Traglast von Stäben mit dünnwandigen offenen Querschnitten

Working Paper**Author(s):**

Grob, Josef

Publication date:

1975

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000165959>

Rights / license:

In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

Originally published in:

Bericht / Institut für Baustatik und Konstruktion ETH Zürich 56

Traglast von Stäben mit dünnwandigen offenen Querschnitten

Josef Grob

Bericht Nr. 56, Juni 1975

Traglast von Stäben mit dünnwandigen offenen Querschnitten

von

Dr. sc. techn. Josef Grob

**Institut für Baustatik und Konstruktion
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich**

**Zürich
Juni 1975**

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
1. EINLEITUNG	1
2. GRUNDLAGEN	3
2.1 Voraussetzungen	3
2.2 Gleichgewichtsbedingungen	5
2.3 Kinematische Bedingungen	16
2.4 Verzweigte offene Querschnitte	24
3. BESTIMMUNG DER SCHNITTKRAEFTE	25
3.1 Elastizitätstheorie	25
3.2 Plastizitätstheorie	31
4. PLASTISCHER WIDERSTAND VON QUERSCHNITTEN AUS HOMOGENEN ISOTROPEN MATERIALIEN	35
4.1 Bruchmodell und Materialverhalten	35
4.2 Statische Methode	39
4.3 Kinematische Methode	43
4.4 Numerisches Beispiel	49
5. PLASTISCHER WIDERSTAND VON STAHLBETON- UND SPANNBETONQUERSCHNITTEN	53
5.1 Bruchmodell und Materialverhalten	53
5.2 Statische Methode	62
5.3 Kinematische Methode	66
5.4 Dualität zwischen statischer und kinematischer Methode	70
5.5 Bruchmechanismen	75
5.5.1 Längsmechanismus	77
5.5.2 Schubmechanismus	83
5.5.3 Kombiniertes Mechanismus	86
5.6 Praktische Traglastbestimmung	88
5.6.1 Prinzipielles Vorgehen	88
5.6.2 Berechnungsmethode	89
5.6.3 Numerisches Beispiel	98
5.7 Anwendungsgrenzen	103

ZUSAMMENFASSUNG	109
RESUME	110
SUMMARY	111
BEZEICHNUNGEN	112
LITERATURVERZEICHNIS	115

VORWORT

Der plastische Querschnittswiderstand und die Traglast von Balken mit dünnwandigen offenen Querschnitten unter kombinierter Beanspruchung ist bis heute kaum untersucht worden. In der vorliegenden Arbeit, welche als Dissertation ausgearbeitet wurde, wendet Herr Grob konsequent die Plastizitätstheorie (elastisches-idealplastisches Material) auf dieses Problem an. Es wurden sowohl Träger aus Stahl, Stahlbeton und Spannbeton untersucht.

Wir hoffen, dass die Ergebnisse nicht nur praktische Anwendung finden werden, sondern die ausgearbeitete Methode auch Anregungen vermittelt für weitere Arbeiten über die Traglast von Trägern unter kombinierter Beanspruchung, Biegung, Normalkraft, Querkraft und Torsion.

Zürich, Juni 1975

Prof. Dr. B. Thürlimann

1. EINLEITUNG

Bei der Bemessung eines Tragwerkes muss sich der Ingenieur Gedanken über das Materialverhalten des gewählten Baustoffes machen. Er muss die mechanischen Eigenschaften, die für das zu lösende Problem wesentlich sind, erkennen und von den Berechnungsverfahren dasjenige auswählen, welches diese Materialeigenschaften wenigstens näherungsweise zu beschreiben vermag. Den heute gebräuchlichen Berechnungsverfahren ist im allgemeinen eines der folgenden idealisierten Stoffgesetze zugrunde gelegt.

Bild 1

Für ideal-elastische Materialien ist das Tragverhalten von Stäben mit dünnwandigen offenen Querschnitten bekannt. Allerdings verhalten sich die wichtigsten Baustoffe nur für genügend kleine Spannungen und Dehnungen wie elastische Körper, was dazu führt, dass der Elastizitätstheorie Grenzen gesetzt sind. Die Verwendung eines elastischen Stoffgesetzes ist nur dort sinnvoll, wo die Elastizitätsgrenze nicht überschritten wird.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht darin, eine allgemein gültige Theorie für die Berechnung der plastischen Traglast von Stäben mit dünnwandigen offenen Querschnitten zu entwickeln. Es interessiert demnach das Verhalten oberhalb des elastischen Bereiches, was eine Anwendung der reinen Elastizitätstheorie von vorne herein ausschliesst. Für zähe, duktile Materialien empfiehlt sich die Annahme eines elastisch-plastischen oder eines starr-plastischen Stoffgesetzes. Wird den Berechnungen ein elastisch-plastisches Materialverhalten zugrunde gelegt, so erhält man neben dem Spannungs- auch den Verformungszustand. In allen jenen Fällen, wo die Verformungen keinen spürbaren Einfluss auf das Gleichgewicht ausüben, ist die Annahme eines elastisch-plastischen Baustoffes jedoch nicht nötig, da die Verwendung des einfacheren starr-plastischen Stoffgesetzes zur gleichen Traglast führt. Deshalb wird im folgenden ein starr-plastisches Materialverhalten zur Berechnung der Traglast von Stäben mit dünnwandigen offenen Querschnitten voraus-

gesetzt. Die Möglichkeit einer relativ einfachen und übersichtlichen Bestimmung der Traglast, welche meist das entscheidende Kriterium für die Sicherheit eines Tragwerkes darstellt, ist damit gegeben.

2. GRUNDLAGEN

2.1 Voraussetzungen

Die hier gemachten Voraussetzungen für die Berechnung der Traglast von Stäben mit dünnwandigen offenen Querschnitten beinhalten im wesentlichen die Annahmen der Plastizitätstheorie und der Stabtheorie bei Beschränkung auf die Theorie 1. Ordnung.

1. Die Querschnittsform bleibt erhalten.
2. Die Querschnittsabmessungen sind klein im Vergleich zur Stablänge.
3. Die Deformationen sind klein, sie haben keinen Einfluss auf die Schnittkräfte.
4. Die Stabaxe ist stückweise gerade.
5. Der Querschnitt ist stückweise konstant.
6. Der Querschnitt ist dünnwandig, die Plattenwirkung ist klein im Vergleich zur Scheibenwirkung.
7. Es wird ein starr-idealplastisches Materialverhalten angenommen.
8. Die Lasten werden proportional bis zum Erreichen der Traglast gesteigert.

Die Anwendung der Stabtheorie verlangt die Erhaltung der Querschnittsform. Diese Voraussetzung ist gerechtfertigt, wenn die im Quersinn anfallende Beanspruchung ohne wesentliche Verformung der Querschnitte aufgenommen werden kann, was durch eine geeignete Ausbildung der Querschnitte oder den Einbau von Querschotten bzw. Queraussteifungen zu gewährleisten ist. Kann die Erhaltung der Querschnittsform nicht mehr garantiert werden, so ist ein Extremfall denkbar, bei dem sich der Querschnitt widerstandslos verformen lässt. Solche Tragwerke werden als Gelenkfaltwerke bezeichnet. Auf deren Berechnung wird hier nicht eingegangen, es sei lediglich auf den diese Arbeit ergänzenden Versuchsbericht [12] hingewiesen, in welchem ein einfacher Weg zur Bestimmung der Traglast von Stahlbeton- und Spannbetonfaltwerken angegeben ist.

Die vorausgesetzte Dünnwandigkeit der Querschnitte erlaubt eine Vernachlässigung der Plattenwirkung, die im Verhältnis zur Scheibenwirkung einen nur unbedeutenden Einfluss hat. Damit ist auch gesagt, dass die St.Venant'sche Torsion, die bei Stäben mit dünnwandigen offenen Querschnitten den Verwindungsanteil der Plattenwirkung berücksichtigt, in dieser Arbeit vernachlässigt wird.

Scheibenwirkung

Plattenwirkung

(vernachlässigt)

Bild 2

Allen Berechnungen wird ein rechtsdrehendes, kartesisches Koordinatensystem zugrunde gelegt, dessen x-Axe in Stablängsrichtung weist. Zudem wird eine Querschnittskoordinate eingeführt, welche entlang der Mittellinie des dünnwandigen Querschnittes verläuft.

Bild 3

Die Punkte A und D sind beliebige Punkte der Querschnittsebene, der Punkt B ist ein beliebiger Punkt auf der Mittellinie des Querschnittes.

Die Lasten werden wie folgt definiert:

p_y	$[t/m]$
p_z	$[t/m]$
m_{xD}	$[mt/m]$
$\bar{p}_x$	$[t/m^2]$

Bild 4

Weil Querschnittserhaltung vorausgesetzt ist, dürfen die in Querrichtung wirkenden Lasten durch deren Resultierende ersetzt werden. Es sind dies die auf den Punkt D reduzierten Querbelastungen p_y , p_z und m_{xD} . Die in Stablängsrichtung wirkenden Lasten $\bar{p}_x$ [t/m²] dürfen hingegen nicht in einer Resultierenden zusammengefasst werden, da sich der Querschnitt in Längsrichtung aus seiner Ebene heraus verwölben kann.

2.2 Gleichgewichtsbedingungen

Dank der vorausgesetzten Querschnittserhaltung kann ein Teil der Gleichgewichtsbedingungen wie bei einem Stab mit Vollquerschnitt erhalten werden.

Bild 5

Es sind dies die bekannten Zusammenhänge zwischen den Querkräften Q_y , Q_z , dem Torsionsmoment T_D und den Querbelastungen.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ_y}{dx} + p_y &= 0 \\ \frac{dQ_z}{dx} + p_z &= 0 \\ \frac{dT_D}{dx} + m_{xD} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Die übrigen Gleichgewichtsbedingungen für ein Stabelement ergeben sich aus der Betrachtung des Schubflusses S ($S = \tau_{xs} \cdot d$).

Bild 6

Entsprechend dem rechtsdrehenden Koordinatensystem ist der Abstand r_D positiv, wenn der Punkt D links von der Tangente f liegt (Blickrichtung: Positive s -Koordinate).

Die Gleichgewichtsbedingung in Längsrichtung liefert folgenden Ausdruck für den Schubfluss S :

$$\begin{aligned} S \cdot dx &= - \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_a^{s_B} \sigma_x \cdot d \cdot ds \right) \cdot dx - \left(\int_a^{s_B} \bar{p}_x \cdot ds \right) \cdot dx \\ S &= - \frac{\partial}{\partial x} \int_a^{s_B} \sigma_x \cdot d \cdot ds - \int_a^{s_B} \bar{p}_x \cdot ds \end{aligned} \quad (2)$$

Aus der Randbedingung, dass der Schubfluss am Querschnittsende e verschwinden muss, bekommt man die Beziehung:

$$0 = \frac{d}{dx} \int_a^e \sigma_x \cdot d \cdot ds + \int_a^e \bar{p}_x \cdot ds \quad (3)$$

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}$ gehen in gewöhnliche Ableitungen $\frac{d}{dx}$ über, weil der nachfolgende Ausdruck wegen der Integration über die festen Grenzen a - e nur noch eine Funktion der Variablen x ist.

Die im Querschnitt vorhandenen Schubspannungen τ_{xs} bzw. der entsprechende Schubfluss S müssen zu den Schnittkräften Q_y , Q_z und T_D statisch äquivalent sein. Es gilt:

$$\left. \begin{aligned} Q_y &= \int_a^e S \cdot dy \\ Q_z &= \int_a^e S \cdot dz \\ T_D &= T_{wD} = \int_a^e S \cdot r_D \cdot ds \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Die Beziehung $T_D = T_{wD}$ besagt, dass die Plattenwirkung und damit die St. Venant'sche Torsion vernachlässigt werden.

Bei Berücksichtigung der St. Venant'schen Torsion würde sich das Torsionsmoment T_D aus einem Wölb- und einem St. Venant'schen Anteil zusammensetzen:

$$T_D = T_{wD} + T_s \quad (5)$$

T_{wD} : Auf den Punkt D bezogenes Wölb-torsionsmoment.

T_s : St. Venant'sches Torsionsmoment.

Als nächstes wird der Ausdruck (2) in die Gleichungen (4) eingesetzt:

$$\begin{aligned}
 Q_y &= \int_a^e S \cdot dy = \\
 &= - \frac{d}{dx} \int_a^e dy \int_a^{s_B} \sigma_x \cdot d \cdot ds - \int_a^e dy \int_a^{s_B} \bar{p}_x \cdot ds = \\
 &= - \frac{d}{dx} \int_a^e dy \int_a^e \sigma_x \cdot d \cdot ds - \int_a^e dy \int_a^e \bar{p}_x \cdot ds + \\
 &\quad + \frac{d}{dx} \int_a^e \sigma_x \cdot d \cdot ds \int_{y_A(a)}^{y_A} dy + \int_a^e \bar{p}_x \cdot ds \int_{y_A(a)}^{y_A} dy = \\
 &= + \frac{d}{dx} \int_a^e \sigma_x \cdot y_A \cdot d \cdot ds + \int_a^e \bar{p}_x \cdot y_A \cdot ds - \\
 &\quad - \underbrace{\left[y_A(a) + \int_a^e dy \right] \cdot \left[\frac{d}{dx} \int_a^e \sigma_x \cdot d \cdot ds + \int_a^e \bar{p}_x \cdot ds \right]}_{= 0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_D &= T_{wD} = \int_a^e S \cdot r_D \cdot ds = \\
 &= - \frac{d}{dx} \int_a^e r_D \cdot ds \int_a^{s_B} \sigma_x \cdot d \cdot ds - \int_a^e r_D \cdot ds \int_a^{s_B} \bar{p}_x \cdot ds = \\
 &= - \frac{d}{dx} \int_a^e r_D \cdot ds \int_a^e \sigma_x \cdot d \cdot ds - \int_a^e r_D \cdot ds \int_a^e \bar{p}_x \cdot ds + \\
 &\quad + \frac{d}{dx} \int_a^e \sigma_x \cdot d \cdot ds \int_{s_B(a)}^{s_B} r_D \cdot ds + \int_a^e \bar{p}_x \cdot ds \int_{s_B(a)}^{s_B} r_D \cdot ds = \\
 &= + \frac{d}{dx} \int_a^e \sigma_x \cdot \left(\int_0^{s_B} r_D \cdot ds \right) \cdot d \cdot ds + \int_a^e \bar{p}_x \cdot \left(\int_0^{s_B} r_D \cdot ds \right) \cdot ds + \\
 &\quad + \underbrace{\left[\int_{s_B(a)}^0 r_D \cdot ds - \int_a^e r_D \cdot ds \right] \cdot \left[\frac{d}{dx} \int_a^e \sigma_x \cdot d \cdot ds + \int_a^e \bar{p}_x \cdot ds \right]}_{= 0}
 \end{aligned}$$

Mit der sektoriellen Koordinate $\omega_{DB} = \int_D^{s_B} r_D \cdot ds$, einer geometrischen Grösse, lassen sich die erhaltenen Gleichungen⁰ wie folgt anschreiben:

$$\left. \begin{aligned} Q_y &= \frac{d}{dx} \int_a^e \sigma_x \cdot y_A \cdot d \cdot ds + \int_a^e \bar{p}_x \cdot y_A \cdot ds \\ Q_z &= \frac{d}{dx} \int_a^e \sigma_x \cdot z_A \cdot d \cdot ds + \int_a^e \bar{p}_x \cdot z_A \cdot ds \\ T_{wD} &= \frac{d}{dx} \int_a^e \sigma_x \cdot \omega_{DB} \cdot d \cdot ds + \int_a^e \bar{p}_x \cdot \omega_{DB} \cdot ds \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Es sei hier festgehalten, dass die sektorielle Koordinate ω_{DB} um den Punkt D "dreht" und so normiert ist, dass sie im Punkt B verschwindet.

