Beiträge zur Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten

Doctoral Thesis**Author(s):**

Samelson, Hans

Publication date:

1941

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000103762>

Rights / license:

In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

Beiträge zur Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten

VON DER
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN
HOCHSCHULE IN ZÜRICH

ZUR ERLANGUNG

DER WÜRDE EINES DOKTORS DER
MATHEMATIK
GENEHMIGTE
PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON
HANS SAMELSON
AUS Breslau

Referent: Herr Prof. Dr. H. Hopf
Korreferent: Herr Prof. Dr. F. Gonseth

BALTIMORE, MD.
WAVERLY PRESS
1941

Auszug aus den Annals of Mathematics (herausgegeben
von der Princeton University Press, Princeton, N.J.), Bd.
42, no. 5, 1941.

Made in the United States of America

Meiner Mutter

BEITRÄGE ZUR TOPOLOGIE DER GRUPPEN-MANNIGFALTIGKEITEN

VON HANS SAMELSON

(Received October 18, 1940)

EINLEITUNG

Die Theorie der Lie'schen Gruppen war ursprünglich eine "lokale" Theorie: man betrachtete nur eine Umgebung des Einselementes einer Gruppe, das, was man heute einen Gruppenkeim oder eine lokale Gruppe nennt [1].¹ Diese Einschränkung, die dem Gruppenbegriff eigentlich nicht angemessen ist, wurde in der neueren Forschung aufgegeben. Man betrachtet heute die Algebra der *ganzen* Gruppe und die Geometrie im *Grossen* des die Gruppe repräsentierenden Raumes, der "Gruppen-Mannigfaltigkeit". Die damit auftretenden geometrischen Fragen sind im wesentlichen topologische Probleme. Die hierhergehörigen Ergebnisse, die im Sommer 1935 bekannt waren, hat E. Cartan in einem Vortrag "Sur la topologie des groupes de Lie" zusammengestellt [2]. (In der vorliegenden Arbeit werden nur kompakte Gruppen, deren Räume also geschlossene Mannigfaltigkeiten sind, behandelt.)

Der topologische Bau einer Mannigfaltigkeit wird in erster Linie beschrieben durch ihre Betti'schen Gruppen, sowie durch ihren Homologie-Ring, den man aus den Betti'schen Gruppen bekommt, wenn man die Schnitt-Bildung als Multiplikation einführt.² Für *Gruppen-Mannigfaltigkeiten* hat dieser Ring eine besondere Bedeutung: er ist—nach Cartan—isomorph dem Ring der invarianten Differentialformen der Gruppe. Daraus ergibt sich weiter, dass das topologische Problem, die Struktur des Homologie-Ringes einer Gruppe zu bestimmen, äquivalent ist mit einem algebraischen Problem, das von den Invarianten linearer Gruppen handelt. Auf beiden Wegen zur Untersuchung des Ringes sind aber die Schwierigkeiten so gross, dass heute noch nicht die Ringe aller bekannten Gruppen ermittelt sind.

Immerhin ist diese Aufgabe gelöst für die Gruppen, die Weyl die "klassischen" nennt—also die orthogonalen, die unitären und die symplektischen—, und zwar von Pontrjagin auf dem topologischen [3], von R. Brauer auf dem algebraischen Wege [4]. Es stellte sich dabei heraus: Die genannten Gruppen haben die gleichen Homologie-Ringe wie gewisse topologische Produkte von Sphären. Die Dimensionszahlen dieser Sphären, die ja dann den Ring bestimmen, lassen sich für jede dieser Gruppen angeben. Für die Poincaré'schen Polynome—also

¹ Die Nummern im Text verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluss der Arbeit.

² Wir verwenden als Koeffizientenbereich in dieser Arbeit immer den Körper der rationalen Zahlen (oder, was fast auf dasselbe herauskommt, den Körper der reellen Zahlen; dieser Körper ist bei der im nächsten Satz genannten Isomorphie mit dem Ring der invarianten Differentialformen benutzt).

für die Polynome in einer Unbestimmten t , deren Koeffizienten die Betti'schen Zahlen der betreffenden Mannigfaltigkeit sind—folgt, dass sie in Faktoren der Gestalt $(1 + t^m)$ zerfallen; dabei sind die Exponenten m die erwähnten Dimensionszahlen.

Diese wichtigen Untersuchungen von Pontrjagin und Brauer—(ebenso wie eine etwas jüngere topologische Arbeit von Ehresmann [5], in der dieselben Ergebnisse erhalten werden)—haben einen “speziellen” Charakter: es wird jedesmal eine spezielle Klasse von Gruppen betrachtet, und es werden jedesmal ganz spezielle Eigenschaften dieser Gruppen benützt. Daher erhebt sich die Frage nach einer allgemeinen topologischen Theorie der Gruppenmannigfaltigkeiten, aus der man die erwähnten Sätze über die klassischen Gruppen durch Spezialisierung gewinnen könnte. So schliesst auch Cartan seinen genannten Vortrag nach einem Bericht über die Pontrjagin-Brauer'schen Untersuchungen mit den Worten: “Il faut espérer qu'on trouvera aussi une raison de portée générale expliquant la forme si particulière des polynomes de Poincaré des groupes simples clos.” [6]

In dieser Hinsicht ist nun ein wichtiger Schritt der folgende Satz von Hopf: [7] “Für jede (geschlossene) Gruppe ist der Homologie-Ring isomorph dem Ring eines gewissen topologischen Produktes von Sphären, deren Dimensionen ungerade sind”; es gilt also allgemein das, was Pontrjagin und Brauer für die klassischen Gruppen festgestellt haben—insbesondere zerfällt das Poincaré'sche Polynom *jeder* Gruppe in Faktoren der Gestalt $(1 + t^m)$ mit ungeraden Exponenten m . Dieser Satz besitzt offenbar die gewünschte Allgemeinheit; jedoch wird in seinem Beweis die Gruppen-Eigenschaft nicht vollständig ausgenützt und vor allem ein wichtiges Hilfsmittel nicht herangezogen, das Pontrjagin in seiner Arbeit [3] eingeführt hat: eine Multiplikation von Zyklen mit Hilfe der Gruppenmultiplikation, die kurz so aussieht: Durchläuft der Punkt p den Zyklus x und der Punkt q den Zyklus y , dann durchläuft der Produktpunkt pq den “Produktzyklus” von x und y .

Auf der Betrachtung dieser “Pontrjagin'schen” Multiplikation und ihrer Kombination mit dem Satz von Hopf basiert nun die vorliegende Arbeit. Und zwar beweisen wir in Kap. I, §3 einen Satz (den “Aufspannsatz”) über die Struktur des Ringes einer Gruppe, dessen Beweis für die klassischen Gruppen einen wesentlichen Teil des Inhaltes der Pontrjagin'schen Arbeit bildet und dessen Gültigkeit für alle Gruppen von Cartan [8] vermutet wurde. Der Inhalt dieses Satzes ist eine ganz bestimmte Dualität zwischen der Gruppen- (Pontrjagin'schen)-Multiplikation der Zyklen und der Schnitt-Bildung der Zyklen; dadurch wird die Gruppe in eine noch engere Analogie zu einem Sphären-Produkt gebracht als durch den Satz von Hopf; es handelt sich um einen “doppelten” Isomorphismus.

Der §1 von Kap. I enthält eine Zusammenstellung bekannter Tatsachen über Homologie-Ringe von Mannigfaltigkeiten, und die Definition und Eigenschaften der (bei Hopf [7] eingeführten) Begriffe “maximales” und “minimales” Element eines Homologie-Ringes. In §2 wird der Satz von Hopf zitiert, und

es werden die für das folgende grundlegenden Eigenschaften des Ringes einer Gruppe dargestellt. Der §3 enthält den Beweis des oben genannten "Aufspannsatzes".

Auf Grund dieses Satzes werden dann in Kap. II die beiden wichtigsten gruppentheoretischen Begriffe "homomorphe Abbildung" und "Untergruppe" in topologischer Hinsicht untersucht. Es wird die Frage diskutiert, wie die Mannigfaltigkeit einer Untergruppe in die Gruppe eingelagert ist, d.h. welche Zyklen aus der Untergruppe in der Gruppe homolog Null sind; dabei ergeben sich einfache Gesetze. Diese spielen im folgenden eine Rolle.

Eine kontinuierliche Gruppe G ist gewöhnlich gegeben als transitive Transformationsgruppe einer Mannigfaltigkeit W , des "Wirkungsraumes" ("espace homogène") [9]. Diejenigen Transformationen, die einen bestimmten Punkt von W festhalten, bilden eine Untergruppe U von G , die sogenannte "Isotropiegruppe" von W , die bis auf innere Automorphismen von G unabhängig von der Wahl des festen Punktes ist. Die Nebengruppen, in welche G nach U zerfällt, stehen in eindeutiger und stetiger Beziehung zu den Punkten von W ; geometrisch gesehen liegt eine "Faserung" von G in die (untereinander homomorphen) Nebengruppen von U vor [10].

Eines der Hauptprobleme der weiteren Theorie besteht nun in der Untersuchung der Beziehungen zwischen G , U und W . Einerseits ist das der natürliche Ansatzpunkt zur Untersuchung einer als Transformationsgruppe gegebenen Gruppe; andererseits sind die Wirkungsräume, also die Mannigfaltigkeiten, die transitive Transformationsgruppen zulassen, an und für sich interessant. Hier hat man nun Möglichkeiten, wenn man die Sätze der Kap. I und II dieser Arbeit verknüpft mit topologischen Sätzen über die Faserungen von Mannigfaltigkeiten. Dazu werden in Kap. III und IV einige Beiträge geliefert.

Das Kap. III behandelt den Fall, dass der Wirkungsraum W eine Sphäre ist. Das Ergebnis ist, dass man auf eine sehr einfache Weise aus dem Homologie-Ring der Isotropiegruppe U und der Dimension der Wirkungs-Sphäre W den Ring der Gruppe G bestimmen kann. Dieser allgemeine Satz gibt mühelos durch eine Rekursion die Pontrjagin-Brauer'schen Resultate über die Ringe der "klassischen" Gruppen; denn diese Gruppen sind bekanntlich transitive Transformationsgruppen von Sphären, und die zugehörigen Isotropiegruppen sind auch klassische Gruppen.

Im Kap. IV werden die Beziehungen zwischen G , U und W ohne spezielle Voraussetzungen über W untersucht. Unter anderem wird der Satz bewiesen: Ist U nicht homolog 0 in G , dann ist der Homologie-Ring von G isomorph dem Ring des topologischen Produktes von U und W . Dabei ergibt sich noch: Ein Wirkungsraum W , dessen Isotropiegruppe U nicht homolog 0 in der Gruppe G ist, hat den gleichen Ring wie ein gewisses Produkt von Sphären ungerader Dimensionen. Das ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Hopf über den Ring einer Gruppen-Mannigfaltigkeit (eine Gruppe lässt sich auffassen als Wirkungsraum, dessen Isotropiegruppe ein Punkt ist, und ein Punkt ist nie homolog 0).

KAPITEL I

EIN SATZ ÜBER GRUPPEN-MANNIGFALTIGKEITEN

Die §§1 und 2 enthalten eine geeignete Zusammenstellung bekannter Dinge (im wesentlichen ohne Beweise) und einen Bericht über eine Arbeit von Hopf über Gruppenmannigfaltigkeiten, auf die sich die vorliegende Arbeit stützt. In §3 wird ein allgemeiner Satz über Gruppenmannigfaltigkeiten bewiesen.

1. Der Homologie-Ring einer Mannigfaltigkeit. Irreduzible Erzeugendensysteme, maximale und minimale Elemente

1. M sei eine geschlossene, orientierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n . Die Homologieklassen von M , die Elemente der Betti'schen Gruppe $\mathfrak{B}(M)$, bilden einen Ring, den Homologie- oder Schnitttring $\mathfrak{H}(M)$, wenn man die Addition durch die Addition in der Betti'schen Gruppe und das Produkt durch die Schnittbildung erklärt [11]. *Dabei sollen in dieser Arbeit immer die rationalen Zahlen als Koeffizienten dienen.*

$\mathfrak{H}(M)$ enthält ein Eins-Element, nämlich den orientierten n -dimensionalen Grundzyklus von M ; es wird mit 1 bezeichnet. Die Dimension eines homogen-dimensionalen Elementes z von $\mathfrak{H}(M)$ bezeichnen wir mit $d(z)$; die Zahl $\delta(z) = n - d(z)$ heiße die duale Dimension von z . Das Null-Element 0 hat jede Dimension.

Für homogen-dimensionale Elemente z, z' ist auch das Produkt oder der Schnitt $z \cdot z'$ homogen-dimensional und zwar gilt:

$$\delta(z \cdot z') = \delta(z) + \delta(z').$$

Weiter ist:

$$z \cdot z' = (-1)^{\delta(z) \cdot \delta(z')} z' \cdot z,$$

also speziell:

$$z \cdot z = 0 \quad \text{bei ungeradem } \delta(z).$$

Die rationalen Vielfachen der 1 heissen die Skalare.

Wo im folgenden Homologieklassen auftreten, sollen sie immer, wenn nicht anders bemerkt, homogen-dimensional sein.

2. $\mathfrak{B}_r(M)$, oder kurz $\mathfrak{B}_r$, sei die r -te Betti'sche Gruppe von M , also die additive Gruppe der r -dimensionalen Elemente von $\mathfrak{H}(M)$; ihr Rang p_r ist die r -te Betti'sche Zahl von M . Die volle Betti'sche Gruppe $\mathfrak{B}(M)$ ist die direkte Summe

$$\mathfrak{B}_0(M) + \mathfrak{B}_1(M) + \dots + \mathfrak{B}_n(M).$$

Für $r < n$ sei $\mathfrak{U}_r$ die Gruppe derjenigen Elemente von $\mathfrak{B}_r$, die sich aus den Elementen der Gruppen

$$\mathfrak{B}_{n-1}, \mathfrak{B}_{n-2}, \dots, \mathfrak{B}_{r+1}$$

durch Multiplikation und Addition erzeugen lassen (vgl. [7], Nr. 30), die sich also als $\sum x_h \cdot y_h$ mit $\delta(x_h) > 0$ und $\delta(y_h) > 0$ schreiben lassen; die Elemente von $\mathfrak{U}_r$ heissen "zusammengesetzt."

Ein nicht-skalares Element heisst maximal, wenn es nicht zusammengesetzt ist, wenn es sich also nicht als Summe von Produkten von höherdimensionalen Elementen darstellen lässt. Ist z maximal und w zusammengesetzt, dann ist auch $z + w$ maximal, weil $\mathfrak{U}_r$ eine Gruppe ist. Die Skalare werden nicht als maximal angesehen; die höchstdimensionalen unter den nicht-skalaren, nicht-verschwindenden Elementen sind immer maximal.

Man stelle $\mathfrak{B}_r$ als direkte Summe $\mathfrak{U}_r + \mathfrak{Z}_r$ dar; das ist möglich, weil die rationalen Zahlen als Koeffizienten dienen. Die Elemente von $\mathfrak{Z}_r$ sind dann maximal. Wählt man in jeder Gruppe $\mathfrak{Z}_r$ eine Basis, so bildet die Gesamtheit dieser Basis-elemente mit der 1 zusammen, wie man leicht sieht, ein Erzeugendensystem des Ringes $\mathfrak{R}(M)$; d.h.: jedes Element von $\mathfrak{R}(M)$ lässt sich als Polynom in den Elementen dieses Systems schreiben. Man bestätigt auch leicht, dass ein irreduzibles Erzeugendensystem vorliegt, d.h. dass kein echtes Teilsystem ein Erzeugendensystem ist.

Der Rang der Gruppe $\mathfrak{Z}_{n-r}$, also auch der Rang der Restklassengruppe $\mathfrak{B}_{n-r} - \mathfrak{U}_{n-r}$, werde l_r genannt. (Rang = Maximalzahl linear unabhängiger Elemente.) Man stellt fest, dass die nicht-skalaren Elemente eines beliebigen irreduziblen Erzeugendensystems $(1, z_1, z_2, \dots, z_l)$ von $\mathfrak{R}(M)$ maximal sind, und dass die Zahl derjenigen z_i , für die $\delta(z_i) = r$ ist, immer gleich l_r ist; die Anzahl der Elemente eines solchen Systems (ohne die 1) ist also immer

$$l = l_1 + l_2 + \dots + l_n. \quad ([7], \text{Nr. 31})$$

Ersetzt man die Elemente z_i eines solchen Systems durch $z_i + y_i$, wo die Elemente y_i nicht maximal sind, so erhält man wieder ein irreduzibles Erzeugendensystem; das kommt daher, dass die z_i Repräsentanten für die Restklassengruppe $\mathfrak{B}_r - \mathfrak{U}_r$ sind.

3. Unter den Vielfachen $x \cdot v$ eines Elementes v von $\mathfrak{R}(M)$, wo x alle Elemente von $\mathfrak{R}(M)$ durchläuft, treten immer auf:

a) die rationalen Vielfachen von v , deren Dimension gleich der von v ist—man setze für x einen beliebigen Skalar ein—und

b) alle null-dimensionalen Elemente, d.h. der Punkt mit einem beliebigen Koeffizienten, wenn $v \neq 0$ ist—wegen des Poincaré-Veblen'schen Dualitätssatzes.

Wir definieren nun:

Ein Element v von $\mathfrak{R}(M)$ heisst minimal, wenn es keine anderen Vielfachen besitzt, d. h. wenn aus $0 < d(x \cdot v) < d(v)$ folgt: $x \cdot v = 0$. (Statt $0 < d(x \cdot v) < d(v)$ kann man auch sagen: $0 < \delta(x) < d(v)$.) (Vgl. [7], Nr. 32)

Die nulldimensionalen Elemente gelten nicht als minimal, so wie die n -dimensionalen Elemente nicht als maximal gelten. Dagegen ist die Null minimal.

Es gilt der folgende Satz:

Das s -dimensionale Element v ist dann und nur dann minimal, wenn es ein

Annulator der Gruppe $\mathfrak{U}_{n-s}$ ist, d.h. wenn $u \cdot v = 0$ ist für jedes Element u von $\mathfrak{U}_{n-s}$ ($s = 1, \dots, n$) ([7], Nr. 33). Daraus entnimmt man: die s -dimensionalen minimalen Elemente bilden eine additive Gruppe $\mathfrak{B}_s$, eine Untergruppe von $\mathfrak{B}_s$. Aus dem Poincaré-Verblen'schen Dualitätssatz folgt leicht, dass der Rang von $\mathfrak{B}_s$ gleich l_s ist, nämlich gleich dem Rang von $\mathfrak{Z}_{n-s}$ in der direkten Summe $\mathfrak{B}_{n-s} = \mathfrak{U}_{n-s} + \mathfrak{Z}_{n-s}$; $\mathfrak{B}_s$ und $\mathfrak{Z}_{n-s}$ sind gewissermassen dual zueinander. Die direkte Summe $\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 + \dots + \mathfrak{B}_n$ aller dieser Gruppen heisst die Gruppe der minimalen Elemente von $\mathfrak{R}(M)$; sie wird mit $\mathfrak{B}(M)$, oder kurz mit $\mathfrak{B}$ bezeichnet. Ihr Rang ist

$$l = l_1 + l_2 + \dots + l_n.$$

4. M und M' seien zwei Mannigfaltigkeiten, f eine Abbildung von M in M' .³ f bildet den Ring $\mathfrak{R}(M)$ in den Ring $\mathfrak{R}(M')$ ab. Dann gilt der wichtige Invarianzsatz:

Ist v ein minimales Element von $\mathfrak{R}(M)$, so ist sein Bild $f(v)$ ein minimales Element von $\mathfrak{R}(M')$. ([7], Nr. 34)

Eine spezielle Folgerung hieraus ist:

Ein Element von $\mathfrak{R}(M)$, das durch das stetige Bild einer Sphäre S_n ($n > 0$) repräsentiert wird, ist ein minimales Element. Denn in $\mathfrak{R}(S_n)$ ist der Grundzyklus S_n —die 1 von $\mathfrak{R}(S_n)$ —minimal.

5. M und M' seien zwei geschlossene, orientierbare Mannigfaltigkeiten; f sei eine Abbildung von M in M' . Durch f wird eine Abbildung von $\mathfrak{R}(M)$ in $\mathfrak{R}(M')$ bewirkt, die auch f heisse; sie ist additiv, aber im allgemeinen nicht multiplikativ homomorph. Dann existiert eine Abbildung φ von $\mathfrak{R}(M')$ in $\mathfrak{R}(M)$ —der Umkehrungshomomorphismus—mit folgenden Eigenschaften: [12]

1) φ ist ein Ring-Homomorphismus, also additiv und multiplikativ homomorph,

2) φ ist mit f durch die Funktionalgleichung

$$f(\varphi(z') \cdot x) = z' \cdot f(x)$$

verknüpft, in der x ein beliebiges Element von $\mathfrak{R}(M)$ und z' ein beliebiges Element von $\mathfrak{R}(M')$ ist,

3) ist z' ein homogen-dimensionales Element von $\mathfrak{R}(M')$, so ist auch $\varphi(z')$ homogen-dimensional, und zwar ist

$$\delta(\varphi(z')) = \delta(z'),$$

anders geschrieben:

$$d(\varphi(z')) = d(z') + d(M) - d(M').$$

(Vgl. [7], Nr. 25) Mit Hilfe dieser Eigenschaften lässt sich allgemein bei gegebener Abbildung f , bzw. φ , die Abbildung φ , bzw. f , anschreiben; wir werden

³ Alle in dieser Arbeit vorkommenden Abbildungen sind eindeutig und stetig.

jedoch diese Beziehung, die wir nur in spezieller Weise brauchen, jedesmal direkt ableiten.

6. Es soll jetzt noch ein Hilfssatz abgeleitet werden, der später gebraucht wird. Es sei z_0 , bzw. z'_0 , der einfach gezählte Punkt von M , bzw. M' .

HILFSSATZ: Ist $\varphi(z'_0) \neq 0$, so ist f eine Abbildung von $\mathfrak{R}(M)$ auf $\mathfrak{R}(M')$.

