeitung« vom 27. November 1909 S. 307 und »Die Turbine« vom 5. Dezember 1909 S. 88.

²⁾ Dies trifft für gußeiserne gewölbte Platten nur annäherungsweise zu. Vergl. Bach, »Elastizität und Festigkeit« 1902 S. 504 u. f. über »gekrümmte, stabförmige Körper«.

- x in cm Abstand des auf der Meridian-Mittelfaser $\widehat{JA_1}$ gelegenen zu untersuchenden Punktes A von der Symmetrieachse $z-z$ der Platte.
 h in cm Dicke der Platte beim Punkt A .
 η in cm Abstand eines auf dem durch A gehenden Krümmungshalbmesser des Meridians gelegenen Punktes C von A .
 ϱ in cm Krümmungshalbmesser der Meridian-Mittelfaser im Punkt A .

Fig. 1.

- φ Winkel zwischen diesem Krümmungshalbmesser und der Symmetrieachse.
 $\Delta\varphi \equiv \psi$ Aenderung dieses Winkels φ bei der Durchbiegung.
 $\Delta(d\varphi) \equiv d\psi$ Aenderung des Winklelementes $d\varphi$.
 $\omega = \frac{\Delta(d\varphi)}{d\varphi}$ spezifische Aenderung des Winklelementes.
 p in kg/qcm der gleichmäßig verteilte, einseitige Ueberdruck, winkelrecht auf die Platte wirkend. Für eine Einzelbelastung P wären diejenigen Glieder der Rechnung, in denen sonst p vorkommt, sinngemäß zu ändern. Ein Gleiches gilt für ein Zusammenwirken einer gleichmäßig verteilten Belastung p und einer Einzellast P .
 σ_r in kg/qcm die Normalspannung in einem den Punkt C enthaltenden Flächenelement, das auf dem durch den Punkt A oder C senkrecht zur Plattenwölbung geführten Kegel liegt, dessen Symmetrieachse mit derjenigen der Platte zusammenfällt. σ_r ist gleich gerichtet wie die Meridian-Mittelfaser. Der Hauptsache nach verläuft sie »radial«; ihr Wert sei deshalb abkürzungs halber mit »Radialspannung« bezeichnet —, dies in Anlehnung an die Scheibenberechnung.
 σ_t in kg/qcm die Normalspannung (Hauptspannung) im Meridianschnitt; sie verläuft tangential zum Parallelkreis und soll deshalb »Tangentialspannung« heißen.
 τ in kg/qcm die Schubspannung in dem Flächenelement, auf welches σ_r winkelrecht wirkt.
 E in kg/qcm der Elastizitätsmodul des Plattenstoffes.

In Fig. 1 ist ein Meridianschnitt durch einen von der konkaven Seite, also im positiven Sinn mit der spezifischen Pressung p belasteten Deckel gezeichnet.

Wegen der Kleinheit von η und der daraus folgenden Kleinheit von $\Delta\eta$ wird auf der rechten Seite der zweite Summand gegenüber den beiden anderen Summanden vernachlässigt, und es bleibt noch

$$\Delta\xi = \Delta x + \eta \Delta\varphi \cos\varphi.$$

Diesen Wert eingesetzt in die Gleichung $\varepsilon_t = \frac{\Delta\xi}{\xi}$, gibt

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta x + \eta \Delta\varphi \cos\varphi}{x + \eta \sin\varphi}.$$

Mit hinreichender Annäherung kann man setzen $x + \eta \sin\varphi \approx x$; ferner ist $\frac{\Delta x}{x} = \varepsilon_0$, wo ε_0 die spezifische Dehnung des durch den Punkt A, d. h. im Abstand $\eta = 0$ von der Mittelfaser gezogenen Parallels ist. Dadurch vereinfacht sich der Ausdruck für ε_t auf die Form:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_0 + \frac{\eta}{x} \Delta\varphi \cos\varphi \quad (2).$$

Hierin ist aber vorläufig weder ε_0 noch $\Delta\varphi$ bekannt.

3) Berechnung der im Punkt C herrschenden Radialspannung σ_r und Tangentialspannung σ_t .

Die Elastizitätslehre¹⁾ gibt zwischen den Spannungen und den Dehnungen die Beziehungen:

$$\sigma_r = \frac{mE}{m^2 - 1} [m\varepsilon_r + \varepsilon_t]; \quad \sigma_t = \frac{mE}{m^2 - 1} [\varepsilon_r + m\varepsilon_t],$$

wo m das Verhältnis der spezifischen Längsdehnung zur linearen Querkontraktion eines auf reinen Zug beanspruchten Stabes bedeutet²⁾.

Wir setzen

$$c = \frac{mE}{m^2 - 1}.$$

Unter Verwendung der Gl. (1) und (2) erhalten wir

$$\begin{aligned} \sigma_r &= c \left[m\varepsilon_{r0} + m\omega \frac{\eta}{\varrho} + \varepsilon_0 + \frac{\eta}{x} \Delta\varphi \cos\varphi \right] \\ \sigma_t &= c \left[\varepsilon_{r0} + \omega \frac{\eta}{\varrho} + m\varepsilon_0 + m \frac{\eta}{x} \Delta\varphi \cos\varphi \right]. \end{aligned}$$

Setzen wir in diesen beiden Gleichungen $\eta = 0$, so erhalten wir als Sonderfälle die Normalspannungen im Abstand x von der Symmetrieachse und in der jeweiligen Mittelfaser des Meridianschnittes und des Parallelkreisschnittes:

$$\begin{aligned} \sigma_{r0} &= c [m\varepsilon_{r0} + \varepsilon_0] \\ \sigma_{t0} &= c [\varepsilon_{r0} + m\varepsilon_0]. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man ferner, daß

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\varrho}; \quad \frac{\omega}{\varrho} = \frac{\Delta\varphi}{\varrho^2} = \frac{\Delta\varphi}{ds}; \quad ds = \frac{dx}{\cos\varphi}; \quad \Delta\varphi = d\psi,$$

so gehen die Gleichungen für σ_r und σ_t über in die Form

$$\sigma_r = \sigma_{r0} + c\eta \cos\varphi \left[m \frac{d\psi}{dx} + \frac{\psi}{x} \right] \quad (3).$$

$$\sigma_t = \sigma_{t0} + c\eta \cos\varphi \left[\frac{d\psi}{dx} + m \frac{\psi}{x} \right] \quad (4).$$

¹⁾ s. Föppl's »Festigkeitslehre« Band III 1909 S. 246.

²⁾ z. B. für Stahl $m \approx 10,3$; für Gußeisen: $m = 5$ bis 9.

Setzen wir in diesen beiden Gleichungen als Sonderwerte für η die Grenzwerte $\left(\pm \frac{h}{2}\right)$ ein, so erhalten wir die Spannungen σ_r und σ_t in den Außen- und Innenfasern der Platte.

Um nun für jeden Punkt der Platte die Werte σ_r und σ_t berechnen zu können, wollen wir vorerst für σ_{r0} , σ_{t0} und ψ Beziehungen aufstellen.

4) Berechnung von σ_{r0} unter Vermittlung der Gleichgewichtsbedingung der am Plattenelement angreifenden Kräfte.

Wir denken uns gemäß Fig. 3 im Abstand x von der Symmetrieachse aus der Platte ihrer ganzen Höhe nach ein Element in Richtung des Meridians und des Parallelkreises von vorerst unendlich kleinen Grundriß-Abmessungen herausgeschnitten. Die vier Schnittflächen sollen alle senkrecht stehen zu den Meridian- und Parallelkreis-Mittelfasern des Elementes. Zwei dieser Schnittflächen sollen Ebenen sein, durch die Symmetrieachse gehen und unter sich den Winkel $d\alpha$ einschließen. Winkelrecht auf die von ihnen gebildeten Seitenflächen $GCDH$ und $EFKI$ des Plattenelementes wirken die Tangentialspannungen σ_t im Abstand η von der mittleren Meridianfaser und σ_{r0} in der Mittelfaser selbst, und diese haben die Richtung der Tangenten an die bezüglichen Parallelkreise. Die auf diese beiden Seitenflächen wirkenden Resultierenden seien T , welche ebenfalls den Winkel $d\alpha$ miteinander einschließen.

Fig. 3.

Die beiden anderen Schnittflächen für das Plattenelement, nämlich $CDEF$ und $GHIK$, sind eigentlich Kegelflächen, dürfen ihrer Kleinheit wegen jedoch als Ebenen betrachtet werden. Sie schließen unter sich den Winkel $d\varphi$ und mit der Symmetrieachse $z-z$ die Winkel φ und $(\varphi + d\varphi)$ ein. Die in diesen Flächen herrschenden Normalspannungen seien σ_r und $(\sigma_r + d\sigma_r)$ im Abstand η vom mittleren Parallelkreis sowie σ_{r0} und $(\sigma_{r0} + d\sigma_{r0})$ in den mittleren Parallelkreisen selbst. Sie ergeben die auf die ganzen Flächen wirkenden Resultierenden S und $(S + dS)$.

In den beiden zuletzt betrachteten Schnittflächen wirken außer den Normalspannungen noch Schubspannungen τ und $(\tau + d\tau)$, welche die Resultierenden Sch und $(Sch + dSch)$ erzeugen. Es sei gleich an dieser Stelle hervorgehoben, daß diese in Richtung des Krümmungshalbmessers wirkenden Schubspannungen in der Mitte der Flächen einen Höchstwert τ_0 , am Rand der Flächen, z. B. an den Kanten CF und DE jedoch den Wert 0 haben. Ihr Mittelwert τ_m tritt also nicht in der wagerechten Mittellinie der Seitenfläche $CDEF$ auf, doch wollen wir dies nicht weiter verfolgen, da sich dieser Wert aus der Rechnung ganz eliminieren läßt.

Weil die Seitenflächen nicht Quadrate sondern trapezförmige Flächen sind, so sind die in ihnen wirkenden mittleren Normalspannungen σ_{rm} und σ_{tm} auch nicht genau gleich den in den Mittelfasern herrschenden Spannungen σ_{r0}

und σ_0 ; doch ist der Unterschied so klein, daß man davon absehen darf, ohne einen unzulässigen Fehler zu begehen.

Die Größen der auf die Seitenflächen des Plattenelementes wirkenden Resultierenden ergeben sich als Produkte aus den Flächen und den in ihnen wirkenden mittleren Spannungen.

Wir können für sie folgende Aufstellung machen:

Fläche	mittl. Spannung	Resultierende
$CDEF = x \, d\alpha \, h$;	σ_{r0} (normal);	$S = (xh) \sigma_{r0} \, d\alpha$ (5)
$CDEF = x \, d\alpha \, h$;	τ_m (Schub);	$Sch = (xh) \tau_m \, d\alpha$ (6)

$CDHG = FEIK = ds \, h$;	σ_w (normal);	$T = ds \, h \, \sigma_w = \frac{dx}{\cos \varphi} h \, \sigma_w$. . . (7)
---------------------------	----------------------	---

$DEIH = \left(x + \frac{dx}{2}\right) d\alpha \, ds$;	p	
$= \left(x + \frac{dx}{2}\right) \frac{dx}{\cos \varphi} d\alpha$		$P = p \frac{dx}{\cos \varphi} \left(x + \frac{dx}{2}\right) d\alpha$. . . (8).

(Im Ausdruck für P werden wir $\frac{dx}{2}$ gegenüber x nicht vernachlässigen mit Rücksicht auf die später durchgeführte Rechnung mit endlich kleinen Differenzen statt unendlich kleinen Differentialen, weil sonst bei kleinem x der Fehler zu groß würde.)

An Hand von Fig. 4, d. i. der Seitenansicht des Plattenelementes, kann man für dieses Element folgende Gleichgewichtsbedingung für die an ihm wirkenden Kräfte aufstellen: Wir vergleichen die in Richtung der Normalkraft ($S + dS$) fallenden Komponenten:

$$S + dS = S \cos d\varphi + Sch \sin d\varphi + P \sin \frac{d\varphi}{2} + 2 T' \cos(\varphi + d\varphi).$$

Berücksichtigt man wiederum, daß $d\varphi$ sehr klein, so daß $\cos d\varphi \approx 1$, $\sin d\varphi \approx d\varphi$, $\cos(\varphi + d\varphi) \approx \cos \varphi$, so bleibt

$$dS = Sch \, d\varphi + P \frac{d\varphi}{2} + 2 T' \cos \varphi.$$

Fig. 4.

Fig. 5.

Hierin ist T' die in Richtung des Halbmessers x fallende Komponente von T

$$T' = T \sin \frac{d\alpha}{2} \approx T \frac{d\alpha}{2}; \text{ (vergl. Fig. 5).}$$

Nach Gl. (5) ist
folglich

$$S = (xh) \sigma_{r0} \, d\alpha,$$

$$dS = [(xh) \, d\sigma_{r0} + \sigma_{r0} \, d(xh)] \, d\alpha.$$

Unter Verwendung der Gl. (6) bis (8) erhält man nach Kürzung des Faktors $d\alpha$:

$$(xh) d\sigma_{r0} + \sigma_{r0} d(xh) = \tau_m(xh)d\varphi + p \frac{dx}{\cos\varphi} \left(x + \frac{dx}{2}\right) \frac{d\varphi}{2} + h \frac{dx}{\cos\varphi} \sigma_{t0} \cos\varphi \quad (9).$$

Fig. 6 zeigt die Möglichkeit, die mittlere Schubspannung τ_m durch die Normalspannung σ_{t0} und die äußere Belastung p auszudrücken und sie hierdurch aus der Rechnung zu eliminieren.

Um die Rechnung nach Möglichkeit zu verallgemeinern, wollen wir eine gewölbte Platte betrachten, welche in der Mitte eine gleichachsige Bohrung vom Halbmesser x_i hat. Aus dieser Platte schneiden wir ein Ringteil mit dem äußeren Halbmesser x und dem Zentriwinkel $d\alpha$ heraus. Dieser Ringausschnitt ist in Fig. 6 in der Seitenansicht dargestellt. Aus ihr lassen sich folgende Beziehungen ablesen:

Fig. 6.

$$(x^2 - x_i^2) \pi \left(\frac{d\alpha}{2\pi}\right) p = x d\alpha h (\tau_m \cos\varphi + \sigma_{r0} \sin\varphi)$$

$$(xh) \tau_m = \frac{p}{2} \left(\frac{x^2 - x_i^2}{\cos\varphi}\right) - (xh) \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \sigma_{r0} \quad (10).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung werde in Gl. (9) eingesetzt:

$$(xh) d\sigma_{r0} + \sigma_{r0} d(xh) = \frac{p}{2} (x^2 - x_i^2) \frac{dx}{\rho \cos^2\varphi} - (xh) \sigma_{r0} \sin\varphi \frac{dx}{\rho \cos^2\varphi} + \frac{p}{2} \frac{dx^3}{\rho \cos^2\varphi} \left(x + \frac{dx}{2}\right) + h dx \sigma_{t0}.$$

Hieraus finden wir:

$$d\sigma_{r0} = \left\{ \begin{array}{l} -\sigma_{r0} \left[\frac{d(xh)}{xh} + \sin\varphi \frac{dx}{\rho \cos^2\varphi} \right] \\ + \sigma_{t0} \frac{dx}{x} \\ + \frac{p}{2} \frac{1}{(xh)} \frac{dx}{\rho \cos^2\varphi} \left[x^2 - x_i^2 + dx \left(x + \frac{dx}{2} \right) \right] \end{array} \right\} \quad \text{I. Hauptgleichung.}$$

Diese I. Hauptgleichung hat die Form:

$$d\sigma_{r0} = -\sigma_{r0} (15) + \sigma_{t0} (16) + (24) \quad (1a),$$

wo die Ziffern in () Zahlenwerte bedeuten, die abhängig sind von der Form und der äußeren Belastung der Platte und der Lage des augenblicklich zu untersuchenden Punktes A auf der Mittelfaser des Meridianschnittes.