Die Einführung weiterer Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} N &= \int_a^e \sigma_x \cdot d \cdot ds \\ M_{yA} &= \int_a^e \sigma_x \cdot y_A \cdot d \cdot ds \\ M_{zA} &= \int_a^e \sigma_x \cdot z_A \cdot d \cdot ds \\ M_{wDB} &= \int_a^e \sigma_x \cdot \omega_{DB} \cdot d \cdot ds \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \int_a^e \bar{p}_x \cdot ds \\ m_{yA} &= \int_a^e \bar{p}_x \cdot y_A \cdot ds \\ m_{zA} &= \int_a^e \bar{p}_x \cdot z_A \cdot ds \\ m_{wDB} &= \int_a^e \bar{p}_x \cdot \omega_{DB} \cdot ds \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ermöglicht eine zweckmässige und übersichtliche Darstellung der Gleichungen (3) und (6).

$$\frac{dN}{dx} + p_x = 0$$

$$Q_y = \frac{dM_{yA}}{dx} + m_{yA}$$

$$Q_z = \frac{dM_{zA}}{dx} + m_{zA}$$

$$T_D = T_{wD} = \frac{dM_{\omega DB}}{dx} + m_{\omega DB}$$

(9)

Die physikalische Bedeutung der in (7) eingeführten Grössen ist evident.

N : Normalkraft

M_{yA}, M_{zA} : Auf die Koordinatenachsen $z_A = 0$ und $y_A = 0$ bezogene Biegemomente.

$M_{\omega DB}$: Um den Punkt D drehendes und auf den Punkt B normiertes Wölbmoment.

Bild 7

Betrachtet man die in (8) eingeführten Abkürzungen,

$$\begin{aligned}
 p_x &= \int_a^e \bar{p}_x \cdot ds \\
 m_{yA} &= \int_a^e \bar{p}_x \cdot y_A \cdot ds = p_x \cdot \frac{\int_a^e \bar{p}_x \cdot y_A \cdot ds}{\int_a^e \bar{p}_x \cdot ds} = p_x \cdot y_A(p_x) \\
 m_{zA} &= \int_a^e \bar{p}_x \cdot z_A \cdot ds = p_x \cdot z_A(p_x) \\
 m_{\omega DB} &= \int_a^e \bar{p}_x \cdot \omega_{DB} \cdot ds
 \end{aligned}$$

so erkennt man, dass es im Unterschied zum vollen Stab nicht mehr möglich ist, die in Richtung der Stabaxe wirkenden Lasten $\bar{p}_x$ durch deren Resultierende p_x im Punkt $[y_A(p_x), z_A(p_x)]$ zu ersetzen. Verantwortlich für diese Tatsache ist die Lastgrösse $m_{\omega DB}$.

Im Gegensatz dazu dürfen die Querbelastrungen durch ihre Resultierenden ersetzt werden, da bei dieser Theorie Querschnittserhaltung vorausgesetzt wird.

Werden nun die letzten drei Gleichungen aus (9) nach x abgeleitet und die Beziehungen aus (1) in diesen Gleichungen eingesetzt, dann erhält man:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d^2 M_{yA}}{dx^2} + p_y + \frac{dm_{yA}}{dx} &= 0 \\
 \frac{d^2 M_{zA}}{dx^2} + p_z + \frac{dm_{zA}}{dx} &= 0 \\
 \frac{d^2 M_{\omega DB}}{dx^2} + m_{xD} + \frac{dm_{\omega DB}}{dx} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Das vollständige Differentialgleichungssystem, welches die Schnittkräfte mit den Lasten verknüpft, kann schliesslich aus den Beziehungen (1), (9) und (10) zusammengestellt werden.

$$\begin{array}{rcl}
 \frac{dN}{dx} + p_x & = & 0 \\
 \frac{dQ_y}{dx} + p_y & = & 0 \\
 \frac{dQ_z}{dx} + p_z & = & 0 \\
 \frac{dT_{wD}}{dx} + m_{xD} & = & 0 \\
 \frac{d^2 M_{yA}}{dx^2} + p_y + \frac{dm_{yA}}{dx} & = & 0 \\
 \frac{d^2 M_{zA}}{dx^2} + p_z + \frac{dm_{zA}}{dx} & = & 0 \\
 \frac{d^2 M_{wDB}}{dx^2} + m_{xD} + \frac{dm_{wDB}}{dx} & = & 0
 \end{array} \quad (11)$$

Es sei noch einmal daran erinnert, dass die Koordinaten y_A und z_A , die Querschnittskoordinate s_B und der Punkt D ganz beliebig gewählt werden können.

Das Gleichungssystem (11) besteht aus sieben linearen, von einander unabhängigen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Jede Gleichung enthält eine unbekannte Schnittkraft. An statisch bestimmten Systemen, bei denen die Randbedingungen für die Schnittkräfte bekanntlich gegeben sind, können die Schnittkräfte allein aus diesen Gleichungen bestimmt werden.

Ferner ist aus der Zusammenstellung (11) folgende formelle Analogie zwischen Wölbtorsion und Balkenbiegung zu erkennen:

Wölbtorsion		Balkenbiegung
$m_{xD} + \frac{dm_{wDB}}{dx}$	$\leftrightarrow$	$p^* + \frac{dm^*}{dx}$
T_{wD}	$\leftrightarrow$	Q^*
M_{wDB}	$\leftrightarrow$	M^*

(12)

Diese Analogie ermöglicht eine einfache und zudem von der Balkenbiegung her bekannte Bestimmung der Wölbtorsionsschnittkräfte T_{wD} und M_{wDB} , was an einem einfachen Beispiel gezeigt werden soll.

Bestimmung der Schnittkräfte:

Analogiebalken:

Bild 8

Formelmässig ergeben sich die dargestellten Schnittkräfte zu:

$$M_{\omega DB} = M^* = P \cdot \omega_{DB}(P) - m_{xD} \cdot \frac{(1-x)^2}{2}$$

$$T_{\omega D} = Q^* = m_{xD} \cdot (1-x)$$

Nun soll zum Vergleich mit (11), wo nur die Wölb torsion vorkommt, die St. Venant'sche Torsion in den Gleichgewichtsbedingungen mitgenommen werden. In diesem Falle ist die Beziehung (5) in die letzten Gleichungen aus (1) und (9) einzusetzen. Die Gleichgewichtsgleichungen für die gemischte Torsion (Wölb- und St. Venant'sche Torsion) lauten dann:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT_{\omega D}}{dx} + \frac{dT_s}{dx} + m_{xD} &= 0 \\ \frac{d^2 M_{\omega DB}}{dx^2} + \frac{dT_s}{dx} + m_{xD} + \frac{dm_{\omega DB}}{dx} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Bei gemischter Torsion bekommt man zusätzlich noch eine unbekannte Schnittkraft, nämlich das St. Venant'sche Torsionsmoment T_s , in die Gleichgewichtsbedingungen. Da jedoch die Anzahl der Gleichungen nicht ändert, ist es selbst bei einem statisch bestimmten Tragwerk normalerweise nicht möglich, die Schnittkräfte $M_{\omega DB}$, $T_{\omega D}$ und T_s aus den Gleichgewichtsbedingungen allein zu bestimmen. Demnach stellt das St. Venant'sche Torsionsmoment bei Stäben mit dünnwandigen offenen Querschnitten eine statisch überzählige Grösse dar, welche zur Erhaltung des Gleichgewichts nicht nötig ist. Ausnahmen gibt es in jenen Fällen, wo durch

die Querschnittsform

oder die Lagerung

Bild 9

ein Aufbau der Wölbtorsionsschnittkräfte (Scheibenwirkung) verunmöglicht wird. Von derartigen Tragwerken wird im folgenden abgesehen, da die St.Venant'sche Torsion wegen der vorausgesetzten Vernachlässigung der Plattenwirkung nicht berücksichtigt wird.

Neben den Schnittkräften interessieren vor allem die statischen Zusammenhänge zwischen den Schnittkräften und den Spannungen. Die betreffenden Gleichungen sind bereits in (4) und (7) formuliert und brauchen nur noch zusammengestellt zu werden.

$$\begin{aligned}
 N &= \int_a^e \sigma_x \cdot d \cdot ds \\
 Q_y &= \int_a^e S \cdot dy \\
 Q_z &= \int_a^e S \cdot dz \\
 T_{wD} &= \int_a^e S \cdot r_D \cdot ds \\
 M_{yA} &= \int_a^e \sigma_x \cdot y_A \cdot d \cdot ds \\
 M_{zA} &= \int_a^e \sigma_x \cdot z_A \cdot d \cdot ds \\
 M_{\omega DB} &= \int_a^e \sigma_x \cdot \omega_{DB} \cdot d \cdot ds
 \end{aligned} \tag{14}$$

Mit den geometrischen Beziehungen

$$dy = ds \cdot \cos \delta$$

$$dz = ds \cdot \sin \delta$$

Bild 10

lassen sich diese Gleichgewichtsbedingungen in einer Form darstellen, wie sie für die spätere Berechnung der plastischen Querschnittswiderstände zweckmässig ist.

$$\begin{aligned}
 N &= \int_a^e \sigma_x \cdot d \cdot ds \\
 Q_y &= \int_a^e S \cdot \cos \delta \cdot ds \\
 Q_z &= \int_a^e S \cdot \sin \delta \cdot ds \\
 T_{wD} &= \int_a^e S \cdot r_D \cdot ds \\
 M_{yA} &= \int_a^e \sigma_x \cdot y_A \cdot d \cdot ds \\
 M_{zA} &= \int_a^e \sigma_x \cdot z_A \cdot d \cdot ds \\
 M_{wDB} &= \int_a^e \sigma_x \cdot w_{DB} \cdot d \cdot ds
 \end{aligned} \tag{15}$$

2.3 Kinematische Bedingungen

In diesem Abschnitt wird der Verschiebungszustand eines Stabelementes untersucht. Zur Einführung dient die kinematische Betrachtung eines Balkens, dessen Verschiebungszustand durch die Verschiebungen u und w gegeben ist.

Bild 11

Für die Verschiebungen u und w werden folgende Ansätze gemacht:

$$u = u_0(x) - \frac{dw_0(x)}{dx} \cdot z$$

$$w = w_0(x) + \int_x \gamma_0(x) \cdot dx$$

In diesen Ansätzen ist die in der Balkenstatik übliche Voraussetzung ebenbleibender Querschnitte enthalten. Die Verschiebung w_0 bezeichnet nicht die gesamte Durchbiegung in Richtung der z -Axe, sondern lediglich den schiebungsfreien Anteil derselben. Aus den Verschiebungen u und w erhält man die gesuchten Dehnungen ϵ_x und ϵ_z sowie die Schiebung γ_{xz} durch Ableitung.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du_0}{dx} - \frac{d^2 w_0}{dx^2} \cdot z$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_0$$

Wie man sieht, beeinflussen die Verschiebungskomponenten u_0 und w_0 nur die Längsdehnungen ϵ_x , während γ_0 die Schiebung des Querschnittes beschreibt.

Für den Fall des dünnwandigen offenen Querschnittes wird analog vorgegangen. Es wird zwischen Verschiebungskomponenten (wie u_0 und w_0), welche den Dehnungszustand beschreiben, und zwischen sogenannten Schiebungskomponenten (entsprechend γ_0), die lediglich die Schiebungen beeinflussen, unterschieden. Da gemäss Voraussetzung Querschnittserhaltung angenommen wird, kann der Verschiebungszustand durch vier Verschiebungskomponenten und drei Schiebungsgrössen dargestellt werden.

Zuerst wird der Einfluss der vier Verschiebungskomponenten untersucht.

Bild 12

Jede der vier dargestellten Verschiebungskomponenten, bzw. deren Ableitungen nach x , bewirkt eine Verschiebung in Stablängsrichtung.

Die Längsverschiebungen infolge v_D und w_D können aus der nachstehenden Figur abgelesen werden.

Bild 13

Sie werden wie früher die Biegemomente auf den Punkt A normiert.

$$\left. \begin{aligned} u(v_D) &= -\frac{dv_D}{dx} \cdot y_A \\ u(w_D) &= -\frac{dw_D}{dx} \cdot z_A \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Die Bestimmung der Längsverschiebung infolge ϑ_D erfolgt am einfachsten über die Verschiebung der Mittellinie des Querschnittes.

Bild 14

Mit der durch die Drehung ϑ_D bedingten Tangentialverschiebung η der Querschnittsmittellinie bzw. deren Ableitung nach x

$$\eta = \vartheta_D \cdot r_D$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\vartheta_D \cdot r_D) = \frac{d\vartheta_D}{dx} \cdot r_D$$

kann folgende Verschiebungsfigur gezeichnet werden:

Bild 15

Daraus ergibt sich die Längsverschiebung infolge ϑ_D , welche wie früher das Wölbmoment auf den Punkt B normiert wird.

$$\frac{\partial u(\vartheta_D)}{\partial s} \cdot ds = - \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot ds = - \frac{d\vartheta_D}{dx} \cdot r_D \cdot ds$$

$$u(\vartheta_D) = - \frac{d\vartheta_D}{dx} \cdot \underbrace{\int_0^{s_B} r_D \cdot ds}_{\omega_{DB}}$$

$$u(\vartheta_D) = - \frac{d\vartheta_D}{dx} \cdot \omega_{DB} \quad (17)$$

Aus der totalen Längsverschiebung, die man durch Summation der Anteile infolge u_A , v_D , w_D und ϑ_D erhält, folgt:

$$u = u_A - \frac{dv_D}{dx} \cdot y_A - \frac{dw_D}{dx} \cdot z_A - \frac{d\vartheta_D}{dx} \cdot \omega_{DB} \quad (18)$$

und die dazugehörige Dehnung ϵ_x :

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_x = \frac{du_A}{dx} - \frac{d^2 v_D}{dx^2} \cdot y_A - \frac{d^2 w_D}{dx^2} \cdot z_A - \frac{d^2 \vartheta_D}{dx^2} \cdot \omega_{DB} \quad (19)$$

Als nächstes werden die drei Schiebungsgrößen, und zwar je eine Schiebung in y- und z-Richtung sowie eine Schiebung um den Punkt D, eingeführt.

Bild 16

Alle Schiebungen, seien es diejenigen in y- und z-Richtung oder die Dreh-Schiebung um den Punkt D, führen zu folgenden Verformungen.

Bild 17

Die Schiebung γ_{xs} der Querschnittsmittellinie wird der Einfachheit halber mit γ bezeichnet. Den einen Anteil zu dieser Schiebung liefern die Schiebungsgrößen γ_y und γ_z .

Bild 18

Aus den Detailskizzen dieser Zeichnungen lassen sich die Schiebungen der Querschnittsmittellinie infolge γ_y und γ_z ablesen:

$$\gamma(\gamma_y) = \gamma_y \cdot \cos \delta$$

$$\gamma(\gamma_z) = \gamma_z \cdot \sin \delta$$

(20)

Als nächstes wird die Verschiebungsfigur für die Dreh-Schiebung γ_ϑ um den Punkt D bestimmt.

Bild 19

Daraus erhält man die durch γ_ϑ bedingte Schiebung der Querschnittsmittellinie.

$$\gamma(\gamma_\vartheta) = \gamma_\vartheta \cdot r_D \quad (21)$$

Die totale Schiebung γ der Querschnittsmittellinie kann schliesslich wie folgt angegeben werden.

$$\gamma = \gamma_y \cdot \cos\delta + \gamma_z \cdot \sin\delta + \gamma_\vartheta \cdot r_D$$

(22)

Zum Schluss dieses Abschnittes sei darauf hingewiesen, dass von nun an bei Koordinaten, Lasten, Schnittkräften und Verschiebungen die spezielle Bezeichnung für den jeweiligen Bezugspunkt der Einfachheit halber weggelassen wird.

Zum Beispiel:

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} - \frac{d^2v}{dx^2} \cdot y - \frac{d^2w}{dx^2} \cdot z - \frac{d^2\phi}{dx^2} \cdot \omega$$

$$M_\omega = \int_a^e \sigma_x \cdot \omega \cdot d \cdot ds$$

$$m_y = \int_a^e \bar{p}_x \cdot y \cdot ds$$

usw.