Es sei also $\varphi(z'_0) \neq 0$; wir zeigen zunächst: Ist x' von Null verschieden, dann ist auch $\varphi(x')$ nicht Null. Weil x' nicht Null ist, gibt es ein duales y' mit $y' \cdot x' = z'_0$. Wegen der Multiplikativität von φ ist $\varphi(y') \cdot \varphi(x') = \varphi(y' \cdot x') = \varphi(z'_0) \neq 0$. Also ist auch $\varphi(x') \neq 0$. Die Gruppe derjenigen Elemente von $\mathfrak{B}(M')$, die bei der Abbildung f als Bilder von Elementen von $\mathfrak{B}(M)$ auftreten, die Bildgruppe $f(\mathfrak{B}(M))$, hat dann die folgende Eigenschaft:

Sie enthält zu einem beliebigen Element $x' (\neq 0)$ von $\mathfrak{B}(M')$ ein Element y' mit $x' \cdot y' = z'_0$.

Denn aus $x' \neq 0$ folgt $\varphi(x') \neq 0$; also gibt es ein y so, dass $\varphi(x') \cdot y = z_0$ ist; übt man auf diese Gleichung f aus und beachtet die Funktionalgleichung für φ , so erhält man $x' \cdot f(y) = z'_0$. Die Behauptung ist also mit $y' = f(y)$ erfüllt.

Aber aus dieser Eigenschaft der Bildgruppe folgt nach dem Poincaré-Veblen'schen Dualitätssatz sofort, dass die Bildgruppe mit $\mathfrak{B}(M')$ zusammenfällt, was zu beweisen war.

7. Zu zwei Mannigfaltigkeiten M und M' gehört die Produktmannigfaltigkeit $M \times M'$. Ueber die Homologieeigenschaften von $M \times M'$ ist bekannt [13] (vgl. [7], Nr. 19):

Zu jedem Element x von $\mathfrak{R}(M)$ und jedem Element x' von $\mathfrak{R}(M')$ gehört ein Element $x \times x'$ von $\mathfrak{R}(M \times M')$; diese Produktbildung ist mit der Addition distributiv verknüpft; es gilt: $d(x \times x') = d(x) + d(x')$.

Jedes Element von $\mathfrak{R}(M \times M')$ lässt sich als $\sum (x_h \times x'_h)$ darstellen; genauer gilt: Ist $(Z_1, Z_2, \dots, Z_p)$ eine additive Basis von $\mathfrak{R}(M)$ —d.h. eine Basis von $\mathfrak{B}(M)$ —und ist $(Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_p)$ eine additive Basis von $\mathfrak{R}(M')$, so bilden die Elemente $Z_i \times Z'_k$ eine additive Basis in $\mathfrak{R}(M \times M')$; die Elemente von $\mathfrak{R}(M \times M')$ lassen sich in eindeutiger Weise als $\sum t_{ik}(Z_i \times Z'_k)$ mit rationalen Koeffizienten t_{ik} schreiben. (All das gilt auch für den Produktkomplex zweier Komplexe.)

Für die Multiplikation gilt [14]:

$$(x \times x') \cdot (y \times y') = (-1)^{\delta(x) \cdot \delta(y')} (x \cdot y \times x' \cdot y');$$

dabei müssen x und y' homogen-dimensional sein. Ausserdem gelten die üblichen distributiven Gesetze.

8. Der folgende Abbildungssatz für topologische Produkte wird später öfters verwendet:

A, B, A', B' seien Mannigfaltigkeiten; f sei eine Abbildung von A in A' , g sei eine Abbildung von B in B' . Man konstruiert eine Abbildung h von $A \times B$ in $A' \times B'$, indem man setzt:

$$h(p \times q) = f(p) \times g(q).$$

Ist dann x , bzw. y , ein Homologieelement von A , bzw. B , so gilt:

$$h(x \times y) = f(x) \times g(y).$$

Man beweist das, indem man f und g simplizial approximiert. Ist dann a , bzw. b , ein Simplex von A , bzw. B , so ist das Bild der Zelle $a \times b$ die Zelle $f(a) \times g(b)$:

$$h(a \times b) = f(a) \times g(b);$$

denn beide Zellen rechts und links haben dieselben Eckpunkte, und auch die Orientierung stimmt überein, wie man leicht sieht. Durch Addition gewinnt man die Formel dann für Komplexe, Zyklen und Homologieklassen.

9. Wie man ganz leicht sieht, besteht die Gruppe $\mathfrak{B}(M \times M')$ der minimalen Elemente von $M \times M'$ genau aus den Elementen $(v \times z'_0) + (z_0 \times v')$, wo z_0 , bzw. z'_0 , der einfach gezählte Punkt von M , bzw. M' , ist und v , bzw. v' , ein beliebiges Element von $\mathfrak{B}(M)$, bzw. $\mathfrak{B}(M')$, ist.

2. Der Ring einer Gruppen-Mannigfaltigkeit

1. G sei eine geschlossene Gruppen-Mannigfaltigkeit, also eine geschlossene Mannigfaltigkeit (der Dimension n), zwischen deren Punkten eine Multiplikation erklärt ist, die die bekannten Gruppenaxiome erfüllt, und die die weitere Eigenschaft hat, dass das Produkt pq zweier Punkte p, q von G stetig von dem Paar (p, q) abhängt, und ebenso das Inverse p^{-1} stetig von p abhängt. (Gruppenmannigfaltigkeiten sind bekanntlich orientierbar.)

Ueber den Homologie-Ring von G ist der folgende Satz bekannt ([7], Nr. 2):

Satz A. *Der Ring $\mathfrak{R}(G)$ (mit rationalen Koeffizienten) einer Gruppen-Mannigfaltigkeit G ist dimensionstreu isomorph dem Ring $\mathfrak{R}(\Pi)$ eines topologischen Produktes*

$$\Pi = S_{m_1} \times S_{m_2} \times \dots \times S_{m_l}, \quad l \geq 1,$$

wo S_m die m -dimensionale Sphäre bezeichnet, und die Dimensionen m_i ungerade sind.

2. Der Beweis dieses Satzes verläuft so, dass man zeigt: Bilden die Elemente $z_1, z_2, \dots, z_l$ mit der 1 zusammen ein irreduzibles Erzeugendensystem von $\mathfrak{R}(G)$, dann ist

- a) das Produkt $z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_l$ von Null verschieden,
- b) $\delta(z_i) = m_i$ ungerade ($i = 1, \dots, l$) ([7], Nr. 15).

Daraus folgert man: Es ist

$$z_i \cdot z_k = -z_k \cdot z_i, \quad \text{speziell} \quad z_i \cdot z_i = 0;$$

und eine volle additive Basis von $\mathfrak{R}(G)$ (eine Basis von $\mathfrak{B}(G)$) wird gebildet von den 2^l Elementen

$$1, z_i, z_{i_1} \cdot z_{i_2} \ (i_1 < i_2), z_{i_1} \cdot z_{i_2} \cdot z_{i_3} \ (i_1 < i_2 < i_3), \dots, z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_l.$$

Diese Basis, die also durch das irreduzible Erzeugendensystem $(1, z_1, z_2, \dots, z_l)$ bestimmt ist, heiße die Basis $[z_i]$.

Sind x, y zwei Elemente ($\neq 1$) dieser Basis, so ist $x \cdot y \neq 0$, wenn kein Element z_i in beiden Elementen zugleich als Faktor auftritt, dagegen ist $x \cdot y = 0$, wenn wenigstens ein z_i in beiden Elementen als Faktor auftritt, wie man leicht mit Hilfe der Assoziativität, der Antikommutativität der Elemente z_i und der Tatsache $z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_l \neq 0$ bestätigt. Man kann $\mathfrak{R}(G)$ als den Ring der inhomogenen Multilinearformen in den antikommutativen Grssen $z_1, z_2, \dots, z_l$ beschreiben. Die Dimension von G ist

$$n = m_1 + m_2 + \dots + m_l.$$

Das Produkt $z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_l$ ist nulldimensional; man kann annehmen, dass es gleich dem einfach gezählten Punkt von G ist, der v_0 heissen soll (man kann nämlich etwa z_1 durch ein geeignetes rationales Vielfaches ersetzen).

Die Isomorphie zwischen $\mathfrak{R}(G)$ und $\mathfrak{R}(\Pi)$ wird folgendermassen hergestellt: Der orientierte Grundzyklus der Sphäre S_m werde auch mit S_m bezeichnet; p sei ein einfach gezählter Punkt von S_m . Man bilde die Elemente

$$Z_1 = p \times S_{m_2} \times S_{m_3} \times \dots \times S_{m_l}$$

$$Z_2 = S_{m_1} \times p \times S_{m_3} \times \dots \times S_{m_l}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$Z_l = S_{m_1} \times S_{m_2} \times S_{m_3} \times \dots \times p$$

von $\mathfrak{R}(\Pi)$. Die Z_i haben auch die Eigenschaften a) und b); die Zuordnung $z_i \leftrightarrow Z_i$ ergibt offenbar einen Isomorphismus von $\mathfrak{R}(G)$ und $\mathfrak{R}(\Pi)$.

Die Elemente z_i sind maximal, weil sie zu einem irreduziblen Erzeugendensystem gehören (§1, Nr. 2).

Ein Produkt $z_{i_1} \cdot z_{i_2} \cdot \dots \cdot z_{i_r}$ ist durch seine Faktoren bis auf das Vorzeichen bestimmt; in diesem Sinne kann man von *dem* Produkt der z_{i_k} sprechen, ohne auf ihre Reihenfolge zu achten.

3. Die Gruppe $\mathfrak{B}(G)$ der minimalen Elemente von $\mathfrak{R}(G)$ lässt sich leicht bestimmen. Von den Elementen der Basis $[z_i]$ sind minimal die und nur die, die Produkte von $l - 1$ Faktoren z_i sind, also die Elemente

$$v_i = z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_{i-1} \cdot z_{i+1} \cdot \dots \cdot z_l.$$

Denn ist x ein Element dieser Basis, das Produkt von höchstens $l - 2$ Faktoren z_i ist, also mindestens zwei der z_i , etwa z_r und z_s , nicht als Faktoren enthält, so ist $z_r \cdot x \neq 0$ und $0 < d(z_r \cdot x) < d(x)$, also x nicht minimal. Dagegen ist $y \cdot v_i = 0$ für jedes von z_i und 1 verschiedene Basiselement y , weil y dann mindestens einen Faktor z_k enthält, der auch in v_i vorkommt; aus $0 < \delta(y) < d(v_i)$ folgt also $y \cdot v_i = 0$ (denn wegen $\delta(z_i) = d(v_i)$ ist dann $y \neq z_i$); also ist v_i minimal. Mit derselben Ueberlegung stellt man fest, dass die von den Elementen v_i

Ist nämlich $x = z_{i_1} \cdot z_{i_2} \cdot \dots \cdot z_{i_r}$ ein beliebiges dieser Elemente, und ist $\bar{x} = z_{j_1} \cdot z_{j_2} \cdot \dots \cdot z_{j_l}$, das Produkt derjenigen z_i , die in x nicht als Faktoren auftreten, so ist $\bar{x} \cdot x = \pm v_0$; ist aber y ein von $\bar{x}$ verschiedenes Element der Basis $[z_i]$ mit $d(y) = d(\bar{x})$, so ist $y \cdot x = 0$, weil y mindestens einen Faktor z_i enthält, der auch in x vorkommt.

In Nr. 2 sind wir ausgegangen von einem beliebigen irreduziblen Erzeugendensystem $(z_1, z_2, \dots, z_l, 1)$ von $\mathfrak{R}(G)$; nach Nr. 3 sind den z_i die minimalen Elemente v_i zugeordnet, die eine Basis von $\mathfrak{B}(G)$ bilden. Man sieht ganz leicht, dass man auf diese Weise, d.h. durch geeignete Wahl der z_i , jede Basis von $\mathfrak{B}(G)$ erhalten kann (mit der unwesentlichen Einschränkung, dass man, wegen der Bedingung $z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_l = v_0$, nur solche Basen von $\mathfrak{B}(G)$ bekommt, die durch eine lineare Transformation mit der Determinante 1 auseinander hervorgehen; das bedeutet nur, dass man eventuell v_1 durch ein rationales Vielfaches ersetzen muss.). Das beweist man z.B. mit Hilfe der Bemerkung, dass die Gleichungen $z_i \cdot v_k = \delta_{ik} v_0$, durch die bei gegebenen z_i die v_i vollständig bestimmt sind, invariant bleiben, wenn man auf die z_i und die v_i kontragrediente lineare Transformationen ausübt.

Man nehme die zu einem beliebigen irreduziblen Erzeugendensystem $(z_1, z_2, \dots, z_l, 1)$ von $\mathfrak{R}(G)$ gehörenden minimalen Elemente v_i in eine sonst beliebige Basis von $\mathfrak{B}(G)$ auf. Dann ist das zu v_i duale Element z'_i der dualen Basis von der Form $z'_i = z_i + y_i$ mit nichtmaximalem y_i ; das bestätigt man leicht auf Grund der Tatsache, dass $z_i \cdot v_i = v_0$ ist, dass aber für jedes von z_i und 1 verschiedene Element x der Basis $[z_i]$ der Schnitt $x \cdot v_i$ gleich Null ist. Diese Elemente z'_i bilden ebenfalls mit 1 zusammen ein irreduzibles Erzeugendensystem von $\mathfrak{R}(G)$; sie besitzen auch die Eigenschaften a) und b) (§1, Nr. 2); es ist nämlich $\delta(z'_i) = \delta(z_i)$ und $z'_1 \cdot z'_2 \cdot \dots \cdot z'_l = z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_l$; aus den Gleichungen $z_i \cdot v_k = \delta_{ik} v_0$ folgen ohne weiteres die Gleichungen $z'_i \cdot v_k = \delta_{ik} v_0$.

3. Der Pontrjagin'sche Ring und der "Aufspann-Satz"

1. G sei, wie in §1, eine (geschlossene) Gruppenmannigfaltigkeit. Die Multiplikation in G , die jedem Punktepaar (p, q) von G den Punkt $p \cdot q$ zuordnet, kann man auffassen als eine Abbildung F des topologischen Produktes $G \times G$ zweier Exemplare von G in G , die definiert ist durch:

$$F(p \times q) = p \cdot q.$$

Sind x, y zwei Homologieklassen von G , so wollen wir unter dem Pontrjagin'schen Produkt [3] (kürzer: P -Produkt) von x und y das Bild des Elementes $x \times y$ von $\mathfrak{R}(G \times G)$ bei F verstehen; wir bezeichnen es mit $x \circ y$; also:

$$F(x \times y) = x \circ y.$$

Anschaulich, aber etwas unscharf, kann man das so sagen: Durchläuft der Punkt p den Zyklus x , und der Punkt q den Zyklus y , dann durchläuft der Punkt pq den Zyklus $x \circ y$.

Es ist $d(x \circ y) = d(x) + d(y)$.

Wegen des Assoziativgesetzes in G ist diese Multiplikation auch assoziativ; für drei Homologieelemente x_1, x_2, x_3 gilt:

$$(x_1 \circ x_2) \circ x_3 = x_1 \circ (x_2 \circ x_3).$$

Das P -Produkt ist mit der Addition distributiv verknüpft, wie man sofort sieht.

Das bedeutet: *Man kann die Betti'sche Gruppe $\mathfrak{B}(G)$ nicht nur durch die Schnittbildung $x \cdot y$ zu einem Ring $\mathfrak{R}(G)$, sondern auch durch die Pontrjagin'sche Produktbildung $x \circ y$ zu einem Ring $\mathfrak{P}(G)$, dem Pontrjagin'schen Ring von G , machen.*

Auf den Ring $\mathfrak{P}(G)$ kann man die üblichen algebraischen Begriffe anwenden; sind $x_1, x_2, \dots, x_r$ irgendwelche Elemente von $\mathfrak{P}(G)$, so ist klar, was man unter dem von den x_i erzeugten Pontrjagin'schen Teilring und was man unter dem von den x_i erzeugten Pontrjagin'schen Ideal (Rechts-, Links-, oder zweiseitig) zu verstehen hat.

(Jedes von homogen-dimensionalen x_i erzeugte Ideal in $\mathfrak{R}(G)$ ist übrigens zweiseitig, wegen der Regel $x \cdot y = \pm y \cdot x$ für homogen-dimensionale x, y ; es wird sich zeigen, dass das auch in $\mathfrak{P}(G)$ so ist.)

Der Ring $\mathfrak{P}(G)$ besitzt eine Eins, nämlich das nulldimensionale Element v_0 , das man etwa durch den einfach gezählten Einheitspunkt e , das Gruppen-Einselement von G , repräsentieren kann; denn wegen $F(e \times p) = ep = p$ für jeden Punkt p von G ist offenbar $F(v_0 \times x) = x$ für jedes Element x von $\mathfrak{P}(G)$, und ebenso ist $F(x \times v_0) = x$, d.h.:

$$v_0 \circ x = x \circ v_0 = x.$$

2. Der Ring $\mathfrak{P}(G)$ und sein Verhältnis zu dem Ring $\mathfrak{R}(G)$ soll nun untersucht werden.

Die Pontrjagin'schen Untersuchungen [3] haben ergeben, dass für die Gruppen der bekannten vier Killing-Cartan'schen Klassen die Ringe $\mathfrak{R}(G)$ und $\mathfrak{P}(G)$ ein ganz bestimmtes, in gewissem Sinn duales, Verhalten aufweisen. Von Cartan [15] und in anderer Form von Hopf [16] ist die Vermutung ausgesprochen worden, dass diese Dualität den Ringen $\mathfrak{R}(G)$ und $\mathfrak{P}(G)$ aller (geschlossener) Gruppenmannigfaltigkeiten zukomme. Diese Vermutung wollen wir im folgenden beweisen. Satz I ist die Cartan'sche, Satz I' die Hopf'sche Formulierung der Vermutung. Aus Gründen, die bei der Formulierung und beim Beweis der Vermutung, besonders in der Form I', klar werden werden, wollen wir die zu beweisende Tatsache den "Aufspann-Satz" nennen. Die Cartan'sche Formulierung ist [15]:

SATZ I. G sei eine geschlossene Gruppen-Mannigfaltigkeit der Dimension n , vom Rang l .

a) Dann gibt es im Ring $\mathfrak{P}(G)$ (mit rationalen Koeffizienten) l Elemente $v_1, v_2, \dots, v_l$ ungerader Dimensionen, für die gilt:

$$v_i \circ v_k = -v_k \circ v_i \quad \text{und} \quad v_i \circ v_i = 0;$$

die $2^l - 1$ Elemente

$$v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r} \quad (i_1 < i_2 < \dots < i_r)$$

bilden mit dem Punkt v_0 zusammen eine volle Betti'sche Basis (Basis der Betti'schen Gruppe $\mathfrak{B}(G)$).

b) Sind $w_1 = v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r}$ und $w_2 = v_{j_1} \circ v_{j_2} \circ \dots \circ v_{j_s}$ zwei solche Basiselemente, so ist der Schnitt $w_1 \cdot w_2$ gleich Null, wenn eines der Elemente v_i weder in dem Produkt w_1 noch in dem Produkt w_2 als Faktor vorkommt; kommt jedes v_i entweder in w_1 oder in w_2 oder in beiden als Faktor vor, dann ist der Schnitt $w_1 \cdot w_2$ (bis auf das Vorzeichen) gleich dem Produkt $v_{k_1} \circ v_{k_2} \circ \dots \circ v_{k_t}$ ($k_1 < k_2 < \dots < k_t$) derjenigen v_i , die sowohl in w_1 als auch in w_2 als Faktor auftreten, oder, falls kein v_i sowohl in w_1 als auch in w_2 vorkommt, gleich v_0 .

Teil a) von Satz I beschreibt den Ring $\mathfrak{B}(G)$; die Elemente v_i sind antikommutativ und bilden ein irreduzibles Erzeugendensystem von $\mathfrak{B}(G)$; aus dem Beweis wird hervorgehen, dass man für diese Elemente v_i die Elemente einer beliebigen Basis der Gruppe $\mathfrak{B}(G)$ der minimalen Elemente von $\mathfrak{R}(G)$ wählen darf. Die in I a) genannte Basis von $\mathfrak{B}(G)$ wollen wir die Basis $\langle v_i \rangle$ nennen; sie ist durch die Elemente v_i bestimmt.

Teil b) enthält die Beziehung zwischen $\mathfrak{R}(G)$ und $\mathfrak{B}(G)$; denn b) bestimmt den Schnitt zweier beliebiger Elemente von $\mathfrak{B}(G)$. Diese Beziehung tritt klarer hervor in der Hopf'schen Formulierung des Satzes I, die durch den Satz I' gegeben wird. Dazu ist eine Vorbereitung nötig.

3. $\Pi = S_{m_1} \times S_{m_2} \times S_{m_3} \times \dots \times S_{m_l}$ sei ein Produkt von Sphären S_{m_i} der Dimensionen m_i . Z_i und V_i seien die in §2, Nr. 2 u. 3 definierten maximalen und minimalen Elemente von $\mathfrak{R}(\Pi)$.

In $\mathfrak{B}(\Pi)$ lässt sich neben der Schnittbildung in naheliegender Weise noch eine zweite Multiplikation, das "Aufspannen," erklären [16]. Das Produkt zweier Elemente X, Y von $\mathfrak{B}(\Pi)$ wird mit $X \boxtimes Y$ bezeichnet; die Definition geschieht folgendermassen:

Für $i_1 < i_2 < \dots < i_r$ ist $V_{i_1} \boxtimes V_{i_2} \boxtimes \dots \boxtimes V_{i_r}$ dasjenige Element $x_1 \times x_2 \times \dots \times x_l$ von $\mathfrak{B}(\Pi)$, in dem

$$\begin{aligned} x_j &= S_{m_j} \quad \text{für } j = i_1, i_2, \dots, i_r \text{ und} \\ x_j &= p \quad \text{für alle anderen } j \end{aligned}$$

ist. Das sind mit dem Punkt V_0 zusammen 2^l Elemente, die eine volle Betti'sche Basis von $\mathfrak{B}(\Pi)$ bilden.