Würde man für den Halbmesser x die mittlere Radialspannung σ_{r0x} kennen, so lieferte die Hauptgleichung (I) den Wert für die mittlere Radialspannung $\sigma_{r0(x+dx)}$ im Halbmesser $(x+dx)$

$$\sigma_{r0(x+dx)} = \sigma_{r0x} + d\sigma_{r0} \Big|_x^{x+dx} \quad (11).$$

5) Berechnung von σ_{t0} , hergeleitet aus der Dehnung der Platte.

Der Parallelkreis mit dem Halbmesser x , der die gestreckte Länge $(2\pi x)$ hat, dehnt sich um das Stück $\Delta(2\pi x)$, wenn in Richtung der Tangente die spezifische Spannung σ_{t0} , senkrecht dazu die Spannung σ_{r0} wirkt, und zwar ist:

$$\Delta(2\pi x) = \frac{2\pi x}{E} \left(\epsilon_{t0} - \frac{\sigma_{r0}}{m} \right);$$

danach

$$\Delta x = \frac{x}{E} \left(\sigma_{r0} - \frac{\sigma_{t0}}{m} \right).$$

Die Differenzierung dieser Gleichung liefert die Dehnung des Halbmesserelementes (dx)

$$\Delta(dx) = \frac{dx}{E} \left(\sigma_{r0} - \frac{\sigma_{t0}}{m} \right) + \frac{x}{E} \left(d\sigma_{r0} - \frac{d\sigma_{t0}}{m} \right) \quad \dots \quad (12).$$

Für diese Dehnung können wir noch einen zweiten Ausdruck aufstellen:

Fig. 7.

Wir denken uns gemäß Fig. 7 aus der mittleren Meridianfaser im Abstand x von der Symmetrieachse bei A ein Element von der Länge $AD = ds$ herausgegriffen.

Weil

$$dx = ds \cos \varphi,$$

so ist auch die durch die Belastung erfolgte Änderung von dx , das ist:

$$\begin{aligned} \Delta(dx) &= \Delta(ds \cos \varphi) \\ &= \Delta(ds) \cos \varphi + ds \Delta(\cos \varphi). \end{aligned}$$

Nun ist

$$\Delta(ds) = \frac{ds}{E} \left(\sigma_{r0} - \frac{\sigma_{t0}}{m} \right) \quad \dots \quad (13),$$

$$\Delta(\cos \varphi) = -\sin \varphi \Delta \varphi = -\sin \varphi \cdot \psi \quad \dots \quad (14),$$

demnach

$$\Delta(dx) = \frac{ds}{E} \left(\sigma_{r0} - \frac{\sigma_{t0}}{m} \right) \cos \varphi - ds \sin \varphi \cdot \psi$$

$$\Delta(dx) = \frac{dx}{E} \left(\sigma_{r0} - \frac{\sigma_{t0}}{m} \right) - dx \operatorname{tg} \varphi \cdot \psi \quad \dots \quad (15).$$

Die Änderung von (dx) ist das Ergebnis zweier Formänderungen, nämlich der Längenänderung und der Richtungsänderung des Meridian-Elementes ds . Durch Gleichsetzen der rechten Seiten der Gl. (12) und (15) erhalten wir

$$\frac{dx}{E} \left(\sigma_{r0} - \frac{\sigma_{t0}}{m} \right) + \frac{x}{E} \left(d\sigma_{r0} - \frac{d\sigma_{t0}}{m} \right) = \frac{dx}{E} \left(\sigma_{r0} - \frac{\sigma_{t0}}{m} \right) - dx \psi \operatorname{tg} \varphi.$$

Es werden beide Seiten dieser Gleichung mit $\frac{E}{x}$ multipliziert und die Klammern aufgelöst:

$$\frac{dx}{x} \sigma_{r0} - \frac{dx}{x} \frac{\sigma_{t0}}{m} + d\sigma_{r0} - \frac{d\sigma_{t0}}{m} = \frac{dx}{x} \sigma_{r0} - \frac{dx}{x} \frac{\sigma_{t0}}{m} - E \frac{dx}{x} \psi \operatorname{tg} \varphi.$$

Daraus finden wir

$$d\sigma_{t0} = (\sigma_{r0} - \sigma_{t0}) \left(1 + \frac{1}{m} \right) \frac{dx}{x} - E \operatorname{tg} \varphi \frac{dx}{x} \psi + \frac{d\sigma_{r0}}{m} \quad \text{II. Hauptgleichung.}$$

Diese Gleichung hat die Form:

$$d\sigma_{t0} = (\sigma_{r0} - \sigma_{t0}) (17) - \psi (27) + \frac{d\sigma_{r0}}{m} \quad \dots \quad (IIa).$$

Für die nur durch Fliehkräfte beanspruchte umlaufende Scheibe fand ich in meiner diesbezüglichen, eingangs erwähnten Arbeit die Ausdrücke (in die hier gewählte Bezeichnungsweise übersetzt):

$$d\sigma_{r0} = -\sigma_{r0} (\dots) + \sigma_{t0} (\dots) + (\dots),$$

$$d\sigma_{t0} = (\sigma_{r0} - \sigma_{t0}) \left(1 + \frac{1}{m} \right) \frac{dx}{x} + \frac{d\sigma_{r0}}{m}.$$

Der Aufbau der Formel für $d\sigma_{\theta}$ ist genau der gleiche wie derjenige der hier gefundenen Formel (I) für die Platte, nur daß natürlich für die (...) Ausdrücke andere Werte in Frage kommen. Zu der Gleichung für $d\sigma_{\theta}$ kommt laut Gl. (IIa) für die Platte gegenüber derjenigen für die umlaufende Scheibe nur noch der Summand $-\psi$ (27) hinzu. Es ist also möglich, beide Rechnungen miteinander zu vereinigen, wodurch das Mittel an die Hand gegeben wird, eine umlaufende Scheibe zu berechnen, die außer durch Fliehkräfte auch noch durch einen einseitig wirkenden, gleichmäßig verteilten Druck p belastet wird. Derartige Fälle kommen vor in Reaktions-, seltener auch in Aktionsdampfturbinen.

Unter der vorläufig noch unzutreffenden Annahme, man kenne von der Platte für den Halbmesser x die mittlere Tangentialspannung $\sigma_{\theta x}$, liefert Hauptgleichung (II) den Wert für die mittlere Tangentialspannung im Halbmesser $(x + dx)$, indem man die Gleichung aufstellt:

$$\sigma_{\theta}(x + dx) = \sigma_{\theta x} + d\sigma_{\theta} \Big|_x^{x+dx} \dots \dots \dots (16).$$

6) Berechnung von $\frac{d\psi}{dx}$ und ψ unter Benutzung der Momentengleichung.

Wir stellen zu diesem Zwecke für das in Fig. 3 axonometrisch dargestellte Körperelement $CDEFGHIK$ die Momentengleichung auf. Als Momentenachse greifen wir die Achse $o-o$ heraus, welche im Abstand $(x + dx)$ von der Symmetrieachse $z-z$ und senkrecht zu ihrer Richtung mitten durch die äußere Begrenzungsfläche $GHIK$ des Plattenelementes läuft. Bei Gleichgewicht muß die Summe der Momente aller äußeren Kräfte, bezogen auf die Achse $o-o$, gleich null sein.

An dem Plattenelement wirken folgende äußere Kräfte auf Verdrehung um die Achse $o-o$:

a) auf die der Symmetrieachse zugekehrte Begrenzungsfläche $CDEF$:

Die Normalspannungen, deren Wirkung ersetzt werden kann:

1) durch eine im Mittelpunkt der Fläche angreifende Einzelkraft $S = x \, d\alpha \, h \, \sigma_{r,0}$ wirkend am Hebelarm $ds \sin(d\varphi)$.

2) ein Moment » M_{τ} «, auf welches später einzugehen ist.

3) die Schubkraft $Sch = x \, d\alpha \, h \, \tau_m$ am Hebelarm $ds \cos(d\varphi)$.

b) Auf die beiden Seitenflächen $GCDH$ und $EFKI$ wirken Normalspannungen, deren Einfluß ersetzt werden kann:

1) durch die Normalkraft $T \propto dsh\sigma_{\theta}$.

Von ihr kommt als drehend um die Achse $o-o$ nur die Komponente $T' = T \sin \frac{d\alpha}{2} \propto T \frac{d\alpha}{2}$ in Betracht (vergl. Fig. 5). Die beiden anderen Komponenten $T'' = T \cos \frac{d\alpha}{2}$ verlaufen parallel zur Achse $o-o$ und ergeben daher kein Drehmoment (vergl. Fig. 5 und Fig. 3). Die beiden Komponenten T' wirken je am Hebelarm $\frac{ds}{2} \sin(\varphi + d\varphi) \propto \frac{ds}{2} \sin \varphi$ (siehe Fig. 4).

2) durch das Moment » M_{τ} « der Spannungen σ_t , auf welches wir später zurückkommen.

c) Normal zur unteren Begrenzungsfläche $HDEFI$ und in die Mitte derselben konzentriert gedacht, wirkt die Kraft $P = \left(x + \frac{dx}{2}\right) d\alpha \, ds \, p$ am Hebelarm $\frac{ds}{2}$.

Für $(\sigma_r - \sigma_{r0})$ wollen wir an Hand von Gl. (3) einsetzen

$$(\sigma_r - \sigma_{r0}) = c \eta \cos \varphi u,$$

wo

$$u \equiv \left[m \frac{d\psi}{dx} + \frac{\psi}{x} \right] \dots \dots \dots (19),$$

$$M_{\sigma_r} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} c \eta \cos \varphi u (x + \eta \sin \varphi) d\alpha d\eta \eta.$$

In diesem Integral ist nur η als Veränderliche, alle übrigen Größen sind als Konstante zu betrachten.

$$M_{\sigma_r} = d\alpha c \cos \varphi u \left[x \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \eta^2 d\eta + \sin \varphi \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \eta^3 d\eta \right]; \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \eta^2 d\eta = \frac{h^3}{12}; \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \eta^3 d\eta = 0.$$

$$M_{\sigma_r} = d\alpha c \cos \varphi u x \frac{h^3}{12}.$$

Setzen wir den Wert für u wieder ein aus Gl. (19), so erhalten wir:

$$M_{\sigma_r} = d\alpha c x \frac{h^3}{12} \cos \varphi \left[m \frac{d\psi}{dx} + \frac{\psi}{x} \right] \dots \dots \dots (20).$$

Wir werden später sehen, daß wir noch des Wertes dM_{σ_r} bedürfen, d. h. des Betrages, um den sich M_{σ_r} ändert, wenn wir von x um dx vorwärts gehen. Wir erhalten, indem wir die Gl. (20) nach x differenzieren:

$$dM_{\sigma_r} = d\alpha \frac{c}{12} \left\{ (mxh^3 \cos \varphi) \frac{d^2\psi}{dx^2} dx + d(mxh^3 \cos \varphi) \frac{d\psi}{dx} \right\} + h^3 \cos \varphi d\psi + d(h^3 \cos \varphi) \psi \quad (21).$$

Zu b 1) $\Sigma M_T = 2 T' \frac{ds}{2} \sin \varphi = 2 T \sin \frac{d\alpha}{2} \frac{ds}{2} \sin \varphi.$

Statt ΣM_T wollen wir einfach setzen M_T .

$$M_T = d\alpha (ds h) \sigma_{i0} \frac{ds}{2} \sin \varphi,$$

$$M_T = d\alpha \left(\frac{h}{2} \frac{dx^2}{\cos^2 \varphi} \sin \varphi \right) \sigma_{i0} \dots \dots \dots (22).$$

Zu b 2) Das Moment M_{σ_i} der Spannungen σ_i , oder was das Gleiche besagt, der Spannungsdifferenzen $(\sigma_i - \sigma_{i0})$, welches auf jede der beiden Seitenflächen $GHDC$ und $KIEF$ von Fig. 3 wirkt, ist gleich der Summe aller Produkte, die aus der Multiplikation nachstehender drei Faktoren entstehen: (vergl. Fig. 9).

1) dem Flächenelement df von der Höhe $d\eta$, welches im Abstand η von der Mittel-Meridianfaser zur Kante GC parallel verläuft.

2) von dem Unterschied der in diesem Flächenelement herrschenden Spannung σ_i gegenüber der Spannung σ_{i0} in der Mittelfaser die in die Richtung senk-

Fig. 9.

recht zur Symmetrieachse entfallende Komponente, also

$$(\sigma_t - \sigma_{t0}) \sin \frac{d\alpha}{2} \propto (\sigma_t - \sigma_{t0}) \frac{d\alpha}{2}.$$

3) dem Abstand η des Flächenelementes von der Mittelfaser, multipliziert mit $\cos \varphi$

$$M_{\sigma_t} = 2 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} df (\sigma_t - \sigma_{t0}) \frac{d\alpha}{2} \eta \cos \varphi.$$

Hierin ist nach Fig. 9

$$df = (ds + \eta d\varphi) d\eta.$$

Gl. (4) besagt:

$$(\sigma_t - \sigma_{t0}) = c \eta \cos \varphi \left[\frac{d\psi}{dx} + m \frac{\psi}{x} \right].$$

Setzen wir vorübergehend als Abkürzung

$$v = \left[\frac{d\psi}{dx} + m \frac{\psi}{x} \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23),$$

so ist

$$M_{\sigma_t} = 2 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (ds + \eta d\varphi) d\eta c \eta \cos^2 \varphi v \frac{d\alpha}{2} \eta.$$

Auch hier, wie bei der Ausrechnung von M_{σ_r} sind bei der Integration alle Größen außer η als Konstante zu betrachten.

$$M_{\sigma_t} = d\alpha c v \cos^2 \varphi \left[ds \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \eta^2 d\eta + d\varphi \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \eta^3 d\eta \right].$$

Durch analogen Rechnungsgang wie für M_{σ_r} finden wir:

$$M_{\sigma_t} = d\alpha c dx \frac{h^3}{12} \left[\frac{d\psi}{dx} + m \frac{\psi}{x} \right] \cos \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Zu c)

$$M_P = P \frac{ds}{2} = ds \left(x + \frac{dx}{2} \right) d\alpha p \frac{ds}{2}.$$

$$M_P = d\alpha \frac{p}{2} \left(x + \frac{dx}{2} \right) \frac{dx^2}{\cos^2 \varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

Nunmehr sind von diesen Momenten noch die Vorzeichen zu bestimmen. Sie erhalten bei der Summierung das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem sie verstärkend oder verschwächend auf die Plattenkrümmung in dem Querschnitt hinwirken, der die Drehachse $\circ - \circ$, Fig. 3, enthält. Es wirken auf diese Krümmung:

M_s verstärkend, also Vorzeichen +,

M_{sch} verschwächend, also Vorzeichen −,

M_{σ_r} verstärkend, wenn die Spannungsunterschiede $(\sigma_r - \sigma_{r0})$ über der Mitte des Querschnittes positiv sind, somit dann M_{σ_r} +,

M_T verstärkend, also +,

M_{σ_t} analog M_{σ_r} , also +,

M_P verschwächend, also −.

$$M_{(\sigma_r + d\sigma_r)} = M_{\sigma_r} + M_s - M_{sch} + M_T + M_{\sigma_t} - M_P,$$