2.4 Verzweigte offene Querschnitte

Verzweigte offene Querschnitte können aus einem sogenannten Hauptquerschnitt und aus abstehenden Querschnittsteilen zusammengesetzt werden.

Bild 20

Wenn die Querschnittskordinaten s_{ab} der abstehenden Teile gegen der Hauptquerschnitt laufen

Bild 21

und die sektorielle oder Wölbkoordinate w in jedem Verzweigungspunkt für den Hauptquerschnitt und den abstehenden Querschnittsteil dieselbe Grösse aufweist, können verzweigte Querschnitte genau gleich wie nichtverzweigte behandelt werden.

Die Berechnung der sektoriellen Koordinaten für die abstehenden Querschnittsteile erfolgt also über die Anfangswerte in den Verzweigungspunkten, welche sich am Hauptquerschnitt allein bestimmen lassen.

3. BESTIMMUNG DER SCHNITTKRAEFTE

3.1 Elastizitätstheorie

Die Berechnung von Stäben mit dünnwandigen offenen Querschnitten nach der Elastizitätstheorie ist bekannt und wurde in zahlreichen Publikationen, z.B. [1] bis [4], veröffentlicht.

Hier wird nur soweit auf diese Theorie eingegangen als sie für den Bruchnachweis von Querschnitten aufgrund elastisch bestimmter Schnittkräfte von Bedeutung ist. In diesem Zusammenhang sei erwähnt, dass die Schnittkräfte eines statisch unbestimmten Systems oft nach der Elastizitätstheorie bestimmt werden. Dann wird, ausgehend von diesen Schnittkräften, ein Sicherheitsnachweis gegen Querschnittsversagen oder eine Querschnittsbemessung auf Bruchwiderstand durchgeführt, wie dies zum Beispiel im Stahlbeton- und Spannbetonbau seit einigen Jahren üblich ist.

In der Elastizitätstheorie werden die Spannungen und die Dehnungen bzw. Schiebungen durch das Hooke'sche Gesetz miteinander verknüpft. Es lautet bei vernachlässigter Poisson'scher Zahl:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= E \cdot \epsilon \\ \tau &= G \cdot \gamma \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

E : Elastizitätsmodul

G : Schubmodul

Die Schubverformungen (Schiebungen) infolge Querkräfte und Wölbtorsionsmoment werden in der üblichen Festigkeitslehre vernachlässigt. Demnach sind nach dieser Theorie nur die Schubverformungen aus der St. Venant'schen Torsion verschieden von Null.

Falls die St. Venant'sche Torsion berücksichtigt wird, erhält man aus den betreffenden Schubverformungen den bekannten Zusammenhang zwischen Verdrehung und St. Venant'schem Torsionsmoment,

$$T_s = GK \cdot \frac{d\vartheta}{dx} \quad (24)$$

wobei GK die St. Venant'sche Torsionssteifigkeit darstellt.

Durch Anwendung des Hooke'schen Gesetzes auf die Beziehung (19) kann man die

Längsspannungen σ_x in Funktion der Verschiebungskomponenten angeben.

$$\sigma_x = E \cdot \left(\frac{du}{dx} - \frac{d^2v}{dx^2} \cdot y - \frac{d^2w}{dx^2} \cdot z - \frac{d^2\vartheta}{dx^2} \cdot \omega \right) \quad (25)$$

Dieser Ausdruck wird nun in die Gleichungen (7) für die Schnittkräfte N , M_y , M_z und M_ω eingesetzt. Die Ableitungen nach x werden durch Striche angedeutet.

Mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} F &= \int_a^e d \cdot ds \\ I_y &= \int_a^e y^2 \cdot d \cdot ds & I_z &= \int_a^e z^2 \cdot d \cdot ds & I_\omega &= \int_a^e \omega^2 \cdot d \cdot ds \\ I_{\omega y} &= \int_a^e \omega \cdot y \cdot d \cdot ds & I_{yz} &= \int_a^e y \cdot z \cdot d \cdot ds & I_{\omega z} &= \int_a^e \omega \cdot z \cdot d \cdot ds \\ S_y &= \int_a^e y \cdot d \cdot ds & S_z &= \int_a^e z \cdot d \cdot ds & S_\omega &= \int_a^e \omega \cdot d \cdot ds \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

lassen sich die erwähnten Schnittkräfte folgendermassen anschreiben:

$$\left. \begin{aligned} N &= EF \cdot u' - ES_y \cdot v'' - ES_z \cdot w'' - ES_\omega \cdot \vartheta'' \\ M_y &= ES_y \cdot u' - EI_y \cdot v'' - EI_{yz} \cdot w'' - EI_{\omega y} \cdot \vartheta'' \\ M_z &= ES_z \cdot u' - EI_{yz} \cdot v'' - EI_z \cdot w'' - EI_{\omega z} \cdot \vartheta'' \\ M_\omega &= ES_\omega \cdot u' - EI_{\omega y} \cdot v'' - EI_{\omega z} \cdot w'' - EI_\omega \cdot \vartheta'' \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Als nächstes werden diese Beziehungen in die erste, fünfte und sechste Gleichung des Tableaus (11) und, da die St. Venant'sche Torsion noch berücksichtigt wird, in die zweite Gleichung aus (13) eingesetzt. Auf diese Weise erhält man die aus der Elastizitätstheorie bekannten Differentialgleichungen für dünnwandige, gerade und prismatische Stäbe.

$$\left. \begin{aligned}
 EF \cdot u'' - ES_y \cdot v''' - ES_z \cdot w''' - ES_\omega \cdot \vartheta''' &= -p_x \\
 -ES_y \cdot u''' + EI_y \cdot v^{IV} + EI_{yz} \cdot w^{IV} + EI_{\omega y} \cdot \vartheta^{IV} &= p_y + m'_y \\
 -ES_z \cdot u''' + EI_{yz} \cdot v^{IV} + EI_z \cdot w^{IV} + EI_{\omega z} \cdot \vartheta^{IV} &= p_z + m'_z \\
 -ES_\omega \cdot u''' + EI_{\omega y} \cdot v^{IV} + EI_{\omega z} \cdot w^{IV} + EI_\omega \cdot \vartheta^{IV} - GK \cdot \vartheta'' &= m'_x + m'_\omega
 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Durch die Wahl eines speziellen Bezugssystems gelingt es, das Differentialgleichungssystem (28) zu entkoppeln.

Wenn die Koordinatenachsen y und z mit den Haupt-Schwerachsen des Querschnitts identisch sind, und die sektorielle Koordinate (Wölbkoordinate) ω auf den Schubmittelpunkt bezogen und so normiert wird, dass das Integral $\int_a^s \omega \cdot d \cdot ds$ verschwindet, dann werden $S_y = S_z = S_\omega = I_{yz} = I_{\omega y} = I_{\omega z} = 0$.

Damit bekommt man folgende voneinander unabhängige Differentialgleichungen:

$$\left. \begin{aligned}
 EF \cdot u'' &= -p_x \\
 EI_y \cdot v^{IV} &= p_y + m'_y \\
 EI_z \cdot w^{IV} &= p_z + m'_z \\
 EI_\omega \cdot \vartheta^{IV} - GK \cdot \vartheta'' &= m'_x + m'_\omega
 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Die entkoppelten Gleichungen (29) ermöglichen eine einfache Bestimmung der Verschiebungskomponenten u , v , w und ϑ . Die Schnittkräfte sind Funktionen dieser Verschiebungen. Dank Verwendung des erwähnten Bezugssystem können die Schnittkräfte (27) als einfache Funktionen der Verschiebungskomponenten dargestellt werden. Ausserdem wird die Beziehung (24) für das St. Venant'sche Torsionsmoment übernommen.

$$\left. \begin{aligned}
 N &= EF \cdot u' \\
 M_y &= -EI_y \cdot v'' \\
 M_z &= -EI_z \cdot w'' \\
 M_\omega &= -EI_\omega \cdot \vartheta'' \\
 T_s &= GK \cdot \vartheta'
 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Aus diesen Schnittkräften erhält man schliesslich mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen (9) die Querkräfte und das Wölbtorsionsmoment.

$$\left. \begin{aligned} Q_y &= M'_y + m_y \\ Q_z &= M'_z + m_z \\ T_w &= M'_w + m_w \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Wird nun ein Querschnitt auf Bruchwiderstand bemessen, wobei von den Schnittkräften (30) und (31) ausgegangen wird, so muss der Bruchwiderstand auf dieselben Koordinaten y , z und w , d.h. auf die Haupt-Schwerachsen und die normierte, um den Schubmittelpunkt drehende Wölbkoordinate, bezogen werden.

In praktisch vorkommenden Tragwerken mit dünnwandigen offenen Stäben ist die St. Venant'sche Torsionssteifigkeit oft vernachlässigbar. In diesem Zusammenhang sei auch erwähnt, dass bei Stahlbeton- und Spannbetonträgern die Torsionssteifigkeit GK durch das Auftreten von Rissen viel stärker reduziert wird als die Biegesteifigkeiten EI_y und EI_z . Diese in Versuchen festgestellte Tatsache führt dazu, dass durch das Reißen des Betons auch die Wölbsteifigkeit EI_w viel langsamer abnimmt als die Torsionssteifigkeit GK. Damit verliert bei offenen Stahlbeton- und Spannbetonträgern die St. Venant'sche Torsion im gerissenen Zustand gegenüber der Wölbtorsion noch mehr an Bedeutung.

Ist die St. Venant'sche Torsionssteifigkeit vernachlässigbar, so vereinfacht sich das Gleichungssystem (29) zu:

$$\left. \begin{aligned} EF \cdot u'' &= -p_x \\ EI_y \cdot v^{IV} &= p_y + m'_y \\ EI_z \cdot w^{IV} &= p_z + m'_z \\ EI_w \cdot \varphi^{IV} &= m'_x + m'_w \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Mit den Beziehungen (30) und (31) kann man daraus folgende formelle Analogie zwischen Wölbtorsion und Balkenbiegung entnehmen:

Wölbtorsion		Balkenbiegung	
ϑ	$\leftrightarrow$	w^*	} (33)
EI_{ω}	$\leftrightarrow$	EI^*	
$m_x + m'_{\omega}$	$\leftrightarrow$	$p^* + m^{*'} $	
T_{ω}	$\leftrightarrow$	Q^*	
M_{ω}	$\leftrightarrow$	M^*	

Im Falle reiner Wölbtorsion wird daher die statische Berechnung besonders einfach. Wegen der bestehenden Analogie kann man die bekannten Berechnungsverfahren für Biegeträger auch zur Lösung dieses Torsionsproblems verwenden.

Die Ermittlung der Wölbtorsionsschnittkräfte nach der Biegeanalogie soll an folgendem einfachen Beispiel gezeigt werden.

Analogiebalken:

3.2 Plastizitätstheorie

Für Stabtragwerke muss eine Lösung nach der Plastizitätstheorie folgende Bedingungen erfüllen:

1. Gleichgewicht
2. Plastizitätsbedingung, d.h. in keinem Querschnitt darf die Beanspruchung den plastischen Querschnittswiderstand überschreiten.
3. Mechanismusbedingung, d.h. es müssen eine gewisse Anzahl Querschnitte plastifiziert sein, so dass sich im Tragwerk ein Mechanismus ausbilden kann.

Wenn hier und im folgenden von Querschnitten die Rede ist, so ist nicht ein Querschnitt im streng geometrischen Sinne gemeint, sondern ein Bereich, der auch in Längsrichtung eine gewisse Ausdehnung hat.

Bei statisch bestimmten Systemen ist die Mechanismusbedingung erfüllt, wenn die Plastifizierung, d.h. der Bruchwiderstand eines Querschnittes erreicht wird. Die Schnittkraftverteilung ist dann nur von den Gleichgewichtsbedingungen abhängig.

Bei statisch unbestimmten Systemen dagegen ist die Mechanismusbedingung erst erfüllt, wenn mehrere Querschnitte plastifiziert sind.

Die Schnittkraftverteilung nach der Plastizitätstheorie hängt somit von den Gleichgewichtsbedingungen und von der Lage der plastifizierten Querschnitte und deren Querschnittswiderständen ab. Daraus ist ersichtlich, dass die Frage nach der Traglast eines Systems ebenso wie die dazugehörige Schnittkraftverteilung erst mit Kenntnis der Querschnittswiderstände beantwortet werden kann.

Dies soll an einem einfachen Beispiel, einem geraden einseitig eingespannten Träger mit konstantem plastischem Querschnittswiderstand M_{wp} , gezeigt werden. Für die Bestimmung der Traglast und der dazugehörigen Schnittkraftverteilung dient die in den Gleichgewichtsbedingungen vorhandene und in (12) dargestellte formelle Analogie zwischen Wölb-torsion und Balkenbiegung. Der Einfluss der Schubbeanspruchung auf die Fließbedingungen, d.h. auf das plastische Wölbmoment M_{wp} wird der Einfachheit halber vernachlässigt.

Analogiebalken:

Vermuteter Mechanismus:

Entsprechende Schnittkraftverteilung:

Die zum eingezeichneten M^* -Diagramm gehörende Last P^* ergibt sich mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen zu:

$$T = P^* = 6 \cdot \frac{M_{wp}}{l}$$

Wie man sieht, verletzt die erhaltene Schnittkraftverteilung nirgends die Plastizitätsbedingung. Also sind alle drei Bedingungen für eine plastische Lösung erfüllt, und die obige Last P^* ist mit der Traglast P_p^* identisch.

$$T_p = P_p^* = 6 \cdot \frac{M_{wp}}{l}$$

Im untersuchten Beispiel hängt die Traglast vom plastischen Wölbmoment M_{wp} ab. Im allgemeinen Fall ist sie eine Funktion der plastischen Querschnittswiderstände, deren Bestimmung zur eigentlichen Hauptaufgabe des Problems wird und womit sich die restlichen Kapitel der vorliegenden Arbeit befassen. Darin wird untersucht, welche Belastungen, d.h. welche Schnittkräfte zur Plastifizierung eines dünnwandigen offenen Querschnittes führen und was für Querschnittsmechanismen dabei auftreten. Die Frage nach dem Querschnittswiderstand ist folglich gleichbedeutend mit der Frage nach der Traglast eines durch Schnittkräfte beanspruchten Querschnittes.

Nun ist es im allgemeinen nicht möglich, alle drei Bedingungen für eine plastische Lösung in einem Rechengang zu befriedigen. Die praktische Berechnung erfolgt aus diesem Grunde nach einem der beiden Grenzwertsätze der Plastizitätstheorie, welche der Literatur, z.B. [5], [6], entnommen werden können.

Statischer Grenzwertsatz:

Jede Belastung, zu der sich ein stabiler, statisch zulässiger Spannungszustand angeben lässt, stellt eine untere Schranke der Traglast dar.

Ein Spannungszustand wird als statisch zulässig bezeichnet, wenn unter einer Gruppe von äusseren und inneren Kräften jeder Teil des betrachteten Systems im Gleichgewicht ist. Ein solcher Spannungszustand wird als stabil bezeichnet, wenn nirgends die Plastizitätsbedingung verletzt wird.

Ein Gleichgewichtszustand, für den die Plastizitätsbedingung erfüllt ist, liefert also einen unteren Grenzwert der Traglast.

Kinematischer Grenzwertsatz:

Jede Belastung, zu der sich ein instabiler, kinematisch zulässiger Bewegungszustand bzw. Mechanismus angeben lässt, stellt eine obere Schranke der Traglast dar.

Ein Bewegungszustand wird als kinematisch zulässig bezeichnet, wenn er die kinematischen, d.h. geometrischen Bindungen des Systems nicht verletzt. Ein solcher Bewegungszustand wird als instabil bezeichnet, wenn die dabei verrichtete Leistung oder, was bei kleinen Verschiebungen auf dasselbe herauskommt, die dabei verrichtete Arbeit gerade noch verschwindet.

Ein Mechanismus, für den die geleistete Arbeit verschwindet, liefert also einen oberen Grenzwert der Traglast.