Für zwei solche Elemente

$$X = V_{i_1} \boxtimes V_{i_2} \boxtimes \dots \boxtimes V_{i_r}, \quad Y = V_{j_1} \boxtimes V_{j_2} \boxtimes \dots \boxtimes V_{j_s}$$

wird das "aufgespannte" Element $X \boxtimes Y$ dadurch definiert, dass man die rechten Seiten nach dem assoziativen Gesetz miteinander multipliziert und die Regeln

$$V_i \boxtimes V_k = (-1)^{m_i \cdot m_k} V_k \boxtimes V_i, \quad V_i \boxtimes V_i = 0$$

($m_i = d(V_i)$) anwendet; dann wird $X \boxtimes Y$ entweder $= 0$ oder (bis auf das Vorzeichen) eins der oben genannten Basiselemente. Für beliebige Elemente

von $\mathfrak{B}(\Pi)$ definiert man das Produkt, indem man sie durch die Elemente dieser Basis darstellt und die distributiven Gesetze anwendet. Es ist $d(X \boxtimes Y) = d(X) + d(Y)$.

Durch diese Multiplikation wird die Betti'sche Gruppe $\mathfrak{B}(\Pi)$ zu einem Ring $\mathfrak{Q}(\Pi)$. Es existiert eine Eins:

$$V_0 = p \times p \times \cdots \times p.$$

Die Ringe $\mathfrak{R}(\Pi)$ und $\mathfrak{Q}(\Pi)$ sind isomorph; die Isomorphie bekommt man, wenn man die Erzeugenden Z_i von $\mathfrak{R}(\Pi)$ den Erzeugenden V_i von $\mathfrak{Q}(\Pi)$ zuordnet.

Es besteht aber weiter eine gewisse Dualität; es gilt nämlich die folgende "Formel (Δ)":

$$(\Delta) \quad Z_{i_1} \cdot Z_{i_2} \cdot \cdots \cdot Z_{i_r} = \pm V_{j_1} \boxtimes V_{j_2} \boxtimes \cdots \boxtimes V_{j_{l-r}},$$

wenn die Mengen $\{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ und $\{j_1, j_2, \dots, j_{l-r}\}$ komplementäre Teilmengen der Menge der Zahlen von 1 bis l sind. Beide Seiten bedeuten nämlich dasjenige Element $x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_l$ von $\mathfrak{B}(\Pi)$, in dem

$$x_j = S_{m_j} \quad \text{für } j = j_1, j_2, \dots, j_{l-r} \text{ und}$$

$$x_i = p \quad \text{für } i = i_1, i_2, \dots, i_r$$

ist. Das Vorzeichen hängt auf gewisse Weise von den Indizes ab.

Mit Hilfe dieser Formel (Δ) lässt sich jedes Element von $\mathfrak{B}(\Pi)$ sowohl als Element von $\mathfrak{R}(\Pi)$ als auch als Element von $\mathfrak{Q}(\Pi)$ schreiben. Infolgedessen kann man den Schnitt $X \cdot Y$ zweier beliebiger Elemente X, Y von $\mathfrak{Q}(\Pi)$ und das Produkt $X \boxtimes Y$ zweier beliebiger Elemente X, Y von $\mathfrak{R}(\Pi)$ berechnen; die Formel (Δ) bestimmt die Beziehung zwischen $\mathfrak{R}(\Pi)$ und $\mathfrak{Q}(\Pi)$ vollkommen.

4. Der Satz I' lautet nun folgendermassen [16]:

SATZ I'. Die auf Grund von Satz A mögliche, isomorphe Abbildung der Ringe $\mathfrak{R}(G)$ und $\mathfrak{R}(\Pi)$ (wo Π ein gewisses Sphärenprodukt ist) lässt sich so wählen, dass zugleich die Ringe $\mathfrak{P}(G)$ und $\mathfrak{Q}(\Pi)$ isomorph aufeinander abgebildet werden.

Der Beweis für die Sätze I und I' wird in den Nummern 5–8 geliefert; er geht folgendermassen vor sich: Wir beweisen zunächst (in Nr. 5, 6, 7) den Teil a) von Satz I, und zwar in der folgenden verschärften Form: Die Elemente v_i einer beliebigen Basis $(v_1, v_2, \dots, v_l)$ der Gruppe $\mathfrak{B}(G)$ der minimalen Elemente von $\mathfrak{R}(G)$ haben die in I a) genannten Eigenschaften. Den Teil b) von Satz I beweisen wir in Nr. 8 folgendermassen: Wir bilden mit den Elementen v_i die in I a) genannte Basis $\langle v_i \rangle$; die in der dualen Basis zu den v_i dualen Elemente nennen wir z_i ; sie haben die in §2, Nr. 4, Ende, genannten Eigenschaften. Dann beweisen wir die Gültigkeit der Formel (Δ) (Nr. 3) entsprechenden "Formel (D)":

$$(D) \quad z_{i_1} \cdot z_{i_2} \cdot \cdots \cdot z_{i_r} = \pm v_{j_1} \circ v_{j_2} \circ \cdots \circ v_{j_{l-r}},$$

für komplementäre Teilmengen $\{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ und $\{j_1, j_2, \dots, j_{l-r}\}$ der Menge $\{1, 2, \dots, l\}$.

Aus dieser Formel folgt dann sofort I b): Man schreibe die Elemente w_1 und w_2 mit Hilfe von (D) als Schnitt gewisser z_i ; dann bilde man den Schnitt $w_1 \cdot w_2$, der entweder 0 oder wieder ein Schnitt gewisser z_i ist; im zweiten Falle schreibt man $w_1 \cdot w_2$ wieder mit Hilfe von (D) als P -Produkt gewisser v_i . Man bestätigt ohne Mühe, dass der Schnitt $w_1 \cdot w_2$ das in I b) angegebene Verhalten zeigt, wegen der Dualität der Formel (D), die man folgendermassen aussprechen kann: Kommt in (D) auf der linken Seite das Element z_i vor, so kommt rechts das dazu duale v_i nicht vor; kommt links das Element z_k nicht vor, so kommt rechts das dazu duale v_k vor.

Der Satz I' ist dann auch bewiesen: ordnet man die eben genannten z_i den Elementen Z_i von $\mathfrak{R}(\Pi)$ zu, so erhält man einen Isomorphismus $\mathfrak{R}(G) \approx \mathfrak{R}(\Pi)$. Dabei entsprechen wegen §2, Nr. 4 die Elemente v_i von $\mathfrak{R}(G)$ den Elementen V_i von $\mathfrak{R}(\Pi)$. Wegen der Formeln (D) und (Δ) entspricht dann dem P -Produkt irgendwelcher v_{i_k} das von den entsprechenden V_{i_k} "aufgespannte" Element, d. h. es liegt ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{P}(G)$ und $\mathfrak{Q}(\Pi)$ vor; um Uebereinstimmung der Vorzeichen in (D) und (Δ) zu erhalten, muss man jedoch die Elemente Z_i durch die Elemente $(-1)^{l-i} Z_i$ ersetzen (vgl. §2, Nr. 3).

5. Wir beginnen mit dem Beweis von I und I'. Wir betrachten die Abbildung

$$F(p \times q) = pq$$

des Produktes $G \times G$ zweier Exemplare von G in G ; ϕ sei der zugehörige Umkehrungshomomorphismus (§1, Nr. 5).

Das Bild $\phi(z)$ eines beliebigen Elementes z von $\mathfrak{R}(G)$ hat eine sehr spezielle Gestalt, auf der alle weiteren Ueberlegungen beruhen; sie ist eine Folge der Tatsache, dass der Punkt v_0 in $\mathfrak{P}(G)$ die Rolle der Eins spielt, also eine Folge der Gleichungen

$$F(x \times v_0) = x, \quad F(v_0 \times y) = y$$

für beliebige Elemente x, y von $\mathfrak{B}(G)$.

Das Bild $\phi(z)$ eines beliebigen $z (\neq 1)$ lässt sich in der folgenden Form schreiben:

$$\phi(z) = (1 \times y) + (x \times 1) + \sum (x_h \times y_h),$$

wo die Ungleichungen $d(z) < d(x_h) < n$, $d(z) < d(y_h) < n$ für alle h gelten; denn auf die Form der rechten Seite kann man jedes Element von $\mathfrak{R}(G \times G)$ bringen, und die Ungleichungen folgen aus der Gleichung $\delta(\phi(z)) = \delta(z)$. Hierin lassen sich nun y und x bestimmen:

Wir bilden den Schnitt $\phi(z) \cdot (v_0 \times 1)$. Der Schnitt von v_0 mit nicht skalaren Elementen ist immer 0; auf Grund der in §1, Nr. 7 genannten Sätze findet man sofort:

$$\phi(z) \cdot (v_0 \times 1) = v_0 \times y.$$

Uebt man auf diese Gleichung die Abbildung F aus und beachtet die Funktionalgleichung für ϕ (§1, Nr. 5), so erhält man:

$$z \cdot 1 = y, \text{ also } z = y.$$

Entsprechend bilden wir den Schnitt $\phi(z) \cdot (1 \times v_0)$. Man findet:

$$\phi(z) \cdot (1 \times v_0) = (-1)^{\delta(z) \cdot \delta(v_0)} (x \times v_0).$$

Durch Ausübung von F und Anwendung der Funktionalgleichung für ϕ erhält man, wenn man noch beachtet, dass $\delta(v_0) = n$ ist:

$$z = (-1)^{n \cdot \delta(z)} x.$$

Damit ist gezeigt: Für jedes Element $z (\neq 1)$ von $\mathfrak{H}(G)$ gilt die "Formel (ϕ)":

$$(\phi) \quad \phi(z) = (1 \times z) + (-1)^{n \cdot \delta(z)} (z \times 1) + \sum (x_h \times y_h)$$

mit den Ungleichungen $d(z) < d(x_h) < n$, $d(z) < d(y_h) < n$. Ausserdem ist natürlich $\phi(1) = 1 \times 1$.

Wir führen nun eine Basis in $\mathfrak{B}(G)$ ein. Und zwar wählen wir die von einem beliebigen irreduziblen Erzeugendensystem $(1, z_1, z_2, \dots, z_l)$ von $\mathfrak{H}(G)$ erzeugte Basis $[z_i]$ (§2, Nr. 2); wir dürfen $z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_l = v_0$ annehmen. Das Vorzeichen der Elemente v_i , die zu dieser Basis gehören, ist durch

$$v_i = (-1)^{i-1} z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_{i-1} \cdot z_{i+1} \cdot \dots \cdot z_l$$

definiert; dann sind in der dualen Basis, die nach §2, Nr. 4 bis auf Vorzeichen aus denselben Elementen wie die Basis $[z_i]$ besteht, gerade die Elemente z_i zu den Elementen v_i dual, d. h. es ist $z_i \cdot v_i = v_0$; es gelten dann die Gleichungen:

$$z_i \cdot v_k = \delta_{ik} v_0.$$

Die Elemente v_i bilden eine Basis von $\mathfrak{B}(G)$; nach §2, Nr. 4 kann man durch geeignete Wahl der Elemente z_i jede Basis von $\mathfrak{B}(G)$ auf diese Weise erhalten.

Durch die Basis $[z_i]$ in $\mathfrak{B}(G)$ ist eine Basis in $\mathfrak{B}(G \times G)$ bestimmt (§1, Nr. 7), die wir die Basis $[z_i]^\times$ nennen wollen; auch diese Basis ist (bis auf Vorzeichen) zu sich dual.

Für die maximalen Elemente z_i ist $\delta(z_i)$ ungerade. Daher heisst für sie die Formel (ϕ):

$$(\phi_i) \quad \phi(z_i) = (1 \times z_i) + (-1)^n (z_i \times 1) + R_i;$$

dabei ist der Term $\sum (x_h \times y_h)$ aus (ϕ) mit R_i bezeichnet worden. Weil alle $\delta(z_i)$ ungerade sind, ist für jeden Term $(x_h \times y_h)$ von R_i entweder $\delta(x_h)$ oder $\delta(y_h)$ gerade, also nie sowohl x_h als auch y_h maximal, sondern wenigstens eines zusammengesetzt.

6. Wir beweisen zunächst die Behauptungen

$$v_i \circ v_i = 0 \quad \text{und} \quad v_i \circ v_k = -v_k \circ v_i$$

von I a); anders gesagt, wir beweisen: für die Elemente $v_i \times v_i$ und $(v_i \times v_k) + (v_k \times v_i)$, die wir für den Moment mit v_{ii} und v_{ik} bezeichnen, gilt:

$$F(v_{ii}) = F(v_{ik}) = 0.$$

Zum Beweis beachten wir, dass die Funktionalgleichung für ϕ die Gleichung $F(\phi(x') \cdot v_{ii}) = x' \cdot F(v_{ii})$ und die entsprechende für v_{ik} mit einem beliebigen $x' \in \mathfrak{B}(G)$ liefert. Um zu zeigen, dass $F(v_{ii}) = 0$ ist, genügt es wegen des Poincaré-Veblen'schen Dualitätssatzes, die folgende Behauptung (a) zu beweisen:

(a) für jedes x von $\mathfrak{B}(G)$ mit $\delta(x) = d(v_{ii})$ ist die Schnitzzahl $\phi(x) \cdot v_{ii}$ gleich Null.

Ebenso genügt es für den Beweis von $F(v_{ik}) = 0$, zu zeigen:

(b) für jedes y von $\mathfrak{B}(G)$ mit $\delta(y) = d(v_{ik})$ ist die Schnitzzahl $\phi(y) \cdot v_{ik}$ gleich Null.

Wir betrachten nun die Menge derjenigen Elemente $\sum (x_h \times y_h)$ in $\mathfrak{R}(G \times G)$, in denen in jedem Term $x_h \times y_h$ entweder x_h oder y_h oder beide zusammengesetzte Elemente von $\mathfrak{R}(G)$ sind; wie man sofort einsieht, ist diese Menge, die $\mathfrak{U}$ heiße, ein zweiseitiges Ideal in $\mathfrak{R}(G \times G)$. Die Elemente $(z_i \times z_i)$, $(z_i \times z_k)$, $(z_k \times z_i)$ gehören zu verschiedenen Restklassen von $\mathfrak{U}$.

Aus der Formel (ϕ_i) und der anschliessenden Bemerkung über R_i folgen die Kongruenzen:

$$\phi(z_r) \equiv (1 \times z_r) + (-1)^n (z_r \times 1) \pmod{\mathfrak{U}}.$$

Weil die Elemente $(1 \times z_r \cdot z_s)$ und $(z_r \cdot z_s \times 1)$ zu $\mathfrak{U}$ gehören, folgt daraus sofort:

$$\phi(z_r \cdot z_s) = \phi(z_r) \cdot \phi(z_s) \equiv (-1)^n (z_s \times z_r) - (-1)^n (z_r \times z_s) \pmod{\mathfrak{U}},$$

wo das Vorzeichen des zweiten Gliedes daraus folgt, dass die $\delta(z_i)$ ungerade sind. Ebenso rechnet man sofort aus:

$$\phi(z_r \cdot z_s \cdot z_i) = \phi(z_r) \cdot \phi(z_s) \cdot \phi(z_i) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{U}},$$

und das Gleiche für alle Produkte mit mehr als drei Faktoren. Stellt man also für irgendein Element x der Basis $[z_i]$ von $\mathfrak{B}(G)$ das Bild $\phi(x)$ durch die Basis $[z_i]^\times$ von $\mathfrak{B}(G \times G)$ dar, so tritt darin das Basiselement $z_i \times z_i$ nicht (d. h. mit dem Koeffizienten Null) auf; die Basiselemente $z_i \times z_k$ und $z_k \times z_i$ treten nur dann mit nichtverschwindendem Koeffizienten auf, wenn $x = z_i \cdot z_k$ ist, und dann treten sie mit entgegengesetzten Koeffizienten auf (nämlich mit $+1$ und -1).

Nun sind aber die Elemente $(z_i \times z_i)$, $(z_i \times z_k)$, $(z_k \times z_i)$, wenn man sie noch mit den Vorzeichen $(-1)^n$ versieht, die zu den Elementen $(v_i \times v_i)$, $(v_i \times v_k)$, $(v_k \times v_i)$ dualen Elemente der Basis $[z_i]^\times$ (man beachte, dass Basis und duale Basis bis auf Vorzeichen mit der Basis $[z_i]^\times$ übereinstimmen).

Daraus schliesst man sofort die Behauptung (a):

$$\phi(x) \cdot (v_i \times v_i) = 0, \quad \text{wenn} \quad \delta(x) = d(v_i \times v_i).$$

Auch für die Behauptung (b) muss man nur noch den Schnitt $\phi(z_i \cdot z_k) \cdot v_{ik}$ prüfen. Aber wegen der Verschiedenheit der Vorzeichen von $(z_i \times z_k)$ und $(z_k \times z_i)$ in $\phi(z_i \cdot z_k)$ ist auch dieser Schnitt Null. Damit ist (a) und (b), also auch die Behauptung am Anfang dieser Nummer, bewiesen.

7. Als zweites beweisen wir die Gleichung:

$$v_1 \circ v_2 \circ \dots \circ v_l = 1.$$

Wegen der eben bewiesenen Antikommutativität der v_i dürfen wir annehmen, die v_i seien so angeordnet, dass $d(v_i) \leq d(v_k)$ ist für $i < k$.

Dass das Produkt der v_i gerade $+1$ ist, liegt daran, dass die z_i so definiert sind, dass $z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_l = +v_0$ ist; das Wesentliche ist, dass das n -dimensionale Element $v_1 \circ v_2 \circ \dots \circ v_l$ nicht Null ist, d.h. dass die ganze Mannigfaltigkeit G von der Basis $\{v_1, v_2, \dots, v_l\}$ der Gruppe $\mathfrak{B}(G)$ "aufgespannt" wird; dem entspricht die Gleichung $V_1 \boxtimes V_2 \boxtimes \dots \boxtimes V_l = 1$ beim Sphärenprodukt Π .

Wir bezeichnen mit w_k das Teilprodukt $v_k \circ v_{k+1} \circ \dots \circ v_l$ ($k = 1, 2, \dots, l$) und setzen noch $w_{l+1} = v_0$.

Dann beweisen wir für $k = 1, 2, \dots, l$ die Gleichungen:

$$(1_k) \quad z_k \cdot w_k = (-1)^{l-k} w_{k+1}$$

$$(2_k) \quad z_i \cdot w_k = 0 \quad \text{für } i < k.$$

Das ist richtig für $k = l$, wegen $z_l \cdot v_l = v_0$. Die Gleichungen seien bewiesen für k ; wir beweisen sie für $k - 1$.

Wir gehen aus von der Tatsache

$$F(v_{k-1} \times w_k) = w_{k-1},$$

die aus der Definition der w_k folgt.

Für ein beliebiges Element z_i ergibt die Funktionalgleichung für ϕ die Gleichung:

$$(3) \quad F(\phi(z_i) \cdot (v_{k-1} \times w_k)) = z_i \cdot w_{k-1}.$$

Für $i < k$ setze man jetzt $\phi(z_i)$ aus der Formel (ϕ_i) (Nr. 5) ein. Man erhält:

$$(4) \quad \phi(z_i) \cdot (v_{k-1} \times w_k) = (-1)^{n+k-1} ((z_i \cdot v_{k-1}) \times w_k) \quad \text{für } i < k.$$

Denn wegen (2_k) ist $(1 \times z_i) \cdot (v_{k-1} \times w_k) = 0$; und ist $x \times y$ ein Element aus $R_i = \sum x_h \times y_h$, so ist wegen $d(x) > d(z_i) \geq d(z_{k-1})$ der Schnitt $x \cdot v_{k-1} = 0$, also auch $R_i \cdot (v_{k-1} \times w_k) = 0$ (die zweite Ungleichung folgt aus der Voraussetzung über die $d(v_i)$).

Für $i = k - 1$ erhält man also:

$$(1') \quad \phi(z_{k-1}) \cdot (v_{k-1} \times w_k) = (-1)^{l-(k-1)} (v_0 \times w_k),$$

für $i < k - 1$ erhält man dagegen:

$$(2') \quad \phi(z_i) \cdot (v_{k-1} \times w_k) = 0 \quad \text{für } i < k - 1.$$

Aus (1') und (3) entnimmt man jetzt:

$$z_{k-1} \cdot w_k = (-1)^{l-(k-1)} w_k,$$

aus (2') und (3) dagegen:

$$z_i \cdot w_{k-1} = 0 \quad \text{für } i < k - 1;$$

und das sind die Gleichungen (1_{k-1}) und (2_{k-1}).

Aus den damit für $k = 1, 2, \dots, l$ bewiesenen Gleichungen (1_k) schliesst man jetzt der Reihe nach: $w_l \neq 0$ (wegen $w_{l+1} = v_l \neq 0$), $w_{l-1} \neq 0, \dots, w_1 \neq 0$. Also ist jedenfalls $w_1 = v_1 \circ v_2 \circ \dots \circ v_l \neq 0$. Bei Durchführung der elementaren Rechnung erhält man die genauere Aussage:

$$v_1 \circ v_2 \circ \dots \circ v_l = 1.$$

Aus den Tatsachen, dass die v_i antikommutativ sind (in $\mathfrak{P}(G)$), und dass $v_1 \circ v_2 \circ \dots \circ v_l \neq 0$ ist, kann man nun schliessen, dass die Elemente v_i (zusammen mit v_0) den Ring $\mathfrak{P}(G)$ erzeugen. Dazu betrachten wir die 2^l Elemente

$$v_0 \quad \text{und} \quad v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r} \quad (i_1 < i_2 < \dots < i_r).$$

Wegen der Antikommutativität der v_i ist jedes beliebige Potenz- P -Produkt, das man aus den v_i bilden kann, entweder 0 oder—bis aufs Vorzeichen—einem dieser Elemente gleich. Nun stellt man leicht fest, dass diese Elemente linear unabhängig sind:

$0 = \sum a_i \cdot y_i$ sei eine Relation zwischen solchen Elementen y_i mit Koeffizienten a_i . Es sei y_1 ein "kürzestes" dieser Elemente, d. h. eines mit möglichst kleiner Zahl von Faktoren v_i ; mit $\bar{y}_1$ werde das P -Produkt derjenigen v_i bezeichnet, die in y_1 nicht als Faktoren auftreten.