Nun kann auch geschrieben werden:

$$M_{(\sigma_r + d\sigma_r)} = M_{\sigma_r} + dM_{\sigma_r},$$

und daraus ergibt sich

$$dM_{\sigma_r} = M_s - M_{sch} + M_T + M_{\sigma_t} - M_P \dots (26).$$

Hierin setzen wir die Werte ein aus den

$$\text{Gl. (21), (17), (18), (22), (24), (25).}$$

Alle diese Werte enthalten $d\alpha$, welchen Wert wir besonders vorangestellt haben, als Hinweis darauf, daß man damit kürzen kann. Es bleibt:

$$\begin{aligned} \frac{c}{12} \left[(mxh^3 \cos \varphi) \frac{d^2 \psi}{dx^2} dx + d(mxh^3 \cos \varphi) \frac{d\psi}{dx} + h^3 \cos \varphi d\psi + d(h^3 \cos \varphi) \psi \right] & \text{aus (21)} \\ = \left\{ \begin{aligned} & \sigma_{r0}(xh) \frac{dx^2}{\rho \cos^2 \varphi} \dots \dots \dots \text{aus (17)} \\ & - \frac{p}{2} (x^2 - x_i^2) \frac{dx}{\cos^2 \varphi} + \sigma_{r0}(xh) \sin \varphi \frac{dx}{\cos^2 \varphi} \dots \dots \text{aus (18)} \\ & + \sigma_{t0} \frac{h}{2} \frac{dx^2}{\cos^2 \varphi} \sin \varphi \dots \dots \dots \text{aus (22)} \\ & + c \frac{h^3}{12} d\psi \cos \varphi + c \frac{h^3}{12} dx m \frac{\psi}{x} \cos \varphi \dots \dots \text{aus (24)} \\ & - \frac{p}{2} \left(x + \frac{dx}{2} \right) \frac{dx^2}{\cos^2 \varphi} \dots \dots \dots \text{aus (25).} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Die Multiplikation dieser Gleichung mit $\frac{12}{c dx}$ gibt

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = \frac{1}{mxh^3 \cos \varphi} \left\{ \begin{aligned} & - \frac{d\psi}{dx} \frac{d(mxh^3 \cos \varphi)}{dx} \\ & + \psi \left[- \frac{d(h^3 \cos \varphi)}{dx} + \frac{mh^3}{x} \cos \varphi \right] \\ & + \sigma_{r0} \frac{12}{c} \frac{xh}{\cos^2 \varphi} \left[\frac{dx}{\rho} + \sin \varphi \right] \\ & + \sigma_{t0} \frac{12}{c} \frac{h}{2} \frac{dx}{\cos^2 \varphi} \sin \varphi \\ & - \frac{p}{2} \frac{12}{c} \frac{1}{\cos^2 \varphi} \left[x^2 - x_i^2 + \left(x + \frac{dx}{2} \right) dx \right] \end{aligned} \right\} \quad \text{III. Hauptgleichung}$$

Diese Hauptgleichung hat die schematische Form:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = \frac{1}{(40)} \left\{ (32) \sigma_{r0} + (36) \sigma_{t0} - (42) \frac{d\psi}{dx} + (49) \psi - (51) \right\} \dots (IIIa),$$

wo die in den runden Klammern () stehenden Ziffern Faktoren bedeuten, welche lediglich abhängig sind von der Form und der äußeren Belastung p der Platte, nicht aber z. B. von der Randbedingung, d. h. davon, ob die Platte am Rand eingespannt sei oder frei aufliege. Ob die Platte in der Mitte eine Bohrung hat oder nicht, kommt lediglich im Summand (51) zum Ausdruck, indem dort der Summand x_i^2 einen von null verschiedenen Wert erhält oder nicht. Da ferner die Platte nicht eben zu sein braucht, sondern in jedem Punkt der Meridianmittelfaser eine andere Krümmung mit dem veränderlichen Halbmesser ρ und außerdem eine von Punkt zu Punkt etwas veränderliche Dicke h haben kann, so ist dieses Rechnungsverfahren anwendbar auf gewölbte wie ebene ($\rho = \infty$, $\varphi = 0$) Platten, volle und in der Mitte gelochte, am Außenrand frei aufliegende oder eingespannte Platten von veränderlicher Dicke.

Nach Ausrechnung der Gl. (III) erhalten wir:

$$\left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x+dx} = \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_x + \frac{d^2\psi}{dx^2} dx \quad (27)$$

$$\psi_{x+dx} = \psi_x + \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_x dx \quad (28).$$

Hierbei erinnern wir uns stets, daß wir bei der Ausrechnung statt des unendlich kleinen Differentials eine zwar kleine, aber endliche Differenz $dx = x_2 - x_1$ einzusetzen haben.

Gang der Rechnung.

Für irgend einen Halbmesser x_2 der Meridian-Mittelfaser können mit Hilfe der drei Hauptgleichungen (I), (II) und (III) und der Nebengleichungen (11), (16) und (27), (28) die Werte σ_{r0} , $\sigma_{\theta 0}$ und ψ berechnet werden, wenn die korrespondierenden Werte für den um das endliche, aber kleine Stück (dx) verschiedenen Halbmesser x_1 bekannt sind.

Um die Werte der Normalspannungen und der Winkeländerungen für alle Punkte der Mittelfaser zu erhalten, nehmen wir für irgend einen Punkt dieser Faser Werte an und rechnen für alle aufeinanderfolgenden Werte von (dx) nach den Gl. (I), (II), (III) die Änderungen der Normalspannungen und der Winkeländerung und sodann die Spannungen und Winkeländerung selbst aus. Am besten beginnt man innen an der Platte.

Stimmt nach der erstmaligen Durchrechnung das Endergebnis nicht mit den Randbedingungen, so ist die Rechnung von innen bis außen zu wiederholen. Während man aber bei der oben erwähnten Berechnung der umlaufenden Scheibe beim Beginn einer Durchrechnung nur mit einer Unbekannten (σ_i) zu variieren brauchte, sind es hier deren zwei, wie wir noch sehen werden.

Regeln für den Beginn der Ausrechnung.

1. Fall: Die Platte hat in der Mitte keine Bohrung. $x_i = 0$.

Für irgend einen auf der Symmetrieachse im Abstand η von der Mittelfaser entfernten Punkt ist

$$\sigma_{r\eta i} = \sigma_{\theta i}.$$

Für den Schnittpunkt der Symmetrieachse mit der Mittelfaser des Meridianquerschnittes ist im besonderen

$$(\text{für } x = 0) \quad \sigma_{r0i} = \sigma_{\theta i}.$$

Es sei aber ganz besonders erwähnt, daß wegen der Durchbiegung der Platte

$$\sigma_{r0i} \neq \sigma_{r\eta i}.$$

In einer besonderen Zahlentafel, wir wollen sie »Haupttafel« nennen, stellen wir alle in den für die ganze Durchrechnung erforderlichen Gleichungen vorkommenden Faktoren zusammen, welche abhängen von der Form und der vorgeschriebenen Belastung der Platte, nicht aber von den für die einzelnen Durchrechnungen zu machenden Annahmen. In welcher Weise dies geschieht, werden wir später an Hand eines Zahlenbeispiels zeigen. Wir wollen also voraussetzen, daß wir die in den Hauptgleichungen (Ia), (IIa) und (IIIa) durch die in () stehenden Ziffern dargestellten festen Faktoren von vornherein festgelegt haben.

Nun wählen wir einen ersten Wert für $\sigma_{r0i} = \sigma_{t0i}$; es sei dies $\sigma'_{r0i} = \sigma'_{t0i}$ und erhalten für ein erstes Intervall von der Größe dx nach Gl. (Ia) den Wert $d\sigma_r$ und sodann nach Gl. (11)

$$\sigma_{r0} \text{ für } x = 0 + dx.$$

Um mit der ersten Wahl $\sigma'_{r0i} = \sigma'_{t0i}$ nicht gar zu weit neben das Ziel zu schießen, machen wir folgende Ueberlegung: Der in Fig. 1 dargestellte Meridianschnitt (Plattenquerschnitt) erleidet eine mittlere Tangentialspannung σ_t^* , die man erhält, indem man die Projektion der Plattenkuppe auf die Meridianebene, d. i. die Fläche $A_1 J A_2 J_1 A_1$ mit der spezifischen äußeren Belastung p multipliziert und dieses Produkt durch den Flächeninhalt des von A_1 über J bis A_2 gemessenen Plattenquerschnittes $= \Sigma(ds h)$ dividiert.

$$\sigma_t^* = \frac{(\text{Fläche } A_1 J A_2 J_1 A_1) p}{\Sigma(ds h)}$$

$$\sigma'_{t0i} \text{ ist zu wählen} = k \sigma_t^*,$$

wo k in der Regel größer als 1.

Für die Anwendung der Hauptgleichung (IIa) kennen wir für das erste Intervall bereits $d\sigma_{r0}$. Die übrigen Summanden in Gl. (IIa) sind für dieses erste Intervall $= 0$, weil

$$\text{für } x = 0 \quad (\sigma_{r0} - \sigma_{t0}) = 0$$

$$» \quad x = 0 \quad , \quad \psi = 0.$$

$$\text{Es ist also} \quad » \quad x = 0 \quad d\sigma_{t0} = \frac{d\sigma_{r0}}{m}.$$

Hiernach wird Gl. (16) angewendet.

Um nun mittels der Hauptgleichung (IIIa) für das erste Intervall dx den Ausdruck $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ berechnen zu können, ist vorerst eine zweite Schätzung erforderlich, und zwar für $\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{x=0}$, nachdem wir ja vorher bereits σ'_{t0i} abschätzen mußten. Es fällt aber insbesondere dem in derartigen Rechnungen noch Ungeübten schwer, solche Winkelfunktionen auch nur einigermaßen annähernd abzuschätzen. Man hat eher Gefühl für die Wahl spezifischer Spannungen. Es empfiehlt sich daher, für $x=0$ nicht $\frac{d\psi}{dx}$, sondern den äquivalenten Wert $\sigma_{t\frac{h}{2}}$,

d. h. die Spannung in der Begrenzungsfaser, also im Abstand $\eta = \frac{h}{2}$ von der Mittelfaser abzuschätzen. Sie ist natürlich im allgemeinen von σ_{t0i} verschieden.

Nun ist nach Gl. (4):

$$\sigma_t = \sigma_{t0} + c \eta \cos \varphi \left[\frac{d\psi}{dx} + m \frac{\psi}{x} \right]$$

$$\text{für } x = 0 \text{ ist } \cos \varphi = 1; \text{ für } \eta = \frac{h}{2} \text{ ist } \sigma_t = \sigma_{t\frac{h}{2}}.$$

$$» \quad x = 0 \quad » \quad \psi = 0.$$

Damit ist aber noch nichts gesagt über das Verhältnis $\frac{\psi}{x} = \frac{0}{0}$. Wir finden jedoch für diesen Quotienten einen Anhalt, wenn wir bedenken, daß

$$\text{für } x = dx \dots \psi = d\psi;$$

$$» \quad x = dx \dots \frac{\psi}{x} = \frac{d\psi}{dx}.$$

Von $x = dx$ bis zurück auf $x = 0$ ändert sich der Ausdruck $\frac{\psi}{x}$ unendlich wenig, so daß wir auch für $x = 0$ setzen dürfen $\frac{\psi}{x} = \frac{d\psi}{dx}$.

Es ist also für $x = 0$ und $\eta = \frac{h}{2}$

$$\sigma_{\frac{h}{2}} = \sigma_{10} + c \frac{h}{2} \left[\frac{d\psi}{dx} + m \frac{d\psi}{dx} \right],$$

für $x = 0$:

$$\left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x=0} = \frac{\sigma_{\frac{h}{2}} - \sigma_{10}}{c \frac{h}{2} (1 + m)} \dots \dots \dots (29).$$

Sind also für σ_{10} und $\sigma_{\frac{h}{2}}$ die ersten Schätzungen getroffen, so kann danach für das erste Intervall dx das $\frac{d\psi}{dx}$ berechnet werden, und damit sind auch für die letzte der drei Hauptgleichungen, d. i. für (IIIa) alle Unterlagen geschaffen.

2. Fall: Die Platte hat in der Mitte eine kreisrunde Bohrung vom Halbmesser x_i .

Eine einfache Ueberlegung zeigt, daß für

$$\begin{aligned} x = x_i \quad \sigma_{r0i} &= 0 \\ \sigma_{r\eta i} &= 0, \\ \sigma_{\frac{h}{2} i} &= 0. \end{aligned}$$

also auch

Für das zugehörige σ_{10i} muß ein erster Wert abgeschätzt werden; hierfür sind die gleichen Erwägungen und Hilfsmittel zu empfehlen, wie im Fall 1. Nur ist hier für σ_{10i} gegenüber dem Mittelwert σ_{10}^* in der Regel noch ein weit größerer Zuschlag zu machen, insbesondere dann, wenn dem Einfluß der Bohrung nicht durch eine kräftige Versteifung des inneren Scheibenrandes in Form einer Nabe begegnet wird, wie dies in Fig. 10 schematisch dargestellt ist. Unter Berücksichtigung des eingangs dieses Abschnittes Gesagten geht

Fig. 10.

Gl. (3) für den besonderen Fall, daß $x = x_i$ und $\eta = \frac{h}{2}$, über in die Form

$$0 = 0 + c \frac{h}{2} \cos \varphi \left[m \frac{d\psi}{dx} + \frac{\psi}{x} \right],$$

demnach muß für $x = x_i$

$$\frac{d\psi}{dx} = - \frac{1}{m} \frac{\psi}{x_i} \dots \dots \dots (30)$$

sein. Diese Beziehung, eingesetzt in Gl. (4), gibt für $x = x_i$ und $\eta = \frac{h}{2}$

$$\begin{aligned} \sigma_{\frac{h}{2} i} &= \sigma_{10i} + c \frac{h}{2} \cos \varphi \left[- \frac{1}{m} \frac{\psi}{x_i} + m \frac{\psi}{x_i} \right] \\ &= \sigma_{10i} + c \frac{h}{2} \cos \varphi \left[\frac{m^2 - 1}{m} \frac{\psi}{x_i} \right], \end{aligned}$$

für $x = x_i$

$$\psi_i = \left[\sigma_{\frac{h}{2} i} - \sigma_{10i} \right] \left(\frac{m x_i}{m^2 - 1} \right) \frac{1}{c \frac{h}{2} \cos \varphi}.$$

Sobald wir also für $x = x_i$ außer dem für den Punkt J_0 in Fig. 10 gültigen Wert σ_{0i} noch den Wert $\sigma_{i \frac{h_i}{2}}$ für J_h abschätzen, liefert die letzte Gleichung den zugehörigen Wert für die Winkeländerung $\psi_i = \Delta \varphi_i$.

Berücksichtigt man überdies, daß wir früher setzten $c = \frac{mE}{m^2 - 1}$, so geht diese letzte Gleichung über in die etwas einfachere Form

$$\psi_i = \left[\sigma_{i \frac{h_i}{2}} - \sigma_{0i} \right] \frac{x_i}{E} \frac{1}{\frac{h}{2} \cos \varphi_i} \dots \dots \dots (31).$$

Damit sind alle Unterlagen geschaffen für Anwendung der Hauptgleichungen (I), (II), (III) oder (Ia), (IIa) und (IIIa).

Wir können nunmehr die Radial- und Tangentialspannungen und die Winkeländerung in allen Punkten des Plattenquerschnittes vom inneren Rand bis zur Auflage und der Einspannstelle am äußeren Rand berechnen.

Randbedingungen.

In Anlehnung an die Radscheibenberechnung wollen wir hierunter die Bedingungen verstehen, unter welchen die Platte am äußeren Rand unterstützt ist, und besonders die beiden Fälle herausgreifen, in denen die Platte am Außenrand frei aufliegt oder fest eingespannt ist. Um Verwechslungen vorzubeugen, möge mit der Numerierung der »Fälle« einfach weiter gefahren werden.