4. PLASTISCHER WIDERSTAND VON QUERSCHNITTEN AUS HOMOGENEN ISOTROPEN MATERIALIEN

4.1 Bruchmodell und Materialverhalten

Vorerst sei betont, dass die Gleichgewichtsbedingungen nach der Theorie 1. Ordnung am unverformten System aufgestellt werden. Folglich bleibt die Anwendung auf Querschnitte beschränkt, bei denen ein vorzeitiges Versagen durch Instabilität ausgeschlossen ist. Als Beispiele für solche Querschnitte mögen die auf dem Gebiet des Stahlbaues üblichen Walzprofile dienen.

Für die Berechnung des plastischen Widerstandes wird zwecks einfacher mathematischer Behandlung folgendes diskretisierte Bruchmodell angenommen: Der Querschnitt wird, falls er gekrümmt ist, durch einen polygonalen Querschnitt angenähert, indem man ihn in ebene Elemente unterteilt. Wie aus Bild 24 hervorgeht, erstreckt sich ein solches Element i über den Querschnittsbereich Δs_i .

Bild 24

Um trotz dieser Diskretisation gute Resultate zu bekommen, muss eine genügende Anzahl Elemente gewählt werden. Es ist jedoch zu beachten, dass eine zu feine Einteilung lediglich den Rechenaufwand erhöht, ohne das Resultat entscheidend zu verbessern.

Das gewählte Bruchmodell ermöglicht es, mit sogenannten Elementkräften statt mit Spannungen zu arbeiten. Pro Element wirken eine Längskraft Z_i und eine Querkraft Q_i tangential zur Mittellinie des Querschnittes.

Bild 25

Für die Elementkräfte Z_i und Q_i gelten folgende Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} Z_i &= (\sigma_x \cdot \Delta F)_i \\ Q_i &= (S \cdot \Delta s)_i = (\tau_{xs} \cdot \Delta F)_i \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

In diesem Kapitel werden nur Querschnitte aus solchen Materialien behandelt, welche homogene und isotrope Eigenschaften aufweisen, wofür man Stahl als wichtigstes Beispiel nennen kann. Die bekannte von Mises'sche Fließbedingung gibt für derartige Materialien eine brauchbare Näherung des plastischen Verhaltens und wird hier aus diesem Grunde verwendet.

Mit der aus dem statischen Zugversuch entnommenen Fließsspannung σ_f kann die von Mises'sche Fließbedingung für das Element i wie folgt formuliert werden:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x)_i^2 + 3 \cdot (\tau_{xs})_i^2 &= \sigma_f^2 \\ \text{oder } Z_i^2 + 3 \cdot Q_i^2 &= (\sigma_f \cdot \Delta F_i)^2 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Diese nichtlineare Fließbedingung stellt in der Z_i - Q_i -Ebene eine Ellipse dar. Für die numerische Behandlung des Traglastproblems mit Hilfe der linearen Programmierung ist es notwendig, die Gleichung (35) zu linearisieren. Am einfachsten geschieht dies, indem man die erwähnte Ellipse durch ein eingeschriebenes Polygon approximiert, womit man sich bezüglich der Fließbedingung (35) auf der sicheren Seite befindet.

Wie aus Bild 26 hervorgeht, wird die Ellipse nach von Mises im folgenden durch ein eingeschriebenes Sechseck angenähert.

Bild 26

Formelmässig lässt sich die dargestellte polygonale Fließbedingung für das Element i durch sechs lineare Gleichungen ausdrücken:

$$\begin{array}{rcl}
 \sigma_f \cdot \Delta F_i & - & 2Q_i = 0 \\
 \sigma_f \cdot \Delta F_i & + & 2Q_i = 0 \\
 \sigma_f \cdot \Delta F_i - Z_i - Q_i & = & 0 \\
 \sigma_f \cdot \Delta F_i - Z_i + Q_i & = & 0 \\
 \sigma_f \cdot \Delta F_i + Z_i - Q_i & = & 0 \\
 \sigma_f \cdot \Delta F_i + Z_i + Q_i & = & 0
 \end{array} \quad (36)$$

Befindet sich der Beanspruchungspunkt (Z_i, Q_i) auf der Fließfigur, so ist das Element i plastifiziert und kann sich verformen. Dabei sind verschie-

dene Mechanismen denkbar. Bei Verwendung eines sechseckigen Fliesspolygons ist es möglich, alle diese Mechanismen durch nur sechs verschiedene Verformungsparameter darzustellen, da die Verformungsvektoren nach der Theorie des plastischen Potentials immer senkrecht auf der Fliessfigur stehen müssen.

Bild 27

Absichtlich werden hier die Verformungsparameter mit den Konstanten $\sqrt{2}$ bzw. 2 eingeführt. Diese Konstanten sind unwesentlich, sie werden nur darum eingeführt, um später numerisch einfachere Ausdrücke zu erhalten.

Man kann die gesuchten kinematischen Grössen, die Längsdehnungen ϵ_{xi} und die Schiebungen γ_i der Elemente, als Summe der entsprechenden Projektionen der Verformungsparameter angeben, wie sie in Bild 27 eingezeichnet sind.

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xi} &= \beta_{i3} + \beta_{i4} - \beta_{i5} - \beta_{i6} \\ \gamma_i &= 2\beta_{i1} - 2\beta_{i2} + \beta_{i3} - \beta_{i4} + \beta_{i5} - \beta_{i6} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Die Verformungsparameter sind nichtnegative Variablen, und jeder dieser Parameter ist, falls er nicht verschwinden soll, einer Gleichung des Systems (36) zugeordnet. Es gelten die Beziehungen:

$$\begin{array}{llll}
 \beta_{i1} > 0 & \rightarrow & 2Q_i = \sigma_f \cdot \Delta F_i & \\
 \beta_{i2} > 0 & \rightarrow & -2Q_i = \sigma_f \cdot \Delta F_i & \\
 \beta_{i3} > 0 & \rightarrow & Z_i + Q_i = \sigma_f \cdot \Delta F_i & \\
 \beta_{i4} > 0 & \rightarrow & Z_i - Q_i = \sigma_f \cdot \Delta F_i & \\
 \beta_{i5} > 0 & \rightarrow & -Z_i + Q_i = \sigma_f \cdot \Delta F_i & \\
 \beta_{i6} > 0 & \rightarrow & -Z_i - Q_i = \sigma_f \cdot \Delta F_i &
 \end{array} \quad (38)$$

Bei starrem Element i befindet sich der Beanspruchungspunkt (Z_i, Q_i) innerhalb der Fließfigur. Somit wird keine Gleichung des Systems (36) befriedigt, und die Verformungsparameter sind alle gleich Null. Fließt das Element i , so müssen eine oder zwei Gleichungen des Systems (36) erfüllt sein, da der Beanspruchungspunkt (Z_i, Q_i) auf der Fließfigur liegt. In diesem Fall nehmen nach (38) ein bzw. zwei Verformungsparameter einen von Null verschiedenen positiven Wert an.

Die Berechnung des Querschnittswiderstandes kann damit in Angriff genommen werden. In der Folge wird mit dem statischen Grenzwertsatz eine untere und mit dem kinematischen Grenzwertsatz eine obere Schranke der für die Plastifizierung des Querschnittes massgebenden Beanspruchung hergeleitet. (Obere Schranke bezüglich der linearisierten Fließbedingung (36)!).

4.2 Statische Methode

Der statische Grenzwertsatz lässt sich für die Bestimmung einer unteren Schranke des Querschnittswiderstandes wie folgt anwenden:

Unter Einhaltung der Gleichgewichts- und Plastizitätsbedingungen wird jene Beanspruchung $\lambda \cdot (N, M_y, M_z, M_\omega, Q_y, Q_z, T_w)$ gesucht, für die der Widerstandsfaktor λ maximal wird. Dabei wird eine proportionale Steigerung der Beanspruchung angenommen.

Gleichgewichtsbedingungen:

Mit Einführung des Widerstandsfaktors λ sowie der Elementkräfte Z_i und Q_i , für welche die Beziehungen (34) gelten, transformieren sich die Gleichgewichtsbedingungen (15) zu:

$$\begin{aligned}
 0 &= -\lambda \cdot N + \sum_{i=1}^m Z_i \\
 0 &= -\lambda \cdot M_y + \sum_{i=1}^m Z_i \cdot y_i \\
 0 &= -\lambda \cdot M_z + \sum_{i=1}^m Z_i \cdot z_i \\
 0 &= -\lambda \cdot M_\omega + \sum_{i=1}^m Z_i \cdot \omega_i \\
 0 &= -\lambda \cdot Q_y + \sum_{i=1}^m Q_i \cdot \cos \delta_i \\
 0 &= -\lambda \cdot Q_z + \sum_{i=1}^m Q_i \cdot \sin \delta_i \\
 0 &= -\lambda \cdot T_w + \sum_{i=1}^m Q_i \cdot r_i
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

Plastizitätsbedingungen:

Die Plastizitätsbedingungen verlangen, dass die Beanspruchung jedes einzelnen Elementes kleiner oder gleich ist wie dessen plastischer Widerstand. Der Beanspruchungspunkt (Z_i, Q_i) des Elementes i muss dabei im schraffierten, zulässigen Bereich der Fliessfigur von Bild 26 bzw. 27 liegen. Mathematisch kann man den zulässigen Bereich durch Ungleichungen beschreiben, die genau wie die Gleichungen (36), welche die Grenze des erwähnten Bereiches darstellen, aufgebaut sind. Diese Ungleichungen lauten mit Einführung nichtnegativer Schlupfvariablen s_{i1} bis s_{i6} folgendermassen:

$$\begin{aligned}
 s_{i1} &= \sigma_f \cdot \Delta F_i - 2Q_i \geq 0 \\
 s_{i2} &= \sigma_f \cdot \Delta F_i + 2Q_i \geq 0 \\
 s_{i3} &= \sigma_f \cdot \Delta F_i - Z_i - Q_i \geq 0 \\
 s_{i4} &= \sigma_f \cdot \Delta F_i - Z_i + Q_i \geq 0 \\
 s_{i5} &= \sigma_f \cdot \Delta F_i + Z_i - Q_i \geq 0 \\
 s_{i6} &= \sigma_f \cdot \Delta F_i + Z_i + Q_i \geq 0
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

Optimierung:

Die Gleichgewichtsbedingungen (39), die Plastizitätsbedingungen (40) sowie die Zielfunktion $\lambda \rightarrow \text{Maximum}$ werden im Tableau der Bildes 28 zusammengestellt.

In der Basis dieses Tableaus stehen die Nullen aus den Gleichgewichtsbedingungen und die Schlupfvariablen aus den Plastizitätsbedingungen, am Kopf die freien unabhängigen Variablen Z_i und Q_i .

Die Zielfunktion findet man in der ersten Zeile des Tableaus.

Die statische Methode der Plastizitätstheorie führt also für das betrachtete Bruchmodell zu einem Maximumproblem der linearen Optimierung, zu dessen Lösung der Simplex-Algorithmus verwendet werden kann.

	1	λ	$\overset{1}{\underbrace{Z_1 \quad Q_1}}$		$\dots \overset{i}{\underbrace{Z_i \quad Q_i}}$		$\dots \overset{m}{\underbrace{Z_m \quad Q_m}}$		
$\lambda =$		1							→ Max
$O =$		$-N$	1	0	1	0	1	0	
$O =$		$-M_y$	y_1	0	y_i	0	y_m	0	
$O =$		$-M_z$	z_1	0	z_i	0	z_m	0	
$O =$		$-M_\omega$	ω_1	0	ω_i	0	ω_m	0	
$O =$		$-Q_y$	0	$\cos\delta_1$	0	$\cos\delta_i$	0	$\cos\delta_m$	
$O =$		$-Q_z$	0	$\sin\delta_1$	0	$\sin\delta_i$	0	$\sin\delta_m$	
$O =$		$-T_w$	0	r_1	0	r_i	0	r_m	
$1 \left\{ \begin{array}{l} s_{11} = \\ \vdots \\ s_{16} = \end{array} \right.$	$\zeta_f \cdot \Delta F_1$		0	-2					
	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$					
	$\zeta_f \cdot \Delta F_1$		+1	+1					
$i \left\{ \begin{array}{l} s_{i1} = \\ s_{i2} = \\ s_{i3} = \\ s_{i4} = \\ s_{i5} = \\ s_{i6} = \end{array} \right.$	$\zeta_f \cdot \Delta F_i$				0	-2			
	$\zeta_f \cdot \Delta F_i$				0	+2			
	$\zeta_f \cdot \Delta F_i$				-1	-1			
	$\zeta_f \cdot \Delta F_i$				-1	+1			
	$\zeta_f \cdot \Delta F_i$				+1	-1			
	$\zeta_f \cdot \Delta F_i$				+1	+1			
$m \left\{ \begin{array}{l} s_{m1} = \\ \vdots \\ s_{m6} = \end{array} \right.$	$\zeta_f \cdot \Delta F_m$						0	-2	
	$\vdots$						$\vdots$	$\vdots$	
	$\zeta_f \cdot \Delta F_m$						+1	+1	

Bild 28

4.3 Kinematische Methode

Für die Bestimmung einer oberen Schranke des Querschnittswiderstandes kann der kinematische Grenzwertsatz wie folgt angewandt werden:

Unter Annahme proportionaler Steigerung der Beanspruchung $\lambda \cdot (N, M_y, M_z, M_\omega, Q_y, Q_z, T_\omega)$ wird jener Querschnitts-Mechanismus gesucht, für den die geleistete Arbeit verschwindet und der Widerstandsfaktor λ minimal wird.

Mechanismusbedingungen:

Die kinematischen Bedingungen für das Element i können den im Abschnitt 2.3 hergeleiteten Gleichungen (19) und (22) entnommen werden. Die Ableitungen nach der Koordinate x werden durch Striche angedeutet.