Nun multipliziere man die Gleichung $0 = \sum a_i \cdot y_i$ im Sinne des P -Produktes mit $\bar{y}_1$. Auf der rechten Seite ergibt $a_1 \cdot y_1 \circ \bar{y}_1$ das Element $\pm a_1 \cdot 1$; denn es ist $y_1 \circ \bar{y}_1 = \pm v_1 \circ v_2 \circ \dots \circ v_l$. Für die y_i mit $i > 1$ ist aber $y_i \circ \bar{y}_1 = 0$, weil mindestens ein v_k in y_i und in $\bar{y}_1$ zugleich vorkommt. Man erhält also: $0 = \pm a_1$; ebenso zeigt man, dass alle a_i verschwinden.

Nun hat aber $\mathfrak{P}(G)$ den Rang 2^l (§2, Nr. 2). Also bilden die Elemente

$$v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r} \quad (i_1 < i_2 < \dots < i_r)$$

mit v_0 zusammen eine Basis von $\mathfrak{P}(G)$, die die Basis $\langle v_i \rangle$ genannt werden soll.

Da nach §2, Nr. 3 die $d(v_i)$ ungerade sind, ist jetzt I a) vollständig bewiesen.

Die Elemente v_i bilden ein irreduzibles Erzeugendensystem von $\mathfrak{P}(G)$.

8. Wir kommen jetzt zum Beweis von I b). Wir betrachten wieder die Abbildungen F und ϕ . Aber als Basis in G und zur Bildung der Basis in $G \times G$ nehmen wir jetzt die Basis $\langle v_i \rangle$. In der dualen Basis sind zu den v_i dual gewisse Elemente z'_i , die nach §2, Nr. 4 ein irreduzibles Erzeugendensystem von $\mathfrak{R}(G)$ bilden, und für die die Gleichungen

$$z'_i \cdot v_k = \delta_{ik} v_0$$

gelten. Die z'_i nennen wir wieder z_i ; für die so durch die v_i bestimmten z_i beweisen wir die Formel (D).

Wir behaupten: für die so bestimmten z_i verschwindet der Rest R_i in der Formel (ϕ_i) , d. h. es gilt die verfeinerte Formel (ϕ_0) :

$$(\phi_0) \quad \phi(z_i) = (1 \times z_i) + (-1)^n (z_i \times 1).$$

Zum Beweis betrachten wir die Abbildung F ; sie ist vollständig zu übersehen. Die Bilder der Elemente der durch die Basis $\langle v_i \rangle$ von $\mathfrak{B}(G)$ bestimmten Basis $\langle v_i \rangle^\times$ von $\mathfrak{B}(G \times G)$ werden durch folgende Gleichungen gegeben:

$$F((v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r}) \times (v_{j_1} \circ v_{j_2} \circ \dots \circ v_{j_s})) = v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r} \circ v_{j_1} \circ v_{j_2} \circ \dots \circ v_{j_s}.$$

Dabei ist das Element rechts entweder 0 oder—bis aufs Vorzeichen—ein Element der Basis $\langle v_i \rangle$. ($v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r}$ oder $v_{j_1} \circ v_{j_2} \circ \dots \circ v_{j_s}$ kann auch das Element v_0 bedeuten; dann ist F durch $F(v_0 \times x) = F(x \times v_0) = x$ gegeben.)

Nun seien w_1 und w_2 zwei beliebige Elemente der Basis $\langle v_i \rangle$ von $\mathfrak{B}(G)$, die der Bedingung $\delta(z_i) = d(w_1) + d(w_2)$ genügen, sodass also $w = w_1 \times w_2$ ein Element der Basis $\langle v_i \rangle^\times$ von $\mathfrak{B}(G \times G)$ mit $\delta(\phi(z_i)) = d(w)$ ist. Wir betrachten die Schnitzzahl $\phi(z_i) \cdot w$. Wegen der Funktionalgleichung für ϕ ist

$$F(\phi(z_i) \cdot w) = z_i \cdot F(w).$$

Weil z_i das zu v_i duale Element ist, ist diese Schnitzzahl nur dann nicht Null, wenn $F(w)$, das ja ein Element der Basis $\langle v_i \rangle$ von $\mathfrak{B}(G)$ ist, gleich v_i ist. Daraus folgt: Der Schnitt $\phi(z_i) \cdot w$ ist nur dann nicht Null, wenn entweder $w = v_i \times v_0$ oder $w = v_0 \times v_i$ ist. Das bedeutet: in der Darstellung von $\phi(z_i)$ durch die zu der Basis $\langle v_i \rangle^\times$ duale Basis treten nur die zu $v_i \times v_0$ und $v_0 \times v_i$ dualen Elemente mit von Null verschiedenem Koeffizienten auf; und das sind eben die Elemente $(1 \times z_i)$ und $(-1)^n(z_i \times 1)$. Damit ist die Formel (ϕ_0) bewiesen.

Wir betrachten ein beliebiges Produkt $v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r}$ (mit lauter verschiedenen Faktoren v). Wir behaupten das Bestehen der folgenden Gleichungen:

$$(1) \quad z_{i_1} \cdot (v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r}) = \begin{cases} v_0 & \text{für } r = 1, \\ (-1)^{r-1} v_{i_2} \circ v_{i_3} \circ \dots \circ v_{i_r} & \text{für } r > 1, \end{cases}$$

$$(2) \quad z_k \cdot (v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r}) = 0, \text{ wenn keiner der Indizes } i_1, i_2, \dots, i_r \text{ gleich } k \text{ ist}$$

Beachtet man die Antikommutativität der v_i , so erhält man aus der Gleichung (1) die folgende etwas allgemeinere, in der i_k ein beliebiger der Indizes $i_1, i_2, \dots, i_r$ ist:

$$(1') \quad z_{i_k} \cdot (v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_k} \circ \dots \circ v_{i_r}) \\ = \pm v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_{k-1}} \circ v_{i_{k+1}} \circ \dots \circ v_{i_r} \quad (\text{für } r > 1).$$

Diese Gleichungen besagen: Der Schnitt eines Elementes $w = v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r}$ mit einem Element z_j ist dann und nur dann nicht Null, wenn das zu z_j duale v_j als Faktor in w auftritt; tritt v_j als Faktor in w auf, dann erhält man den Schnitt $z_j \cdot w$ (bis aufs Vorzeichen), indem man den Faktor v_j aus dem Produkt $v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r}$ weglässt.

Den Beweis führen wir durch Induktion nach r ; für $r = 1$ ist die Richtigkeit von (1) und (2) klar. (1) und (2) seien also richtig für alle P -Produkte mit weniger als r Faktoren v_i .

Wir gehen aus von der Tatsache:

$$F(v_{i_1} \times (v_{i_2} \circ v_{i_3} \circ \dots \circ v_{i_r})) = v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r},$$

die aus der Definition des P -Produktes folgt.

Nach der Funktionalgleichung für ϕ ist:

$$(3) \quad F(\phi(z_j) \cdot (v_{i_1} \times (v_{i_2} \circ v_{i_3} \circ \dots \circ v_{i_r}))) = z_j \cdot (v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r}).$$

In dem darin auftretenden Produkt

$$\phi(z_j) \cdot (v_{i_1} \times (v_{i_2} \circ v_{i_3} \circ \dots \circ v_{i_r})),$$

das wir für den Moment X nennen wollen, setzen wir für $\phi(z_j)$ den Ausdruck aus Formel (ϕ_0) ein. Wir erhalten:

$$X = (v_{i_1} \times (z_j \cdot (v_{i_2} \circ v_{i_3} \circ \dots \circ v_{i_r}))) + (-1)^{r-1}((z_j \cdot v_{i_1}) \times (v_{i_2} \circ v_{i_3} \circ \dots \circ v_{i_r})).$$

Ist erstens $j = i_1$, so ist nach Induktionsvoraussetzung $z_j \cdot (v_{i_2} \circ v_{i_3} \circ \dots \circ v_{i_r})$ gleich Null; andererseits ist dann $z_j \cdot v_{i_1} = v_0$. Also ist

$$X = (-1)^{r-1} v_0 \times (v_{i_2} \circ v_{i_3} \circ \dots \circ v_{i_r})$$

und die Gleichung (3) liefert die Gleichung (1) für den Index r .

Ist zweitens j keiner der Indizes $i_1, i_2, \dots, i_r$, so ist nach Induktionsvoraussetzung $z_j \cdot (v_{i_2} \circ v_{i_3} \circ \dots \circ v_{i_r})$ gleich Null. Aber auch $z_j \cdot v_{i_1}$ ist gleich Null; also ist $X = 0$. Dann liefert die Gleichung (3) die Gleichung (2) für den Index r .

Durch die Gleichungen (1) und (2) ist das gegenseitige Verhalten von $\Re(G)$ und $\mathfrak{P}(G)$ vollkommen bestimmt; wir wollen jetzt die Dualitätsformel (D) daraus ableiten:

$$(D) \quad z_{i_1} \cdot z_{i_2} \cdot \dots \cdot z_{i_r} = \pm v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_{l-r}},$$

wenn $\{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ und $\{j_1, j_2, \dots, j_{l-r}\}$ komplementäre Teilmengen der Menge der Zahlen von 1 bis l sind.

(Das Vorzeichen hängt auf etwas komplizierte Weise von den Indizes ab; es sei bemerkt, dass

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_r = (-1)^{r(l-r)} v_{r+1} \circ v_{r+2} \circ \dots \circ v_l$$

ist. Dass die Vorzeichen in (D) und (Δ) übereinstimmen (nach der Ersetzung von Z_i durch $(-1)^{l-i} Z_i$, vgl. Nr. 4), ergibt sich nach einer elementaren Rechnung.)

Wir gehen aus von der Tatsache

$$v_1 \circ v_2 \circ \dots \circ v_l = 1,$$

und betrachten ein beliebiges Produkt $z_{i_1} \cdot z_{i_2} \cdot \dots \cdot z_{i_r}$. Wir multiplizieren die Gleichung $v_1 \circ v_2 \circ \dots \circ v_l = 1$ mit z_{i_1} . Rechts entsteht dabei z_{i_1} ; und links fällt nach Gleichung (1') der Faktor v_{i_1} weg. Die so entstandene Gleichung multiplizieren wir mit z_{i_2} . Rechts entsteht dabei $z_{i_1} \cdot z_{i_2}$; und links fällt auch noch

der Faktor v_{i_2} weg. So fahren wir fort; jedesmal kommt rechts ein Faktor z_{i_k} (im Schnitt-Sinn) dazu, und links fällt der P -Faktor v_{i_k} weg. So entsteht die Gleichung (D). Nach Nr. 5 ist damit I b), und damit der ganze "Aufspannsatz" bewiesen.

9. Zum Rechnen in $\mathfrak{B}(G)$ bemerken wir noch folgendes:

Gehen die Elemente $v'_{i_1}, v'_{i_2}, \dots, v'_{i_r}$ aus den Elementen $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ durch eine lineare Transformation

$$v'_{i_j} = \sum a_{jk} v_{i_k} \quad (j, k = 1, 2, \dots, r)$$

mit der Determinante $|a_{jk}|$ hervor, so gilt wegen der Antikommutativität der v_i die Gleichung:

$$v'_{i_1} \circ v'_{i_2} \circ \dots \circ v'_{i_r} = |a_{jk}| v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r}.$$

Daraus folgt z. B., dass das Produkt (in $\mathfrak{B}(G)$) von linear abhängigen minimalen Elementen $v'_{i_1}, v'_{i_2}, \dots, v'_{i_r}$ immer Null ist.

Weiter gilt: für beliebige (homogen-dimensionale) Elemente x, y ist

$$x \circ y = (-1)^{d(x) \cdot d(y)} y \circ x;$$

zum Beweis muss man nur x und y in der Basis $\langle v_i \rangle$ schreiben.

In Nr. 5 sind wir ausgegangen von einer beliebigen Basis $[z_i]$ von $\mathfrak{B}(G)$; dadurch wurden die Elemente v_i , die eine Basis von $\mathfrak{B}(G)$ bilden, bestimmt; nach §2, Nr. 4 kann man jede Basis von $\mathfrak{B}(G)$ auf diese Weise bekommen. In der Fassung I des Aufspannsatzes kann man also unter den Elementen v_i die Elemente einer beliebigen Basis von $\mathfrak{B}(G)$ verstehen. Die Elemente z_i , die dann in der Formel (D) auftreten (und die ein irreduzibles Erzeugendensystem von $\mathfrak{R}(G)$ bilden), sind folgendermassen bestimmt: sie sind in der zu der Basis $\langle v_i \rangle$ dualen Basis die zu den v_i dualen Elemente. Auf Grund der Formel (D) bestehen die Basis $[z_i]$ und die Basis $\langle v_i \rangle$ aus denselben Elementen; nun ist die Basis $[z_i]$ zu sich selbst dual (bis auf Vorzeichen); also ist die Basis $[z_i]$ zu der Basis $\langle v_i \rangle$ dual. Man bestätigt auch leicht unmittelbar an der Formel (D), dass das einzige Element der Basis $[z_i]$, das mit dem Element $v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r}$ der Basis $\langle v_i \rangle$ den Schnitt $\pm v_0$ ergibt, das Element $z_{i_1} \cdot z_{i_2} \cdot \dots \cdot z_{i_r}$ ist. Wir wollen diese und noch zwei andere Regeln notieren, die unmittelbar aus (D) folgen:

$$(1) \quad z_{i_1} \cdot z_{i_2} \cdot \dots \cdot z_{i_r} \cdot (v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r}) = \pm v_0,$$

$$(2) \quad z_{i_1} \cdot z_{i_2} \cdot \dots \cdot z_{i_r} \cdot (v_{j_1} \circ v_{j_2} \circ \dots \circ v_{j_r}) = 0, \quad \text{wenn}$$

die Indexmengen $\{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ und $\{j_1, j_2, \dots, j_r\}$ voneinander verschieden sind,

$$(3) \quad z_{i_1} \cdot z_{i_2} \cdot \dots \cdot z_{i_r} \cdot (v_{k_1} \circ v_{k_2} \circ \dots \circ v_{k_s}) = 0, \quad \text{wenn } s < r.$$

Um sie zu beweisen, hat man nur die P -Produkte der v_i mit Hilfe von (D) als Schnitt der z_i zu schreiben, und dann die Rechenregeln für $\mathfrak{R}(G)$ anzuwenden.

10. Es seien $x = z_{i_1} \cdot z_{i_2} \cdot \dots \cdot z_{i_r}$ und $y = z_{j_1} \cdot z_{j_2} \cdot \dots \cdot z_{j_{l-r}}$ zwei Elemente der Basis $[z_i]$, und es sei $x \cdot y = \pm v_0$, d. h. die Elemente $z_{i_1}, \dots, z_{i_r}, z_{j_1}, \dots, z_{j_{l-r}}$ sind die Elemente $z_1, z_2, \dots, z_l$, nur in anderer Reihenfolge. Auf Grund von (D) ist dann

$$x \circ y = v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{j_{l-r}} \circ v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r};$$

und dieses Produkt ist gleich ± 1 , weil die darin auftretenden v_i bis auf die Reihenfolge mit den Elementen $v_1, v_2, \dots, v_l$ übereinstimmen. Führt man die elementare Bestimmung des Vorzeichens durch, so erhält man: Aus $x \cdot y = v_0$ folgt $x \circ y = 1$. Daraus folgt leicht allgemein: Sind X, Y zwei beliebige Elemente von $\mathfrak{B}(G)$ mit $d(X) + d(Y) = n$, dann ist die Schnitzzahl von X und Y gleich ihrer "Aufspannzahl," d. h. in $X \cdot Y = a \cdot v_0$ und in $X \circ Y = b \cdot 1$ sind die Koeffizienten a und b gleich; diese Gleichheit ist ja anschaulich sehr naheliegend.

Eine letzte Bemerkung ist folgende:

Die Elemente $v_1, \dots, v_r$ seien irgendwelche, linear unabhängige Elemente von $\mathfrak{B}(G)$; dann sind die Elemente

$$v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_s} \quad (1 \leq i_k \leq r, i_1 < i_2 < \dots < i_s)$$

linear unabhängige Elemente von $\mathfrak{B}(G)$. Zum Beweis hat man nur die $v_1, \dots, v_r$ in eine Basis $v_1, \dots, v_l$ von $\mathfrak{B}(G)$ aufzunehmen, und mit dieser Basis die Basis $\langle v_i \rangle$ von $\mathfrak{B}(G)$ zu bilden.

KAPITEL II

ERSTE ANWENDUNGEN DES AUFSPANNSATZES

Der Aufspannsatz soll jetzt mit den wichtigsten gruppentheoretischen Begriffen in Zusammenhang gebracht werden: mit dem der homomorphen Abbildung und hauptsächlich denen der Untergruppe und der Nebengruppenzerlegung.

1. Homomorphe Abbildung

1. G und G' seien zwei Gruppenmannigfaltigkeiten. Eine Abbildung h von G in G' heisst homomorphe Abbildung, wenn sie

a) eine homomorphe Abbildung im gewöhnlichen gruppentheoretischen Sinn ist, und

b) eine stetige Abbildung der Mannigfaltigkeit G in die Mannigfaltigkeit G' ist.

Die homomorphe Abbildung h bildet den Ring $\mathfrak{B}(G)$ homomorph in den Ring $\mathfrak{B}(G')$ ab; die additive Homomorphie ist klar; die Gleichung

$$h(x \circ y) = h(x) \circ h(y)$$

für zwei beliebige Homologieklassen x, y von G und ihre Bilder $h(x), h(y)$ bei h beweist man etwa folgendermassen:

Man bilde das topologische Produkt $G \times G$ durch die Abbildung $f(p \times q) = h(pq)$ in G' ab. Ist F die Abbildung $F(p \times q) = pq$ von $G \times G$ in G , ist F' die

entsprechende Abbildung für G' , und bezeichnet man mit g die Abbildung $g(p \times q) = h(p) \times h(q)$ von $G \times G$ in $G' \times G'$, dann kann man wegen $h(p \cdot q) = h(p) \cdot h(q)$ die Abbildung f sowohl als hF als auch als $F'g$ schreiben. Nun ist $F(x \times y) = x \circ y$, also $hF(x \times y) = h(x \circ y)$. Andererseits ist (nach Kap. I, §1, Nr. 8) $g(x \times y) = h(x) \times h(y)$, und folglich $F'g(x \times y) = h(x) \circ h(y)$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Ist speziell $h(x)$ homolog Null in G' , so folgt, dass auch $h(x \circ y)$ homolog Null ist für beliebiges y ; denn es ist $0' \circ z' = 0'$ ($0'$ die Nullklasse, z' eine beliebige Homologieklassse von G').

2. Der Kern einer homomorphen Abbildung eines Ringes bzw. einer Gruppe ist die Menge derjenigen Elemente, deren Bild die Null ist; der Kern ist ein Ideal bzw. eine (invariante) Untergruppe.

Wir betrachten die Gruppen $\mathfrak{B}(G)$ und $\mathfrak{B}(G')$ der minimalen Elemente von G und G' . Durch h wird $\mathfrak{B}(G)$ homomorph in $\mathfrak{B}(G')$ abgebildet (nach Kap. I, §1, Nr. 4); $\mathfrak{B}^0(G)$ sei der Kern dieser Abbildung. $\mathfrak{B}(G)$ werde als direkte Summe $\mathfrak{B}^0(G) + \mathfrak{B}^1(G)$ dargestellt; dann wird $\mathfrak{B}^1(G)$ isomorph abgebildet. $\{v_1, \dots, v_{l^0}\}$ sei eine Basis von $\mathfrak{B}^0$, $\{v_{l^0+1}, \dots, v_l\}$ eine von $\mathfrak{B}^1$; $\{v_1, \dots, v_l\}$ ist dann eine Basis von $\mathfrak{B}(G)$. Die Elemente $v_1, \dots, v_{l^0}$ werden auf Null abgebildet; die Elemente $h(v_{l^0+1}), \dots, h(v_l)$ sind in G' linear unabhängig.

Wir betrachten die von v_0 und den Produkten

$$v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r} \quad (i_1 < i_2 < \dots < i_r)$$

gebildete Basis $\langle v_i \rangle$ von $\mathfrak{B}(G)$ (vgl. Satz I a)). Nach der letzten Bemerkung in Nr. 1 wird ein solches Produkt sicher auf 0 abgebildet, wenn auch nur ein Faktor v_{i_k} auf 0 abgebildet wird, wenn also wenigstens ein Index i_k aus der Reihe 1, 2, $\dots, l^0$ stammt. Andererseits werden diejenigen Elemente $v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_s}$, in denen alle Indizes $> l^0$ sind, auf die Elemente

$$h(v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_s}) = h(v_{i_1}) \circ h(v_{i_2}) \circ \dots \circ h(v_{i_s})$$

abgebildet, und diese Elemente sind in G' linear unabhängig, weil die—nach Kap. I, §1, Nr. 4 minimalen—Elemente $h(v_j)$ ($j = l^0 + 1, \dots, l$) linear unabhängig sind (Kap. I, §3, Nr. 10).

Das bedeutet offenbar, dass der Charakter der Abbildung h durch folgenden Satz bestimmt ist:

Satz II. *Ist h eine homomorphe Abbildung von G in G' , so ist der Kern der dadurch bewirkten homomorphen Abbildung von $\mathfrak{B}(G)$ in $\mathfrak{B}(G')$ das Ideal von $\mathfrak{B}(G)$, das erzeugt wird von denjenigen minimalen Elementen von $\mathfrak{B}(G)$, deren Bild bei h die Null ist.*

Der Restklassenring von $\mathfrak{B}(G)$ nach diesem Ideal—der ja durch h isomorph abgebildet wird—, ist isomorph dem von den Elementen $v_0, v_{l^0+1}, \dots, v_l$ erzeugten Teilring von $\mathfrak{B}(G)$.

