Knickung von Schraubenfedern unter Druck und konservativer Torsion

Doctoral Thesis**Author(s):**

Maag, Heinrich

Publication date:

1957

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000096550>

Rights / license:

In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

KNICKUNG VON SCHRAUBENFEDERN UNTER DRUCK UND KONSERVATIVER TORSION

VON DER
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN
HOCHSCHULE IN ZÜRICH

ZUR ERLANGUNG
DER WÜRDE EINES DOKTORS DER MATHEMATIK

GENEHMIGTE
PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON
HEINRICH MAAG
VON ZÜRICH UND OBERGLATT/ZH

REFERENT: HERR PROF. DR. H. ZIEGLER
KORREFERENT: HERR PROF. DR. W. SAXER

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

1957

Knickung von Schraubenfedern unter Druck und konservativer Torsion

Von H. Maag

1. Einleitung. Die Knicklasten einer durch eine axiale Druckkraft beanspruchten Schraubenfeder wurden erstmals von *E. Hurlbrink*¹ und in einem allgemeineren Rahmen 1924 von *R. Grammel*² berechnet, indem die Feder in geeigneter Weise durch einen weichen Stab ersetzt wurde. *C. B. Biezeno* und *J. J. Koch*³ zeigten, daß die Resultate durch Berücksichtigung des Einflusses der Querkraft speziell für nichtschlanke Federn erheblich verbessert werden können, und *J. A. Haringx*^{4,5} machte neuerdings darauf aufmerksam, daß man dann auch die von der Querkraft erzeugte Schiebung berücksichtigen muß. In dieser Arbeit berechnete *Haringx* die kritischen Lasten für eine Belastung, die sich aus einer axialen Druckkraft und einem axialen Torsionsmoment zusammensetzt.

Diese Resultate wurden alle mit Hilfe des statischen Stabilitätskriteriums gefunden, wonach die Stabilitätsgrenze durch das erstmalige Auftreten von nichttrivialen, d. h. ausgebogenen Gleichgewichtslagen bedingt ist. Nun hat aber *H. Ziegler*⁶ gezeigt, daß das statische Stabilitätskriterium nur für konservative Systeme legitim ist, also insbesondere auf Systeme, in denen axiale Torsionsmomente auftreten, nicht angewendet werden darf, da diese ja im allgemeinen nicht konservativ sind. Die Resultate von *Haringx* hängen damit teilweise in der Luft und bedürften einer Überprüfung durch das kinetische Stabilitätskriterium (Untersuchung kleiner Schwingungen um die Gleichgewichtslage), das in allen Fällen gültig ist.

Anderseits stellte *H. Ziegler*⁷, indem er auf die den Momentvektor erzeugenden Einzelkräfte zurückging, fest, daß die durch die einfachsten Kraftverteilungen erzeugten Momentvektoren nur bei Einspannungen axial bleiben, bei gelenkig gelagerten oder freien Enden aber ihre Richtung ändern. Die so je nach dem Kraftangriff entstehenden semi-, quasi- und pseudotangentialen Momente sind alle konservativ. Für die Belastung mit solchen Momenten darf also wieder das statische oder auch das energetische Stabilitätskriterium angewendet werden, wonach die Stabilitätsgrenze erreicht ist, wenn die potentielle Energie des Systemes erstmals nicht mehr positiv definit ist.

In der vorliegenden Arbeit wird nun die Knickung einer Feder untersucht, deren Belastung sich aus einer axialen Druckkraft und einem solchen konservativen Torsionsmoment zusammensetzt. Im Abschnitt 2 werden die Differentialgleichungen der elastischen Linie der Feder bzw. des elastisch-äquivalenten Ersatzstabes hergeleitet. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen werden dann in Abschnitt 3 die Knickgleichungen aufgestellt und zwar für fünf Lagerungsarten (Abb. 1).

Selbstverständlich müssen in allen fünf Fällen die Lager so ausgebildet sein, daß sich die Federenden gegeneinander um die ursprüngliche Federachse verdrehen und vertikal verschieben können. Im Abschnitt 4 schließlich werden die Knickgleichungen diskutiert und in den einfacheren Fällen die kritischen Dynamen in Diagrammen dargestellt.

2. Grundlagen. a) Der Ersatzstab. Eine Schraubenfeder, deren Länge im ungespannten Zustand l_0 und deren Wicklungsradius R beträgt, sei durch die Belastung auf die Länge l zusammengedrückt. Die Feder sei so gewickelt, daß die Hauptträgheitsachsen des Drahtquerschnittes parallel

Abb. 1. Die untersuchten Lagerungen.

- I. die beidseitig horizontal unverschieblich eingespannte Feder,
- II. die beidseitig eingespannte Feder mit gegeneinander horizontal verschiebbaren Einspannungen,
- III. die einseitig eingespannte Feder,
- IV. die auf der einen Seite eingespannte, auf der anderen gelenkig gelagerte Feder,
- V. die beidseitig gelenkig gelagerte Feder.

¹ *E. Hurlbrink*, Z. VDI, 54 (1910) S. 133 u. 181.

² *R. Grammel*, Z. angew. Math. Mech. 4 (1924) S. 384.

³ *C. B. Biezeno* u. *J. J. Koch*, Z. angew. Math. Mech. 5 (1925) S. 379.

⁴ *J. A. Haringx*, Proc. Nederl Akad. Wet. 45 (1942) S. 533 u. 650.

⁵ *J. A. Haringx*, Philips Res. Rep. 3 (1948) S. 401 u. 4 (1949) S. 49.

⁶ *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Phys. 4 (1953) S. 89.

⁷ *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Phys. 3 (1952) S. 96.