3. Fall: Die Platte liegt am äußeren Rand frei auf, Fig. 11.

Die Mittelfaser des Meridianschnittes endige im Halbmesser x_a . Wir betrachten die Auflagefläche der Platte als Mantel eines Kegelstumpfes, dessen Er-

Fig. 11.

zeugende die Länge h_a haben. Sie erleidet in Richtung der Symmetrieachse $z-z$ einen Gesamtschub von der Größe

$$\Sigma P_a' = (x_a^2 - x_i^2) \pi p.$$

Diese Kraft erzeugt im Auflagepunkt des Plattenrandes, Fig. 11, in Richtung der Meridian-Mittelfaser eine mittlere Radialspannung σ_{r0a} . Zu deren Berechnung führt folgender Weg: Wir denken uns in der Mitte des äußeren Begrenzungskegelmantels ringsum eine Kerbe eingedreht, deren eine Fläche eben und zur Symmetrieachse senkrecht gerichtet ist. Mit dieser Ebene liegt die Platte auf einem im Raum starren Ring R auf. Der Ring R kann nur Kräfte parallel zur Symmetrieachse, nicht aber senkrecht dazu gerichtete Kräfte und auch kein Moment auf die Platte übertragen. Die für 1 cm des Umfanges vom Wider-

lagerring R auf die Platte übertragene Kraft kann zerlegt werden in zwei Komponenten:

- 1) in die Normalkraft $= \sigma_{r0a} h_a I$.
- 2) in die Schubkraft $= \tau_{\text{mittel}} h_a I$.

Weil der Ring R keine Kraftkomponente in Richtung senkrecht zur Symmetrieachse ausüben kann, so muß die Summe der in die Richtung des Halbmessers x entfallenden Komponenten der unter 1) und 2) genannten Kräfte gleich null sein.

Wir finden hierfür an Hand der Fig. 11 folgende Gleichung:

$$(\tau_{\text{mittel}} h_a I) \sin \varphi_a - (\sigma_{r0a} h_a I) \cos \varphi_a = 0,$$

demnach

$$\tau_{\text{mittel}} = \sigma_{r0a} \frac{\cos \varphi_a}{\sin \varphi_a}.$$

Der ganze Ring R übt auf die Platte eine Widerlagerkraft aus:

$$[(\tau_{\text{mittel}} h_a I) \cos \varphi_a + (\sigma_{r0a} h_a I) \sin \varphi_a] 2 \pi x_a.$$

Sie ist gleich der Kraft, welche der äußere Ueberdruck p in Richtung der Symmetrieachse auf die Platte ausübt.

Wir finden also:

$$[\tau_{\text{mittel}} h_a \cos \varphi_a + \sigma_{r0a} h_a \sin \varphi_a] 2 \pi x_a = (x_a^2 - x_i^2) \pi p. \quad (32).$$

Aus der vorhergehenden Gleichung substituieren wir den Wert für τ_{mittel} und erhalten:

$$2 \pi x_a h_a \left(\sigma_{r0a} \frac{\cos^2 \varphi_a}{\sin \varphi_a} + \sin \varphi_a \right) = (x_a^2 - x_i^2) \pi p.$$

$$\sigma_{r0a} = \frac{x_a^2 - x_i^2}{x_a} \frac{p}{2 h_a} \sin \varphi_a. \quad (32a).$$

Ist am Außenrand der Platte die Meridian-Mittelfaser normal zur Symmetrieachse $z-z$ gerichtet, also $\varphi_a = 0$, so ist laut Gl. (32a) auch $\sigma_{r0a} = 0$.

Als zweite Randbedingung gilt für den Fall 3), wo die Platte am Rand frei aufliegt, die Bedingung, daß im äußersten Querschnitt keine Biegungsspannungen herrschen dürfen, daß also dort das Moment der inneren Spannungen

$$M_{\sigma_{ra}} = 0$$

sein muß. Dies ist der Fall, wenn in Gl. (20) für

$$x = x_a \dots \left[m \frac{d\psi}{dx} + \frac{\psi}{x} \right] = 0 \quad (33),$$

wenn also für

$$x = x_a \dots m \frac{d\psi}{dx} = -\frac{\psi}{x} \quad (33a).$$

Es müssen nun für $x = x_i$ die Werte σ_{0i} und $\sigma_{\frac{h_i}{2}}$ solange geändert, und für jedes Wertepaar muß die ganze Intervallrechnung durchgeführt werden, bis die in den Gl. (32a) und (33) ausgedrückten Randbedingungen mit hinreichender Annäherung in Erfüllung gehen.

Am besten geht man dann so vor, daß man in einem Dreikoordinatensystem, z. B. in Richtung der x -Achse die für die verschiedenen Durchrechnungen angenommenen Werte c_{0i} , in Richtung der y -Achse die Werte $\sigma_{\frac{h_i}{2}}$, aufträgt und sodann senkrecht über dem durch zwei zusammengehörige Werte fixierten Punkt der $(x-y)$ -Ebene einmal den Wert σ'_{0a} und den Klammeraus-

druck $\left[m \frac{d\psi}{dx} + \frac{\psi}{x} \right]$ in passendem Maßstab bildlich darstellt. Weicht $\sigma_{r'0a}$ ab vom Wert σ_{r0a} , der durch Gl. (32a) festgelegt ist, und wird der Klammerausdruck $[\]$ nach Gl. (33) für x_a nicht gleich null, so sind für $\sigma_{\theta i}$ und $\sigma_{\frac{h}{2}i}$ neue Annahmen zu treffen. Das graphische Bild im Dreikoordinatensystem zeigt den Weg zu einer zweckmäßigen Interpolation.

4. Fall: Die Platte ist außen eingespannt. Hierzu Fig. 12.

Der allgemeinere Fall wäre nun der, daß man annimmt, die die Platte haltende Wandung sei für sich auch drehbar. Das würde aber zu einer endlosen Rechnung führen. Wir wollen uns daher auf den etwas engeren Fall beschränken, der Querschnitt der zylindrischen Außenwandung sei nicht nach innen oder außen drehbar, sondern ändere unter dem Einfluß der Platte einerseits und des Ueberdruckes p andererseits lediglich seinen Durchmesser, und zwar ist die Aenderung dieses Durchmessers gleich der Aenderung des Außenradius (2 x_a) der Platte.

Fig. 12.

Daß die Platte an der Uebergangsstelle zum zylindrischen Mantel nicht drehbar eingespannt sei, läßt sich durch die Bedingungsgleichung ausdrücken

$$\text{für } x = x_a \dots \psi_a = 0 \dots \dots \dots (34).$$

Zwischen der im Stützring sich bildenden mittleren Tangentialspannung σ_{mittel} und den an der Uebergangsstelle von der Platte zum Ring herrschenden mittleren Normal- und Schubspannungen, d. i. σ_{r0a} bzw. τ_{mittel} , lassen sich folgende Beziehungen aufstellen:

Der Ring habe einen Querschnitt F , dann ist

$$\begin{aligned} 2 \sigma_{\text{mittel}} F &= 2 x_a h_a (\sigma_{r0a} \cos \varphi_a - \tau_{\text{mittel}} \sin \varphi_a). \\ \sigma_{\text{mittel}} &= \frac{x_a h_a}{F} (\sigma_{r0a} \cos \varphi_a - \tau_{\text{mittel}} \sin \varphi_a) \dots \dots \dots (35). \end{aligned}$$

Der Zusammenhang zwischen σ_{r0a} und τ_{mittel} am Plattenrand geht aus Gl. (32) hervor.

Unter dem Einfluß der Tangentialspannung σ_{mittel} dehnt sich der mittlere Halbmesser des inneren Begrenzungskegels vom Stützring, d. i. x_a , um die Strecke

$$\Delta x_a' = x_a \frac{\sigma_{\text{mittel}}}{E}.$$

Der Außenhalbmesser x_a der Platte erfährt eine Dehnung

$$\Delta x_a'' = \frac{x_a}{E} \left(\sigma_{i0a} - \frac{\sigma_{r0a}}{m} \right).$$

Unter der Bedingung, daß die Platte sich vom Ring nicht lösen und ihm gegenüber nicht verschieben darf, muß sein

$$\Delta x_a' = \Delta x_a'',$$

also

$$\begin{aligned} \text{für den Ring:} \quad & \text{für die Platte:} \\ \sigma_{\text{mittel}} &= \left(\sigma_{i0a} - \frac{\sigma_{r0a}}{m} \right) \dots \dots \dots (36). \end{aligned}$$

Die aus den Gl. (35) und (36) berechneten Werte für σ_{mittel} des Ringes müssen miteinander übereinstimmen. Bis dies der Fall und die Bedingungsgleichung (34) erfüllt ist, muß mit dem Wertepaar σ_{t0i} und $\sigma_{t\frac{h}{2}i}$ variiert werden.

5. Fall: Die Platte ist am Rande so befestigt, daß ihr Außendurchmesser sich nicht ändern kann.

Dies drückt sich aus durch die Bedingung: $\Delta x_a = 0$; dann ist auch $\frac{\Delta x_a}{x_a} = 0$ und weil $\frac{\Delta x_a}{x_a} = \varepsilon_{t0a}$, so muß auch $\varepsilon_{t0a} = 0$ sein.

Nun ist laut Elastizitätslehre¹⁾:

$$\varepsilon_{t0a} = \frac{1}{E} \left(\sigma_{t0a} - \frac{\sigma_{r0a}}{m} \right).$$

ε_{t0a} kann nur $= 0$ werden, wenn

$$\sigma_{t0a} = \frac{\sigma_{r0a}}{m} \quad \dots \quad (36a).$$

Diese Begingungsgleichung dafür, daß der Außendurchmesser x_a unverändert bleibe, hat ihre Gültigkeit ganz unabhängig davon, ob die Platte am Rand so gestützt ist, daß ihr äußerster Querschnitt sich noch drehen kann (ψ_a nicht $= 0$) oder zugleich so eingespannt ist, daß dies nicht möglich ($\psi_a = 0$), wie dies als »4. Fall« behandelt wurde.

* * *

Um zu diesen vorläufigen Schlußergebnissen zu gelangen, haben wir uns bisher nur der Hauptgleichungen (Ia), (IIa) und (IIIa) bedient und uns also stillschweigend nur um die Normalspannungen in der Mittelfaser gekümmert.

Ist erst ein Wertepaar σ_{t0i} und $\sigma_{t\frac{h}{2}i}$ so gefunden, daß die sich hierauf stützende Durchrechnung der Gl. (I) bis (III) von Intervall zu Intervall die Randbedingungen erfüllt, so können mit Hülfe der Gl. (3) und (4) für jeden im Abstand η von der Meridianmittelfaser liegenden Punkt die Radialspannung σ_r und die Tangentialspannung σ_t berechnet werden. Man wird sich jedoch darauf beschränken, dies für die auf der äußeren und inneren Plattenoberfläche gelegenen Punkte zu tun, deren Abstand von der Mittelfaser

$$\eta = \pm \frac{h}{2} \text{ ist.}$$

Zwischenliegende Werte ändern sich in einem linearen Verhältnis mit dem Abstand η .

Trägt man in einem axonometrischen Bild den Meridianschnitt durch die Platte und senkrecht dazu einmal die Radial-, sodann die Tangentialspannung auf, so erhält man ein äußerst anschauliches Bild von dem Verlauf der spezifischen Beanspruchungen über den ganzen Plattenquerschnitt. Dieses Bild wird zeigen, wo in der Platte schwache Stellen sind, wo sie verstärkt werden sollte, wo andererseits an Material gespart werden dürfte, um die Platte einem Körper gleicher Festigkeit bestmöglich anzupassen.

Natürlich kann jeder der soeben behandelten Fälle 1) und 2) mit jedem der Fälle 3) bis 5) vereinigt werden, so daß also unser Verfahren die Berechnung von Platten zuläßt, die in der Mitte voll oder durchbrochen und am Rand frei aufliegend oder eingespannt und so gestützt sind, daß sich ihr Außendurchmesser (x_a) ändern kann oder nicht.

¹⁾ s. Föppl 1909 Band III S. 246.

Durchbiegung der gewölbten Platte.

Haben wir im Vorstehenden für jeden Punkt des Plattenquerschnittes die Radial-, die Tangentialspannung und die Winkeländerung berechnet, so sind wir damit in der Lage, die Durchbiegung ermitteln zu können. Es genügt, wenn wir hierbei nur die Mittelfaser in Betracht ziehen, welche der Radialspannung σ_{r0} und der Tangentialspannung σ_{t0} ausgesetzt ist.

Wir schlagen denselben Weg ein, den v. Bach für die Ermittlung der Durchbiegung eines gekrümmten Balkens gezeigt hat¹⁾.

In Fig. 13 sei durch den Linienzug $J-A$ lediglich die Mittelfaser einer gewölbten Platte dargestellt. Aus ihr greifen wir ein beim Punkt P gelegenes Element von der Länge ds heraus.

Wir berechnen vorerst die Verschiebung des zweiten Endpunktes C dieses Elementes gegenüber dem Punkt P . Während der Belastung der Platte durch die äußere spezifische Spannung p gelangt das Faserelement aus der Lage $P-C$ vom unbelasteten Zustand in die Lage $P'-C''$ des endgültig belasteten Zustandes. Diese Veränderung kann als in zwei Phasen ausgeführt gedacht werden:

Fig. 13.

1) Verschiebt sich das Element aus der Lage $P-C$ zu sich selbst parallel und dehnt sich unter dem Einfluß der Längsspannung σ_{r0} und der Querspannung σ_{t0} um den Betrag

$$\Delta(ds) = \frac{ds}{E} \left(\sigma_{r0} - \frac{\sigma_{t0}}{m} \right).$$

Hierbei gelangt es in die Lage $P'-C'$.

2) Dreht es sich aus dieser Lage um den Winkel ψ in die Lage $P'-C''$. Wie wir schon bei Berechnung der Spannung σ_{t0} sahen, ändert sich hierbei die x -Koordinate des Punktes C gegenüber dem Punkt P um den Betrag

$$\begin{aligned} \Delta(dx) &= \Delta(ds) \cos \varphi - C'C'' \sin \varphi \\ &= \frac{ds}{E} \left(\sigma_{r0} - \frac{\sigma_{t0}}{m} \right) \cos \varphi - ds \psi \sin \varphi \\ \Delta(dx) &= \frac{dx}{E} \left(\sigma_{r0} - \frac{\sigma_{t0}}{m} \right) - dy \psi \quad \dots \quad (37). \end{aligned}$$

Die y -Koordinate des Punktes C ändert sich gegenüber dem Punkt P um den Betrag

$$\begin{aligned} \Delta(dy) &= \Delta(ds) \sin \varphi + C'C'' \cos \varphi \\ &= \frac{ds}{E} \left(\sigma_{r0} - \frac{\sigma_{t0}}{m} \right) \sin \varphi + ds \psi \cos \varphi \\ \Delta(dy) &= \frac{dy}{E} \left(\sigma_{r0} - \frac{\sigma_{t0}}{m} \right) + dx \psi \quad \dots \quad (38). \end{aligned}$$

(Hierbei setzen wir als Regel, die y -Koordinate in Fig. 13 von der Höhe des Punktes J aus von oben nach unten positiv zu zählen.)

Der Punkt C ändert während der allmählich vor sich gehenden Durchbiegung der Platte seine Koordinaten gegenüber dem Punkt J um die Werte

$$\Delta x'_J = \sum_J \Delta(dx) \quad \dots \quad (39)$$

$$\Delta y'_J = \sum_J \Delta(dy) \quad \dots \quad (40).$$

Gemäß unserer bisher geübten Rechnungsweise setzen wir statt der unendlich kleinen Differentiale dx und dy die endlich kleinen Intervalle dx und dy ein.