In jedem von Null verschiedenen Ideal von $\mathfrak{B}(G)$ ist das Element 1 (die Eins von $\mathfrak{B}(G)$) enthalten; denn wegen der Gleichung $v_1 \circ v_2 \circ \dots \circ v_l = 1$ gibt es zu

jedem Element $x (\neq 0)$ ein y mit $x \circ y = 1$. Daher ist eine direkte Konsequenz des Satzes II das folgende.

KOROLLAR 1. *Das Bild $h(1)$ des Elementes 1 ist dann und nur dann ~ 0 in G' , wenn durch h wenigstens ein minimales Element ($\neq 0$) von G auf 0 abgebildet wird. Ist $h(1) \sim 0$, dann wird der ganze Ring $\mathfrak{B}(G)$ isomorph abgebildet.*

Daraus schliesst man nun weiter:

KOROLLAR 2. *Ist G durch f homomorph in G' abgebildet, und G' durch g homomorph in G'' abgebildet, ist weiter $f(G) \sim 0$ in G' , und $g(G') \sim 0$ in G'' , so ist $gf(G) \sim 0$ in G'' (G, G' bezeichnen hier die Einselemente von $\mathfrak{R}(G), \mathfrak{R}(G')$).*

Denn durch den Homomorphismus gf wird sogar der ganze Ring $\mathfrak{B}(G)$ isomorph abgebildet, weil f und g Isomorphismen sind.

3. In Anwendung dieser Begriffe soll jetzt die Abbildung $q(p) = p^2$ von G in sich, die also jedem Punkt p von G sein Quadrat p^2 zuordnet, untersucht werden.

Bezeichnet man mit f die Abbildung $f(p) = p \times p$ von G in $G \times G$ und mit F die schon betrachtete Abbildung $F(p \times p') = p \cdot p'$, so kann man die Abbildung $q(p)$ als zusammengesetzte Abbildung $Ff(p)$ schreiben. Das Produkt $G \times G$ ist selbst eine Gruppe, als direktes Produkt von G und G ; und $f(p) = p \times p$ ist eine homomorphe Abbildung von G in $G \times G$.

Nach Nr. 2 wird man die f -Bilder der minimalen Elemente von G betrachten. Wir behaupten: Für jedes Element v von $\mathfrak{B}(G)$ ist

$$f(v) = (v \times v_0) + (v_0 \times v).$$

Zum Beweis beachten wir, dass $f(v)$ als minimales Element von $\mathfrak{R}(G \times G)$ von der Form $(v^1 \times v_0) + (v_0 \times v^2)$ mit $v^1, v^2 \in \mathfrak{B}(G)$ ist (Kap. I, §1, Nr. 9). Um zu zeigen, dass $v^1 = v^2 = v$ gilt, betrachten wir die Abbildungen $\pi_1(p \times p') = p$ und $\pi_2(p \times p') = p'$ von $G \times G$ in G ; die Abbildungen $\pi_1 f$ und $\pi_2 f$ sind dann die Identität von G . Man erkennt sofort: Für jedes Element X der Form $(x \times v_0) + (v_0 \times y)$ ist $\pi_1(X) = x$ und $\pi_2(X) = y$; für jedes z von $\mathfrak{B}(G)$ ist $\pi_1 f(z) = \pi_2 f(z) = z$. Damit hat man die folgenden Gleichungen:

$$v = \pi_1 f(v) = \pi_1((v^1 \times v_0) + (v_0 \times v^2)) = v^1;$$

ebenso zeigt man: $v = v^2$, womit die obige Behauptung bewiesen ist.

Sei jetzt $\{v_1, v_2, \dots, v_l\}$ eine Basis von $\mathfrak{B}(G)$. Nach dem eben Bewiesenen ist dann

$$f(v_i) = (v_i \times v_0) + (v_0 \times v_i),$$

also

$$q(v_i) = Ff(v_i) = F((v_i \times v_0) + (v_0 \times v_i)) = v_i + v_i = 2v_i.$$

Die Bilder $f(v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r})$ der Elemente der Basis $\langle v_i \rangle$ bestimmt man jetzt daraus, dass f homomorph ist. Man hat dabei zu beachten, dass für die Pontrjagin'sche Multiplikation in $G \times G$, wie man leicht sieht, gilt:

$$(x \times y) \circ (x' \times y') = (-1)^{d(y)d(x')} (x \circ x') \times (y \circ y').$$

Damit läuft die Rechnung so:

$$\begin{aligned} f(v_i \circ v_k) &= f(v_i) \circ f(v_k) \\ &= ((v_i \times v_0) + (v_0 \times v_i)) \circ ((v_k \times v_0) + (v_0 \times v_k)) \\ &= ((v_i \circ v_k) \times v_0) + (v_i \times v_k) - (v_k \times v_i) + (v_0 \times (v_i \circ v_k)); \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} q(v_i \circ v_k) &= Ff(v_i \circ v_k) \\ &= F((v_i \circ v_k) \times v_0) + F(v_i \times v_k) - F(v_k \times v_i) + F(v_0 \times (v_i \circ v_k)) \\ &= (v_i \circ v_k) + (v_i \circ v_k) - (v_k \circ v_i) + (v_i \circ v_k); \end{aligned}$$

und wegen $v_i \circ v_k = -v_k \circ v_i$ erhält man endlich:

$$q(v_i \circ v_k) = 4v_i \circ v_k.$$

Entsprechend verfährt man im allgemeinen Falle, bei der Berechnung von $q(v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r}) = Ff(v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r})$. Man geht aus von der Gleichung

$$f(v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r}) = f(v_{i_1}) \circ f(v_{i_2}) \circ \dots \circ f(v_{i_r}),$$

setzt $f(v_{i_k}) = (v_{i_k} \times v_0) + (v_0 \times v_{i_k})$ ein, und multipliziert aus. Man erhält 2^r Summanden, von denen jeder das Element $\pm v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r}$ als Bild bei F hat—und man stellt fest, dass immer das positive Vorzeichen gilt. Damit hat man den Satz:

Der Homologietyp der Abbildung $q(p) = p^2$ von G in sich ist bestimmt durch die folgenden Gleichungen, in denen die q -Bilder der Elemente der Basis $\langle v_i \rangle$ von $\mathfrak{B}(G)$ angegeben sind:

$$q(v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r}) = 2^r v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r} \quad (i_1 < i_2 < \dots < i_r)$$

(und natürlich $q(v_0) = v_0$).

Darin ist, wegen der Gleichung $1 = v_1 \circ v_2 \circ \dots \circ v_l$, enthalten:⁵ Die Abbildung $q(p) = p^2$ von G in sich hat den Grad 2^l .

2. Untergruppen und Nebengruppenzerlegung

1. G sei wie immer eine Gruppenmannigfaltigkeit. Eine Teilmenge U heisst eine Untergruppe, wenn sie

- a) eine Untergruppe von G im gewöhnlichen gruppentheoretischen Sinn ist, und
- b) eine abgeschlossene Teilmenge von G ist.

Dazu bemerken wir folgendes: Es ist bekannt, dass jede geschlossene Gruppenmannigfaltigkeit eine Lie'sche Gruppe, also jedenfalls einige Male differenzierbar ist. Ueber das Verhalten einer Untergruppe U ist bekannt [17]: Man kann in einer hinreichend kleinen, dem Euklidischen R_n ($n = d(G)$) homöomorphen,

⁵ Vgl.: H. Hopf: *Über den Rang geschlossener Liescher Gruppen* [Comm. Math. Helv 13. (1940/41)], Satz I für $k = 2$.

Umgebung V des Einheitspunktes e der Gruppe G ein solches Koordinatensystem einführen, dass diejenigen Punkte von U , die zu V gehören, die also den Durchschnitt $U \cdot V$ bilden, eine gewisse Ebene durch e erfüllen. U ist also im kleinen euklidisch. Beachtet man noch, dass U als abgeschlossene Teilmenge von G kompakt ist, so sieht man leicht: Ist die Untergruppe U zusammenhängend, dann ist sie eine differenzierbare und differenzierbar in G eingelagerte, geschlossene, Gruppenmannigfaltigkeit; ist U nicht zusammenhängend, dann ist die Komponente U' , die den Punkt e enthält, selbst eine zusammenhängende Untergruppe von G , also eine Gruppenmannigfaltigkeit in G , und U besteht aus endlich viel Komponenten, die Nebengruppen von U' sind.

Deshalb bedeutet es kaum eine Einschränkung, wenn wir im folgenden die Forderung b) ersetzen durch die Forderung

b') U ist eine (differenzierbar) in G eingelagerte geschlossene Mannigfaltigkeit (also zusammenhängend).

Da U eine Gruppenmannigfaltigkeit ist, haben für sie die Definitionen und Sätze des Kap. I Gültigkeit.

2. G sei eine Gruppe, U eine Untergruppe. Die Gruppenmannigfaltigkeit U ist dadurch, dass sie eine Untergruppe von G ist, auf natürliche Weise homomorph, sogar isomorph, in G abgebildet; man hat dazu die Punkte von U , die ja auch Punkte von G sind, eben als Punkte von G aufzufassen. Das Bild einer Homologieklassse u von U bei dieser Abbildung ist u , als Homologieklassse von G betrachtet; genauer: das Bild von u ist die Homologieklassse von G , in der die Zyklen aus u , die ja auch Zyklen in G sind, liegen. Die Homomorphie besteht darin, dass für die Homologieelemente von U die Pontrjagin'sche Multiplikation in U übereinstimmt mit der in G .

Man kann also die Sätze des §1 anwenden. Wir stellen die Frage: Welche Elemente von $\mathfrak{B}(U)$ sind homolog 0 in G ? Nach §1 hängt das davon ab, welche minimalen Elemente von $\mathfrak{R}(U)$ in G homolog 0 sind. Aus dem Satz II folgt der

SATZ III. *Die Gesamtheit der Homologieelemente der Untergruppe U , die in der Gruppe G homolog 0 sind, ist das Ideal von $\mathfrak{B}(U)$, das erzeugt wird von denjenigen minimalen Elementen von $\mathfrak{R}(U)$, die in G homolog 0 sind.*

Das sind also die Elemente $\sum w_h \circ v_h$, wo die w_h beliebige Elemente von $\mathfrak{B}(U)$ sind, und die v_h Elemente von $\mathfrak{B}(U)$ bedeuten, die in G homolog 0 sind.

Daraus entnimmt man sofort das

KOROLLAR 1. *Eine Untergruppe U ist dann und nur dann ~ 0 in der Gruppe G , wenn wenigstens ein von Null verschiedenes minimales Element aus $\mathfrak{R}(U)$ in G homolog 0 ist.*

Weiter gilt:

KOROLLAR 2. *Ist U nicht homolog 0 in G , dann ist kein von Null verschiedenes Element von $\mathfrak{B}(U)$ homolog 0 in G .*

Daraus wieder folgt sofort:

KOROLLAR 3. *Ist G'' eine Untergruppe von G' , die nicht homolog 0 ist in G' , und ist G' eine Untergruppe von G , die nicht homolog 0 ist in G , dann ist G'' nicht homolog 0 in G .*

Dann ist sogar kein Element von $\mathfrak{B}(G'')$ homolog 0 in G .

Diesen Satz verallgemeinert man zu folgendem:

Ist $G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \dots \supset G_r$ eine absteigende Kette von Untergruppen, und ist $G_{i+1} \sim 0$ in G_i (für $i = 1, 2, \dots, r-1$), dann ist $G_r \sim 0$ in G_1 .

Man kann die Ueberlegungen, die zum Satz III führen, etwas anders fassen:

$\mathfrak{B}^0(U)$ sei die Gruppe derjenigen Elemente von $\mathfrak{B}(U)$, die ~ 0 in G sind. Man stelle $\mathfrak{B}(U)$ als direkte Summe $\mathfrak{B}^0(U) + \mathfrak{B}^1(U)$ dar. Die Elemente $v_1, v_2, \dots, v_r$ einer Basis von $\mathfrak{B}^1(U)$ sind dann in G linear unabhängig; man kann sie sowohl in eine Basis von $\mathfrak{B}(U)$ als auch in eine Basis von $\mathfrak{B}(G)$ aufnehmen. Die Produkte $v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_s}$ ($i_1 < i_2 < \dots < i_r, 1 \leq i_k \leq r$), die man sowohl als Elemente von $\mathfrak{B}(U)$ als auch als Elemente von $\mathfrak{B}(G)$ auffassen kann, sind nach dem Aufspannsatz sowohl in $\mathfrak{B}(U)$ als auch in $\mathfrak{B}(G)$ linear unabhängig; sie bilden eine Basis der Gruppe derjenigen Homologieklassen von G , in denen Homologieklassen von U liegen; die Elemente von $\mathfrak{B}(U)$, die ~ 0 in G sind, sind die Elemente $\sum w_h \circ v_h$ mit $w_h \subset \mathfrak{B}(U)$, $v_h \subset \mathfrak{B}^0(U)$.

Gleichbedeutend damit, dass $U \sim 0$ in G ist, ist: $\mathfrak{B}^0(U)$ enthält nur die Null.

3. Ist G eine Gruppe, U eine Untergruppe, so zerfällt G in die (etwa linksseitigen) Nebengruppen, was man durch die Gleichung

$$G = U + a_1 \cdot U + a_2 \cdot U + \dots$$

ausdrückt, in der die a_i gewisse Elemente von G sind. (Wir gebrauchen die übliche Schreibweise auch hier, wo die Anzahl der Nebengruppen kontinuierlich ist.)

Die Wichtigkeit dieser Nebengruppenzerlegung für topologische Gruppen G besteht darin, dass man die Nebengruppen als Punkte eines topologischen Raumes, des Nebengruppenraumes, auffassen kann, dessen Topologie eng mit der von G verknüpft ist. Dieser Raum, der mit G/U oder mit W ("Wirkungsraum," vgl. Nr. 5) bezeichnet wird, ist also folgendermassen definiert:

Die Punkte von W sind die Nebengruppen aU von U ; eine Umgebung eines Punktes aU besteht aus den Nebengruppen $a' \cdot U$, wo der Punkt a' eine Umgebung von a in G durchläuft.

Auf Grund der Bemerkungen in Nr. 1 ist leicht zu sehen, dass auch der Nebengruppenraum eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. Man führt dazu in einer (hinreichend kleinen) Umgebung des beliebigen Punktes a von G ein Koordinatensystem so ein, dass die Nebengruppe aU durch eine r -dimensionale Ebene ($r = d(U)$) durch a dargestellt wird; man stellt leicht fest, dass die Nebengruppen, die eine Umgebung von aU in W bilden, eineindeutig den Punkten der zu aU senkrechten, $(n - r)$ -dimensionalen Ebene durch a entsprechen ($n = d(G)$). Damit hat man in der Umgebung des Punktes aU von W ein Euklidisches Koordinatensystem eingeführt. Die Differenzierbarkeit zeigt man ebenso.

Wir können und wollen also im folgenden annehmen, dass der Nebengruppen-

raum W eine differenzierbare, also triangulierbare [18], geschlossene Mannigfaltigkeit ist.

4. Die Zerlegung von G in die Nebengruppen aU ist eine Faserung mit der Faser U ; dabei versteht man unter der Faserung einer Mannigfaltigkeit M mit der Faser (-Mannigfaltigkeit) F folgendes [10]: M ist zerlegt in Mannigfaltigkeiten, die alle einer festen Mannigfaltigkeit F homöomorph sind, und die "Fasern" von M heissen; durch jeden Punkt von M geht also eine und nur eine Faser; und eine Umgebung einer beliebigen Faser ist fasertreu homöomorph dem topologischen Produkt $E \times F$, wo E ein Element (Vollkugel) der Dimension $d(E) = d(M) - d(F)$ ist.

"Fasertreu homöomorph" heisst dabei: jede Faser der Umgebung ist topologisch auf eine der Mannigfaltigkeiten $p \times F$ abgebildet (p ein Punkt von E)—verschiedene Fasern natürlich auf verschiedene $p \times F$.

Fasst man die Fasern als Punkte eines Raumes, mit natürlichem Umgebungsbegriff, auf (bildet man den sog. Zerlegungsraum der Zerlegung von M in die Fasern), so erhält man den Faser- oder Basisraum B , der offenbar eine Mannigfaltigkeit ist; der Faserraum wird auch, in einer naheliegenden Schreibweise, mit M/F bezeichnet.

Wir sprechen im folgenden von Faserungen auch bei Teilmengen einer gefaserten Mannigfaltigkeit, die ganz aus Fasern bestehen, d. h. zu einer beliebigen Faser entweder fremd sind oder sie ganz enthalten; und ist K ein beliebiger Komplex, so nennen wir das topologische Produkt $K \times F$ gefasert—die Fasern sind natürlich die Mengen $p \times F$, wo p ein beliebiger Punkt von K ist. Es ist dann klar, was man unter einer fasertreuen (topologischen) Abbildung zu verstehen hat.

Ordnet man jedem Punkt einer gefaserten Mannigfaltigkeit M die Faser zu, auf der er liegt, so erhält man eine stetige Abbildung von M auf den Faserraum B , die Projektion P . Das Urbild $P^{-1}(T)$ einer Teilmenge T von B ist die (gefaserte) Menge der Punkte der "über T stehenden" Fasern. Für jede hinreichend kleine Umgebung V eines beliebigen Punktes von B ist $P^{-1}(V)$ fasertreu homöomorph mit $V \times F$; M ist im kleinen ein topologisches Produkt. Ueber dieses lokale Zerfallen in ein topologisches Produkt gilt der folgende Satz von Feldbau [19]:

Ist E ein Element (Vollkugel) im Faserraum B , dann ist die Urbildmenge $P^{-1}(E)$ dem Produkt $E \times F$ fasertreu homöomorph.

Nach Nr. 3 ist leicht zu sehen, dass die Zerlegung einer Gruppe G in die Nebengruppen aU einer Untergruppe U eine Faserung von G mit der Faser U ist. Man erkennt nämlich sofort: Durchläuft p die in Nr. 3 genannte, zu aU senkrechte Ebene, die E heissen möge, in der Umgebung von a , und durchläuft q die Untergruppe U , dann ist $f(p \times q) = p \cdot q$ eine fasertreue topologische Abbildung von $E \times U$ auf die Umgebung von U (pq ist das Produkt von p und q in G).

Der Faserraum dieser Faserung ist der Nebengruppen- oder Wirkungsraum W . Die Projektion P besteht darin, dass man dem Punkt p von G die Nebengruppe pU (als Punkt von W) zuordnet.

5. Eine Mannigfaltigkeit W heisst Wirkungsraum der Gruppenmannigfaltigkeit G ("espace homogène") [9], wenn folgendes erfüllt ist:

Jedem Punkt p von G ist eine topologische Transformation T_p von W auf sich zugeordnet; die Transformationen T_p hängen stetig von dem Punkt p ab; es gilt: $T_p \cdot T_q = T_{pq}$; und die aus den T_p bestehende Transformationsgruppe von W ist transitiv, d. h. jeder Punkt von W (es genügt: ein bestimmter Punkt von W) kann (durch geeignete Transformationen T_p) in jeden Punkt von W übergeführt werden.

a sei ein Punkt von W ; diejenigen Punkte p von G , für die $T_p(a) = a$ gilt, d. h. deren T_p den Punkt a als Fixpunkt hat, bilden eine Untergruppe von G , die "Isotropiegruppe" von W . (Setzt man $W = R_n$ und nimmt als G die Gruppe der Bewegungen des R_n , so ist die Isotropiegruppe die Gruppe der Rotationen um einen festen Punkt.) Die zu verschiedenen Punkten a von W gehörigen Isotropiegruppen sind in G konjugiert, sodass man von der Isotropiegruppe U sprechen kann.

Die Punkte p von G , deren T_p den Punkt a in den gleichen Punkt b transformieren, bilden eine linke Nebengruppe von U . Diese eindeutige Zuordnung der Punkte von W und der linken Nebengruppen von U ist eine Homöomorphie zwischen W und dem Nebengruppenraum G/U .

Die Transformationen T_p können also auch als Transformationen des Nebengruppenraumes G/U aufgefasst werden; sie haben da eine einfache Bedeutung: Die Transformation T_p besteht nämlich darin, dass man jeder Nebengruppe qU die Nebengruppe pqU zuordnet.

Ein Wirkungsraum W ist also identisch mit dem zur Isotropiegruppe U von W gehörigen Nebengruppenraum G/U (bei der Definition des Nebengruppenraums muss man dann mehrkomponentige Untergruppen (vgl. Nr. 1) U zulassen).

Diese Definition des Wirkungsraumes ist etwas allgemeiner als die übliche: wir lassen zu, dass T_p für gewisse p die Identität von W ist (p gehört dann zu U).

Ist U zusammenhängend, dann ist W orientierbar (aber nicht nur dann): Man stelle (nach Nr. 4) die Umgebung einer Nebengruppe pU als topologisches Produkt $E \times U$ dar. Die Orientierung von G und die von U bestimmen dann eindeutig eine Orientierung von E , und diese überträgt man mittels der Projektion P in den Wirkungsraum W . (Entsprechend für Faserungen M/F .)

6. Das Problem, das sich jetzt erhebt, ist: Zusammenhänge zwischen G , U , W , insbesondere zwischen ihren Homologieeigenschaften, zu finden. Es handelt sich z. B. um die Aufgabe, aus den Homologieeigenschaften von G und U die von W zu bestimmen, wobei man natürlich die Lage von U in G berücksichtigen muss. Zur Lösung dieser Aufgabe werden in Kap. IV einige Beiträge geliefert. Noch naheliegender ist die Fragestellung: was kann man bei gegebenem G und W über U aussagen?, also die Frage nach der Isotropiegruppe U eines vorgelegten Wirkungsraumes W . Diese Frage wird im Kap. III für den speziellen Fall $W = S_n$ gelöst; als Anwendung werden die Homologieringe der Gruppen A_n , B_n , C_n , D_n bestimmt.