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xi} &= u' - v'' \cdot y_i - w'' \cdot z_i - \vartheta'' \cdot \omega_i \\ \gamma_i &= \gamma_y \cdot \cos \delta_i + \gamma_z \cdot \sin \delta_i + \gamma_\vartheta \cdot r_i \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Aus diesen Gleichungen erhält man bei Verwendung der Beziehungen (37), durch die das Fließgesetz formuliert ist, die gesuchten Mechanismusbedingungen.

$$\boxed{\begin{aligned} u' - v'' \cdot y_i - w'' \cdot z_i - \vartheta'' \cdot \omega_i - \beta_{i3} - \beta_{i4} + \beta_{i5} + \beta_{i6} &= 0 \\ \gamma_y \cdot \cos \delta_i + \gamma_z \cdot \sin \delta_i + \gamma_\vartheta \cdot r_i - 2\beta_{i1} + 2\beta_{i2} - \beta_{i3} + \beta_{i4} - \beta_{i5} + \beta_{i6} &= 0 \end{aligned}} \quad (42)$$

Arbeitsbedingung:

Die Arbeitsbedingung besagt, dass beim Verschiebungszustand eines Mechanismus keine Arbeit geleistet wird.

$$A_a + A_i = 0 \quad (43)$$

A_a : Arbeit der äusseren Kräfte (hier: Schnittkräfte)

A_i : Arbeit der inneren Kräfte (Spannungen)

Für den aus den Dehnungen (19) und den Schiebungen (22) gebildeten Verschiebungszustand

$$\epsilon_x = u' - v'' \cdot y - w'' \cdot z - \vartheta'' \cdot \omega$$

$$\gamma = \gamma_y \cdot \cos \delta + \gamma_z \cdot \sin \delta + \gamma_\vartheta \cdot r$$

erhält man folgenden Ausdruck für die Arbeit der inneren Kräfte pro Einheitslänge $\Delta x = 1$:

$$\begin{aligned} -A_i &= \int_a^e \sigma_x \cdot \epsilon_x \cdot d \cdot ds + \int_a^e \tau \cdot \gamma \cdot d \cdot ds = \\ &= \int_a^e \sigma_x \cdot \epsilon_x \cdot d \cdot ds + \int_a^e S \cdot \gamma \cdot ds \\ -A_i &= \int_a^e \sigma_x \cdot [u' - v'' \cdot y - w'' \cdot z - \vartheta'' \cdot \omega] \cdot d \cdot ds + \\ &+ \int_a^e S \cdot [\gamma_y \cdot \cos \delta + \gamma_z \cdot \sin \delta + \gamma_\vartheta \cdot r] \cdot ds \\ -A_i &= u' \cdot \int_a^e \sigma_x \cdot d \cdot ds - v'' \cdot \int_a^e \sigma_x \cdot y \cdot d \cdot ds - \\ &- w'' \cdot \int_a^e \sigma_x \cdot z \cdot d \cdot ds - \vartheta'' \cdot \int_a^e \sigma_x \cdot \omega \cdot d \cdot ds + \\ &+ \gamma_y \cdot \int_a^e S \cdot \cos \delta \cdot ds + \gamma_z \cdot \int_a^e S \cdot \sin \delta \cdot ds + \\ &+ \gamma_\vartheta \cdot \int_a^e S \cdot r \cdot ds \end{aligned}$$

Die entsprechende Arbeit der am Querschnitt angreifenden äusseren Kräfte, d.h. der Beanspruchung (N , M_y , M_z , M_ω , Q_y , Q_z , T_w), kann daraus mit Hilfe der Beziehungen (15) abgeleitet werden.

$$\left. \begin{aligned} A_a = -A_i &= u' \cdot N - v'' \cdot M_y - w'' \cdot M_z - \vartheta'' \cdot M_\omega + \\ &+ \gamma_y \cdot Q_y + \gamma_z \cdot Q_z + \gamma_\vartheta \cdot T_w \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Diese Arbeit der äusseren Kräfte vergrössert sich bei proportionaler Steigerung der Beanspruchung um den Widerstandsfaktor λ .

$$\left. \begin{aligned} A_a &= \lambda \cdot [u' \cdot N - v'' \cdot M_y - w'' \cdot M_z - \vartheta'' \cdot M_\omega + \\ &+ \gamma_y \cdot Q_y + \gamma_z \cdot Q_z + \gamma_\vartheta \cdot T_w] \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Bei der vorausgesetzten Annahme eines starr-idealplastischen Materials ist die Dissipationsarbeit gleich der negativen Arbeit der inneren Kräfte.

$$A_D = - A_i = \int_a^e \sigma_x \cdot \epsilon_x \cdot d \cdot ds + \int_a^e S \cdot \gamma \cdot ds$$

Für das angenommene Bruchmodell, wie es zu Beginn dieses Kapitels beschrieben ist, kann das Integral der Dissipationsarbeit durch eine Summe der Dissipationsarbeiten der einzelnen Elemente ersetzt werden.

$$A_D = \sum_{i=1}^m [Z_i \cdot \epsilon_{xi} + Q_i \cdot \gamma_i]$$

Wird der Verschiebungszustand ϵ_{xi} , γ_i des Elementes i durch das Flie遡gesetz (37)

$$\begin{aligned} \epsilon_{xi} &= \beta_{i3} + \beta_{i4} - \beta_{i5} - \beta_{i6} \\ \gamma_i &= 2\beta_{i1} - 2\beta_{i2} + \beta_{i3} - \beta_{i4} + \beta_{i5} - \beta_{i6} \end{aligned}$$

ausgedrückt, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} A_D &= \sum_{i=1}^m [Z_i \cdot (\beta_{i3} + \beta_{i4} - \beta_{i5} - \beta_{i6}) + \\ &\quad + Q_i \cdot (2\beta_{i1} - 2\beta_{i2} + \beta_{i3} - \beta_{i4} + \beta_{i5} - \beta_{i6})] \\ A_D &= \sum_{i=1}^m [2Q_i \cdot \beta_{i1} + (-2Q_i) \cdot \beta_{i2} + \\ &\quad + (Z_i + Q_i) \cdot \beta_{i3} + (Z_i - Q_i) \cdot \beta_{i4} + \\ &\quad + (-Z_i + Q_i) \cdot \beta_{i5} + (-Z_i - Q_i) \cdot \beta_{i6}] \end{aligned}$$

Diese Summe lässt sich mit Hilfe der Beziehungen (38) folgendermassen vereinfachen:

$$A_D = \sigma_f \cdot \sum_{i=1}^m \Delta F_i \cdot (\beta_{i1} + \beta_{i2} + \beta_{i3} + \beta_{i4} + \beta_{i5} + \beta_{i6}) \quad (46)$$

Setzt man die erhaltenen Ausdrücke (45) und (46) in die Arbeitsbedingung $A_a = - A_i$ bzw. $A_a = A_D$ ein,

$$\lambda \cdot [u' \cdot N - \dots + \gamma_{\vartheta} \cdot T_w] =$$

$$= \sigma_f \cdot \sum_{i=1}^m \Delta F_i \cdot (\beta_{i1} + \dots + \beta_{i6})$$

so erhält man daraus den zu minimierenden Widerstandsfaktor:

$$\lambda = \frac{\sigma_f \cdot \sum_{i=1}^m \Delta F_i \cdot (\beta_{i1} + \dots + \beta_{i6})}{u' \cdot N - \dots + \gamma_{\vartheta} \cdot T_w} \quad (47)$$

Nach der Plastizitätstheorie kann der absolute Betrag der Verformungen einen beliebigen Wert > 0 annehmen. Somit ist es gestattet, den in (47) vorkommenden Nenner gleich Eins zu setzen.

Schliesslich bekommt man folgende Gleichung zur Bestimmung des Widerstandsfaktors λ

$$\lambda = \sigma_f \cdot \sum_{i=1}^m \Delta F_i \cdot (\beta_{i1} + \beta_{i2} + \beta_{i3} + \beta_{i4} + \beta_{i5} + \beta_{i6}) \quad (48)$$

mit der Nebenbedingung:

$$u' \cdot N - v'' \cdot M_y - w'' \cdot M_z - \vartheta'' \cdot M_w + \gamma_y \cdot Q_y + \gamma_z \cdot Q_z + \gamma_{\vartheta} \cdot T_w = 1 \quad (49)$$

Optimierung:

Die Mechanismusbedingungen (42) und die aus der Arbeitsbedingung $A_a + A_i = 0$ bzw. $A_a = A_d$ erhaltenen Gleichungen (48) und (49) können wiederum in Tableauform dargestellt werden.

Die Zielfunktion bzw. der Widerstandsfaktor λ und die Restriktionen sind alles lineare Funktionen der freien, unabhängigen Variablen u' bis γ_{ϑ} und der beschränkten Verformungsparameter β_{i1} bis β_{i6} . Die kinematische Methode der Plastizitätstheorie führt also für das betrachtete Bruchmodell zu einem Minimumproblem der linearen Optimierung.

	1	u'	$-v''$	$-w''$	$-\vartheta''$	γ_y	γ_z	γ_ϑ	$\underbrace{\dots \beta_{i1} \quad \beta_{i2} \quad \beta_{i3} \quad \beta_{i4} \quad \beta_{i5} \quad \beta_{i6} \dots}_{i}$						$\rightarrow \text{Min}$	
$\lambda =$										$\dots G_f \Delta F_i$	$G_f \Delta F_i$	$G_f \Delta F_i$	$G_f \Delta F_i$	$G_f \Delta F_i$	$G_f \Delta F_i$	$\dots$
$O =$	1	$-N$	$-M_y$	$-M_z$	$-M_\omega$	$-Q_y$	$-Q_z$	$-T_w$								
$\left. \begin{matrix} O = \\ O = \end{matrix} \right\} i$		1	y_i	z_i	ω_i	0	0	0	0	0	-1	-1	+1	+1		
		0	0	0	0	$\cos \delta_i$	$\sin \delta_i$	r_i	-2	+2	+1	-1	-1	+1		

Bild 29

Vergleicht man das Programm der kinematischen Methode (Bild 29) mit demjenigen der statischen Methode (Bild 28), so stellt man fest, dass diese beiden Programme zueinander dual sind. Mit anderen Worten: es ergeben beide Systeme denselben Widerstandsfaktor λ . Es spielt also keine Rolle, ob die Bestimmung des Querschnittswiderstandes nach der statischen oder nach der kinematischen Methode erfolgt. In jedem Fall erhält man für das beschriebene Bruchmodell ein lineares Programm, zu dessen Lösung die bekannten Methoden der linearen Programmierung, wie sie z.B. in [10] oder [11] zu finden sind, verwendet werden können.

Es sei hier noch einmal daran erinnert, dass das angenommene Bruchmodell nur solange gilt, als die Verformungen keinen wesentlichen Einfluss auf das Gleichgewicht ausüben. Eine Anwendung auf versteifte Blechträger, deren Stegbleche ausbeulen, kommt beispielsweise nicht in Frage. Im allgemeinen ist bei derartigen Trägern nach dem Ueberschreiten der Beullast (im überkritischen Bereich) ein Tragverhalten zu beobachten, welches vorwiegend auf einer Fachwerkwirkung beruht. Die Berechnung der Traglast muss aus diesem Grunde mit einem anderen Bruchmodell als dem beschriebenen erfolgen. Für auf Biegung und Querkraft beanspruchte Stahlträger sind einige derartige Modelle (z.B. [7], [8]) bekannt. Eine Anwendung dieser Modelle auf versteifte Blechträger mit offenen Querschnitten ist naheliegend. Es sei hier nur erwähnt, dass die für den überkritischen Bereich von versteiften Blechträgern gültigen Berechnungsmodelle in ihrem statischen Verhalten grosse Ähnlichkeiten mit dem im folgenden dargestellten Fachwerkmodell für Stahlbeton- und Spannbetonbalken aufweisen.

4.4 Numerisches Beispiel

Gegeben: Querschnitt, Fließspannung σ_f

Bild 30

Gesucht: Plastisches Wölbmoment $M_{\omega p}$

Elementeinteilung:

Bild 31

Koordinaten:

Bild 32

Näherungslösung nach Abschnitt 4.2 :

$$M_{\omega p} = \lambda \cdot M_{\omega} = 31 \cdot (10d)^4 \cdot \sigma_f$$

====

$$\begin{aligned} Z_1 &= - Z_{14} = - 40 \cdot d^2 \cdot \sigma_f \\ Z_2 &= - Z_{13} = - 20 \cdot d^2 \cdot \sigma_f \\ Z_3 &= - Z_{12} = - 20 \cdot d^2 \cdot \sigma_f \\ Z_4 &= - Z_{11} = 12,5 \cdot d^2 \cdot \sigma_f \\ Z_5 &= - Z_{10} = 30 \cdot d^2 \cdot \sigma_f \\ Z_6 &= - Z_9 = 30 \cdot d^2 \cdot \sigma_f \\ Z_7 &= - Z_8 = 30 \cdot d^2 \cdot \sigma_f \end{aligned}$$

Exakter Wert: $M_{\omega p} = 31,5 \cdot (10d)^4 \cdot \sigma_f$

Spannungsverteilung im Bruchzustand:

Bild 33

Zum Vergleich:

Wölbmoment bei Fließbeginn:

$$M_{\omega f} = 16,6 \cdot (10d)^4 \cdot \sigma_f$$

Spannungsverteilung bei Fließbeginn:

S = Schubmittelpunkt nach Elastizitätstheorie

5. PLASTISCHER WIDERSTAND VON STAHLBETON- UND SPANNBETON-QUERSCHNITTEN

5.1 Bruchmodell und Materialverhalten

Stahlbeton- und Spannbetonquerschnitte können im wesentlichen in unterarmierte und Überarmierte Querschnitte unterteilt werden. Bei unterarmierten Querschnitten wird der Bruch durch Stahlfließen, bei Überarmierten Querschnitten durch Betonbruch verursacht.

Im folgenden werden nur unterarmierte Querschnitte behandelt, bei denen der Beton für das Versagen nicht massgebend ist. Dadurch kann bei Verwendung handelsüblicher Armierungsstähle ein duktiler Bruchverhalten vorausgesetzt werden, was die Anwendung der Plastizitätstheorie zur Bestimmung des Bruchwiderstandes ermöglicht. Die Beschränkung auf unterarmierte Querschnitte ist für die praktische Anwendung nicht sehr einschneidend, da man normalerweise bestrebt ist, Überarmierte Tragwerke wegen ihrer Unwirtschaftlichkeit und wegen ihres ausgesprochen spröden Bruchverhaltens zu vermeiden.

Als Bruchmodell wird ein räumliches Fachwerk angenommen, ähnlich wie es Lampert in seiner Dissertation "Bruchwiderstand von Stahlbetonbalken (mit vollen und geschlossenen Querschnitten) unter Torsion und Biegung" [9] verwendet hat. Das Bruchmodell ist ein reines Scheibenmodell, d.h. die Plattenwirkung wird für die theoretische Betrachtung vernachlässigt.

Zur einfachen rechnerischen Erfassung des Bruchwiderstandes wird der Querschnitt idealisiert: Es werden diskret angeordnete Gurtstäbe (Stringer) angenommen, welche die im Querschnitt wirkenden Längskräfte aufzunehmen haben. Dabei sollten, wie im Abschnitt 5.7 gezeigt wird, für den Hauptquerschnitt (vgl. Abschnitt 2.4) vier bis sechs Gurtstäbe gewählt werden, und zwar so, dass trotz der Diskretisation das statische Verhalten des Querschnittes annähernd erfasst wird. Mit anderen Worten, die einzelnen Längseisen werden zu eigentlichen Gurtstäben zusammengefasst. Steht ein solcher Gurtstab unter Druck, so bildet sich um ihn herum eine Betondruckzone, die bei unterarmierten Querschnitten in der Lage ist, die anfallende Druckkraft zu übernehmen. Im allgemeinen ändert sich die Lage der Betondruckresultierenden mit der Grösse der Betondruckzone. Im folgenden wird die Druckkraft vereinfachend an den betreffenden Gurtstab gebunden, d.h. ihre Lage wird in der Rechnung nicht davon abhängig gemacht, ob und wie stark ein Gurtstab auf Druck beansprucht wird. Mit dieser Vereinfachung, die bei vernünftiger Wahl der Gurtstäbe keinen grossen Einfluss auf die Genauigkeit der Lösung hat, wird die Berechnung wesentlich vereinfacht.

Die Gurtstäbe bilden die Gurtungen des angenommenen räumlichen Fachwerkmodelles. Sie werden mit ungeraden Zahlen i von 1 bis m bezeichnet, währenddem die zwischen den Gurtstäben liegenden Querschnittsteile mit geraden Zahlen k von 2 bis n numeriert werden.

Bild 35

Die Querschnittsteile k übernehmen die Rolle von "Schubwänden", von denen jede einen konstanten Schubfluss S_k aufweisen soll. Ist der Querschnitt wie in Bild 35 gekrümmt, so wird er durch einen polygonalen Querschnitt angenähert. Die ursprünglich gekrümmten "Schubwände" gehen dann in ebene Querschnittsscheiben über, so dass für jede dieser Scheiben eine Schubresultierende Q_k sowie der dazugehörige Hebelarm r_k angegeben werden können.

Bei gekrümmtem Querschnitt weicht der effektive Hebelarm r_k etwas vom Hebelarm $\bar{r}_k$ der Bogensehne f_k ab.

Bild 36

Wenn die Sehne f_k zwischen zwei benachbarten Gurtstäben links des Querschnittsbogens liegt (Blickrichtung: Positive s -Koordinate), so ist F_{ok} bzw. e_k positiv.