¹⁾ s. Bach »Elastizitäts- und Festigkeitslehre« 1902 S. 485.

Will man die Aenderung der x -Ordinate des Punktes C in bezug auf die Symmetrieachse $z-z$, Fig. 13, berechnen, so ist zu berücksichtigen, daß die Ordinate des Punktes J sich bereits ändert um den Betrag

$$\Delta x_J = \frac{x_J}{E} \left(\sigma_{t0} - \frac{\sigma_{r0}}{m} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41).$$

Dieser Wert ist zu dem in Gl. (39) aufgestellten Wert zu addieren, um die Gesamtzunahme der x -Ordinate des Punktes C gegenüber der Symmetrieachse zu erhalten.

Wir finden also für diesen Punkt

$$\Delta x_C = \begin{cases} \Sigma_J^C \left[\frac{dx}{E} \left(\sigma_{r0} - \frac{\sigma_{t0}}{m} \right) \right] \\ - \Sigma_J^C [\psi dy] \\ + \frac{x_J}{E} \left(\sigma_{t0} - \frac{\sigma_{r0}}{m} \right)_{x=x_J} \end{cases} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42).$$

Hat die Platte in der Mitte kein Loch, so fällt der letzte Summand natürlich weg, weil dann $x_J = 0$.

$$\Delta y_C = \Sigma_J^C \left[\frac{dy}{E} \left(\sigma_{t0} - \frac{\sigma_{r0}}{m} \right) \right] + \Sigma_J^C (\psi dx) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43).$$

Man schafft sich ein anschauliches Bild von der Formänderung der Platte, wenn man die Koordinatenänderung eines jeden Punktes der Meridian-Mittelfaser in viel größerem, und zwar dem 20- bis 100fachen Maßstab aufzeichnet gegenüber den Koordinaten selbst.

Zahlenbeispiele.

Das entwickelte Rechnungsverfahren soll nun angewendet werden auf einige Zahlenbeispiele:

Wir wählen als erstes Beispiel den in Fig. 14 dargestellten gewölbten gußeisernen Deckel, wie ein solcher in den Werkstätten von Escher, Wyß & Cie.

Fig. 14. I. 1:20.

in Zürich dazu verwendet wird, die Gehäuse von Dampfturbinen probehalber abzapressen. Es ist dies also ein Hilfsboden, der nicht zur Lieferung der Turbine gehört.

Der Boden ist gemäß Fig. 14 in der Mitte voll, hat eine gleichmäßige Wölbung mit einem Krümmungshalbmesser $r = 143$ cm und soll laut Werkstattzeichnung eine stets gleiche Dicke von $h = 6$ cm haben.

Wir haben diese gewölbte Platte als Beispiel gewählt, weil sie als Teil einer Hohlkugel vom Halbmesser $\varrho = 143$ cm und von stets gleicher Dicke einen wertvollen Vergleich mit der vollständigen Hohlkugel für den Fall gleicher spezifischer Belastung zuläßt.

Die nachstehende Rechnung wurde durchgeführt für einen auf der konvexen Seite wirkenden Ueberdruck von 20 at

$$p = (-20) \text{ kg/qcm.}$$

Dieser Druck wurde für die Rechnung so hoch gewählt, um sie zuverlässiger zu gestalten. Für kleinere Ueberdrücke ändern sich die Ergebnisse proportional.

Vergleich mit der Hohlkugel.

Bei (-20) at Ueberdruck würde die vollständige Hohlkugel vom mittleren Halbmesser $\varrho = 143$ cm, der Dicke $h = 6$ cm eine mittlere Druckspannung σ_k erfahren, die sich nach der Formel berechnen läßt:

$$\sigma_k = (R^2 \pi p) : (2 R \pi h) = \frac{Rp}{2h},$$

$$\sigma_k = \frac{143 \cdot (-20)}{2 \cdot 6} = -239 \text{ kg/qcm} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44).$$

Unter dieser spezifischen Belastung würde sich der Halbmesser verändern um den Betrag

$$\Delta R = \frac{R}{E} \left(\sigma_{tk} - \frac{\sigma_{rk}}{m} \right).$$

Hierin ist $R = 143$ cm; E für Gußeisen $= 900000$ kg/qcm; m für dieses Material rd. 5^1); $\sigma_{tk} = \sigma_{rk} = \sigma_k = -239$ kg/qcm.

$$\Delta R = \frac{143}{900000} (1 - 1/5) (-239) = -0,0305 \text{ cm,}$$

$$\Delta R = -0,305 \text{ mm} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45).$$

Wie bereits bemerkt, ist es nun höchst lehrreich, festzustellen, wie sich die Hohlkugelkalotte in ihrer Beanspruchung und Formänderung der vollständigen Hohlkugel gegenüber verhält.

Untersuchung der Platte nach Fig. 14 für $p = (-20) \text{ kg/qcm.}$

Diese Platte von der Form einer Hohlkugelkalotte hat einen äußeren Halbmesser

$$x_a = 90 \text{ cm.}$$

Weil sie in der Mitte nicht durchbrochen, so ist

$$x_i = 0.$$

Der Boden liegt bei der Verwendung auf einer im Turbinengehäuse vor gesehenen Randfläche auf, welche einer Ebene angehört, die zur Turbinenachse also zur Symmetrieachse der Platte senkrecht steht. Diese Auflage vermag demnach auf die Platte nur Reaktionskräfte in Richtung parallel zur Symmetrieachse zu übertragen.

Der Meridianquerschnitt erfährt laut dem auf S. 47 Gesagten eine mittlere Tangentialspannung

$$\sigma_t^* = \frac{\text{seitliche Projektion des Bodens auf die Bildfläche} \times \text{Ueberdruck}}{\text{Meridianquerschnitt}}.$$

Die seitliche Projektion des Bodens auf die Bildfläche berechnet sich wie folgt: (vergl. Fig. 1)

¹⁾ siehe Föppl Bd. III S. 43 Zeile 5 von unten.

$$\text{Fläche } A_1 J A_2 J_1 A_1 = F = \frac{\varrho^2}{2} \left(2 \frac{\varphi_a^0 \pi}{180^\circ} - \sin(2 \varphi_a^0) \right),$$

$$\sin \varphi_a^0 = \frac{x_a}{\varrho} = \frac{90}{143} = 0,63,$$

$$\varphi_a^0 = 39^\circ; \quad \widehat{\varphi}_a = 0,681,$$

$$\sin(2 \varphi_a^0) = \sin 78^\circ = 0,978,$$

$$2 \frac{\varphi_a^0 \pi}{180^\circ} = 2 \widehat{\varphi}_a = 1,362.$$

$$F = \frac{143^2}{2} (1,362 - 0,978) = 3920 \text{ qcm.}$$

$$\text{Meridianquerschnitt } f = 2 \widehat{\varphi}_a \varrho h,$$

$$f = 2 \cdot 0,681 \cdot 143 \cdot 6 = 1170 \text{ qcm.}$$

$$\sigma_i^* = \frac{F p}{f} = \frac{3920 (-20)}{1170} = (-67) \text{ kg/qcm} \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

statt $\sigma_k = (-239) \text{ kg/qcm}$, wie wir in Gl. (44) für die vollständige Hohlkugel gefunden hatten. Diese Verschiedenheit läßt bereits vermuten, daß in dem zu berechnenden Boden die Beanspruchung von Punkt zu Punkt der Mittelfaser (und in noch höherem Maß der Außenfaser) stark veränderlich sein werde. Es ist nämlich anzunehmen, daß die Beanspruchung des Bodens in der Nähe der Symmetrieachse von derjenigen in der vollen Hohlkugel nicht sehr abweicht. Damit aber die mittlere Beanspruchung des Bodens, d. i. σ_i^* nur etwa $\frac{1}{4}$ (d. i. »—67« gegenüber »—239«) von derjenigen der Hohlkugel sei, muß am Außenrand eine große Beanspruchung auftreten, welche ein entgegengesetztes Vorzeichen zu derjenigen in der Mitte des Bodens hat. Die in den nachstehenden Figuren und in Zahlentafel 8 wiedergegebenen Rechnungswerte bestätigen denn auch die Richtigkeit dieser Vermutung.

Die außen frei aufliegende Platte erfährt daselbst laut Gl. (32a) eine mittlere sogenannte Radialspannung

$$\sigma_{ra} = \frac{x_a p \sin \varphi_a}{2 h_a} = \frac{90 \cdot (-20) \cdot 0,63}{2 \cdot 6},$$

$$\sigma_{ra} = (-94) \text{ kg/qcm} \quad . \quad . \quad . \quad (\text{Druckspannung}) \quad . \quad . \quad . \quad (47).$$

Nunmehr stellen wir uns das Schema für die Hauptzahlentafel auf:

Dabei beginnen wir nicht mit $x_i = 0$, wie wir dies eigentlich tun sollten, sondern mit $x = 10 \text{ cm}$. Wir müßten nämlich sonst die ersten Intervalle dx so klein nehmen, damit sie gegenüber x vorschriftsmäßig klein genug sind, daß dadurch die Rechnung sehr weitläufig würde, ohne besonderen Gewinn zu ergeben. So schätzen wir die zu machenden Annahmen statt für $x=0$ für $x=10 \text{ cm}$ und extrapolieren nach erfolgter Durchrechnung rückwärts auf $x=0$.

Vom Halbmesser $x = 10 \text{ cm}$ ausgehend, wählen wir die Intervalle dx zuerst nur klein ($dx = 1$), dann immer größer, bis zuletzt $dx = 5 \text{ cm}$ wird und bleibt. (Wie sich jedoch erst später herausstellte, wäre es für die Genauigkeit der Rechnung besser gewesen, das Intervall dx gegen den Außenrand hin wieder kleiner werden zu lassen, z. B. $dx = 5, 4, 3, 2 \text{ cm}$.) Für welche Halbmesser die Einzelrechnungen auszuführen sind, muß eben das praktische Gefühl und etwas Übung weisen. In unserem Beispiel wurden sie vorgenommen für

$$x = 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 29, 32, 36, 40, 45, 50, \\ 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85 \text{ und } 90 \text{ cm.}$$

Zahlentafeln 1 bis 4 zeigen als Ausführungsbeispiel den Kopf und wenigstens den oberen Teil der sogenannten »Haupttafel«. Die einzelnen Spalten sind gekennzeichnet durch fortlaufende, eingeklammerte Nummern. In jeder Spalte ist in deren Kopf schematisch dargestellt, ob sie aus früheren Spalten entstanden, aus welchen und in welcher Weise.

Haupttafel.

$\rho = 20 \text{ kg/cm}^3$; $\rho = \text{konst} = 143 \text{ cm}$; $h = \text{konst} = 6 \text{ cm}$; $h^3 = \text{konst} = 216 \text{ cm}^3$.

Für Gußeisen ist: $E = 900\,000 \text{ kg/cm}^2$; $m \propto 5$; $m h^3 = \text{konsst} = 1080 \text{ cm}^3$; $\left(\frac{I}{m}\right) = 1,2$; $c = \frac{m}{m^2 - 1} E = \frac{5}{25 - 1} 900\,000 = 188\,000 = 0,188 \cdot 10^{-6} \text{ kg/cm}^2$;

$$\frac{12}{c} \frac{h}{c} = 64 \cdot 10^{-6} \text{ kg}^{-1} \text{ cm}^2; \quad \frac{12}{c} \frac{h}{c} = 192 \cdot 10^{-6} \text{ kg}^{-1} \text{ cm}^3; \quad c \cdot \frac{h}{2} = 0,364 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}; \quad \frac{p}{2} \cdot \frac{12}{c} = (-640) \cdot 10^{-6}.$$

Zahlentafel I.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
x cm	$d x$ cm	h cm	$x h$ cm ²	$d(x h)$ cm ²	$\frac{d(x h)}{A}$ cm ²	q^0	$\sin \varphi = \frac{x}{\rho}$	$\cos \varphi$	$\cos^3 \varphi$	q'	$\rho \cos^2 \varphi$ (10) $\times$ (11)	$\frac{d x}{\rho \cos^2 \varphi}$ (2) $\div$ (12)	$\frac{\sin \varphi d x}{\rho \cos^2 \varphi}$ (8) $\times$ (13)	(6) + (14)
10	1	6	60	6	0.1	4° 0'	0.070	0.9976	0.995	143	142.2	0.00705	0.493 10 ⁻³	0.1
11	1	6	66	6	0.0911	4° 25'	0.077	0.9970	0.994	143	142.1	0.00705	0.543 10 ⁻³	0.0915
12	1	6	72	6	0.0835	4° 50'	0.084	0.9964	0.993	143	142.0	0.00706	0.59 10 ⁻³	0.0841
13	1	6	78	6	0.0770	5° 15'	0.091	0.9958	0.992	143	141.8	0.00706	0.64 10 ⁻³	0.0776
14	2	6	84	12	0.143	5° 40'	0.098	0.9951	0.930	143	141.5	0.01413	1.385 10 ⁻³	0.144
16	2	6	96	12	0.125	6° 25'	0.112	0.9937	0.988	143	141.2	0.01415	1.586 10 ⁻³	0.127
18	2	6	108	12	0.107	7° 10'	0.130	0.9922	0.982	143	140.9	0.01417	1.800 10 ⁻³	0.107
20	2	6	120	12	0.091	8° 0'	0.143	0.9907	0.976	143	140.6	0.01419	2.000 10 ⁻³	0.091

Zahlentafel 2.

[illegible]

Zahlentafel 3.

(1)	(31)	(32)	(33)	(34)	(35)	(36)	(37)	(38)	(39)	(40)	(41)	(42)	(43)	(44)
x	$(29) \times (30)$	$12 \cdot (31)$	$d x \sin q$	$\frac{d x \sin q}{\cos^2 q}$	$\frac{h}{2} \cdot \frac{d x \sin q}{\cos^2 q}$	$\frac{12}{c} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{d x \sin q}{\cos^2 q}$	h^3	$x \cos q$	$d(x \cos q)$	$\frac{m x h^3 \cos q}{1080 (x \cos q)}$	$d(m x h^3 \cos q)$	$\frac{d(\dots)}{dx}$	$(1 - \cos q)$	$h^3 \cos q$
			$(2) \times (8) \cdot (33) : (10)$		$\frac{h}{2} \cdot (34)$	$192 \cdot 10^{-6} \times (34)$	$\times (34)$	$(1) \times (9)$		$1080 \cdot d(x \cos q)$		$(4) : (2)$		$(37) \cdot (9)$
10	4,23	0,271 · 10 ⁻³	0,070	0,0704		0,014 · 10 ⁻³	216	9,98	+0,94	10,75 · 10 ⁺³	1,015 10 ⁺³	1,015 10 ⁺³		215,48
11	5,57	0,357 »	0,077	0,0774		0,0149 »	216	10,92	+0,99	11,8 »	1,066 »	1,066 »		215,35
12	6,58	0,422 »	0,084	0,0845		0,016 »	216	11,91	+1,00	12,88 »	1,08 »	1,08 »		215,22
13	7,7	0,493 »	0,091	0,0918		0,018 »	216	12,91	+1,01	13,94 »	1,09 »	1,09 »		215,08
14	9,5	0,608 »	0,196	0,198		0,038 »	216	13,90	+1,99	15,0 »	2,15 »	1,075 »		214,93
16	12,5	0,80 »	0,224	0,227		0,049 »	216	15,89	+1,22	17,16 »	2,07 »	1,035 »		214,69
18														
20														

Zahlentafel 4.