KAPITEL III

DIE SPHÄREN ALS WIRKUNGSRÄUME

In diesem Kapitel wird der Spezialfall untersucht, dass der zu der Gruppe G und der Untergruppe U gehörige Wirkungsraum W der m -dimensionalen Sphäre S_m homöomorph ist. Dieser Fall tritt auf bei den Gruppen der bekannten vier Klassen A_n, B_n, C_n, D_n ; die Homologieringe dieser Gruppen lassen sich damit vollständig bestimmen.

1. $G/U = S_m$

1. G sei eine Gruppe; der Rang von G (Kap. I, §2, Nr. 3) sei l ; U sei eine Untergruppe von G . Wir beweisen den folgenden Satz:

SATZ IV. *Der zu der Untergruppe U der Gruppe G gehörige Wirkungsraum $G/U = W$ sei der m -dimensionalen Sphäre S_m homöomorph; dann gilt:*

- a) *ist m ungerade, so ist $\mathfrak{R}(G)$ isomorph mit $\mathfrak{R}(U \times S_m)$, und U ist ~ 0 in G ,*
- b) *ist m gerade, so ist $\mathfrak{R}(U)$ isomorph mit $\mathfrak{R}(\Pi \times S_{m-1})$, wo Π ein topologisches Produkt von $l - 1$ Sphären ungerader Dimensionen ist, und $\mathfrak{R}(G)$ ist isomorph mit $\mathfrak{R}(\Pi \times S_{2m-1})$; und U ist ~ 0 in G .*

Bemerkung: für $l = 1$ bedeutet b): $\mathfrak{R}(U) \approx \mathfrak{R}(S_{m-1})$, und $\mathfrak{R}(G) \approx \mathfrak{R}(S_{2m-1})$. (Dann ist übrigens, was aber für das folgende unwesentlich ist, notwendigerweise $m = 2$.)

Für die Ränge $l(G)$, $l(U)$ und die charakteristischen Zahlen $l_i(G)$, $l_i(U)$ (Kap. I, §2, Nr. 3) bedeutet dieser Satz das Bestehen der folgenden Gleichungen:

a) m ungerade:

$$\begin{aligned} l(G) &= l(U) + 1, \\ l_m(G) &= l_m(U) + 1, \\ l_i(G) &= l_i(U) \end{aligned} \quad \text{für } i \neq m,$$

b) m gerade:

$$\begin{aligned} l(G) &= l(U) \\ l_{m-1}(G) &= l_{m-1}(U) - 1, \\ l_{2m-1}(G) &= l_{2m-1}(U) + 1, \\ l_i(G) &= l_i(U) \end{aligned} \quad \text{für } i \neq m - 1, \neq 2m - 1.$$

Der Beweis beruht auf der Betrachtung der Faserung von G in die Nebengruppen aU von U .

2. Wir erinnern zunächst an einige Begriffe:

Ein endliches, euklidisches Polyeder ist die Menge der Punkte, die zu einem endlichen, euklidischen, simplizialen (allgemeiner: Zellen-) Komplex gehören. Ein endliches, krummes Polyeder (kurz: Polyeder) P in einer Mannigfaltigkeit

M ist das topologische Bild in M eines endlichen, euklidischen Polyeders [20]. Ein stetiger Zyklus ist das stetige Bild eines, in einem euklidischen R_n liegenden, simplizialen "Parameter"-Zyklus. Ein stetiger Zyklus z in einem Polyeder P bestimmt eine Homologieklassse von P , die man eben durch z repräsentieren kann [21]. Im folgenden verstehen wir unter Zyklen immer stetige Zyklen.

Wir betrachten eine beliebige Gruppe G . Im Kap. I, §3, Nr. 1 ist mit Hilfe der Abbildung $F(p \times q) = pq$ von $G \times G$ in G das Pontrjagin'sche Produkt $x \circ y$ zweier Homologieklassen x und y von G definiert worden. Diese Definition lässt sich unmittelbar erweitern zu der des Pontrjagin'schen Produktes $z_1 \circ z_2$ zweier stetiger Zyklen z_1, z_2 in G : man bilde den stetigen Zyklus $z_1 \times z_2$ in $G \times G$, und definiere $z_1 \circ z_2$ durch

$$z_1 \circ z_2 = F(z_1 \times z_2);$$

$z_1 \circ z_2$ ist ebenfalls ein stetiger Zyklus in G .

3. Jetzt sei gemäss der Voraussetzung von Satz IV der zur Untergruppe U der Gruppe G gehörige Nebengruppenraum G/U der S_m homöomorph. P bezeichnet die Projektion von G auf $G/U = S_m$.

Wir zerlegen die S_m durch eine $(m - 1)$ -dimensionale Aequatorsphäre S_{m-1} in zwei Elemente (Vollkugeln) E^1 und E^2 , die "nördliche und südliche Halbkugel." Es ist also $E^1 + E^2 = S_m$ und $E^1 \cdot E^2 = S_{m-1}$. Das Urbild $P^{-1}(E^1)$ von E^1 heisse G' , das Urbild $P^{-1}(E^2)$ von E^2 heisse G'' . Es ist $G = G' + G''$; d. h., G wird von G' und G'' überdeckt. Der Durchschnitt $G' \cdot G''$, der H heisse, ist das Urbild $P^{-1}(S_{m-1})$ von S_{m-1} .

Wir wenden jetzt den Satz von Feldbau an (Kap. II, §2, Nr. 4). Weil E^1 ein Element ist, ist danach die Menge G' , die ja ganz aus Nebengruppen von U besteht, dem topologischen Produkt $E^1 \times U$ fasertreu homöomorph. Dabei ist nur benutzt, dass eine Faserung von G in die Nebengruppen von U vorliegt. Indem man nun die Gruppeneigenschaft stärker ausnützt, kann man die Darstellung von G' als Produkt $E^1 \times U$ in einer speziellen Weise wählen. Man betrachte dazu für einen beliebig, aber fest gewählten Punkt q von U das in $E^1 \times U$ liegende Element $E^1 \times q$. Ihm entspricht infolge der Homöomorphie von $E^1 \times U$ und G' ein Element E' in G' . Aus der Definition folgt unmittelbar, dass E' mit jeder zu G' gehörenden Faser von G (Nebengruppe von U) genau einen, und mit jeder nicht zu G' gehörenden Faser keinen Punkt gemeinsam hat und dass E' durch P topologisch auf E^1 abgebildet wird. Man betrachte nun das in $G \times G$ liegende Polyeder $E' \times U$. Bei der Abbildung F wird dieses Polyeder topologisch-fasertreu auf G' abgebildet. Denn ist p ein beliebiger Punkt von E' , so wird die Teilmenge $p \times U$ von $E' \times U$ topologisch auf die, in G' enthaltene, Nebengruppe pU abgebildet (das ist geradezu die Definition der Nebengruppe); sind p_1, p_2 zwei verschiedene Punkte von E' , so sind, wie eben bemerkt, die Nebengruppen $p_1 \cdot U$ und $p_2 \cdot U$, auf die die Mengen $p_1 \times U$ und $p_2 \times U$ abgebildet werden, verschieden; und man erhält so auch alle zu G' gehörenden Nebengruppen. Die ursprüngliche Homöomorphie zwischen

$E^1 \times U$ und G' ist also jetzt ersetzt durch die durch F vermittelte Homöomorphie zwischen $E' \times U$ und G' . Entsprechend lässt sich G'' darstellen als topologisches F -Bild eines in $G \times G$ liegenden Produktes $E'' \times U$, wo E'' ein Element in G ist, das durch P topologisch auf E^2 abgebildet wird. G' und G'' sind also krumme Polyeder in G ; sie sind sogar berandete Mannigfaltigkeiten.

Die Randsphäre von E' heisse S' , die von E'' heisse S'' . Beide Sphären werden durch P topologisch auf S_{m-1} abgebildet. Dann sieht man: Bei der topologisch-faserstreuen Abbildung F von $E' \times U$ auf G' erscheint als Bild des Randes $S' \times U$ von $E' \times U$ die Menge $H = P^{-1}(S_{m-1}) = G' \cdot G''$. Denn $S' \times U$ wird bei F topologisch auf die Menge der Punkte derjenigen Nebengruppen von U abgebildet, die einen Punkt mit S' gemeinsam haben, deren Projektion, d. h. deren Bild bei P , also zu S_{m-1} gehört. Als topologisches Bild der Mannigfaltigkeit $S' \times U$ ist H eine Mannigfaltigkeit in G .

Ebenso stellt man fest, dass H topologisch-faserstreues F -Bild des Randes $S'' \times U$ von $E'' \times U$ ist.

4. Den orientierten Grundzyklus der Sphäre S' bezeichnen wir auch mit S' ; p' sei ein einfach gezählter Punkt von S' ; die Zyklen $u_1, \dots, u_r$ mögen eine Basis von $\mathfrak{B}(U)$ bilden. Dann bilden die Zyklen $p' \times u_i$ und $S' \times u_i$ ($i = 1, \dots, r$) eine Basis von $\mathfrak{B}(S' \times U)$; für das topologische Bild $H = F(S' \times U)$ bedeutet das: die (nach Nr. 2 gebildeten) Zyklen

$$p' \circ u_i, \quad S' \circ u_i \quad (i = 1, \dots, r)$$

bilden eine Basis von $\mathfrak{B}(H)$; diese Basis heisse $\mathfrak{B}_1$. Ebenso folgt aus der Tatsache, dass H topologisches F -Bild von $S'' \times U$ ist, dass die Zyklen

$$p'' \circ u_i, \quad S'' \circ u_i \quad (i = 1, \dots, r)$$

eine Basis von $\mathfrak{B}(H)$ bilden; p'' , S'' sind analog wie p' , S' definiert.

Man sieht nun leicht ein, dass man die beiden Punkte p' und p'' und ebenso den einfach gezählten Punkt p_0 von $\mathfrak{B}(U)$ durch den Einheitspunkt e von G repräsentieren kann. (Man kann zunächst S_{m-1} so wählen, dass U in $P^{-1}(S_{m-1}) = H$ liegt, und kann dann die Elemente E' und E'' so bestimmen, dass sie den Punkt e in ihrem Rand enthalten.)

Man betrachte die Untergruppe von $\mathfrak{B}(H)$, die von den Elementen $p' \circ u$ mit beliebigem u aus $\mathfrak{B}(U)$ gebildet wird; sie ist mit $\mathfrak{B}(U)$ isomorph (entsprechend der Tatsache, dass die Gruppe der Elemente $p' \times u$ von $\mathfrak{B}(S' \times U)$ mit $\mathfrak{B}(U)$ isomorph ist). Wegen der speziellen Wahl von p' ist

$$p' \circ u = e \circ u = u;$$

das bedeutet: man kann die Elemente $p' \circ u$ dieser Untergruppe mit den Elementen u von $\mathfrak{B}(U)$ identifizieren, man kann also $\mathfrak{B}(U)$ als Untergruppe von $\mathfrak{B}(H)$ auffassen. Die Elemente $S' \circ u$ (und ebenso die Elemente $S'' \circ u$) gehören nicht zu dieser Untergruppe. Wir bemerken schliesslich noch, dass wir, wegen $p_0 = e$, das Element $S' \circ p_0$ von $\mathfrak{B}(H)$ mit der Sphäre S' identifizieren können; ebenso identifizieren wir $S'' \circ p_0$ mit S'' .

5. Wir stellen jetzt die Frage: Welche Elemente von $\mathfrak{B}(U)$ sind homolog 0 in G ? Um sie zu beantworten, verallgemeinern wir sie zu der Frage: Welche Elemente von $\mathfrak{B}(H)$ sind homolog 0 in G ?

Wir gehen aus von der Tatsache, dass G überdeckt ist mit den Polyedern G' und G'' , deren Durchschnitt eben das Polyeder H ist. Daher lässt sich ein elementarer Satz aus dem Kreis der "Additionssätze der kombinatorischen Topologie" [22] anwenden, der besagt:

Die Homologieklass z von H ist dann und nur dann homolog 0 in G , wenn sie sich in H darstellen lässt als Summe $z_1 + z_2$ zweier Homologieklassen z_1, z_2 von H , wobei z_1 in G' und z_2 in G'' homolog 0 ist.

(Im rein kombinatorischen Fall verläuft der Beweis dieses Satzes folgendermassen: der in H liegende Zyklus z sei ~ 0 in G , also $z = \dot{C}$. (Mit $\dot{C}$ bezeichnen wir den Rand des Komplexes C .) Unter C_1 verstehe man den Teilkomplex von C , dessen Simplexe in G' liegen, unter C_2 den von den übrigen Simplexen von C gebildeten Teilkomplex von C ; es ist also $C = C_1 + C_2$. Dann ist $z = \dot{C} = \dot{C}_1 + \dot{C}_2$, und $\dot{C}_1$, bzw. $\dot{C}_2$, ist ein Zyklus in H , der ~ 0 in G' , bzw. G'' , ist. Im vorliegenden Fall krummer Polyeder muss man die vorkommenden Zyklen und Komplexe als stetige Zyklen und stetige Komplexe annehmen und noch einige einfache Approximationen vornehmen.)

6. Die Zyklen von H , die in G' homolog 0 sind, sind nun genau die Zyklen $S' \circ u$, wo u ein beliebiges Element von $\mathfrak{B}(U)$ ist, entsprechend der Tatsache, dass in $E' \times U$ genau die Homologieklassen $S' \times u$ des Randes $S' \times U$ von $E' \times U$ homolog 0 sind. Analog sind genau die Elemente $S'' \circ u$ von $\mathfrak{B}(H)$ in $G'' = F(E'' \times U)$ homolog 0. Die Elemente R von $\mathfrak{B}(H)$, die in G homolog 0 sind, sind also nach dem genannten Additionssatz die Elemente

$$(1) \quad R = S' \circ u_1 + S'' \circ u_2$$

mit beliebigem u_1 und u_2 aus $\mathfrak{B}(U)$.

Um eine Uebersicht über sie zu bekommen, schreiben wir sie in der Basis $\mathfrak{B}_1$ von $\mathfrak{B}(H)$. Dazu stellen wir zunächst einmal S'' in dieser Basis dar:

$$S'' \sim S' \circ u' + p' \circ u \quad \text{in } H.$$

Aus Dimensionsgründen ist u' gleich cp_0 mit einem gewissen Koeffizienten c . Wegen der in Nr. 4 getroffenen speziellen Wahl von p_0 und p' hat man also:

$$S'' \sim cS' + u \quad \text{in } H.$$

S' und S'' sind als Sphären minimale Elemente von $\mathfrak{R}(H)$ (vgl. Kap. I, §1, Nr. 4); da die minimalen Elemente eine Gruppe bilden, ist auch u ein minimales Element von $\mathfrak{R}(H)$. Aus dem Zusammenhang zwischen den minimalen Elementen eines topologischen Produktes mit den minimalen Elementen seiner Faktoren (Kap. I, §1, Nr. 9) folgt, dass u sogar ein minimales Element von $\mathfrak{R}(U)$ ist, das wir mit $\bar{v}$ bezeichnen wollen. Es ist also schliesslich:

$$(2) \quad S'' \sim cS' + \bar{v} \quad \text{in } H.$$

Dabei ist $\bar{v}$ eventuell das Nullelement.

(2) in (1) eingesetzt, ergibt die folgende Gleichung:

$$R \sim S' \circ (u_1 + cu_2) + \bar{v} \circ u_2 \quad \text{in } H.$$

(Dabei ist benützt, dass für einen Zyklus z in H und einen Zyklus u in U das Produkt $z \circ u$ in H liegt, und dass für zwei Zyklen z_1, z_2 in H und einen Zyklus u in U gilt:

$$(z_1 + z_2) \circ u \sim z_1 \circ u + z_2 \circ u \quad \text{in } H.$$

Um das zu beweisen, beachte man, dass H aus linken Nebengruppen von U besteht, und dass folglich die Teilmenge $H \times U$ von $G \times G$ durch F in H abgebildet wird. In $H \times U$ ist nun $(z_1 + z_2) \times u$ homolog $(z_1 \times u) + (z_2 \times u)$; übt man darauf F aus, so erhält man die behauptete Homologie.)

Damit hat man schliesslich:

Die Gesamtheit der Elemente von $\mathfrak{B}(H)$, die in G homolog 0 sind, wird gebildet von den Elementen

$$(3) \quad S' \circ u + \bar{v} \circ u_2,$$

wo u, u_2 beliebige Elemente von $\mathfrak{B}(U)$ sind.

Unter den Elementen (3) sind nur die mit $u = 0$ in der Gruppe $\mathfrak{B}(U)$ enthalten; also folgt:

Die Gesamtheit der Elemente von $\mathfrak{B}(U)$, die in G homolog 0 sind, wird gebildet von den Elementen

$$\bar{v} \circ u$$

mit beliebigem u aus $\mathfrak{B}(U)$, sie ist also das von $\bar{v} = S'' - cS'$ erzeugte Ideal von $\mathfrak{B}(U)$.

7. Nach Satz III (Kap. II, §2, Nr. 2) ist daher $\bar{v}$ das einzige minimale Element von $\mathfrak{R}(U)$, das homolog 0 in G ist; genauer: die Gruppe $\mathfrak{B}^0(U)$ derjenigen minimalen Elemente von $\mathfrak{R}(U)$, die in G homolog 0 sind, besteht aus den rationalen Vielfachen von $\bar{v}$.

Aus der Definition von $\bar{v}$ folgt: $d(\bar{v}) = d(S') = d(S'') = m - 1$. Wir unterscheiden jetzt die Fälle $\bar{v} = 0$ und $\bar{v} \neq 0$. Der Kürze halber wird der Rang von $\mathfrak{B}(G)$ mit l und der Rang von $\mathfrak{B}(U)$ mit l' bezeichnet.

a) Es sei $\bar{v} = 0$. Dann ist also (ausser 0) kein minimales Element von $\mathfrak{R}(U) \sim 0$ in G ; also ist nach Kap. II, §2, Nr. 2, Korollar 1 die Untergruppe $U \sim 0$ in G , und nach Korollar 2 kann man $\mathfrak{B}(U)$ als Untergruppe von $\mathfrak{B}(G)$ auffassen. Eine Basis $\{v_1, v_2, \dots, v_{l'}\}$ von $\mathfrak{B}(U)$ kann man aufnehmen in eine Basis $\{v_1, v_2, \dots, v_{l'}, v_{l'+1}, \dots, v_l\}$ von $\mathfrak{B}(G)$. Wegen $\sum_{i=1}^{l'} d(v_i) = d(U)$, $\sum_{i=1}^l d(v_i) = d(G)$ und $d(G) = d(U) + m$ gilt dabei:

$$d(v_{i'+1}) + d(v_{i'+2}) + \dots + d(v_i) = m.$$

Nun ist aber jede Homologieklassse von G , deren Dimension kleiner als m ist, in G einer Homologieklassse von U homolog. Denn aus der Tatsache, dass E^i ein m -dimensionales Element ist ($i = 1, 2$), schliesst man ohne weiteres, dass man jeden höchstens $(m - 1)$ -dimensionalen Zyklus von G auf den gemeinsamen Rand H von G' und G'' deformieren kann. Aber die Homologieelemente von $\mathfrak{B}(H)$, die ~ 0 in G sind, sind in G den Elementen der Untergruppe $\mathfrak{B}(U)$ von $\mathfrak{B}(H)$ homolog (weil die Elemente $S' \circ u$ von $\mathfrak{B}(H)$ in G homolog 0 sind).

Die Dimensionen der nicht zu der Untergruppe $\mathfrak{B}(U)$ von $\mathfrak{B}(G)$ gehörigen Elemente $v_{i'+1}, v_{i'+2}, \dots, v_i$ müssen also $\geq m$ sein; da die Summe der Dimensionen, wie oben festgestellt, gleich m ist, gibt es nur ein einziges solches Element, und es hat die Dimension m .

Das bedeutet: Man erhält eine Basis von $\mathfrak{B}(G)$, indem man zu einer Basis $\{v_1, v_2, \dots, v_{i'}\}$ von $\mathfrak{B}(U)$ ein gewisses Element v_i mit $d(v_i) = m$ hinzufügt.

Im Falle eines ungeraden m ist nun das Element $\bar{v}$ ein minimales Element der geraden Dimension $m - 1$, und folglich gleich Null (Kap. I, §2, Nr. 3). Die eben angestellten Ueberlegungen sind also anwendbar auf diesen Fall, und enthalten offenbar einen Beweis der Behauptung a) aus Nr. 1.

Da aus $\bar{v} = 0$ die Existenz eines minimalen Elementes $v_i \neq 0$ mit $d(v_i) = m$ folgt, und andererseits ein minimales Element gerader Dimension immer Null ist, so muss im Fall eines geraden m das Element $\bar{v}$ von Null verschieden sein. Damit kommen wir zum Fall b).

b) Es sei $\bar{v} \neq 0$. Nimmt man $\bar{v}$ in eine Basis $\{v_1, v_2, \dots, v_{i'-1}, \bar{v}\}$ von $\mathfrak{B}(U)$ auf, so sind, weil die rationalen Vielfachen von $\bar{v}$ die einzigen Elemente von $\mathfrak{B}(U)$ sind, die in G homolog 0 sind, die Elemente $v_1, v_2, \dots, v_{i'-1}$ in G linear unabhängig und können durch Elemente $v_{i'}, v_{i'+1}, \dots, v_i$ zu einer Basis von $\mathfrak{B}(G)$ ergänzt werden. Wegen $d(\bar{v}) = m - 1$ gilt

$$d(v_{i'}) + d(v_{i'+1}) + \dots + d(v_i) = d(G) - (d(U) - d(\bar{v})) = 2m - 1.$$

Nun kann aber, genau wie in a), unter den Elementen $v_{i'}, v_{i'+1}, \dots, v_i$ keines vorkommen, dessen Dimension kleiner als m ist; folglich kann es nur ein solches Element geben, und es muss die Dimension $2m - 1$ haben.