Aus dem Anteil der k-ten "Schubwand" am Torsionsmoment T_w

$$\begin{aligned} \int_i^{i+2} S \cdot r \cdot ds &= S_k \cdot \int_i^{i+2} r \cdot ds = S_k \cdot (\bar{r}_k \cdot a_k + 2F_{ok}) = \\ &= \underbrace{S_k a_k}_{\text{Schubresul-}} \cdot \underbrace{r_k}_{\text{wirksamer Hebelarm}} = Q_k \cdot r_k \end{aligned}$$

erhält man den gesuchten Hebelarm r_k :

$$r_k = \bar{r}_k + \frac{2F_{ok}}{a_k}$$

Dieser Ausdruck lässt sich noch vereinfachen, wenn man beachtet, dass der Querschnittsbogen zwischen zwei benachbarten Gurtstäben in der Regel ein flacher Bogen mit näherungsweise $F_{ok} = \frac{2}{3} \cdot a_k \cdot e_k$ ist.

$$r_k = \bar{r}_k + \frac{4}{3} \cdot e_k \tag{50}$$

Als Modell für die Wirkungsweise einer auf Schub beanspruchten Querschnitts-scheibe wird ein Fachwerk mit variabler Diagonalenneigung angenommen. In diesem Fachwerk bilden die Längseisen die Gurtungen, die Bügel die Pfosten und die Betondruckdiagonalen die Streben, wie dies Bild 37 zeigt.

Bild 37

Die Annahme gleichmässig über die Querschnittscheibe verteilter Betondruckspannungen σ_{Dk} , welche unter dem Winkel α_k zur Längsaxe geneigt sind, entspricht dem Ansatz eines konstanten Schubflusses für die Scheibe k . Die Komponenten dieser Betondruckspannungen in Längsrichtung sind ebenfalls gleichmässig über die Scheibe verteilt. Demzufolge resultiert aus der Schubbeanspruchung Q_k eine in Mitte der Scheibe wirkende Längskraft Z_k , d.h., Längs- und Schubbeanspruchung beeinflussen einander. Die Vertikalkomponenten der Betondruckspannungen σ_{Dk} müssen mit den Bügelkräften B_k im Gleichgewicht stehen. Dies ist nur möglich, wenn ein Ausbrechen der Druckdiagonalen durch einen engen Bügelabstand t_k und/oder starke Gurtstäbe (in den Querschnittsecken und -enden) verhindert wird. Ist dies der Fall, so werden für die angenommene Spannungsverteilung die Bügel im dargestellten Scheibenabschnitt gleichmässig beansprucht, was zu folgenden Gleichgewichtsbedingungen führt:

$$\left. \begin{aligned} B_k \cdot \frac{a_k}{t_k} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_k} &= D_k \cdot \sin \alpha_k \\ Q_k &= D_k \cdot \sin \alpha_k = B_k \cdot \frac{a_k}{t_k} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_k} \\ Z_k &= D_k \cdot \cos \alpha_k = B_k \cdot \frac{a_k}{t_k} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha_k} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

In Uebereinstimmung mit der kinematischen Bedingung (22) wird für eine ebene Querschnittscheibe k als Verschiebungsansatz eine konstante Schiebung γ_k gewählt. Die Betondruckdiagonalen können als starr angesehen werden, da infolge der Beschränkung auf unterarmierte Querschnitte ein Versagen und damit für starrplastisches Materialverhalten eine Stauchung des Betons nicht zu erwarten ist. Aufgrund der Rissverzahnung kann sich eine Querschnittscheibe im allgemeinen nur senkrecht zu den Rissen bzw. senkrecht zu den Druckdiagonalen verformen. Dies führt bei einem konstanten Schiebungsansatz zu einem Verschiebungszustand, bei dem sich die Risse, die unter dem Winkel α_k zur Längsaxe geneigt sind, im Scheibenabschnitt $\frac{a_k}{\operatorname{tg} \alpha_k} \times a_k$ gleichmässig öffnen (gleichmässige nominelle Rissdehnung c_k).

Danach vergrössern sich die Verschiebungen des Scheibenelementes proportional zum Abstand von der rissparallelen gestrichelten Geraden g_k , wie dies aus den Bildern 38 und 39 hervorgeht. Bild 38 gibt einen Ueberblick über die Abmessungen, währenddem in Bild 39 der Verschiebungszustand der k -ten Querschnittscheibe skizziert ist.

Bild 38

Bild 39

Entsprechend dem einfachen kinematischen Ansatz (konstante Schiebung) ist der Verschiebungszustand der Querschnittscheibe k durch den Verformungsparameter c_k (gleichmässige nominelle Rissdehnung) gegeben. Die Längsdehnung ϵ_{xk} , die Bügeldehnung ϵ_{Bk} und die Schiebung γ_k der k -ten Scheibe sind Funktionen dieses Verformungsparameters und können der dargestellten Verschiebungsfigur in Bild 39 entnommen werden.

$$\epsilon_{xk} = c_k \cdot \sin^2 \alpha_k$$

$$\epsilon_{Bk} = c_k \cdot \cos^2 \alpha_k$$

$$\gamma_k = c_k \cdot \sin \alpha_k \cdot \cos \alpha_k + c_k \cdot \cos \alpha_k \cdot \sin \alpha_k$$

Anders geschrieben lauten diese kinematischen Bedingungen wie folgt:

$$\epsilon_{Bk} = \epsilon_{xk} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha_k} \quad (52a)$$

$$\gamma_k = \epsilon_{xk} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_k} + \epsilon_{Bk} \cdot \operatorname{tg} \alpha_k \quad (52b)$$

und

$$c_k = \epsilon_{xk} + \epsilon_{Bk} \quad (52c)$$

Nach der Beziehung (52b) wird die Schiebung γ_k durch die Bügeldehnung ϵ_{Bk} und durch die Längsdehnung ϵ_{xk} bewirkt. Allerdings sind diese beiden Dehnungen gemäss (52a) miteinander gekoppelt, so dass die Schiebung als Funktion der Längsdehnung ϵ_{xk} allein ausgedrückt werden kann.

$$\gamma_k = \epsilon_{xk} \cdot \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha_k}$$

Der Ansatz einer konstanten Schiebung γ_k führt für eine über die Scheibenhöhe a_k durchgehend gleiche Diagonalenneigung α_k zu einer gleichmässigen Längsdehnung ϵ_{xk} , wie dies die Verschiebungsfigur des Bildes 39 zeigt. Normalerweise ist die Längsdehnung jedoch nicht konstant, sondern verläuft nach den im Abschnitt 2.3 gemachten Verschiebungsansätzen linear über die ebene Querschnittscheibe k . Für diesen Fall ergibt sich (bei konstanter Diagonalenneigung α_k) auch eine lineare Verteilung der Schiebungen und der Bügeldehnungen.

Bild 40

Wie sofort ersichtlich, ist die Dissipationsarbeit der Bügel über die Scheibenhöhe a_k mit dem Mittelwert ϵ_{Bk} richtig erfasst. Hingegen ergibt sich aus der dargestellten linearen Schiebungsverteilung eine lokale Verletzung der kinematischen Bedingung (22), wonach die Schiebung einer ebenen Querschnittscheibe k konstant sein sollte. Betrachtet man den Mittelwert γ_k als massgebend, so wird die kinematische Bedingung (22) im Mittel erfüllt. Da der Bruchwiderstand ebenfalls ein Mittelwert ist, kann erwartet werden, dass der mit den beschriebenen Ansätzen berechnete Bruchwiderstand nur wenig vom exakten Wert abweicht.

Folglich sind für eine Querschnittscheibe k wie bei der statischen Betrachtung die Koordinaten in Scheibenmitte zu verwenden.

Die kinematischen Bedingungen zeigen, dass für den Mechanismus einer unterarmierten Querschnittscheibe im allgemeinen die Bügel und mindestens einer der beiden Gurtstäbe fließen müssen. Diese Koppelung ist durch Gleichung (52a) ausgedrückt, welche besagt, dass sich die Risse senkrecht zu ihrer Neigung öffnen, was für kleine Rissöffnungen beim Eintreten des Mechanismus sicherlich zutrifft. Wie Bild 41 zeigt, vergrössern sich die beim Mechanismusbeginn (Fliessbeginn) vorhandenen Risse bzw. die nominelle Rissdehnung c_k mit zunehmender Abweichung der Diagonalenneigung von $|\alpha_k| = 45^\circ$.

$$\text{Für Fliessbeginn Gurt: } c_k = \epsilon_f \cdot \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha_k}\right)$$

$$\text{Fliessbeginn Bügel: } c_k = \epsilon_f \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_k)$$

Die kinematische Bedingung der orthogonalen Rissöffnung wird folglich mit zunehmender Abweichung der Diagonalenneigung von $|\alpha_k| = 45^\circ$ weniger zwingend, bis sich schliesslich die Risse beim Mechanismus derart öffnen, dass die Koppelung (52a) der Bügel- und Längsdehnungen wegfällt.

c_k : nominelle Rissdehnung nach (52)
 ϵ_f : Stahldehnung bei Flie遥eginn

Bild 41

In schubbeanspruchten Querschnittscheiben dürfte dies ungefähr bei folgenden Diagonalenneigungen eintreten (vgl. Bild 41):

Bild 42

Für die dargestellten Grenzfälle führt das Fließen der Bügel resp. eines Gurtstabes bereits zum Mechanismus, was eine weitere Umlagerung verunmöglicht. Die Diagonalenneigung schubbeanspruchter Querschnittsscheiben lässt sich somit nicht beliebig zwischen -90° und $+90^{\circ}$ variieren. Sie bewegt sich nach Versuchsergebnissen (siehe [9]) etwa in folgenden Grenzen:

$$0,5 \leq |\operatorname{tg} \alpha_k| \leq 2,0 \quad (53)$$

Wie bei Stahlbeton- und Spannbetonquerschnitten üblich, wird ein eventuelles Mitwirken von Betonzugkräften vernachlässigt. Ausserdem ist, da nur unterarmierte Querschnitte untersucht werden, eine Betonzerstörung vor dem Fließen der Armierung ausgeschlossen. Zur Berechnung des Bruchwiderstandes wird demnach für den Beton kein Materialgesetz benötigt. Die Fließbedingungen für die Gurtstäbe und die Bügel lauten:

$$\left. \begin{aligned} Z_i &= Z_{fi} \\ B_k &= B_{fk} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Z_{fi} : Fließkraft des Gurtstabes i

B_{fk} : Fließkraft eines Bügels der k -ten Querschnittsscheibe

Mit den Längsdehnungen ϵ_{xi} der Gurtstäbe und den Bügeldehnungen ϵ_{Bk} lässt sich aus den obigen Beziehungen das Fließgesetz für starr-idealplastisches Materialverhalten angeben.

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xi} > 0 &\rightarrow Z_i = Z_{fi} \\ \epsilon_{Bk} > 0 &\rightarrow B_k = B_{fk} \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Die Bügeldehnungen ϵ_{Bk} sind dabei wie die Gurtstabdehnungen ϵ_{xi} nichtnegative Variablen, da bei einem unterarmierten Querschnitt die Betondruckdiagonalen und die unter Druck stehenden Gurtstäbe als starr angesehen werden dürfen.

Sind einzelne Gurtstäbe oder die gesamte Zugarmierung vorgespannt, so ist die Vordehnung des Spannstahles bei der Berechnung des Bruchwiderstandes zu berücksichtigen. Bei Verbund der Spannarmerung mit dem Beton ergibt sich, falls die schlaffe und die Spannarmerung die Fließ-, resp. Streck-

grenze bei ähnlichen zusätzlichen Dehnungen erreichen, kein Unterschied im Bruchverhalten von unterarmierten Querschnitten. Demnach können bei normalen Armierungsgehalten vorgespannte Tragwerke genau gleich wie nicht vorgespannte behandelt werden. Die grundlegenden Beziehungen (51) bis (55) ermöglichen es, die Berechnung von unterarmierten Stahlbeton- und Spannbetonquerschnitten in Angriff zu nehmen. Dabei wird wie im vierten Kapitel sowohl nach dem statischen als auch nach dem kinematischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie vorgegangen.

5.2 Statische Methode

Unter Einhaltung der Gleichgewichts- und Plastizitätsbedingungen wird jene Beanspruchung $\lambda \cdot (N, M_y, M_z, M_\omega, Q_y, Q_z, T_w)$ gesucht, für die der Widerstandsfaktor λ maximal wird. Dabei wird eine proportionale Steigerung der Beanspruchung angenommen.

Gleichgewichtsbedingungen:

Die Gleichgewichtsbedingungen (15) lauten mit dem Widerstandsfaktor λ sowie den Gurtstabkräften Z_i , den Schubresultierenden Q_k der einzelnen Querschnittscheiben und den daraus resultierenden Längskräften Z_k folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 0 &= -\lambda \cdot N + \sum_{i=1}^m Z_i - \sum_{k=2}^n Z_k \\
 0 &= -\lambda \cdot M_y + \sum_{i=1}^m Z_i \cdot y_i - \sum_{k=2}^n Z_k \cdot y_k \\
 0 &= -\lambda \cdot M_z + \sum_{i=1}^m Z_i \cdot z_i - \sum_{k=2}^n Z_k \cdot z_k \\
 0 &= -\lambda \cdot M_\omega + \sum_{i=1}^m Z_i \cdot \omega_i - \sum_{k=2}^n Z_k \cdot \omega_k \\
 0 &= -\lambda \cdot Q_y + \sum_{k=2}^n Q_k \cdot \cos \delta_k \\
 0 &= -\lambda \cdot Q_z + \sum_{k=2}^n Q_k \cdot \sin \delta_k \\
 0 &= -\lambda \cdot T_w + \sum_{k=2}^n Q_k \cdot r_k
 \end{aligned} \tag{56}$$

Die in diesen Gleichungen vorkommenden geometrischen Größen y_k , z_k und ω_k beziehen sich jeweils auf die Mitte der einzelnen Querschnittscheiben. Bei

gekrümmtem Querschnitt wird als Winkel δ_k der Winkel zwischen der Scheibensehne f_k und der Koordinatenaxe y eingesetzt, wie dies Bild 36 zeigt. Der wirksame Hebelarm r_k der k -ten Querschnittscheibe kann in diesem Fall der Gleichung (50) entnommen werden.

Bei Verwendung der Beziehungen (51) können die Schubkräfte Q_k und die Längskräfte Z_k durch die Bügelkräfte B_k ausgedrückt werden. Die Gleichgewichtsbedingungen (56) transformieren sich damit zu:

$$\begin{aligned}
 0 &= -\lambda \cdot N + \sum_{i=1}^m Z_i - \sum_{k=2}^n B_k \cdot \frac{a_k}{t_k} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha_k} \\
 0 &= -\lambda \cdot M_y + \sum_{i=1}^m Z_i \cdot y_i - \sum_{k=2}^n B_k \cdot \frac{a_k}{t_k} \cdot \frac{y_k}{\operatorname{tg}^2 \alpha_k} \\
 0 &= -\lambda \cdot M_z + \sum_{i=1}^m Z_i \cdot z_i - \sum_{k=2}^n B_k \cdot \frac{a_k}{t_k} \cdot \frac{z_k}{\operatorname{tg}^2 \alpha_k} \\
 0 &= -\lambda \cdot M_\omega + \sum_{i=1}^m Z_i \cdot \omega_i - \sum_{k=2}^n B_k \cdot \frac{a_k}{t_k} \cdot \frac{\omega_k}{\operatorname{tg}^2 \alpha_k} \\
 0 &= -\lambda \cdot Q_y + \sum_{k=2}^n B_k \cdot \frac{a_k}{t_k} \cdot \frac{\cos \delta_k}{\operatorname{tg} \alpha_k} \\
 0 &= -\lambda \cdot Q_z + \sum_{k=2}^n B_k \cdot \frac{a_k}{t_k} \cdot \frac{\sin \delta_k}{\operatorname{tg} \alpha_k} \\
 0 &= -\lambda \cdot T_w + \sum_{k=2}^n B_k \cdot \frac{a_k}{t_k} \cdot \frac{r_k}{\operatorname{tg} \alpha_k}
 \end{aligned} \tag{57}$$

Plastizitätsbedingungen:

Die Plastizitätsbedingungen verlangen, dass die Gurtstab- und die Bügelkräfte ihre Fließkräfte nicht übersteigen.

$$\left. \begin{aligned} Z_i &\leq Z_{fi} \\ B_k &\leq B_{fk} \end{aligned} \right\} \tag{58}$$

Mit Einführung nichtnegativer Schlupfvariablen s_i bzw. s_k können diese Ungleichungen (58) in folgender Form angeschrieben werden.

$$\begin{aligned} s_i &= Z_{fi} - Z_i \geq 0 \\ s_k &= B_{fk} \cdot \frac{a_k}{t_k} - B_k \cdot \frac{a_k}{t_k} \geq 0 \end{aligned} \quad (59)$$

Das Weglassen der Plastizitätsbedingungen für den Beton ist gleichbedeutend mit der Annahme, dass der Beton vorläufig unbeschränkte Druckkräfte aufnehmen kann. Die Bestimmung des Querschnittswiderstandes erfolgt mit dieser für unterarmierte Querschnitte hinreichenden Voraussetzung.