(1)	(45)	(46)	(47)	(48)	(49)	(50)	(51)	(52)	(53)	(54)	(55)	(56)	(57)	(58)
x	$d(h^3 \cos q)$	$\frac{d(h^3 \cos q)}{dx}$	$\frac{m h^3}{x}$	$\frac{m h^3}{x} \cos q$	$-\frac{d(h^3 \cos q)}{dx} + \frac{m h^3 \cos q}{x}$	$\frac{p}{2} \cdot \frac{12}{c} \cdot \frac{1}{\cos^2 q}$		$\frac{ds}{\cos q}$	$\frac{h ds}{dx} = \frac{h}{h \cos q}$	$\frac{h}{c} \cos q$	$\frac{y}{\rho(1 - \cos q)}$	$\frac{dy}{E}$	$\frac{dy}{E} \frac{cm}{kg/qcm}$	$\frac{d^2 x}{E}$
		$(45) : (2)$	$\frac{x}{1080}$		$-(46) + (48)$	$\frac{p}{2} \cdot \frac{12}{c} : (10)$	$(50) \times (21)$	$(2) \cdot (9)$	$(52) \times (3)$	$0,564 \times (9)$	$\rho \times (42)$	cm	cm	
10	-0,130	-0,13	108	108,0	108,1	-640 · 10 ⁻⁶	-70,7 · 10 ⁻³		6,02	0,562 · 10 ⁻⁶	0,343	+0,087	0,098 · 10 ⁻⁶	1,11 · 10 ⁻⁶
11	-0,130	-0,13	98,4	98,4	98,4	-640 »	-85 »		6,03	0,562 »	0,43	+0,085	0,0945 »	1,11 »
12	-0,140	-0,14	90,3	90,0	90,1	-641 »	-100 »		6,03	0,562 »	0,515	+0,085	0,0945 »	1,11 »
13	-0,151	-0,15	83,2	82,6	82,8	-643 »	-116 »		6,03	0,562 »	0,60	+0,100	0,111 »	1,11 »
14	-0,302	-0,16	77,2	76,6	76,8	-645 »	-152 »		12,08	0,562 »	0,70	+0,200	0,223 »	2,23 »
16	-0,346	-0,17	67,0	67,0	67,2	-648 »	-193 »		12,10	0,561 »	0,90	+0,24	0,267 »	2,23 »
18														
20														

Die Ergebnisse dieser beiden Hauptdurchrechnungsgruppen sind in die Fig. 15 bis 20 eingetragen und geben ein ebenso lehrreiches wie anschauliches Bild über den Verlauf der Normalspannungen in den einzelnen Punkten der Platte und die Wanderung der einzelnen Punkte der Meridian-Mittelfaser infolge der Durchbiegung. Wir heben besonders hervor, daß die einzelnen Ergebnisse wie folgt zusammengestellt sind:

Für Fall	3	4
Zahlenbeispiel	I	II

Fig. 15 und 16. Zahlenbeispiel I. Platte am Außenrand frei aufliegend
(Schnittfigur 21 und 14).

Fig. 15. Radialspannung σ_r in kg/qem.

Fig. 16. Tangentialspannung σ_t in kg/qem. Maßstab für die Länge 1 : 6. Maßstab für die spez. Spannung 30 kg/qem = 1 mm.

Platte am Rand frei aufliegend, eingespannt
(aber in Richtung des
Halbmessers beweglich.)

Axonometrisches Bild der »Radialspannungen« Fig. 15 Fig. 17

» » » »Tangentialspannungen« » 16 » 18

Durchbiegung bezogen auf die Plattenmitte Fig. 19

» » » » den Plattenaußenrand » 20.

Die zeichnerischen Maßstäbe sind in die einzelnen Figuren eingetragen.

Fig. 17 und 18. Zahlenbeispiel II. Platte am Außenrand eingespannt
(Schnittfigur 22).

Fig. 17. Radialspannung σ_r in kg/qcm.

Fig. 18. Tangentialspannung σ_t in kg/qcm. Maßstab für die Länge 1:6.
Maßstab für die spez. Spannung 30 kg/qcm = 1 mm.

Maßstab für die Mittelfaser 1 : 8. Maßstab für die Ausbiegung 5 : 1. Verhältnis der gezeichneten Ausbiegung zur aufgetragenen Mittelfaser 40 : 1.

Fig. 19. Lage der Mittelfaser des Meridianschnittes.

Fig. 20. Durchbiegung gegenüber der Auflagefläche der Platte. Maßstäbe wie in Fig. 19.

Diskussion der Rechnungsergebnisse der Zahlenbeispiele I und II.

Ein Vergleich der Figuren 15 bis 18 zeigt, daß die Normalspannungen in der am Rand eingespannten Platte durchschnittlich viel niedriger sind, als in der frei aufliegenden Platte. In letzterer tritt die größte Spannung als Tangentialspannung $\sigma_t = +1468 \text{ kg/qcm}$ (Zug) an der Innenfaser im Abstand $x = 90 \text{ cm}$, Fig. 16, die nächst größte als Radialspannung $\sigma_r \infty -1180 \text{ kg/qcm}$ (Druck) an der Außenfaser zwischen den berechneten Punkten $x = 70$ und 80 cm auf, Fig. 15. Bei der am Rand eingespannten Stelle beträgt die Höchstbeanspruchung -1148 kg/qcm . Es ist dies die Druckspannung in Richtung des Meridians an der Innenfaser des Außenrandes, Fig. 17. Die höchste an dem am Rand eingespannten Deckel auftretende Tangentialspannung finden wir ebenfalls am äußeren Rand, und zwar an der äußeren Faser mit $+726 \text{ kg/qcm}$ (Zug). Alle anderen am eingespannten Deckel erscheinenden Spannungen sind viel kleiner als die soeben genannten.

Die Figuren 15 bis 18 zeigen ferner, daß für beide Lagerungsarten des Deckels Punkte zu finden sind, die entweder in Richtung des Meridians oder des Parallelkreises spannungslos sind. Es ist dies der Fall z. B. laut Fig. 15 in Rich-

tung des Meridians an der inneren Begrenzungsfaser im Abstand $x = 45$ cm von der Symmetrieachse, laut Fig. 16 in »tangentialer« Richtung an der äußeren Begrenzungsfaser bei $x = 78$ cm, an der inneren Begrenzungsfaser bei $x = 56$ cm usw.

Eine weitere Betrachtung der die »Radialspannungen« am frei aufliegenden und am außen eingespannten Deckel darstellenden Fig. 15 und 17 zeigt, daß in beiden Fällen zwischen der Symmetrieachse und dem Außenrand je ein Querschnitt vorkommt, der keiner Biegungs-, sondern nur einfacher normaler Druckspannung unterworfen ist. Es ist dies jeweils derjenige Kegelschnitt, in welchem im graphischen Bild die Radialspannungen in der inneren und äußeren Begrenzungsfaser gleich groß erscheinen. Schätzungsweise trifft dies zu in Fig. 15 für die Kote $x = 22$ cm, in Fig. 17 für den Halbmesser $x = 8$ cm¹⁾. In Fig. 15 verschwindet das Bieugungsmoment natürlich ein zweites Mal für $x = 90$ cm laut Voraussetzung, daß die Platte dort frei aufliege.

Die in den Fig. 15 bis 18 gegebenen Darstellungen der Spannungsverteilungen lehren ferner, daß die Platte einem »Körper gleicher Festigkeit« angenähert werden könnte, wenn sie in der Mitte dünner, gegen außen und besonders am Rand dicker gehalten wäre.

Durchbiegung des nach Fig. 14 ausgebildeten und auf der konvexen Seite mit 20 kg/qcm belasteten Deckels.

In den Fig. 19 und 20 ist die rechnerische Durchbiegung der Mittelfaser des Deckels dargestellt für die zwei Fälle:

I) Die Platte ist am Rand frei aufliegend (Kurve I).

II) Die Platte ist am Rand so eingespannt, daß ihr Außenquerschnitt sich wohl in Richtung senkrecht zur Symmetrieachse parallel verschieben, nicht aber verdrehen kann. Der Kürze halber wollen wir diesen Fall mit »Platte außen eingespannt« bezeichnen, obschon dieses Einspannen nur bedingt geschieht (Wahrung der Verschiebbarkeit) (Kurve II).

Die Kurve *O* stellt die Meridian-Mittelfaser (Kreisbogen) im unbelasteten Zustand dar. Es ist wohl zu beachten, daß die Maßstäbe für die Mittelfaser einerseits und für ihre Durchbiegung andererseits verschieden sind, und zwar ist die Meridian-Mittelfaser aufgezeichnet im Maßstab 1:8, die Aenderung von deren Koordinaten im Maßstab 5:1, so daß also die Aenderungen der Koordinaten relativ zu den Koordinaten selbst in 40facher Vergrößerung dargestellt sind.

Weil wir von der Mitte aus gerechnet haben, ist in Fig. 19 demgemäß die Verschiebung der einzelnen Punkte relativ zum Mittelpunkt *J* aufgetragen und dabei die Annahme gemacht, daß alle weiter außen liegenden Punkte sich verschieben können. Die Mittelfaser geht aus ihrer ursprünglichen Lage *JA*₁ (Deckel unbelastet) über entweder in die Lage *JA*₁' oder in die Lage *JA*₁'', je nachdem der Deckel am Rand »frei aufliegend« oder »eingespannt« ist.

Die Darstellung Fig. 20 ist für die der Wirklichkeit eher entsprechende Annahme getroffen, daß der Randpunkt *A*₁ sich nur auf der Wagerechten, d. i. senkrecht zur Symmetrieachse, nicht aber parallel hierzu bewegen könne, und zwar nach den Lagen *A*₁* oder *A*₁**, je nachdem die Platte am Rand frei aufliegt oder eingespannt ist. Der Mittelpunkt der Platte bewegt sich hierbei aus der ursprünglichen Lage *J* nach *J** oder *J***.

¹⁾ Hier zeigt die elastische Linie relative Inflexionspunkte.

Zahlentafel 8.
Zusammenstellung der Hauptdaten für die Rechnungsbeispiele.

Beispiel Nr.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	IX ₀	X	X _f
Schnittfigur Nr.	21 und 14	22	23	24	25	26	27	28	29 u. 46	30 u. 49	31	31
Material	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Flußstahl	Flußstahl
Randbedingungen.	1) in der Mitte	2) am Rand, und zwar axial	1) in der Mitte	2) am Rand, und zwar axial	1) in der Mitte	2) am Rand, und zwar axial	1) in der Mitte	2) am Rand, und zwar axial	1) in der Mitte	2) am Rand, und zwar axial	1) in der Mitte	2) am Rand, und zwar axial
1) in der Mitte	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2) am Rand, und zwar axial	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Außenhalbmesser	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
mittlerer Wölbungshalbmesser	143	143	143	143	143	143	143	143	143	143	143	143
Pfeilhöhe der Wölbung	32,1	—	16	8	0	—	—	—	—	—	—	—
Dicke der Platten, soweit sie stets gleich	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
spezifische Belastung p	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Spannungsdiagramm	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
Es betragen die Spannungen innen:	— 258	— 268	— 720	— 1085	0	— 212	+ 372	— 185	0	0	+ 1080	+ 840
in der Mittelfaser	— 258	— 268	— 720	— 1085	0	— 212	+ 372	— 185	— 375	— 340	+ 1080	+ 840
in der Außenfaser	— 365	— 271	— 965	— 3230	— 5620	— 240	— 605	— 190	0	0	+ 1100	+ 940
Es betragen die Spannungen am Außenrand:	— 365	— 263	— 965	— 3230	— 5620	— 240	— 605	— 190	— 575	— 560	+ 1100	+ 905
in der Mittelfaser	— 94	— 94	— 51	— 26,5	0	— 62	— 42	— 62	— 94	— 62	+ 70	+ 629
in der Außenfaser	+ 1277	+ 516	+ 2020	+ 2180	0	+ 620	+ 832	+ 554	+ 1510	+ 1260	— 2212	+ 55
(Höchstwert)	— 94	— 1148	— 51	— 26,5	0	— 62	— 42	— 62	— 94	— 62	+ 4530	+ 1990
Durchbiegung in der Mitte Δy	+ 1486	+ 726	+ 2720	+ 3634	+ 2740	+ 810	+ 1179	+ 728	+ 1812	+ 1573	— 3592	+ 425
Dehnung des Außenhalbmesser $\Delta \sigma =$	— 2,45	— 1,44	— 9,54	— 24,33	— 56,81	— 1,42	— 2,29	— 0,86	— 2,78	— 2,30	+ 2,00	+ 0,51
Diagramm der Durchbiegung Δy	+ 1,47	+ 0,56	+ 0,53	+ 2,22	—	+ 0,73	+ 0,57	+ 0,38	+ 1,56	+ 1,39	— 0,33	— 0,54
Diagramm der Änderung $\Delta \sigma$	47	47	—	—	—	—	—	—	47	47	—	—
Diagramm der Winkeländerung ψ	48	48	—	—	—	—	—	—	48	48	—	—
Diagramm der Winkeländerung ψ	49	49	—	—	—	—	—	—	49	49	—	—

1) Die Formel nach Föppl Bd. III S. 261 Gl. (185) gibt $-52,7$ mm, also $7,2$ vH weniger. Diese an sich geringe Abweichung liegt wahrscheinlich darin begründet, daß wir noch weitere annähernde Durchrechnungen hätten vornehmen sollen.

Fig. 21 bis 31. Maßstab für Fig. 21 bis 30 1:45.

Fig. 21. I.

Fig. 22. II.

Fig. 23. III.

Fig. 24. IV.

Fig. 25. V.

Fig. 26. VI.

Fig. 27. VII.

Fig. 28. VIII.

Fig. 29. IX.

Fig. 30. IXr.

Fig. 31. X. Maßstab 2:45.

Zahlenbeispiel	I frei auf- liegend	II einge- spannt
q in cm = konst	143	143
x_a in cm =	90	90
x_i in cm =	0	0
h in cm = konst	6	6
p in at =	-20	-20

Material: Gußeisen.

Zahlenbeispiel III.

$q = 260$ cm = konst
 $x_a = 90$ cm
 $x_i = 0$
 $h = 6$ cm = konst
 $p = -20$ at

Material: Gußeisen.

Die für die wirklichen Koordinatenänderungen gefundenen Rechnungswerte sind in den Fig. 19 und 20 eingeschrieben. (Für Fall II, d. h. »außen eingespannt, ist der Wert Δx_a nicht zuverlässig. Vermutlich liegt ein Rechenfehler vor infolge der Wahl zu großer Intervalle für dx gegen den Außenrand hin.)

Nach unserer Rechnung und nach Fig. 20 kommt die größte Aenderung der Koordinate in Richtung parallel zur Symmetrieachse in der Mitte der

Fig. 35.

Platte vor, wie nicht anders zu erwarten war. Sie beträgt bei der frei aufliegenden Platte 2,45 mm, bei der am Rand eingespannten Platte nur 1,44 mm.

Der äußerste Punkt A_1 der Meridian-Mittelfaser verschiebt sich um 1,47 mm nach außen, wenn die Platte außen frei aufliegend, dagegen nur um rd. 0,56 mm, wenn die Platten »außen eingespannt«.

Von der Wiedergabe aller Rechnungs- und insbesondere der Zwischenwerte wurde mit Rücksicht auf deren große Zahl abgesehen.

Im Anschluß an diese eingehend besprochenen Beispiele I und II wurden noch zehn weitere Beispiele durchgerechnet. In Zahlentafel 8 sind von allen zwölf Beispielen die ihnen zugrunde gelegten Bedingungen zusammengestellt. Die Hauptabmessungen der durchgerechneten Platten finden sich in den Fig. 21 bis 31. Diese Beispiele geben über folgende Fragen Aufschluß:

Fig. 36.