Das bedeutet: Es gibt in $\mathfrak{B}(U)$ ein Element $\bar{v}$ der Dimension $m - 1$, dass nicht Null ist; und aus einer Basis von $\mathfrak{B}(U)$, in der dieses Element $\bar{v}$ als Basis-element auftritt, erhält man eine Basis von $\mathfrak{B}(G)$, indem man $\bar{v}$ ersetzt durch ein gewisses Element v_i der Dimension $2m - 1$.

Aus $\bar{v} \sim 0$ in G folgt nach Kap. II, §2, Nr. 2, Korollar 1, dass auch $U \sim 0$ in G ist.

Damit ist die Behauptung b) von Nr. 1 vollständig bewiesen.

2. Die Gruppen A_n, B_n, C_n, D_n

Mit Hilfe des Satzes IV aus §1 lassen sich die Homologieringe der klassischen Gruppen A_n, B_n, C_n, D_n leicht bestimmen, auf Grund der Tatsache, dass

diesen Gruppen in natürlicher Weise Sphären als Wirkungsräume zugeordnet sind.

1. Die Gruppe A_n ($n = 1, 2, \dots$) ist die Gruppe der linearen, unitären, unimodularen Transformationen in $n + 1$ Variablen, also die Gruppe der Transformationen

$$z'_i = \sum a_{ik} z_k$$

mit der Determinante $|a_{ik}| = 1$, die die Hermite'sche Form

$$z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_2 \cdot \bar{z}_2 + \dots + z_{n+1} \cdot \bar{z}_{n+1}$$

invariant lassen [23]. Wir setzen $z_i = x_i + iy_i$ (x_i, y_i reell); die Hermite'sche Form geht dabei über in

$$x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2.$$

Die Transformationen von A_n lassen sich also auffassen als (reelle) orthogonale Transformationen eines Euklidischen R_{2n+2} mit den Koordinaten $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{n+1}, y_{n+1}$, die paarweise zu den komplexen Koordinaten $z_i = x_i + iy_i$ zusammengefasst sind. A_n ist also eine Gruppe von topologischen (sogar orthogonalen) Transformationen der $(2n + 1)$ -dimensionalen Sphäre S_{2n+1} , die durch

$$x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = 1$$

gegeben ist. Man sieht leicht, dass diese Gruppe die S_{2n+1} transitiv transformiert. Es genügt zu beweisen, dass man den Punkt ($z_1 = 1, z_i = 0$ ($i > 1$)) in einen beliebigen Punkt ($a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$) (mit $\sum a_j \cdot \bar{a}_j = 1$) überführen kann. Und das kann man, weil man immer unitäre, unimodulare Matrizen angeben kann, deren erste Spalte ($a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n+1,1}$) mit ($a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$) übereinstimmt. S_{2n+1} ist also ein Wirkungsraum von A_n (die Bedingung $T_p \cdot T_q = T_{p \cdot q}$ aus Kap. II, §2, Nr. 4 ist natürlich erfüllt). Die Isotropiegruppe ist die Untergruppe, die einen Punkt, etwa den Punkt ($z_1 = 1, z_i = 0$ ($i > 1$)) festhält; das ist offenbar die Gruppe A_{n-1} .

$2n + 1$ ist ungerade; man erhält also nach Satz IV a) (§1): Der Homologiering $\mathfrak{H}(A_n)$ ist isomorph dem Ring $\mathfrak{H}(A_{n-1} \times S_{2n+1})$. Die Mannigfaltigkeit A_1 ist bekanntlich der Sphäre S_3 homöomorph. Damit erhält man durch Induktion [24]:

Der Homologiering $\mathfrak{H}(A_n)$ ist isomorph dem Ring $\mathfrak{H}(\Pi)$ der Mannigfaltigkeit

$$\Pi = S_3 \times S_5 \times S_7 \times \dots \times S_{2n+1};$$

dabei bezeichnet S_i die i -dimensionale Sphäre.

Definiert man für einen beliebigen Komplex k das Poincaré'sche Polynom $P_k(t)$ durch:

$$P_k(t) = p_0 + p_1 \cdot t + p_2 \cdot t^2 + \dots,$$

wobei p_i die i -te Betti'sche Zahl von k und t eine Variable ist, und beachtet, dass

$$P_{k_1 \times k_2}(t) = P_{k_1}(t) \cdot P_{k_2}(t)$$

ist, so liest man ab:

Das Poincaré'sche Polynom von A_n ist

$$P_{A_n}(t) = (1 + t^3) \cdot (1 + t^5) \cdot (1 + t^7) \cdots (1 + t^{2n+1}).$$

2. Die Gruppe B_n ist die orthogonale Gruppe in $2n + 1$ Variablen [23]. Das ist eine transitive Transformationsgruppe der Sphäre S_{2n} ; also ist S_{2n} ein Wirkungsraum von B_n .

Die Gruppe D_n ist die orthogonale Gruppe in $2n$ Variablen [23]. Das ist eine transitive Transformationsgruppe der Sphäre S_{2n-1} ; also ist S_{2n-1} ein Wirkungsraum von D_n .

B_n ist definiert für $n = 1, 2, \dots$; D_n wird bei der Aufzählung der einfachen Gruppen nur für $n \geq 3$ betrachtet; für unsere Zwecke können wir aber die Fälle $n = 1, 2$ in die Definition von D_n einbeziehen. D_1 ist dem Kreis S_1 homöomorph.

Die Isotropiegruppe des Wirkungsraumes S_{2n-1} von D_n ist die Gruppe B_{n-1} ; das sieht man, wenn man als Punkt der Sphäre $\sum x_i^2 = 1$, den man festhält, den Punkt $(1, 0, 0, \dots, 0)$ wählt. $2n - 1$ ist ungerade; aus Satz IV a) folgt also:

Der Ring $\mathfrak{R}(D_n)$ ist isomorph dem Ring $\mathfrak{R}(B_{n-1} \times S_{2n-1})$. Dabei ist $n > 1$ vorausgesetzt; $\mathfrak{R}(D_1)$ ist isomorph $\mathfrak{R}(S_1)$.

Die Isotropiegruppe des Wirkungsraumes S_{2n} von B_n ist die Gruppe D_n ; das sieht man wieder, wenn man den Punkt $(1, 0, \dots, 0)$ festhält. $2n$ ist gerade; also kann man Satz IV b) anwenden. Danach hat man $\mathfrak{R}(D_n)$ als $\mathfrak{R}(\Pi \times S_{2n-1})$ darzustellen, und erhält dann $\mathfrak{R}(B_n)$ als $\mathfrak{R}(\Pi \times S_{4n-1})$. Wegen des eben erhaltenen Resultats über $\mathfrak{R}(D_n)$ kann man B_{n-1} für Π einsetzen; damit ist gezeigt:

Der Ring $\mathfrak{R}(B_n)$ ist isomorph dem Ring $\mathfrak{R}(B_{n-1} \times S_{4n-1})$, für $n > 1$. Für $n = 1$, folgt, nach der Bemerkung nach Satz IV, aus der Isomorphie von $\mathfrak{R}(D_1)$ mit $\mathfrak{R}(S_1)$, dass $\mathfrak{R}(B_1)$ mit $\mathfrak{R}(S_3)$ isomorph ist; das ergibt sich auch daraus, dass B_1 bekanntlich mit dem projektiven Raum P_3 homöomorph ist.

Durch Induktion erhält man jetzt sofort [24]:

Der Homologiering $\mathfrak{R}(B_n)$ ist isomorph dem Ring $\mathfrak{R}(\Pi)$ der Mannigfaltigkeit

$$\Pi = S_3 \times S_7 \times S_{11} \times \cdots \times S_{4n-1};$$

Der Homologiering $\mathfrak{R}(D_n)$ ist isomorph dem Ring $\mathfrak{R}(\Pi)$ der Mannigfaltigkeit

$$\Pi = S_3 \times S_7 \times S_{11} \times \cdots \times S_{4n-5} \times S_{2n-1} \quad (\text{für } n > 1);$$

$\mathfrak{R}(D_1)$ ist isomorph $\mathfrak{R}(S_1)$.

Für die Poincaré'schen Polynome entnimmt man daraus:

$$P_{Bn}(t) = (1 + t^3)(1 + t^7) \dots (1 + t^{4n-1});$$

$$P_{Dn}(t) = (1 + t^3)(1 + t^7) \dots (1 + t^{4n-5})(1 + t^{2n-1}) \quad \text{für } n > 1; P_{D_1}(t) = 1 + t.$$

3. Die Gruppe C_n ($n = 1, 2, \dots$) ist die symplektische Gruppe [23, 25]: die Gruppe derjenigen unitären Transformationen eines $\bar{R}_{2n}$ mit den (komplexen) Koordinaten $(x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots, x_n, x'_n)$, die die schiefsymmetrische Bilinearform

$$(x_1 y'_1 - x'_1 y_1) + (x_2 y'_2 - x'_2 y_2) + \dots + (x_n y'_n - x'_n y_n)$$

invariant lassen.

Den $\bar{R}_{2n}$ kann man, indem man die Koordinaten x_j, x'_j in Real- und Imaginärteil zerlegt, als einen reellen, Euklidischen, R_{4n} auffassen; die Transformationen von C_n sind dann wegen ihrer Unitarität in $\bar{R}_{2n}$ orthogonale Transformationen der $(4n - 1)$ -dimensionalen Sphäre (etwa mit dem Radius 1) um den Nullpunkt des R_{4n} . Ist $(c_1, c'_1, \dots, c_n, c'_n)$ ein beliebiger Punkt dieser Sphäre (ist also $c_1 \cdot \bar{c}_1 + c'_1 \cdot \bar{c}'_1 + \dots + c_n \cdot \bar{c}_n + c'_n \cdot \bar{c}'_n = 1$), so kann man eine Matrix aus C_n angeben, deren erste Spalte $(c_{11}, c'_{11}, c_{21}, c'_{21}, \dots, c_{n1}, c'_{n1})$ mit $(c_1, c'_1, \dots, c_n, c'_n)$ übereinstimmt [25]; das bedeutet: die S_{4n-1} wird transitiv transformiert, sie ist ein Wirkungsraum von C_n .

Die zugehörige Isotropiegruppe ist C_{n-1} : Man halte den Punkt $(1, 0, 0, \dots, 0)$ (im $\bar{R}_{2n}$) fest; dann rechnet man (unter Beachtung der Invarianz der Bilinearform und der Unitarität) sofort nach, dass auch der Punkt $(0, 1, 0, \dots, 0)$ des $\bar{R}_{2n}$ festbleibt. Beachtet man noch einmal die Unitarität, so erkennt man: Die Isotropiegruppe besteht aus den Transformationen von C_n , für die

$$x_1 \rightarrow x_1, \quad x'_1 \rightarrow x'_1$$

gilt, und das ist eben die Gruppe C_{n-1} .

$4n - 1$ ist ungerade. Nach Satz IV a) ist also $\mathfrak{H}(C_n)$ isomorph mit $\mathfrak{H}(C_{n-1} \times S_{4n-1})$. Beachtet man noch, dass die Gruppe C_1 mit der Gruppe A_1 identisch ist, so erhält man durch Induktion [24]:

Der Homologiering $\mathfrak{H}(C_n)$ ist isomorph dem Ring $\mathfrak{H}(\Pi)$ der Mannigfaltigkeit

$$\Pi = S_3 \times S_7 \times S_{11} \times \dots \times S_{4n-1}$$

Daraus liest man ab: *Das Poincaré'sche Polynom von C_n ist*

$$P_{C_n}(t) = (1 + t^3)(1 + t^7) \dots (1 + t^{4n-1}).$$

KAPITEL IV

HOMOLOGIEEIGENSCHAFTEN DER WIRKUNGSRÄUME

Nachdem wir im Kapitel III den speziellen Fall $W = S_m$ behandelt haben, wollen wir jetzt zur Untersuchung beliebiger Wirkungsräume übergehen. Die Untersuchung, die wir im Folgenden durchführen, ermöglicht es, wenn $U \sim 0$ in G ist, den Ring $\mathfrak{H}(W)$ durch $\mathfrak{H}(G)$ und $\mathfrak{H}(U)$ zu bestimmen.

1. Die Gruppe $P(\mathfrak{B}(G))$

1. Wie immer, bedeute G eine Gruppe, U eine (zusammenhängende) Untergruppe, W den zugehörigen Wirkungsraum G/U . Dann ist W eine orientierbare, geschlossene Mannigfaltigkeit der Dimension $d(W) = d(G) - d(U)$. Die Projektion P von G auf W bewirkt eine Abbildung P der Betti'schen Gruppe $\mathfrak{B}(G)$ in die Betti'sche Gruppe $\mathfrak{B}(W)$. Die Gruppe derjenigen Elemente von $\mathfrak{B}(W)$, die vermöge P Bilder von Elementen von $\mathfrak{B}(G)$ sind, heiße die Bildgruppe $P(\mathfrak{B}(G))$; ihre Struktur soll untersucht werden.

Wenn U ein Normalteiler von G ist, dann ist P die natürliche homomorphe Abbildung von G auf die Faktorgruppe G/U , hat also die in Kap. II, §1 beschriebenen Eigenschaften. Wir werden nun zeigen, dass auch dann, wenn U kein Normalteiler ist, die Abbildung P von diesem Typ ist; nur muss berücksichtigt werden, dass es in W im allgemeinen keine Multiplikation gibt.

2. Es sei also U eine beliebige (zusammenhängende) Untergruppe von G . Wir beweisen dann den

Satz V. *Der Kern der Abbildung P von $\mathfrak{B}(G)$ in $\mathfrak{B}(W)$ ist das Ideal in $\mathfrak{B}(G)$ (aufgefasst als Untergruppe von $\mathfrak{B}(G)$), das erzeugt wird von denjenigen minimalen Elementen von G , deren Bild bei P die Null ist.*

Die Restklassengruppe von $\mathfrak{B}(G)$ nach diesem Ideal (das Ideal als Untergruppe von $\mathfrak{B}(G)$ aufgefasst) wird also isomorph auf die Bildgruppe abgebildet. (Die Elemente dieser Restklassengruppe bilden zugleich den Restklassenring von $\mathfrak{B}(G)$ nach dem Ideal.)

Der Beweis geht aus von dem Aufspannsatz in der Form I (Kap. I, §3, Nr. 2) und wird folgendermassen geführt:

Die Gruppe $\mathfrak{B}(G)$ ist durch P homomorph in $\mathfrak{B}(W)$ abgebildet. $\mathfrak{B}^0(G)$ sei der Kern dieser Abbildung; $\mathfrak{B}(G)$ werde als direkte Summe $\mathfrak{B}^0(G) + \mathfrak{B}^1(G)$ dargestellt; $\mathfrak{B}^1(G)$ wird also isomorph abgebildet. $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ sei eine Basis von $\mathfrak{B}^1(G)$, und $\{v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_l\}$ eine von $\mathfrak{B}^0(G)$; dann ist $\{v_1, v_2, \dots, v_l\}$ eine Basis von $\mathfrak{B}(G)$. Die Produkte

$$v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r} \quad (i_1 < i_2 < \dots < i_r)$$

bilden mit v_0 zusammen eine Basis $\langle v_i \rangle$ von $\mathfrak{B}(G)$ nach Satz I. Dann beweisen wir:

a) Ein solches Produkt wird durch P auf 0 gebildet, wenn wenigstens ein Faktor v_{i_k} zu $\mathfrak{B}^0(G)$ gehört, wenn also wenigstens ein Index $i_k > m$ ist;

b) diejenigen Produkte, in denen alle Faktoren v_{i_k} zu $\mathfrak{B}^1(G)$ gehören, in denen also alle Indizes $i_k \leq m$ sind, werden durch P auf linear unabhängige Elemente von $\mathfrak{B}(W)$ abgebildet. Aus a) und b) folgt dann sofort der Satz V: Die in a) auftretenden Elemente bilden eine Basis des von $\mathfrak{B}^0(G)$ erzeugten Ideals von $\mathfrak{B}(G)$; dieses Ideal ist das in Satz V genannte. Aus a) folgt, dass das von $\mathfrak{B}^0(G)$ erzeugte Ideal durch P auf 0 abgebildet wird; aus b) entnimmt man, dass nur die Elemente dieses Ideals auf 0 abgebildet werden, womit Satz V bewiesen ist.

Man kann b) auch so formulieren: der von v_0 und $v_1, v_2, \dots, v_m$ erzeugte Teilring von $\mathfrak{B}(G)$ wird eineindeutig abgebildet; wegen a) wird er *auf* die Bildgruppe abgebildet. Bezeichnet S_i eine Sphäre mit $d(S_i) = d(v_i)$ für $i = 1, 2, \dots, m$, so sieht man daraus: Die Gruppe $P(\mathfrak{B}(G))$ ist isomorph der Betti'schen Gruppe der Mannigfaltigkeit $S_1 \times S_2 \times S_3 \times \dots \times S_m$.

Aus a) und b) kann man noch folgenden Schluss ziehen, der den Charakter der Abbildung P besser verstehen lässt: $v'_1, v'_2, \dots, v'_r$ seien irgendwelche Elemente von $\mathfrak{B}(G)$; das Bild $P(v'_1 \circ v'_2 \circ \dots \circ v'_r)$ von $v'_1 \circ v'_2 \circ \dots \circ v'_r$ ist dann und nur dann ~ 0 in W , wenn die Elemente $\eta'_i = P(v'_i)$ in W linear abhängig sind.

Sind nämlich die η'_i unabhängig, so kann man die v'_i in eine Basis von $\mathfrak{B}^1(G)$ aufnehmen, und nach b) ist $P(v'_1 \circ v'_2 \circ \dots \circ v'_r)$ nicht Null.

Sind aber die η'_i abhängig, so kann man durch eine lineare Transformation der v'_i erreichen, dass $\eta'_r = P(v'_r)$ gleich Null ist; das Produkt $v'_1 \circ v'_2 \circ \dots \circ v'_r$ ist nach Kap. I, §3, Nr. 9 invariant gegen eine solche Transformation, und aus $P(v'_r) = 0$ folgt nach a), dass auch $P(v'_1 \circ v'_2 \circ \dots \circ v'_r) = 0$ ist.

Wir kommen jetzt zum Beweis unseres Satzes.

3. Zuerst beweisen wir den Teil a).

Wir definieren eine Abbildung T des topologischen Produktes $G \times W$ auf W , indem wir setzen:

$$T(p \times q') = T_p(q'),$$

wo p ein Punkt von G , und q' ein Punkt von W ist; T_p ist erklärt in Kap. II, §2, Nr. 4. Schreibt man W als Nebengruppenraum, und bedeutet q' die Nebengruppe qU , dann ist $T(p \times q')$ die Nebengruppe pqU .

Der Punkt $T(p \times q')$ heisst das Produkt von p und q' und wird auch mit pq' bezeichnet. (Wenn Produkte $c \cdot d$ auftreten, so wird es immer klar sein, ob es sich um das Gruppenprodukt in G handelt, wenn nämlich $c, d \in G$, oder um das eben definierte Produkt, wenn nämlich $c \in G, d \in W$; das gleiche gilt für das sofort zu definierende verallgemeinerte Pontrjagin'sche Produkt; es werden deshalb die alten Zeichen für die Multiplikation benützt.)

Ueber dieses Produkt sei bemerkt: $p \cdot q'$ ist bei festem p als Abbildung von W in sich aufzufassen, nämlich als $T_p(q')$; diese Abbildung ist topologisch und zur Identität homotop—man lasse p nach e , dem Einheitspunkt von G , wandern.

Bei festem q' dagegen ist $p \cdot q'$ eine Abbildung von G auf W , die zu der Projektion P homotop ist: man lasse q' in den die Nebengruppe U selbst darstellenden Punkt e' von W wandern; $p \cdot e'$ ist dann die Nebengruppe pU , als Punkt von W betrachtet, und das ist eben $P(p)$.

Die Eigenschaft des Produktes $p \cdot q'$, die wir brauchen, ist eine Funktionalgleichung für P ; es gilt nämlich:

$$P(p_1 \cdot p_2) = p_1 \cdot P(p_2);$$

p_1, p_2 sind zwei beliebige Punkte von G ; links steht die Projektion des Produktes $p_1 \cdot p_2$; rechts steht das Produkt des Punktes p_1 von G mit dem Punkte

$P(p_2)$ von W , also $T(p_1 \times P(p_2))$; beide Seiten der Gleichung bedeuten die Nebengruppe $p_1 \cdot p_2 \cdot U$, als Punkt von W .

Die Abbildung T bewirkt eine Abbildung T der Homologieklassen. Wir definieren nun, wie ja nahe liegt, das "verallgemeinerte Pontrjagin'sche Produkt $x \circ y$ " eines Elementes x von $\mathfrak{B}(G)$ mit einem Element y' von $\mathfrak{B}(W)$, indem wir setzen:

$$x \circ y' = T(x \times y');$$

das ist wieder ein Element von $\mathfrak{B}(W)$.

Diese Multiplikation ist offenbar distributiv mit der Addition verknüpft. Es gilt

$$x \circ 0' = 0 \circ y' = 0',$$

wo 0 , bzw. $0'$, das Nullelement von $\mathfrak{B}(G)$, bzw. $\mathfrak{B}(W)$, ist, und x, y' beliebig sind.

Die Funktionalgleichung für P gibt für die Homologieklassen die entsprechende Funktionalgleichung, nämlich:

$$P(x_1 \circ x_2) = x_1 \circ P(x_2),$$

wenn x_1, x_2 zwei beliebige Elemente von $\mathfrak{B}(G)$ sind. Das ergibt sich so: F sei die bekannte Abbildung von $G \times G$ in G ; mit S bezeichne man die Abbildung von $G \times G$ in $G \times W$, die durch $S(p_1 \times p_2) = p_1 \times P(p_2)$ gegeben ist. Dann ist wegen der Funktionalgleichung die Abbildung PF von $G \times G$ in W gleich der Abbildung TS . Nun ist $PF(x_1 \times x_2) = P(x_1 \circ x_2)$; andererseits ist $S(x_1 \times x_2) = x_1 \times P(x_2)$ (vgl. Kap. I, §1, Nr. 8), also $TS(x_1 \times x_2) = x_1 \circ P(x_2)$.

