Knickung gerader Stäbe durch Druck und konservative Torsion

Doctoral Thesis**Author(s):**

Beck, Max

Publication date:

1955

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000099286>

Rights / license:

In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

Prom. Nr. 2345

B.

Diss ETH

KNICKUNG GERADER STÄBE DURCH DRUCK UND KONSERVATIVE TORSION

VON DER
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN
HOCHSCHULE IN ZÜRICH

ZUR ERLANGUNG
DER WÜRDE EINES DOKTORS DER
TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

GENEHMIGTE
PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON
MAX BECK
VON SCHAFFHAUSEN

REFERENT: HERR PROF. DR. H. ZIEGLER
KORREFERENT: HERR PROF. DR. E. STIEFEL

1955

SPRINGER-VERLAG BERLIN W 35

Knickung gerader Stäbe durch Druck und konservative Torsion*.

Von M. Beck.

1. **Einleitung.** *L. Euler* hat im Jahre 1757 als Erster die axiale Druckkraft berechnet¹, unter der ein schlanker Stab ausknickt. Ein seitliches Ausbiegen kann auch bei einem Stab auftreten, der ein Drehmoment zu übertragen hat. Die kritische Belastung eines gedrückten und tordierten Stabes hat für kreisförmigen Querschnitt zuerst *A. G. Greenhill*² untersucht, während *H. Grammel*³ für die Lagerung V von Abb. 4 eine Lösung für beliebige Querschnitte berechnet hat. Diese Arbeiten beruhen auf der Annahme, daß der Momentenvektor beim Ausknicken seine ursprüngliche axiale Richtung beibehalte. Das merkwürdige Ergebnis, daß bei den Lagerungen III und IV in Abb. 4 ein beliebig kleines Moment den Stab zu knicken vermag, regte *H. Ziegler*⁴ zu einer genaueren Überprüfung des belastenden Momentes an. Dabei zeigte sich zunächst, daß ein axiales Moment nichtkonservativ ist. Nichtkonservative Stabilitätsprobleme müssen aber mit dem kinetischen Stabilitätskriterium (Untersuchung der kleinen Schwingungen um die Gleichgewichtslage) behandelt werden, während das von *Greenhill* und *Grammel* verwendete einfachere statische (Bestimmung kritischer Belastungen durch Ermittlung der nichttrivialen Gleichgewichtslagen) und das energetische Kriterium (für die kritische Belastung ist die potentielle Energie erstmals nicht mehr positiv definit) nur bei konservativen Systemen verwendet werden dürfen⁵. Die von *A. Trösch*⁶ durchgeführten Schwingungsrechnungen ergeben, daß selbst bei Einführung von Dämpfungskräften die erwähnten unbefriedigenden Resultate nur zum Teil korrigiert werden.

Indem *H. Ziegler*⁷ auf die den Momentenvektor erzeugenden Einzelkräfte zurückging, stellte er fest, daß sich für die praktisch wichtigsten Belastungsarten konservative Momente ergeben (vgl. auch Abschnitt 2 b), während Kräfteverteilungen, die axial bleibende Momente liefern, wohl ziemlich selten vorkommen. Mit den von ihm herausgegriffenen Belastungen definierte er das semi-, das quasi- und das pseudotangentielle Moment und zeigte, daß mit diesen Momenten beim Stab mit zwei gleichen Biegesteifigkeiten für alle fünf Arten der Lagerung in Abb. 4 plausible Knicklasten gefunden werden^{8,9}.

Die folgende Arbeit stellt eine Erweiterung der Rechnungen von *H. Ziegler* dar. Unter allgemeinen Voraussetzungen werden im Abschnitt 2 die Ausgangsgleichungen abgeleitet. Eine Lösung ohne Einschränkungen führt indessen auf sehr unübersichtliche Knickgleichungen. Wir lassen daher im Abschnitt 3 einen Stab mit zwei verschiedenen Biegesteifigkeiten zu, der zwar sogar eine spannungsfreie Verwindung aufweisen kann, jedoch vor dem Knicken nur auf Torsion beansprucht sein soll. Im Abschnitt 4 wird dann bei einem Stab mit zwei gleichen Biegesteifigkeiten auch eine Druckkraft mitberücksichtigt. Insbesondere die Knickgleichungen dieses Abschnittes werden eingehend diskutiert und die kritischen Dynamen in Diagrammen wiedergegeben.

* Von der ETH in Zürich genehmigte Promotionsarbeit.

¹ *L. Euler*, Histoire de l'Académie, Bd. 13, Berlin 1757.

² *A. G. Greenhill*, Proc. Inst. Mech. Eng. 1883, S. 182.

³ *R. Grammel*, Z. angew. Math. Mech. 3, (1923), S. 262; siehe auch *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, Bd. 1, S. 607, 2. Aufl. 1953.

⁴ *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Physik 2, (1951) S. 265. *H. Ziegler* stellte ferner fest, daß für verschiedene Arten der Lagerung jede Drehzahl kritisch ist, sobald die Welle ein beliebig kleines axiales Moment zu übertragen hat.

⁵ *H. Ziegler*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 49 und *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Physik 4 (1953), S. 90 und 168. Die erste Arbeit demonstriert das Versagen des statischen und des energetischen Stabilitätskriteriums bei einem einfachen nichtkonservativen Stabilitätsproblem, während die zweite eine grundsätzliche Analyse der linearen Stabilitätsprobleme und der Methoden zu ihrer Lösung darstellt.

⁶ *A. Trösch*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 258.

⁷ *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Physik 3 (1952), S. 96.

⁸ Auch die Berechnung des Einflusses der Torsion auf die kritischen Drehzahlen ergibt für diese drei Momente keine Überraschungen mehr. *H. Ziegler*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 377.

⁹ Einen weiteren, mit dem pseudotangentialen Moment verwandten Fall, die Übertragung des Momentes durch ein Kreuzgelenk, behandelt *W. T. Koiter* in einer noch nicht veröffentlichten Arbeit.