- Unterschied zwischen den Randbedingungen »Platte außen frei aufliegend« und »eingespannt«.
- Einfluß der Plattenwölbung.
- » » Plattendicke.
- » » Größe des äußeren Halbmessers » x_a «.
- » » Bohrung und der versteifenden Nabe.
- » » Verdickung des Plattenrandes.
- Unterschied zwischen »außen nachgiebig eingespannt« und »fest eingespannt«.

Die einer und derselben Gruppe a) bis g) angehörigen Platten unterscheiden sich nur durch die für den jeweiligen Programmpunkt gekennzeichneten Daten.

Die Beispiele I bis IX, haben das gemein, daß es sich um die Berechnungen gußeiserner Platten handelt ($E = 900000 \text{ kg/qcm}$; $m = 5$), welche von der konvexen Seite mit $p = 20 \text{ kg/qcm}$ belastet sein sollen. Diese Belastung gibt zugestandenemaßen für fast alle Beispiele für Gußeisen durchaus unzulässig

Fig. 37.

Fig. 38.

Zahlenbeispiel	VI	VII	VIII
$\varrho = \text{konst}$ cm	143	143	95,5
$x_a =$ »	90	60	60
$x_i =$ »	0	0	0
$h = \text{konst}$ »	6	6	6
$p =$ at	-20	-20	-20

Material: Gußeisen.

Fig. 39.

Zahlenbeispiel IX. $\varrho = 143 \text{ cm} = \text{konst}$, $x_a = 90 \text{ cm}$, $x_i = 15 \text{ cm}$ der Bohrung in der Mitte, $h = 6 \text{ cm} = \text{konst}$ von $x = 32$ bis $x_a = 90 \text{ cm}$, $p = -20 \text{ at}$, Material: Gußeisen.

Fig. 40.

Zahlenbeispiel IX. $\varrho = 143 \text{ cm} = \text{konst}$, $x_a = 90 \text{ cm}$, $x_i = 15 \text{ cm}$ der Bohrung in der Mitte, $h = \text{konst}$, $p = -20 \text{ at}$, Material: Gußeisen.

Fig. 41.

Fig. 42.

Fig. 43.

hohe Beanspruchungen. Sie soll deshalb auch nur für unsere vergleichsweise Rechnung, nicht aber in Wirklichkeit Gültigkeit haben. Wir erinnern uns, daß sich alle rechnerisch festgestellten Spannungen und Dehnungen proportional zur gewählten spezifischen Belastung ändern würden.

Den Beispielen X und X_r ist der Boden aus Flußeisen zugrunde gelegt, der von Prof. v. Bach bezüglich Durchbiegen untersucht und in der Z. d. V. d. I. 1899 S. 1585 in Fig. 1 und 2 abgebildet wurde. ($E = 2\,100\,000\text{ kg/qcm}$; $m = 10/3$.) Die Hauptrechnungsergebnisse sind in den Diagrammen Fig. 32 bis 43 aufgetragen.

Diskussion der Rechnungsergebnisse.

- a) Einfluß der Randbedingungen »außen frei aufliegend« und »außen eingespannt«.

Die Beispiele I und II nach den Schnittfiguren 21 und 22 wurden bereits eingehend erörtert. Die aus den Fig. 15 bis 18 bekannten Spannungen der beiden äußeren und der mittleren Faser sind in kleinerem Maßstab und als einfache Funktion des Abstandes x von der Symmetrieachse in den Fig. 32 und 33 wiedergegeben in gleicher Weise wie in den Fig. 34 bis 43 für die übrigen Beispiele.

- b) Einfluß der Plattenwölbung.

Die einschlägigen Zahlenbeispiele I, III, IV und V beziehen sich alle auf gußeiserne volle Platten mit einem äußeren Halbmesser $x_a = 90\text{ cm}$ und einer gleichbleibenden Dicke $h = 6\text{ cm}$ (s. Schnittskizzen 21, 23, 24 und 25). Die Fig. 32, 34, 35 und 36 geben ein Bild für den Verlauf der Spannungen in der mittleren und in den beiden äußersten Fasern einer jeden Platte.

In Fig. 44 sind die hauptsächlichsten Ergebnisse der 4 Rechnungsbeispiele in Funktion der Pfeilhöhe dargestellt, welche beträgt für die Platte

I	III	IV	und V
$f = 32$	16	8	» 0 cm.

Die Krümmungshalbmesser dieser Platten betragen

$\rho = 143$	260	510	» ∞ cm.
--------------	-----	-----	----------------

Die Platte V ist »eben«.

Von der Wölbung $f = 32\text{ cm}$ ausgehend, nimmt die mittlere Radialspannung σ_r mit abnehmender Plattenwölbung anfänglich schwach, dann immer mehr zu. Sinkt beispielsweise die Plattenwölbung » f « von 32 auf 16 und 8 cm, so steigt die Spannung σ_r von 258 auf 720 und 1085 kg/qcm Druck.

Dieses Verhalten ist zu vergleichen mit der Beanspruchung zweier nach Fig. 45 gegeneinander gestellter, gleich langer, gerader Stäbe. Bei gleichbleibender Last P , welche am gemeinsamen Gelenkpunkt G angreift, wird die auf jede Stütze entfallende Komponente N und damit die spezifische Normalspannung (Druck) in den Stützen mit abnehmender Pfeilhöhe immer größer.

Die übrigen, in den vier Platten I, III, IV und V auftretenden Spannungen sind entweder der Zahlentafel 8 oder dem Diagramm Fig. 44 zu entnehmen. Letzteres zeigt deutlich, wie die Höchstspannung mit zunehmender Wölbung abnimmt. Geben wir beispielsweise der Platte statt einer Pfeilhöhe von 8 cm eine solche von 32 cm, so sinkt die größte Tangentialspannung in der Außenfaser und damit die in der Platte überhaupt auftretende größte Spannung vom Betrag $+ 3624\text{ kg/qcm}$ auf $+ 1486\text{ kg/qcm}$. Dabei steigt das Gewicht der Platte

nur von 1065 auf 1180 kg, also nur im Verhältnis 1:1,11. Der geringe Mehraufwand an Gewicht von 11 vH ergibt eine Verringerung der Beanspruchung im Verhältnis 2,44 zu 1 oder läßt eine im Verhältnis 1 zu 2,44 gesteigerte Belastung zu. Der Vergleich der rechnerischen Ergebnisse von den Platten I und IV zeigt, wie sehr sich der geringe Materialmehraufwand lohnt.

Wie bereits weiter oben erwähnt wurde, ist eine Platte nach Schema I im Betrieb auf 15 at, statt wie in obiger Rechnung angenommen mit 20 at belastet worden. Ihre rechnerisch höchste Beanspruchung betrug hierbei $1486 \times \frac{15}{20}$

Fig. 44.

Fig. 45.

Einfluß der Plattenwölbung.

Beispiel	V	IV	III	I
Pfeilhöhe f	0	8	16	32 cm
Krümmungshalbmesser	∞	510	260	143 »
wenn im übrigen unveränderlich:				
x_a	90 cm			
x_i	0 »			
h	6 »			
p	-20 at.			

= 1056 kg/qcm, lag also für Gußeisen schon in ziemlich gefährlicher Nähe der Bruchgrenze. Jedenfalls hätte, wie die Beispiele III und IV zeigen, die Platte für diese hohe Belastung von 15 kg/qcm nicht mit geringerer Wölbung (bei gleichbleibender Dicke) ausgeführt werden dürfen — von der Anwendung einer ebenen, frei aufliegenden Platte V gar nicht zu reden.

c) Einfluß der Plattendicke »h«.

Die Platten	I	VI
nach den Schnittfiguren Nr.	21	26
unterscheiden sich nur durch ihre stets gleichen Dicken		
h	6	9 cm

	I	VI
welche sich verhalten wie	1	: 1,5,
deren Quadrate sich verhalten wie	1	: 2,25.
Laut Zahlentafel 8 und gemäß Fig.	32	bezw. 37
treten in diesen beiden Platten folgende Spannungen auf:		
1) Radial- gleich Tangentialspannungen in der Mittelfaser und in der Plattenmitte $\sigma_{r0} x=0 =$. . .	— 258	— 212 kg/qcm.
Diese verhalten sich wie	1,22	: 1,
also nicht, wie man etwa vermuten könnte, wie die Plattendicken	1,5	: 1.
2) Tangentialspannungen in der Mittelfaser am Außenrand $\sigma_{t0} x=90$	+ 1277	+ 620,
die sich verhalten wie	1,98	: 1.
3) Größte Tangentialspannung in der Außenfaser am äußeren Rand $\sigma_{t,h} x=90$	+ 1486	+ 810 kg/qcm,
deren Verhältnis gleich	1,82	: 1.
4) Größte Radialspannung in einer der Außenfasern	— 1150	— 620 kg/qcm.
Sie verhalten sich wie	1,72	: 1.

Keine der unter 2) bis 4) einander gegenübergestellten Faserspannungen der Beispiele I und VI verhalten sich — wie man hätte vermuten können — umgekehrt wie die Quadrate der Plattendicke (2,25:1) und wie dies bei ebenen Platten der Fall wäre. Das Verhältnis ist kleiner. In sonst gleichartig gebauten gewölbten Platten sinkt demnach die Beanspruchung in einem geringeren Maße als umgekehrt zum Quadrat der Dicke, wenn man von einer gegebenen Platte zu einer dickeren übergeht.

d) Einfluß des äußeren Halbmessers » x_a «.

Die Platten der beiden Rechnungsbeispiele	I	und	VII
haben gemäß Schnittskizzen	21	bezw.	27
bei sonst gleichbleibenden Abmessungen einen Außenhalbmesser x_a	90		60 cm.
Diese Halbmesser verhalten sich wie	1,5	: 1.	
Ihre Quadrate verhalten sich wie	2,25	: 1.	
Laut Diagramme	32		38
treten in diesen zwei Platten folgende Spannungen auf:			
1) Größte Radial- resp. Tangentialspannung in der Symmetrieachse, wo $x_i = 0$	— 365	— 605 kg/qcm,	
sie verhalten sich wie	1	: 1,666.	
2) Größte Radialspannung	— 1150	— 950 kg/qcm,	
ihr Verhältnis ist	1,2	: 1.	
3) Größte Tangentialspannung	+ 1486	+ 1179 kg/qcm,	
deren Verhältnis	1,26	: 1.	

Irgend eine Gesetzmäßigkeit für die Abhängigkeit der Normalspannungen von dem einfachen Plattendurchmesser oder von dessen Quadrat scheint hier also nicht zu herrschen. Im Gegensatz zu ebenen Platten, wo die Spannungen sich wie die Quadrate der Plattendurchmesser verhalten, nehmen die unter 1)

genannten Spannungen mit kleiner werdendem Außenhalbmesser wider Erwarten sogar noch zu. Die unter 2) und 3) aufgeführten Spannungen nehmen nicht einmal im umgekehrten Verhältnis der einfachen Außenhalbmesser ab, geschweige denn im umgekehrten Verhältnis von deren Quadraten.

Daß für den Zusammenhang der Beispiele VI und VII sich keine Gesetzmäßigkeit aus den Spannungsdiagrammen 37 und 38 herauslesen läßt, trotzdem die Durchmesser 90 bzw. 60 cm und die Dicken $h = 9$ bzw. 6 cm ähnlich sind, rührt davon her, daß die Krümmungshalbmesser nicht auch im gleichen Verhältnis zueinander geändert, sondern einander gleich belassen wurden, nämlich $\varrho = 143$ cm.

Erst die Platte VIII steht in allen Abmessungen im gleichen Verhältnis zur Platte VI, nämlich 3:2. Es konnte daher erwartet werden, daß ähnlich gelegene Punkte genau gleiche Spannungen aufweisen. In Wirklichkeit zeigen die Ausrechnungen für Beispiel VI eine größte Spannung von (-620) kg/qcm, für Beispiel VIII eine solche von (-550) kg/qcm. Daß diese Ergebnisse wie auch die Spannungsdiagramme 37 und 39 überhaupt nicht besser übereinstimmen, liegt an zwei Gründen. Fürs erste hätten bei beiden Zahlenbeispielen weitere Durchrechnungen gemacht werden sollen, um den wahren Werten noch näher zu kommen. Sodann kommt bei den in der Mitte vollen Platten eine Unsicherheit dadurch hinein, daß man die Rechnung nicht mit $x = 0$ beginnen kann. So wurde bei Beispiel VI mit $x = 10$ cm, bei Beispiel VIII mit $x = 8$ cm begonnen, und es mußten für diese Halbmesser Annahmen getroffen werden, nicht nur für $\frac{d\psi}{dx}$, sondern auch noch für ψ .

Wenn man zuverlässiger rechnen will, muß man mit kleinerem x beginnen und kleinere Intervalle wählen. Dies ist jedoch recht zeitraubend. Mit Rücksicht darauf, daß ich mir die Berechnung so vieler Beispiele zur Aufgabe gestellt, habe ich obige Ungenauigkeit in den Kauf genommen. Für einen einzelnen Fall würde man dieser einen Berechnung noch mehr Zeit opfern müssen.

e) Einfluß der Bohrung und der versteifenden Nabe.

Hierüber gibt ein Vergleich der Zahlenbeispiele I und IX Auskunft. Die Platte IX ist dargestellt in Fig. 29 im Maßstab 1:45 und in Fig. 46 im Maßstab 1:20 der Fig. 14, welche ein Bild der zuerst betrachteten Platte I ist. Die Platte IX unterscheidet sich von Platte I nur dadurch, daß in ihrer Mitte eine Bohrung vom Halbmesser $x_i = 15$ cm und daß das durch diese Bohrung entfernte

Fig. 46. Platte IX. 1:20.

Material ersetzt ist oder vielmehr sein soll durch eine Nabe von 15 cm axialer Länge und 5 cm Dicke; diese Nabe geht allmählich auf die ursprüngliche Plattendicke $h = 6$ cm über. Von da ab bis an den Außenrand ($x_a = 90$ cm) ist die stets gleiche Plattendicke $h = 6$ cm, wie in Beispiel I. Diese neue Platte soll außen ebenfalls frei aufliegen und durchgehend von der konvexen Seite her mit 20 kg/qcm belastet sein.

Fig. 47 und 48. Zahlenbeispiel IX. Platte mit 30 cm Loch am Außenrand frei aufliegend (Schnittfigur 29 und 46).

Fig. 47. Radialspannung σ_r in kg/qcm.

Fig. 48. Tangentialspannung σ_t in kg/qcm. Maßstab für die Länge 1 : 6. Maßstab für die spez. Spannung 30 kg/qcm = 1 mm. (wie in Fig. 15 bis 18.)

Die Fig. 40 zeigt im gleichen Maßstab, wie Fig. 32 für Platte I den Verlauf der Spannungen in den beiden Außen- und in der Mittelfaser. Desgleichen sind in Fig. 47 in axonometrischer Weise die Radialspannungen und in Fig. 48 die Tangentialspannungen dargestellt, wie in den Fig. 15 und 16 für Platte I. Diese Diagramme zeigen, daß wir die Abmessungen der Nabe ziemlich gut getroffen haben. Die höchste auftretende Spannung, die Tangentialspannung σ_t in der konkaven Außenfaser am Außenrand, beträgt (+ 1822) statt in Platte I (+ 1486 kg/qcm). Die höchste Radialspannung beträgt (— 1300 kg/qcm) gegenüber (— 1150 kg/qcm). Die beiden Spannungsdiagramme 32 und 40 zeigen in den äußeren Hälften der Platten I und IX einen völlig gleichartigen Verlauf.

Die Verschiebungen der Meridianmittelfaser sind in die Fig. 19 und 20 eingetragen.

f) Einfluß der Verdickung des Plattenrandes.