Selbstverständlich ist nach erfolgter Berechnung zu kontrollieren, dass die unter Druck stehenden Gurtstäbe und die Druckdiagonalen ihre Bruchwiderstände tatsächlich nicht erreichen (siehe Abschnitt 5.7).

Optimierung:

Werden die Gleichgewichtsbedingungen (57) und die Plastizitätsbedingungen (59) in Tableauform zusammengestellt, so erhält man das Programm für den zu maximierenden Widerstandsfaktor λ . Dieses Programm ist nichtlinear, da in den Restriktionen (57) die variablen Diagonalenneigungen α_k in der Form von $\tan^2 \alpha_k$ bzw. $\tan \alpha_k$ zusammen mit den unbekannten Bügelkräften B_k vorkommen.

Für die numerische Auflösung dieses nichtlinearen Programmes fehlen bis heute die mathematischen Grundlagen. Aus diesem Grunde muss eine Näherungslösung gesucht werden. Eine einfache Methode zur Bestimmung einer für praktische Zwecke ausreichenden unteren Schranke des Querschnittswiderstandes wird in Abschnitt 5.6 angegeben.

		unbeschränkte Variablen			nichtnegative Variablen		
		1	λ	Z_1	$\dots\dots\dots Z_i$	$\dots\dots\dots Z_m$	$B_2 \cdot \frac{a_2}{t_2} \dots\dots B_k \cdot \frac{a_k}{t_k} \dots\dots B_n \cdot \frac{a_n}{t_n}$
$\lambda =$		1					→ Max
$0 =$		$-N$	1	1	1		$-\frac{1}{tg^2\alpha_2}$ $-\frac{1}{tg^2\alpha_k}$ $-\frac{1}{tg^2\alpha_n}$
$0 =$		$-M_y$	y_1	y_i	y_m		$-\frac{y_2}{tg^2\alpha_2}$ $-\frac{y_k}{tg^2\alpha_k}$ $-\frac{y_n}{tg^2\alpha_n}$
$0 =$		$-M_z$	z_1	z_i	z_m		$-\frac{z_2}{tg^2\alpha_2}$ $-\frac{z_k}{tg^2\alpha_k}$ $-\frac{z_n}{tg^2\alpha_n}$
$0 =$		$-M_w$	ω_1	ω_i	ω_m		$-\frac{\omega_2}{tg^2\alpha_2}$ $-\frac{\omega_k}{tg^2\alpha_k}$ $-\frac{\omega_n}{tg^2\alpha_n}$
$0 =$		$-Q_y$	0	0	0		$\frac{\cos\delta_2}{tg\alpha_2}$ $\frac{\cos\delta_k}{tg\alpha_k}$ $\frac{\cos\delta_n}{tg\alpha_n}$
$0 =$		$-Q_z$	0	0	0		$\frac{\sin\delta_2}{tg\alpha_2}$ $\frac{\sin\delta_k}{tg\alpha_k}$ $\frac{\sin\delta_n}{tg\alpha_n}$
$0 =$		$-T_w$	0	0	0		$\frac{r_2}{tg\alpha_2}$ $\frac{r_k}{tg\alpha_k}$ $\frac{r_n}{tg\alpha_n}$
$s_1 =$	Z_{f1}		-1				
$\vdots$							
$s_i =$	Z_{fi}			-1			
$\vdots$							
$s_m =$	Z_{fm}					-1	
$\vdots$							
$s_1 =$	$B_{f2} \cdot \frac{a_2}{t_2}$						-1
$\vdots$							
$s_k =$	$B_{fk} \cdot \frac{a_k}{t_k}$						-1
$\vdots$							
$s_n =$	$B_{fn} \cdot \frac{a_n}{t_n}$						-1

$0,5 \leq |tg\alpha_k| \leq 2,0$

Bild 43

5.3 Kinematische Methode

Unter Annahme proportionaler Steigerung der Beanspruchung $\lambda \cdot (N, M_y, M_z, M_\omega, Q_y, Q_z, T_w)$ wird jener Querschnitts-Mechanismus gesucht, für den die geleistete Arbeit verschwindet und der Widerstandsfaktor λ minimal wird.

Mechanismusbedingungen:

Nach der im zweiten Kapitel hergeleiteten kinematischen Bedingung (19) lautet die Mechanismusbedingung für den Gurtstab i :

$$\epsilon_{xi} = u' - v'' \cdot y_i - w'' \cdot z_i - \vartheta'' \cdot \omega_i \quad (60)$$

Ferner werden die aus (52) übernommenen kinematischen Bedingungen für die Querschnittscheibe k benötigt.

$$\epsilon_{Bk} = \gamma_k \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_k} - \epsilon_{xk} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha_k}$$

$$\epsilon_{Bk} = \epsilon_{xk} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha_k}$$

Diese Gleichungen führen mit den für die Scheibe k formulierten kinematischen Bedingungen (19) und (22)

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xk} &= u' - v'' \cdot y_k - w'' \cdot z_k - \vartheta'' \cdot \omega_k \\ \gamma_k &= \gamma_y \cdot \cos \delta_k + \gamma_z \cdot \sin \delta_k + \gamma_\vartheta \cdot r_k \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

zu folgenden Mechanismusbedingungen:

$$\begin{aligned} \epsilon_{Bk} &= \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_k} \cdot (\gamma_y \cdot \cos \delta_k + \gamma_z \cdot \sin \delta_k + \gamma_\vartheta \cdot r_k) - \\ &\quad - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha_k} \cdot (u' - v'' \cdot y_k - w'' \cdot z_k - \vartheta'' \cdot \omega_k) \\ \epsilon_{Bk} &= \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha_k} \cdot (u' - v'' \cdot y_k - w'' \cdot z_k - \vartheta'' \cdot \omega_k) \end{aligned} \quad (62)$$

Arbeitsbedingung:

Die Arbeitsbedingung, nach welcher die beim Mechanismus geleistete Arbeit verschwinden muss, wird hier am Stabelement der Länge $\Delta x = 1$ formuliert.

$$A_a + A_i = 0$$

oder $A_a = -A_i = A_d$

A_a : Arbeit der äusseren Kräfte (hier: Schnittkräfte)

A_d : Dissipationsarbeit, d.h. negative Arbeit der inneren Kräfte (Spannungen)

Die Arbeit der äusseren Kräfte für den Verschiebungszustand u' , v'' , w'' , ϑ'' , γ_y , γ_z und γ_ϑ kann der Gleichung (45) entnommen werden..

$$A_a = \lambda \cdot [u' \cdot N - v'' \cdot M_y - w'' \cdot M_z - \vartheta'' \cdot M_\omega + \gamma_y \cdot Q_y + \gamma_z \cdot Q_z + \gamma_\vartheta \cdot T_w]$$

Infolge der Beschränkung auf unterarmierte Querschnitte leisten nur die Gurtstäbe und die Bügel einen Beitrag zur Dissipationsarbeit,

$$A_d = \sum_{i=1}^m Z_i \cdot \epsilon_{xi} + \sum_{k=2}^n B_k \cdot \frac{a_k}{t_k} \cdot \epsilon_{Bk}$$

welche sich mit Hilfe des Fliessgesetzes (55) wie folgt umformen lässt.

$$A_d = \sum_{i=1}^m Z_{fi} \cdot \epsilon_{xi} + \sum_{k=2}^n B_{fk} \cdot \frac{a_k}{t_k} \cdot \epsilon_{Bk} \quad (63)$$

Damit erhält man aus der Arbeitsbedingung $A_a = A_d$ den zu minimierenden Widerstandsfaktor λ .

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^m Z_{fi} \cdot \epsilon_{xi} + \sum_{k=2}^n B_{fk} \cdot \frac{a_k}{t_k} \cdot \epsilon_{Bk}}{u' \cdot N - \dots + \gamma_\vartheta \cdot T_w} \quad (64)$$

Er kann schliesslich, da der absolute Betrag der Verformungen keine Rolle spielt, aus dem Zähler des obigen Ausdruckes

$$\lambda = \sum_{i=1}^m Z_{fi} \cdot \epsilon_{xi} + \sum_{k=2}^n B_{fk} \cdot \frac{a_k}{t_k} \cdot \epsilon_{Bk} \quad (65)$$

mit dem Nenner als Nebenbedingung bestimmt werden.

$$u' \cdot N - v'' \cdot M_y - w'' \cdot M_z - \vartheta'' \cdot M_w + \gamma_y \cdot Q_y + \gamma_z \cdot Q_z + \gamma_{\vartheta} \cdot T_w = 1 \quad (66)$$

Optimierung:

Die Gleichungen (60), (62), (65) und (66) können in Tableauform zusammengestellt werden, womit man das Programm für den zu minimierenden Widerstandsfaktor λ erhält.

Dieses Programm ist genauso wie dasjenige der statischen Methode in Bild 43 nichtlinear. Vergleicht man die beiden Optimierungsprogramme, so stellt man fest, dass die aus dem Teil A der Minimumsaufgabe (Bild 44) gebildete Koeffizientenmatrix mit der transponierten Koeffizientenmatrix der Maximumsaufgabe (Bild 43) identisch ist. Im Teil B der Minimumsaufgabe erscheinen zusätzlich Restriktionen, die die Orthogonalität der Rissöffnungen beschreiben. Auf den ersten Blick ist eine Dualität zwischen den beiden Programmen nicht zu erkennen. Dies erstaunt bei den vorliegenden Programmen keineswegs, da sie nichtlinear und die Nichtlinearitäten (z.B. $\text{tg}\alpha_k$) ausserdem nicht-konvex sind. Die zentrale Frage, ob beide Programme zu ein und demselben Widerstandsfaktor λ führen, wird im nächsten Abschnitt beantwortet.

	u'	$-v''$	$-w''$	$-\delta''$	γ_y	γ_z	γ_δ	$\dots\dots \varepsilon_{xi} \dots\dots$	$\dots\dots \varepsilon_{Bk} \dots\dots$	
$\lambda =$										$B_{fk} \cdot \frac{a_k}{r_k}$
$0 =$	1	-N	-M _y	-M _z	-M _w	-Q _y	-Q _z	-T _w		
$0 =$		1	y_i	z_i	ω_i	0	0	0	-1	
$0 =$		$-\frac{1}{\text{tg}^2 \alpha_k}$	$-\frac{y_k}{\text{tg}^2 \alpha_k}$	$-\frac{z_k}{\text{tg}^2 \alpha_k}$	$-\frac{\omega_k}{\text{tg}^2 \alpha_k}$	$\frac{\cos \delta_k}{\text{tg} \alpha_k}$	$\frac{\sin \delta_k}{\text{tg} \alpha_k}$	$\frac{r_k}{\text{tg} \alpha_k}$		-1
$0 =$		$\frac{1}{\text{tg}^2 \alpha_k}$	$\frac{y_k}{\text{tg}^2 \alpha_k}$	$\frac{z_k}{\text{tg}^2 \alpha_k}$	$\frac{\omega_k}{\text{tg}^2 \alpha_k}$	0	0	0		-1

$0,5 \leq | \text{tg} \alpha_k | \leq 2,0$

Bild 44

5.4 Dualität zwischen statischer und kinematischer Methode

Um zu zeigen, dass die Programme der statischen und der kinematischen Methode dual sind, d.h., dass beide Programme denselben Widerstandsfaktor λ liefern, genügt die Betrachtung einer einzelnen Querschnittscheibe, denn die gesamte Nichtlinearität ist bereits im angenommenen Fachwerkmodell in Form der variablen Diagonalenenneigung enthalten.

Im folgenden wird eine Querschnittscheibe untersucht, deren Gurtstäbe die Fließkräfte Z_{fo} bzw. Z_{fu} und deren Bügel die Fließkräfte B_f aufweisen. Sie wird, wie dies aus Bild 45 hervorgeht, durch eine Querkraft Q und eine in Scheibenmitte angreifende Normalkraft N beansprucht. Die Wirkungsweise der Querschnittscheibe wird durch ein Fachwerkmodell mit variabler Diagonalenenneigung beschrieben. Es gelten demnach die in Abschnitt 5.1 hergeleiteten statischen und kinematischen Beziehungen.

Bild 45

Das Gleichgewicht kann für den dargestellten einfachen Fall durch drei Bedingungen, nämlich durch je eine Gleichung für die Querkraft Q , die Normalkraft N und das Biegemoment $M = 0$ formuliert werden. Der Verschiebungszustand ist durch die drei Parameter u' , $-w''$ und γ gegeben.

Bei genau gleichem Vorgehen wie in den beiden vorangegangenen Abschnitten liefern die statische und die kinematische Methode folgende nichtlinearen Programme zur Bestimmung des Widerstandsfaktors λ .

Maximumsaufgabe (statische Methode)

	1	λ	Z_o	Z_u	$B \cdot \frac{a}{t}$	
$\lambda =$		1				→ Max
$O =$		$-N$	1	1	$-\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$	
$O =$		0	$-\frac{a}{2}$	$+\frac{a}{2}$	0	
$O =$		$-Q$	0	0	$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$	
$s_o =$	Z_{fo}		-1			
$s_u =$	Z_{fu}			-1		
$s_B =$	$B_f \cdot \frac{a}{t}$				-1	

Bild 46

Minimumsaufgabe (kinematische Methode)

	1	u'	$-w''$	γ	ϵ_{xo}	ϵ_{xu}	ϵ_B	
$\lambda =$					Z_{fo}	Z_{fu}	$B_f \cdot \frac{a}{t}$	→ Min
$O =$	1	$-N$	0	$-Q$				
$O =$		1	$-\frac{a}{2}$	0	-1			
$O =$		1	$+\frac{a}{2}$	0		-1		
$O =$		$-\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$	0	$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$			-1	
$O =$		$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$	0	0			-1	

Bild 47

Die hier angegebenen einfachen Programme weisen denselben Aufbau und dieselben nichtlinearen Besonderheiten auf wie die in den Abschnitten 5.2 und 5.3 hergeleiteten Programme, so dass eine Dualität zwischen den beiden nichtlinearen Programmen der Bilder 46 und 47 auch auf die früher aufgestellten Programme für offene Stahlbetonquerschnitte übertragen werden kann. Somit braucht man nur noch zu zeigen, dass für das hier betrachtete einfache Beispiel sowohl die Maximumsaufgabe als auch die Minimumsaufgabe zum selben Widerstandsfaktor λ führen.

Lösung der Maximumsaufgabe:

Setzt man die Momentenbedingung, nach der die Gurtstabkräfte Z_o und Z_u gleich gross sein müssen, in die übrigen Gleichgewichtsbedingungen ein, so lauten diese:

$$\lambda \cdot N = 2 \cdot Z_u - B \cdot \frac{a}{t} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\lambda \cdot Q = B \cdot \frac{a}{t} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Wie leicht einzusehen ist, wird das Maximum des Widerstandsfaktors λ dann erreicht, wenn unter Einhaltung der Gleichgewichts- und Plastizitätsbedingungen ein möglichst grosser Anteil der Armierung ins Fließen kommt. Dies ist hier der Fall, wenn die Bügel und der untere Gurtstab fließen.