Jetzt folgt sofort die Behauptung a). $v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r}$ sei ein Element der Basis $\langle v_i \rangle$, und es sei $P(v_{i_k}) = 0', k \leq r$. Wegen der Antikommutativität der v_i darf man $k = r$ annehmen, und kann also das Element in der Form $w \circ v_{i_r}$ mit $w = v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_{r-1}}$ schreiben. Dann ist

$$P(w \circ v_{i_r}) = w \circ P(v_{i_r}) = w \circ 0' = 0'.$$

4. Jetzt beweisen wir die Behauptung b); wir benützen den Umkehrhomomorphismus φ der Abbildung P .

Als Basis in $\mathfrak{B}(G)$ benützen wir die von v_0 und den Elementen

$$v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r} \quad (i_1 < i_2 < \dots < i_r)$$

gebildete Basis $\langle v_i \rangle$. Nach dem Aufspannsatz (vgl. Kap. I, §3, Nr. 9) ist die duale Basis die Basis $[z_i]$, die erzeugt wird von den zu den v_i dualen Elementen z_i .

Die Bilder $\eta_i = P(v_i)$ der Elemente $v_1, v_2, \dots, v_m$ sind nach Voraussetzung in W linear unabhängig. Sie werden in eine Betti'sche Basis von $\mathfrak{B}(W)$ aufgenommen; ζ_i ($i = 1, 2, \dots, m$) seien die in der dualen Basis zu den η_i dualen Elemente.

Wir betrachten $\varphi(\zeta_i)$. Wir behaupten: stellt man $\varphi(\zeta_i)$ in der Basis $[z_i]$ dar, dann ist z_i das einzige maximale Basiselement, das in $\varphi(\zeta_i)$ auftritt, und zwar hat es den Koeffizienten 1. Wir behaupten also:

$$(\zeta) \quad \varphi(\zeta_i) = z_i + \sum a_h x_h,$$

wo die x_h zusammengesetzte Elemente der Basis $[z_i]$ und die a_h Koeffizienten sind.

Zum Beweis betrachten wir das Produkt $\varphi(\zeta_i) \cdot v_k$. Die Funktionalgleichung (Kap. I, §1, Nr. 5) für φ liefert

$$P(\varphi(\zeta_i) \cdot v_k) = \zeta_i \cdot P(v_k) = \zeta_i \cdot \eta_k, \quad \text{bzw.} = \zeta_i \cdot 0'$$

also

$$P(\varphi(\zeta_i) \cdot v_k) = \delta_{ik} \cdot \eta_0 \quad (i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, l),$$

wo $\eta_0 = P(v_0)$ der einfach gezählte Punkt von W ist; denn weil η_k minimal ist, ist $\zeta_k \cdot \eta_k = \eta_0$ der einzige von Null verschiedene Schnitt von η_k , für $k = 1, 2, \dots, m$; für $k > m$ ist $P(v_k) = 0'$. Also ist

$$\varphi(\zeta_i) \cdot v_k = \delta_{ik} v_0;$$

daraus folgt auf Grund der Rechenregeln in $\mathfrak{R}(G)$ sofort die Behauptung (§)—man beachte etwa die Gleichungen $z_i \cdot v_k = \delta_{ik} v_0$ ($i, k = 1, \dots, l$) (Kap. I, §3, Nr. 8).

Wegen der Multiplikativität von φ hat man dann:

$$\varphi(\zeta_{i_1} \cdot \zeta_{i_2} \cdot \dots \cdot \zeta_{i_r}) = z_{i_1} \cdot z_{i_2} \cdot \dots \cdot z_{i_r} + \sum y_h,$$

wo jedes y_h ein Produkt von mindestens $r + 1$ Faktoren z_i ist.

Aus dieser Darstellung leitet man die folgenden Formeln ab (vgl. Kap. I, §3, Nr. 9):

$$1) \quad \varphi(\zeta_{i_1} \cdot \zeta_{i_2} \cdot \dots \cdot \zeta_{i_r}) \cdot (v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r}) = \pm v_0,$$

$$2) \quad \varphi(\zeta_{i_1} \cdot \zeta_{i_2} \cdot \dots \cdot \zeta_{i_r}) \cdot (v_{j_1} \circ v_{j_2} \circ \dots \circ v_{j_r}) = 0,$$

wenn die Indexmengen $\{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ und $\{j_1, j_2, \dots, j_r\}$ voneinander verschieden sind,

$$3) \quad \varphi(\zeta_{i_1} \cdot \zeta_{i_2} \cdot \dots \cdot \zeta_{i_r}) \cdot (v_{k_1} \circ v_{k_2} \circ \dots \circ v_{k_s}) = 0, \quad \text{wenn } s < r.$$

5. Daraus folgt nun leicht die Behauptung b) in der Formulierung: der von $v_0, v_1, v_2, \dots, v_m$ erzeugte Teilring von $\mathfrak{P}(G)$ wird eineindeutig abgebildet.

Es sei nämlich w ein Element dieses Teilringes, also eine Linearkombination $\sum a_i w_i$ (mit Koeffizienten a_i), in der die w_i solche Elemente⁶

$$v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r} \quad (i_1 < i_2 < \dots < i_r),$$

bedeuten, in denen $i_k \leq m$ gilt; die Koeffizienten a_i seien von Null verschieden. $w_1 = v_{h_1} \circ v_{h_2} \circ \dots \circ v_{h_t}$ sei eines dieser Elemente mit maximaler Anzahl von Faktoren v_i . Dann ist nach Nr. 4, 1),

$$\varphi(\zeta_{h_1} \cdot \zeta_{h_2} \cdot \dots \cdot \zeta_{h_t}) \cdot w_1 = \pm v_0,$$

und nach Nr. 4, 2) und 3),

$$\varphi(\zeta_{h_1} \cdot \zeta_{h_2} \cdot \dots \cdot \zeta_{h_t}) \cdot w_i = 0 \quad \text{für } i > 1:$$

also ist schliesslich

$$\varphi(\zeta_{h_1} \cdot \zeta_{h_2} \cdot \dots \cdot \zeta_{h_t}) \cdot w = \pm a_1 v_0.$$

⁶ Wir dürfen $w_i \neq v_0$ annehmen.

Nach der Funktionalgleichung für φ folgt hieraus

$$(1) \quad (\zeta_{h_1} \cdot \zeta_{h_2} \cdot \dots \cdot \zeta_{h_t}) \cdot P(w) = \pm a_1 \eta_0.$$

Also ist $P(w) \neq 0$, q.e.d.

Es sei noch bemerkt, dass das Produkt aller ζ_i , das Element $\zeta_1 \cdot \zeta_2 \cdot \dots \cdot \zeta_m$, von Null verschieden ist: man setze für w das Produkt $v_1 \circ v_2 \circ \dots \circ v_m$ ein.

2. $U \sim 0$

1. Für den Fall, dass $U \sim 0$ in G ist, lässt sich jetzt eine sehr präzise Aussage herleiten. Wir beweisen nämlich den folgenden Satz:

SATZ VI. Die Untergruppe U der Gruppe G sei nicht homolog 0 in G ; der zugehörige Wirkungsraum sei $G/U = W$; dann gilt:

a) der Ring $\mathfrak{R}(W)$ ist isomorph dem Ring eines topologischen Produktes von Sphären ungerader Dimensionen,

b) der Ring $\mathfrak{R}(G)$ ist isomorph dem Ring $\mathfrak{R}(U \times W)$ des topologischen Produktes $U \times W$.

Danach ist $\mathfrak{R}(W)$ durch $\mathfrak{R}(G)$ und $\mathfrak{R}(U)$ bestimmt: $l_i(W)$, die Zahl der i -dimensionalen Sphären in dem $\mathfrak{R}(W)$ darstellenden Sphärenprodukt, ist gegeben durch $l_i(G) - l_i(U)$.

Zum Beweis zeigen wir erstens, dass die Projektion P eine Abbildung von $\mathfrak{R}(G)$ auf $\mathfrak{R}(W)$ liefert; nach §1 ist dann $\mathfrak{R}(W)$ eindeutiges Bild eines gewissen Teilringes des Pontrjagin'schen Ringes $\mathfrak{B}(G)$. Zweitens bestimmen wir diesen Teilring; er ergibt sich als isomorph dem Restklassenring des von den Elementen von $\mathfrak{B}(U)$ erzeugten Ideals von $\mathfrak{B}(G)$. Daraus folgt dann leicht der Satz.

2. U ist ~ 0 in G ; die Homologiekategorie von G , in der U liegt, bezeichnen wir auch mit U . Unter φ verstehen wir, wie in §1, den Umkehrungshomomorphismus der Projektion P . Dann gilt:

$$\varphi(\eta_0) = U.$$

Dabei ist η_0 der einfach gezählte Punkt in W .

Es gilt nämlich allgemein für die Projektion eines gefaserten Raumes auf den Faserraum: Der Urbildzyklus (das φ -Bild) des Punktes ist die Faser. Das folgt z.B. daraus, dass man die Umkehrung φ einer solchen Abbildung P folgendermaßen erklären kann: Der Faserraum B sei hinreichend fein trianguliert. Für ein Simplex x_i von B definiert man $\varphi(x_i)$ als die, in geeigneter Weise als Komplex aufgefasste, Menge $P^{-1}(x_i)$, die fasertreu homöomorph mit $x_i \times F$ (F = Faser) ist. Für Komplexe, Zyklen usw. erhält man φ dann durch Addition.

Wegen der Voraussetzung $U \sim 0$ in G ist also $\varphi(\eta_0) \neq 0$. Nach dem Hilfssatz aus Kap. I, §1, Nr. 6 ist dann P eine Abbildung von $\mathfrak{R}(G)$ auf $\mathfrak{R}(W)$.

Zieht man jetzt den Satz V heran, so sieht man, dass die Gruppe $\mathfrak{B}(W)$ bestimmt ist, wenn man die Gruppe $\mathfrak{B}^0(G)$, d.h. die Gruppe derjenigen mini-

malen Elemente von $\mathfrak{R}(G)$, deren P -Bild in W homolog 0 ist kennt. Diese Gruppe soll jetzt bestimmt werden.

3. Weil $U \sim 0$ ist, ist kein Element (ausser 0) von $\mathfrak{B}(U)$ homolog 0 in G (Kap. II, §2, Nr. 2, Korollar 1), und man kann $\mathfrak{B}(U)$ als Untergruppe von $\mathfrak{B}(G)$ auffassen. Die Elemente von $\mathfrak{B}(U)$ werden bei P sicher auf 0 abgebildet: die ganze Untergruppe U wird ja auf einen Punkt abgebildet. Wir behaupten: mit den Elementen von $\mathfrak{B}(U)$ sind die Elemente von $\mathfrak{B}(G)$, deren P -Bild die Null ist, erschöpft, oder in der Bezeichnung von §1, Nr. 2: es ist $\mathfrak{B}^0(G) = \mathfrak{B}(U)$.

Zum Beweis setzen wir $l(G) = l$ und $l(U) = l'$. Die Elemente $v_1, v_2, \dots, v_{l'}$ mögen eine Basis von $\mathfrak{B}(U)$ bilden; sie werden aufgenommen in eine Basis $\{v_1, v_2, \dots, v_l\}$ von $\mathfrak{B}(G)$. Dann gilt (nach dem Aufspannsatz, angewendet auf die Gruppe U ; vgl. Kap. I, §3, Nr. 7)

$$v_1 \circ v_2 \circ \dots \circ v_{l'} = U$$

als Homologie in U (dann bedeutet U die Eins von $\mathfrak{R}(U)$); also gilt die Gleichung auch als Homologie in G . Wir setzen noch

$$v_{l'+1} \circ v_{l'+2} \circ \dots \circ v_l = V.$$

Dann gilt, wieder nach den Aufspannsatz, die Gleichung

$$U \circ V = 1,$$

wo 1 die Eins von $\mathfrak{R}(G)$ bedeutet; daher gilt (nach Kap. I, §3, Nr. 10) für den Schnitt $U \cdot V$:

$$U \cdot V = v_0.$$

Uebt man auf diese Gleichung die Abbildung P aus, und beachtet, dass $U = \varphi(\eta_0)$ ist, so erhält man wegen der Funktionalgleichung für φ die Gleichung:

$$\eta_0 \cdot P(V) = \eta_0.$$

Bezeichnet man die Eins von $\mathfrak{R}(W)$ mit $\bar{1}$, so heisst das:

$$P(V) = \bar{1}.$$

Es ist also $P(v_{l'+1} \circ v_{l'+2} \circ \dots \circ v_l) \neq 0$; daraus folgt nach der letzten Bemerkung in §1, Nr. 2, dass die Bilder $\eta_i = P(v_i)$ der Elemente $v_{l'+1}, v_{l'+2}, \dots, v_l$ in W linear unabhängig sind. Das bedeutet aber: die Restklassengruppe $\mathfrak{B}(G) - \mathfrak{B}(U)$ wird durch P isomorph abgebildet.

Daher ist $\mathfrak{B}(U)$ der Kern der Abbildung P von $\mathfrak{B}(G)$; die Behauptung $\mathfrak{B}^0(G) = \mathfrak{B}(U)$ ist bewiesen.

Die von $v_{l'+1}, v_{l'+2}, \dots, v_l$ erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{B}(G)$ ist die in §1, Nr. 2 mit $\mathfrak{B}^1(G)$ bezeichnete Gruppe; der von dem Punkt v_0 und den Elementen dieser Gruppe erzeugte Teilring von $\mathfrak{B}(G)$ wird nach §1, Nr. 2 eineindeutig auf die Bildgruppe abgebildet. Da jetzt nach Nr. 2 die Bildgruppe mit der ganzen

Gruppe $\mathfrak{B}(W)$ zusammenfällt, ist also $\mathfrak{B}(W)$ eindeutiges Bild des von den $v_{l'+1}, v_{l'+2}, \dots, v_l$ und v_0 erzeugten Teilringes von $\mathfrak{B}(G)$.

Dieser Teilring enthält nun genau $2^{l-l'}$ linear unabhängige Elemente, z.B. den Punkt v_0 und die Produkte

$$v_{i_1} \circ v_{i_2} \circ \dots \circ v_{i_r} \quad (l' + 1 \leq i_k \leq l, i_1 < i_2 < \dots < i_r).$$

Also enthält auch $\mathfrak{B}(W)$ genau $2^{l-l'}$ linear unabhängige Elemente.

4. Wir betrachten die zu den $\eta_i = P(v_i)$ dualen Elemente ζ_i von $\mathfrak{B}(W)$ ($i = l' + 1, \dots, l$). Weil $P(V) = P(v_{l'+1} \circ v_{l'+2} \circ \dots \circ v_l) = \bar{1}$ die Dimension $d(W)$ hat, ist der Schnitt $\zeta_{l'+1} \cdot \zeta_{l'+2} \cdot \dots \cdot \zeta_l$ nulldimensional. Aus der Formel (1) in §1, Nr. 5, entnimmt man leicht, dass dieser Schnitt gleich $\pm \eta_0$, also von Null verschieden ist; man setze dazu für das dort mit w bezeichnete Element das Produkt $V = v_{l'+1} \circ v_{l'+2} \circ \dots \circ v_l$ ein und beachte, dass $P(V) = \bar{1}$ ist. Ausserdem sind die ζ_i antikommutativ in Bezug auf den Schnitt:

$$\zeta_i \cdot \zeta_k = -\zeta_k \cdot \zeta_i \quad \text{und} \quad \zeta_i \cdot \zeta_i = 0,$$

denn es ist $\delta(\zeta_i) = d(\eta_i) = d(v_i)$ ungerade.

Daraus folgert man (vgl. die Betrachtung in Kap. I, §3, Nr. 7), dass die Produkte

$$\zeta_{i_1} \cdot \zeta_{i_2} \cdot \dots \cdot \zeta_{i_r} \quad (l' + 1 \leq i_k \leq l, i_1 < i_2 < \dots < i_r)$$

linear unabhängige Elemente in $\mathfrak{B}(W)$ sind; mit $\bar{1}$ zusammen sind das genau $2^{l-l'}$ Elemente; die ζ_i bilden also mit $\bar{1}$ zusammen ein irreduzibles Erzeugendensystem von $\mathfrak{R}(W)$. Diese Eigenschaften der ζ_i sind es aber gerade, die $\mathfrak{R}(W)$ als Ring eines Produktes von ungerade-dimensionalen Sphären charakterisieren. Damit ist VI a) bewiesen. Den "Sphären selbst" entsprechen die Elemente η_i .

5. Den Isomorphismus von $\mathfrak{R}(G)$ und $\mathfrak{R}(U \times W)$ stellt man jetzt folgendermassen her:

1 sei die Eins von $\mathfrak{R}(G)$, $1'$ die von $\mathfrak{R}(U)$, $\bar{1}$ die von $\mathfrak{R}(W)$.

z_i seien die zu den v_i dualen Elemente von $\mathfrak{B}(G)$ ($i = 1, \dots, l$); sie bilden mit 1 zusammen ein irreduzibles Erzeugendensystem von $\mathfrak{R}(G)$ (vgl. Kap. I, §2, Nr. 4).

z'_j seien die zu den v_j dualen Elemente von $\mathfrak{B}(U)$ ($j = 1, \dots, l'$); sie bilden mit $1'$ zusammen ein irreduzibles Erzeugendensystem von $\mathfrak{R}(U)$.

ζ_k seien die oben eingeführten Elemente von $\mathfrak{B}(W)$ ($k = l' + 1, \dots, l$); sie bilden mit $\bar{1}$ zusammen ein irreduzibles Erzeugendensystem von $\mathfrak{R}(W)$.

Die Elemente $(z'_j \times \bar{1})$ und $(1' \times \zeta_k)$ bilden dann mit dem Element $(1' \times \bar{1})$ zusammen ein irreduzibles Erzeugendensystem von $\mathfrak{R}(U \times W)$.

Alle diese Systeme sind antikommutativ; und das Produkt aller Elemente jeden Systems ist der einfach gezählte Punkt des betreffenden Ringes.

Jetzt ordnet man zu:

Den Elementen z_i ($i = 1, \dots, l'$) die Elemente $(z'_i \times \bar{1})$,

den Elementen z_i ($i = l' + 1, \dots, l$) die Elemente $(1' \times \xi_k)$, dem Element 1 das Element $1' \times \bar{1}$.

Das ergibt offenbar einen Isomorphismus zwischen $\mathfrak{R}(G)$ und $\mathfrak{R}(U \times W)$ der gewünschten Art; damit ist auch VI b) bewiesen.

ZÜRICH, SWITZERLAND

LITERATURVERZEICHNIS

1. L. Pontrjagin: *Topological Groups* (Princeton 1939), Def. 38, S. 181 u. S. 83, D).
2. E. Cartan: *La Topologie des . . . Groupes de Lie* [L'Enseignement Math. 35 (1936); dasselbe auch: *Actualités Scient. et Industr.* 358].
3. L. Pontrjagin: *On Homologies in compact Lie groups* [Recueil math. de Moscou, t. 6 (48), 3 (1939)].
4. R. Brauer: C. R. 201 (1935), S. 419.
5. Ch. Ehresmann: C. R. 208 (1939), S. 321 u. S. 1263.
6. A. a. O. [2], S. 199.
7. H. Hopf: *Ueber die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und ihrer Verallgemeinerungen* [these Annals (2) 42 (1941)], Satz 1.
8. A. a. O. [2], S. 198. Diese Vermutung ist auch ausgesprochen bei Hopf, a. a. O. [7], Nr. 37.
9. E. Cartan: *La theorie des groupes finis et continus et l'analysis situs* [Memorial Sc. Math. XLII], Nr. 17.
10. J. Feldbau: C. R. 208 (1939), S. 1621.
11. S. Lefschetz: *Topology* (New York 1930).
12. H. Hopf: *Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten* [Journal f. d. r. u. a. Math. 163 (1930)].
H. Freudenthal: *Zum Hopf'schen Umkehrhomomorphismus* [Annals of Math. (2) 38 (1937)].
A. Komatu: *Über die Ringdualität eines Kompaktums* [Tôhoku Math. J. 43 (1937)].
H. Whitney: *On Products in a complex* [Annals of Math. (2) 39 (1938)], Th. 6.
13. Alexandroff-Hopf: *Topologie I* (Berlin 1935), Kap. VII, §3.
14. A. a. O. [11].
15. A. a. O. [2], S. 198.
16. A. a. O. [7], Nr. 37.
17. A. a. O. [1], Th. 50, insbesondere S. 200, Formel (20).
18. S. S. Cairns: *On the triangulation of regular loci* [Annals of Math. (2) 35 (1934)].
H. Freudenthal: *Die Triangulation der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten* [Proceedings Amsterdam XLII (1939)].
19. A. a. O. [10], Th. A.
20. A. a. O. [13], S. 128 u. 149.
21. A. a. O. [13], S. 334.
22. A. a. O. [13], Kap. VII, §2.
23. A. a. O. [3], S. 397 f.
24. A. a. O. [3], Th. 2 u. 3.
25. H. Weyl: *The classical groups* (Princeton 1940), S. 163 u. S. 172.

LEBENS LAUF

Ich, Hans Samelson, wurde am dritten März 1916 in Strassburg i.E. geboren, als Sohn des Prof. Dr. Siegfried Samelson und der Dr. med. Irmgard Samelson-Engel. Von 1922 an besuchte ich eine Vorschule und danach das Johannesgymnasium in Breslau; im Jahre 1934 wurde mir das Reifezeugnis erteilt. Nach einigen Semestern an den Universitäten Breslau und Zürich wurde ich im Jahre 1937 in der Abteilung für Mathematik und Physik der Eidgenössischen Technischen Hochschule als Studierender aufgenommen. Im Sommer 1939 erhielt ich das Diplom als Mathematiker der E.T.H.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Heinz Hopf, möchte ich an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank für sein stetes Interesse und für viele Anregungen und Ratschläge während meines Studiums und während der Abfassung der vorliegenden Arbeit sagen.

HANS SAMELSON

Zürich, 1940