Um diesen Einfluß festzustellen, wurde als Beispiel IX_v [verdickt] eine in Fig. 30 im Maßstab 1:45, in Fig. 49 im gleichen Maßstab wie Platte I in Fig. 14 dargestellte Platte gerechnet, welche sich von Platte IX dadurch unterscheidet, daß ihre Dicke nur zwischen den Halbmessern $x = 32$ und $x = 65$ unverändert = 6 cm ist und daß sie von diesem Halbmesser ab gegen den Außenrand hin allmählich bis zum Betrag $h_a = 9$ cm ansteigt. Am Rand ist sie wie die Platten IX und I frei aufliegend gedacht (s. die Fig. 14, 49 und 46).

Fig. 49. Platte IX_v. 1:20.

Durch die Verdickung des Außenrandes nach Fig. 49 gegenüber Fig. 46 ist laut Diagramm 41 gegenüber Diagramm Fig. 40 die höchste Spannung gesunken vom Betrag (+ 1822) auf den Betrag (+ 1573) und die Durchbiegung in der Mitte vom Betrag (— 2,78) mm auf den Wert (— 2,30) mm. In Diagramm 41 sind in dünnen Linien die Werte aus dem Spannungsdiagramm 40 wiederholt, so daß die Abweichung leicht ersichtlich ist. Die Platte IX_v ist bezüglich Beanspruchung von der Platte I nur unwesentlich verschieden. Wir haben also tatsächlich den an sich schädlichen und sonst so gefürchteten Einfluß der Bohrung in der Mitte durch die Ausbildung der Nabe und die Verstärkung des Plattenrandes ausgeglichen.

Vergleichshalber sind von den Rechnungsbeispielen

I	nach Fig. 14 bzw. 21	(frei aufliegend)
II	»	22 (eingespannt)
IX	»	46 » 29 (frei aufliegend)
IX _v	»	49 » 30 »

je in einem Diagramm vereinigt und als Funktion des Abstandes x von der Symmetrieachse aufgetragen:

In Fig. 50 die Durchbiegung Δy der Meridian-Mittelfaser.

In Fig. 51 die Aenderung Δx der Abstände x der einzelnen Punkte der Meridian-Mittelfaser von der Symmetrieachse.

In Fig. 52 die Aenderung ψ , die der zwischen dem Krümmungshalbmesser und der Symmetrieachse gelegene Winkel φ erleidet.

Die Werte der Platten I, IX und IX_v weichen nicht sehr voneinander ab, dagegen verhält sich die Platte II ganz anders, und man sieht daraus nochmals den günstigen Einfluß des »Eingesspanntseins«. Wie Fig. 52 zeigt, drehen sich alle Querschnitte des inneren Teiles der Platten im Sinne der Winkelvergrößerung,

Fig. 50. Durchbiegung Δy in Funktion des Abstandes x von der Symmetrieachse für die Zahlenbeispiele I, II, IX, IX_v.

Fig. 51. Aenderung Δx in Funktion des Abstandes x von der Symmetrieachse für die Zahlenbeispiele I, II, IX, IX_v.

d. h. die Punkte der konvexen Außenfaser entfernen sich, diejenigen der konkaven Innenfaser nähern sich der Symmetrieachse. In den weiter außen gelegenen Querschnitten ist das Umgekehrte der Fall. Zwischendrin liegt ein Inflexionspunkt, wie ihn Prof. Dr. Stodola für den kegelförmigen Boden berechnet hat¹⁾. Für die am Rand eingespannte Platte II liegt er bei $x \approx 20$ cm,

Fig. 52. Winkeländerung ψ in Funktion des Abstandes x von der Symmetrieachse für die Zahlenbeispiele I, II, IX, IX_v.

für die drei am Rand frei aufliegenden Platten I, IX und IX_v nahe beieinander, und zwar bei $x \approx 40$ cm.

Wie eine aus der Grundform I entwickelte Platte mit Bohrung jedoch ohne versteifende Nabe beansprucht wäre und sich durchbiegen würde, und wie die Beanspruchungen und Durchbiegungen von der Größe der Bohrung abhängig sind — dies zu untersuchen, mag einer besonderen Arbeit vorbehalten bleiben.

Die Biegemomente der inneren Spannungen in Abhängigkeit vom Halbmesser x .

Bei der Berechnung des Ausdruckes $\left(\frac{d\psi}{dx}\right)$ stießen wir unter anderen auf den Wert M_{σ_r} , das ist das Moment der auf die Begrenzungsfläche $CDEF$ des in Fig. 3 dargestellten Plattenelementes wirkenden Normalspannungen σ_r . Wir fanden als Gl. (20):

$$M_{\sigma_r} = d\alpha c x \frac{h^3}{12} \cos \varphi \left[m \frac{d\psi}{dx} + \frac{\psi}{x} \right].$$

Dividieren wir diesen Ausdruck durch die mittlere Breite ($x d\alpha$) der Fläche $CDEF$, so erhalten wir den auf je einen Zentimeter des mittleren Parallelkreises entfallenden Anteil des Momentes M_{σ_r} , nämlich:

$$M_{\sigma_r}' = \frac{M_{\sigma_r}}{(x d\alpha)} = h^3 \cos \varphi \left[m \frac{d\psi}{dx} + \frac{\psi}{x} \right] \frac{c}{12} \dots \dots \dots (48).$$

¹⁾ S. Stodola: »Die Dampfturbinen«, IV. Auflage S. 602.

Wir können diesen Wert nennen »das spezifische Moment der Normalspannungen σ_r «. Seine Maßeinheit ist kgcm/cm. In unserer abgekürzten Ziffersprache lautet die Formel (vergl. Zahlentafel 3 und 7):

$$M_{\sigma_r}' = (44) (105) \frac{c}{12} \dots \dots \dots (48a).$$

Fig. 53. Maßstab für die Ordinaten: 100 kgcm/cm = 0,75 mm.

Fig. 54. Maßstab für die Ordinaten: 100 kgcm/cm = 0,75 mm.

In ganz gleicher Weise läßt sich für das auf das Plattenelement C bis K , Fig. 3 bzw. 9, wirkende resultierende Moment M_{σ_i} , welches von den Tangentialspannungen σ_i herrührt, aus der Gl. (24) das »spezifische« Moment M_{σ_i}' ableiten:

$$M_{\sigma_i}' = \frac{M_{\sigma_i}}{dx d\alpha} = (h^3 \cos \varphi) \left[\frac{d\psi}{dx} + m \frac{\psi}{x} \right] \frac{c}{12} \cdot \cdot \cdot \cdot (49).$$

$$M_{\sigma_i}' = (44) (107) \frac{c}{12} \cdot \cdot \cdot \cdot (49a).$$

Beispielshalber wurden die in den Gl. (48) und (49) definierten Werte für eine größere Anzahl der Werte von x ausgerechnet für die Platten I, II und IX und in den Diagrammen Fig. 53 bzw. 54 bildlich dargestellt in Funktion von x .

Die für eine gegebene Platte erforderlichen Durchrechnungen.

Um zu zeigen, wie sich bei den einzelnen Durchrechnungen für verschiedene Annahmen die Endergebnisse stellen, und wie manche Durchrechnungen überhaupt durchgeführt werden müssen, greifen wir das Zahlenbeispiel IX heraus. Zur Berechnung der in Fig. 46 dargestellten Platte wurden fünf verschiedene Annahmen gemacht mit dem in nachstehender Zahlentafel ersichtlichen Erfolg:

Durchrechnung	Nr. 91	92	93	94	95
Annahme für $x_i = 15$ cm (wo $\sigma_{r0} = 0$)					
$\sigma_{\theta i} =$	— 320	— 630	— 400	— 330	— 375 kg/qcm
$\psi_i =$	+ 190	+ 225	— 150	+ 285	+ 385 · 10 ⁻⁶
Endergebnisse für $x_a = 90$ cm.					
a) Spannungsprobe:					
$\sigma_{r0a} =$	— 104	+ 603	+ 138	— 126	— 63 kg/qcm
statt nach Gl. (32a)	— 92	— 92	— 92	— 92	— 92 »
Fehlbetrag =	— 12	+ 695	+ 230	— 34	+ 29 »
b) Winkelprobe nach Gl. (33).					
$\left[m \frac{d\psi}{dx} + \frac{\psi}{x} \right] =$.	+ 899	+ 8'792	+ 7'029	+ 447	— 100 · 10 ⁻⁶
statt	0	0	0	0	0

Wie diese Zusammenstellung zeigt, hätten eigentlich noch mehr Durchrechnungen erfolgen sollen, um den in den Gl. (32a) und (33) gestellten Randbedingungen näher zu kommen. Doch ist schon bei der Durchrechnung 95 die Annäherung für die Praxis durchaus hinreichend. (Beim Aufzeichnen des Spannungsdiagrammes 34 wurden die Kurven für die Radialspannungen σ_r so gedreht, daß sie bei $x_a = 90$ cm durch den Punkt (— 92 kg/cm) hindurchgehen.) — Bei anderen Zahlenbeispielen waren allerdings weit mehr Durchrechnungen erforderlich als nur fünf. Um folgenschwere Fehler zu verhüten, empfiehlt sich das fortlaufende graphische Aufzeichnen der Zwischwerte.

* * *

Als weiteres Anwendungsbeispiel wurde endlich die Platte nachgerechnet, die seinerzeit durch Prof. v. Bach untersucht worden ist, und deren Prüfungsergebnisse in der Z. d. V. d. I. 1899 S. 1586 veröffentlicht sind. Die Platte A bestand aus Flußeisen ($E = 2100000$ kg/qcm; $m = 10/3$). Unsere Schnittskizze Nr. 31 ist der Fig. 1 aus Z. d. V. d. I. 1899 S. 1585 nachgebildet. Wir führen die Rechnung nur durch bis zum Beginn der Krempe, das ist bis zum Halbmesser $x = 30$ cm und nehmen an, daß die Platte daselbst »eingespannt«,

und daß sie auf der konkaven Seite gleichmäßig mit $p = + 16$ at (statt wie in den bisherigen Beispielen mit $p = - 20$ at) belastet sei. »Eingespannt« soll heißen, daß der Rand sich nicht verdrehen kann. Dieses »Eingespanntsein« wollen wir im Rechnungsbeispiel X so auffassen, daß der Außenrand in Richtung senkrecht zur Symmetrieachse beliebig nachgeben kann, während in Beispiel X_1 der Meridianpunkt des Außenrandes so festgehalten gedacht werde, daß er sich in Richtung senkrecht zur Symmetrieachse kaum bewegt, daß er also nahezu »fix« sei. Daher die Bezeichnung » X_1 «. Die Spannungen des Rechnungsbeispiels X sind im Diagramm 42, diejenigen des Beispiels X_1 im Diagramm 43 aufgetragen. (Ihre Maßstäbe sind jedoch verschieden von denjenigen der Diagramme 32 bis 41.)

Das Spannungsdiagramm 43 zeigt mit seinen viel kleineren Ordinaten als im Diagramm 42 den günstigen Einfluß dieses »Festhaltens« des Plattenrandes in Richtung senkrecht zur Symmetrieachse. Die Höchstspannung ist weit unter die Hälfte gesunken gegenüber derjenigen in der Platte X, deren Außenquerschnitt sich zwar auch nicht drehen, wohl aber radial verschieben kann. Dementsprechend ist auch die rechnerische Durchbiegung in der Plattenmitte viel kleiner, nämlich 0,51 statt 2,00 mm (siehe Zahlentafel 8).

v. Bach hat bei 16 at Belastung in der Mitte gegenüber dem Beginn der Krimpe, d. i. gegenüber den Meßpunkten 4, 16, 28, 40 eine Durchbiegung von $1,25 - 0,17 = 1,08$ mm gemessen. Dieser Wert liegt zwischen den in unseren Beispielen X und X_1 berechneten Werten 2,0 bzw. 0,51 mm. Leider fehlt in der v. Bachschen Veröffentlichung die Angabe, um wieviel sich der Normalabstand der Meßpunkte 4, 16, 28 und 40 von der Symmetrieachse geändert hat. Es ist in der Zusammenstellung 7 S. 1586 nur gesagt, daß der Außenrand der Krimpe, d. h. daß die Meßpunkte 49 bis 51 bei $p = 16$ at im Mittel um 0,099 mm nach innen gerückt sind. Es ist jedoch anzunehmen, daß die Meßpunkte 4, 16, 28, 40 sich eher noch mehr nach innen verschoben haben. Unsere Beispiele X und X_1 ergeben eine Verkürzung des Außenhalbmessers ($x_a = 30$ cm) von 0,33 bzw. 0,04 mm. Damit ist nachgewiesen, daß der von Bach untersuchte Boden bezüglich wirklicher Beanspruchung ein Mittelding zwischen unseren beiden rechnerisch untersuchten Grenzfällen X und X_1 ist. Er wird also bei einer spezifischen Belastung von 16 at eine Höchstbeanspruchung erfahren, die zwischen + 4530 von Fall X und + 1990 kg/qcm von Fall X_1 liegt. Vermutlich liegt diese wirkliche höchste Beanspruchung nahe bei 3000 kg/qcm.

Dieser Vergleich unserer Rechnungsergebnisse mit den Bachschen Meßergebnissen liefert den erwarteten Beweis für die praktische Verwendbarkeit vorliegenden Rechnungsverfahrens.

Alle Beispiele mit Ausnahme desjenigen Nr. V, d. i. der ebenen Platte, zeigen, daß der höchst beanspruchte Querschnitt sich außen am Rand der Hauptwölbung, oder wenigstens in dessen Nähe befindet, und tatsächlich sind auch wohl die meisten Brüche an Kesselböden von dieser Stelle, d. i. vom Uebergang zur Krimpe, ausgegangen.

* * *

Vorstehende Rechnungen, insbesondere diejenigen Nr. I und IX, sollen in erster Linie Beispiele für die Anwendbarkeit des eingangs theoretisch hergeleiteten Rechnungsverfahrens sein. Gleichzeitig geben sie ein sehr deutliches Bild der Abhängigkeit der Beanspruchung und der Durchbiegung einer Platte von ihrer Form und ihrer Unterstützungsart.

Ein großer Vorteil der hier angewendeten Rechnungsweise mit kleinen Differenzen liegt darin, daß für die Erzielung einer Rechnungsmöglichkeit weit

weniger Einschränkungen gemacht werden müssen, als in den vorveröffentlichten Vorschlägen. Schüle mußte in seinem Aufsatz in »Dinglers Polyt. Journal« vom 10. Oktober 1900 voraussetzen, daß der Boden in der Mitte voll sei, überall gleiche Krümmung und Dicke habe. Von diesen drei Hauptbedingungen konnte Fankhausen für seine in der »Zeitschr. f. d. gesamte Turbinenwesen« vom Jahr 1911 S. 449 niedergelegte Arbeit die erste, aber auch nur die erste fallen lassen, mußte dagegen daran festhalten, daß die Platte ein Kugelboden von stets gleicher Dicke sei¹⁾. Und trotz dieser im Grunde doch recht großen und für die Anwendung in der Praxis hinderlichen Einschränkung sind Fankhausens Gleichungen nicht einfach zu nennen²⁾.

Vorliegendes Verfahren gestattet die Ausrechnung von ungeteilten Böden mit

- a) veränderlicher Dicke,
- b) veränderlichem Wölbungshalbmesser,
- c) Bohrung in der Mitte.

Als ein solch allgemeines Beispiel haben wir deshalb den Boden Nr. IX_e nach Schnittfigur Nr. 30 bzw. Nr. 49 gewählt.

¹⁾ Vergl. »Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen« 1911 S. 450 Zeile 5 und S. 474 oben.

²⁾ Siehe z. B. dessen Gl. (27).