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{\max} \cdot N &= 2 \cdot Z_{fu} - B_f \cdot \frac{a}{t} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \\ \lambda_{\max} \cdot Q &= B_f \cdot \frac{a}{t} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Für das vorausgesetzte Armierungsverhältnis $Z_{fo} > Z_{fu}$ darf die obere Gurtstabkraft Z_o ihre Fliesskraft nicht erreichen, da sonst (mit der Momentenbedingung $Z_o = Z_u$) die Plastizitätsbedingung $Z_u \leq Z_{fu}$ für den unteren Gurtstab nicht mehr erfüllt wäre.

Aus den beiden Gleichungen (67) lassen sich die Diagonalenneigung und der Widerstandsfaktor bestimmen. Eliminiert man $\lambda_{\max}$ aus den Beziehungen (67), so erhält man folgende quadratische Gleichung für die Diagonalenneigung α bzw. für die Funktion $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$.

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{N}{Q} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{2 \cdot Z_{fu}}{B_f \cdot \frac{a}{t}} = 0 \quad (68)$$

Eine Beziehung für $\lambda_{\max}$ ergibt sich bei Elimination der Diagonalenneigung,

$$\lambda_{\max}^2 + \frac{N \cdot B_f \cdot \frac{a}{t}}{Q^2} \cdot \lambda_{\max} - \frac{2 \cdot Z_{fu} \cdot B_f \cdot \frac{a}{t}}{Q^2} = 0 \quad (69)$$

womit die Maximumsaufgabe gelöst ist.

$$\lambda_{\max} = \frac{N \cdot B_f \cdot \frac{a}{t}}{2 \cdot Q^2} \cdot \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{8 \cdot Z_{fu}}{B_f \cdot \frac{a}{t}} \cdot \left(\frac{Q}{N}\right)^2} \right] \quad (70)$$

Lösung der Minimumsaufgabe:

Der gesamte Verschiebungszustand kann durch die Gurtstabdehnungen ϵ_{x_o} und ϵ_{x_u} dargestellt werden, wie dies aus Bild 45 oder aus den Restriktionen der Minimumsaufgabe (Bild 47) hervorgeht. Es gilt:

$$\left. \begin{aligned} u' &= \frac{1}{2} \cdot (\epsilon_{x_u} + \epsilon_{x_o}) \\ -w'' &= \frac{1}{a} \cdot (\epsilon_{x_u} - \epsilon_{x_o}) \\ \gamma &= \frac{1}{tg\alpha} \cdot (\epsilon_{x_u} + \epsilon_{x_o}) \\ \epsilon_B &= \frac{1}{2 \cdot tg^2\alpha} \cdot (\epsilon_{x_u} + \epsilon_{x_o}) \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Mit diesen kinematischen Bedingungen transformiert sich die in den ersten zwei Zeilen der Minimumsaufgabe (Bild 47) enthaltene Beziehung für den Widerstandsfaktor λ

$$\lambda = \frac{Z_{fu} \cdot \epsilon_{x_u} + Z_{fo} \cdot \epsilon_{x_o} + B_f \cdot \frac{a}{t} \cdot \epsilon_B}{N \cdot u' + 0 \cdot (-w'') + Q \cdot \gamma} \quad (72)$$

zu:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{Z_{fu} \cdot \epsilon_{x_u} + Z_{fo} \cdot \epsilon_{x_o} + B_f \cdot \frac{a}{t} \cdot \frac{1}{2 \cdot tg^2\alpha} \cdot (\epsilon_{x_u} + \epsilon_{x_o})}{N \cdot \frac{1}{2} \cdot (\epsilon_{x_u} + \epsilon_{x_o}) + Q \cdot \frac{1}{tg\alpha} \cdot (\epsilon_{x_u} + \epsilon_{x_o})} = \\ &= \frac{Z_{fu} + (Z_{fo} - Z_{fu}) \cdot \frac{\epsilon_{x_o}}{\epsilon_{x_u} + \epsilon_{x_o}} + B_f \cdot \frac{a}{t} \cdot \frac{1}{2 \cdot tg^2\alpha}}{N \cdot \frac{1}{2} + Q \cdot \frac{1}{tg\alpha}} \end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass für das vorausgesetzte Armierungsverhältnis $Z_{fo} > Z_{fu}$ der Widerstandsfaktor λ unabhängig vom Winkel α für $\epsilon_{x0} = 0$ ein Minimum annimmt. Damit erhält man folgenden Ausdruck für λ :

$$\lambda = \frac{Z_{fu} + B_f \cdot \frac{a}{t} \cdot \frac{1}{2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\frac{1}{2} \cdot N + Q \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}} \quad (73)$$

Das Minimum dieser Funktion kann am einfachsten durch Nullsetzen der ersten Ableitung nach der Diagonalenneigung bestimmt werden.

$$\frac{d\lambda}{d\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot N + Q \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right) \cdot B_f \cdot \frac{a}{t} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - \left(Z_{fu} + B_f \cdot \frac{a}{t} \cdot \frac{1}{2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}\right) \cdot Q}{\left(\frac{1}{2} \cdot N + Q \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2} = 0$$

Da der Nenner dieses Ausdruckes nicht verschwindet, kann der Zähler allein null gesetzt werden. Dies ergibt folgende quadratische Gleichung in $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$,

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{N}{Q} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{2 \cdot Z_{fu}}{B_f \cdot \frac{a}{t}} = 0 \quad (74)$$

welche mit Gleichung (68) völlig übereinstimmt. Wie leicht bewiesen werden kann, gelangt man zu einem minimalen Widerstandsfaktor $\lambda_{\min}$, wenn die aus (74) resultierende Diagonalenneigung in (73) eingesetzt wird.

$$\lambda_{\min} = \frac{N \cdot B_f \cdot \frac{a}{t}}{2 \cdot Q^2} \cdot \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{8 \cdot Z_{fu}}{B_f \cdot \frac{a}{t}} \cdot \left(\frac{Q}{N}\right)^2} \right] \quad (75)$$

Beim Vergleich von (70) und (75) stellt man fest, dass die Lösung $\lambda_{\max}$ der Maximumsaufgabe mit der Lösung $\lambda_{\min}$ der Minimumsaufgabe zusammenfällt. Somit liefern beide Programme den exakten Widerstandsfaktor für das angenommene Bruchmodell (siehe Abschnitt 5.1), denn die Lösung der Maximumsaufgabe erfüllt die Gleichgewichts- und Plastizitätsbedingungen und die Lösung der Minimumsaufgabe die kinematischen oder Mechanismusbedingungen.

Folglich ist es gleichgültig, ob die Bestimmung des Querschnittswiderstandes nach der statischen (Abschnitt 5.2) oder nach der kinematischen Methode (Abschnitt 5.3) erfolgt.

5.5 Bruchmechanismen

Weil die Lösung der statischen mit jener der kinematischen Aufgabe übereinstimmt (Dualität), muss bei dem nach der statischen Methode erhaltenen Wert des Querschnittswiderstandes ein Querschnitts-Mechanismus eintreten. Das heisst, es besteht die Möglichkeit, die Art der sich ausbildenden Bruchmechanismen aus dem allgemeinen statischen Programm zu erkennen. Dazu wird als erstes das im Abschnitt 5.2 aufgestellte Tableau der statischen Methode (Bild 43) mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} Q_k &= B_k \cdot \frac{a_k}{t_k} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_k} \\ |Q_k| &= B_k \cdot \frac{a_k}{t_k} \cdot \frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha_k|} \\ Q_{fk} &= B_{fk} \cdot \frac{a_k}{t_k} \cdot \frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha_k|} \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

umgeformt. Q_k bedeutet die Schubresultierende der k -ten Querschnittscheibe und Q_{fk} die entsprechende Fließ-Schubkraft, die im wesentlichen eine Funktion der Bügelfliesskraft und der Diagonalenneigung ist. Es sei an dieser Stelle daran erinnert, dass die Bügelkräfte B_k nichtnegative Variablen sind, und dass das Vorzeichen der Schubresultierenden Q_k allein durch das Vorzeichen des Winkels α_k bestimmt wird. Mit Einführung der Beziehungen (76) ergibt sich das in Bild 48 dargestellte Tableau.

	1	λ	$Z_1 \dots\dots\dots Z_i \dots\dots\dots Z_m$	$Q_2 \dots\dots\dots Q_k \dots\dots\dots Q_n$	
$\lambda =$		1			→ Max
$O =$		$-Q_y$		$\cos\delta_2 \quad \cos\delta_k \quad \cos\delta_n$	} A
$O =$		$-Q_z$		$\sin\delta_2 \quad \sin\delta_k \quad \sin\delta_n$	
$O =$		$-T_w$		$r_2 \quad r_k \quad r_n$	

	1	λ	$Z_1 \dots\dots\dots Z_i \dots\dots\dots Z_m$	$ Q_2 \dots\dots\dots Q_k \dots\dots\dots Q_n $					
$O =$		$-N$	1	1	1	$-\frac{1}{ \operatorname{tg}\alpha_2 }$	$-\frac{1}{ \operatorname{tg}\alpha_k }$	$-\frac{1}{ \operatorname{tg}\alpha_n }$	} C
$O =$		$-M_y$	y_1	y_i	y_m	$-\frac{y_2}{ \operatorname{tg}\alpha_2 }$	$-\frac{y_k}{ \operatorname{tg}\alpha_k }$	$-\frac{y_n}{ \operatorname{tg}\alpha_n }$	
$O =$		$-M_z$	z_1	z_i	z_m	$-\frac{z_2}{ \operatorname{tg}\alpha_2 }$	$-\frac{z_k}{ \operatorname{tg}\alpha_k }$	$-\frac{z_n}{ \operatorname{tg}\alpha_n }$	
$O =$		$-M_\omega$	ω_1	ω_i	ω_m	$-\frac{\omega_2}{ \operatorname{tg}\alpha_2 }$	$-\frac{\omega_k}{ \operatorname{tg}\alpha_k }$	$-\frac{\omega_n}{ \operatorname{tg}\alpha_n }$	
$s_1 =$	Z_{f1}		-1						} D
$s_i =$	Z_{fi}			-1					
$s_m =$	Z_{fm}				-1				
$s_2 =$	Q_{f2}					-1			} B
$s_k =$	Q_{fk}						-1		
$s_n =$	Q_{fn}							-1	

$0,5 \leq |\operatorname{tg}\alpha_k| \leq 2,0$

Bild 48

Bevor auf die Bruchmechanismen dünnwandiger offener Stahlbeton- und Spannbetonquerschnitte eingegangen wird, sei kurz an die Beschreibung des Bruchmodelles in Abschnitt 5.1 erinnert. Dort wurde festgestellt, dass bei einem Mechanismus einer Querschnittscheibe im allgemeinen (für $0,5 < |\tan \alpha_k| < 2,0$) Bügel- und Längsarmierung fließen müssen, und dass beim Erreichen einer der beiden Umlagerungsgrenzen ($|\tan \alpha_k| = 0,5$ oder $2,0$) bereits das Fließen der Bügel- oder der Längsarmierung zu einem Mechanismus führt. An einer Querschnittscheibe können demnach drei grundsätzlich verschiedene Mechanismen betrachtet werden, je nachdem ob die Schub-, die Längsarmierung oder beide Armierungsanteile ins Fließen kommen. Für den Querschnitt gilt im Prinzip dasselbe, es kann zwischen drei Arten von Mechanismen unterschieden werden:

1. Längsmechanismus bei Fließen der Längsarmierung
(Gurtstäbe)
2. Schubmechanismus bei Fließen der
Schubarmierung (Bügel)
3. Kombiniertes Mechanismus bei Fließen
der Längs- und Schubarmierung

5.5.1 Längsmechanismus

Ein solcher Mechanismus kommt zustande, wenn eine starke Schubarmierung lediglich das Fließen der Gurtstäbe zulässt oder wenn der Querschnitt nur durch die Schnittkräfte N , M_y , M_z und M_w beansprucht wird. Im letzteren Falle sind weder die Querkraften Q_y und Q_z noch das Wölb-torsionsmoment T_w vorhanden, d.h. auf den Querschnitt wirkt keine Schubbeanspruchung.

Für $Q_y = Q_z = T_w = 0$ erfüllt die triviale Lösung $Q_k = 0$ ($k=2, \dots, n$) im Tableau des Bildes 48 sowohl die Gleichgewichtsbedingungen A für den Schubfluss als auch die Plastizitätsbedingungen B für die Bügel. Aus den Gleichgewichtsbedingungen C für die Längskräfte ist im weiteren ersichtlich, dass nicht-verschwindende $|Q_k|$ die Gurtstabkräfte Z_i erhöhen, d.h. gewisse Z_i würden nach den Plastizitätsbedingungen D die obere Grenze Z_{fi} früher erreichen.

Die triviale Lösung $Q_k = 0$ ($k=2, \dots, n$) führt somit für den Fall $Q_y = Q_z = T_w = 0$ zum Maximum des Widerstandsfaktors λ bzw. zum tatsächlichen Querschnittswiderstand.

Damit reduziert sich das in Bild 48 dargestellte nichtlineare Tableau auf folgendes lineare Unterprogramm.

	1	λ	Z_1	$\dots\dots\dots Z_i$	$\dots\dots\dots Z_m$
$\lambda =$		1			→ Max
$O =$		$-N$	1	1	1
$O =$		$-M_y$	y_1	y_i	y_m
$O =$		$-M_z$	z_1	z_i	z_m
$O =$		$-M_\omega$	ω_1	ω_i	ω_m
$s_1 =$	Z_{f1}		-1		
$\vdots$					
$s_i =$	Z_{fi}			-1	
$\vdots$					
$s_m =$	Z_{fm}				-1

Bild 49

Wie nicht lange bewiesen werden muss, wird das Maximum des Widerstandsfaktors λ dann erreicht, wenn von den total j Gurtstäben möglichst viele ins Fliessen kommen.

Die vier Gleichgewichtsbedingungen im Tableau des Bildes 49 weisen j unbekannte Gurtstabkräfte und den unbekannten Widerstandsfaktor λ auf, total also $(j+1)$ Unbekannte. Dies führt dazu, dass maximal $(j+1-4)=(j-3)$ Gurtstabkräfte durch ihre Fliesskräfte ersetzt werden dürfen, bis die vier Gleichgewichtsgleichungen mit den ursprünglich $(j+1)$ Unbekannten zu einem regulären Gleichungssystem mit nur noch vier Unbekannten degeneriert sind. Man erhält daraus eindeutige Lösungen für die verbleibenden vier Unbekannten, nämlich den Widerstandsfaktor λ sowie die restlichen drei Gurtstabkräfte, die irgendwelche positiven oder negativen Werte annehmen werden. Sie erfüllen, falls die Fliesskräfte bei den richtigen Gurtstäben eingesetzt wurden, die Plastizitätsbedingungen. Im Bruchzustand werden also drei Gurtstabkräfte kleiner oder gleich gross sein wie deren Fliesskräfte, so dass folgende Regel aufgestellt werden kann:

Beim Erreichen des Querschnittswiderstandes müssen alle mit Ausnahme von höchstens drei Gurtstäben fliessen. Betrachtet man die in Abschnitt 5.4 gezeigte Dualität zwischen dem statischen und dem kinematischen Programm, so

heisst dies, dass bei einem Längsmechanismus normalerweise drei Gurtstäbe starr bleiben.

Zur Illustration dieser Regel mögen die folgenden Beispiele dienen:

Bild 50

Spezialfälle:

Eine Ausnahme von der angegebenen Regel kann in jenen Fällen auftreten, wo mehr als zwei Gurtstäbe direkt hintereinander auf einer Geraden liegen, zum Beispiel:

Bild 51

Die Frage, was in diesem Fall passiert, kann am einfachsten mit Hilfe des kinematischen Programmes beantwortet werden, das zum linearen Tableau des Bildes 49 dual ist.

$\lambda =$

$0 =$

$0 =$

$\vdots$

$0 =$

$\vdots$

$0 =$

1	u'	$-v''$	$-w''$	$-\vartheta''$	$\epsilon_{x1} \dots \epsilon_{xi} \dots \epsilon_{xm}$
					$Z_{f1} \quad Z_{fi} \quad Z_{fm}$
	1	$-N$	$-M_y$	$-M_z$	$-M_w$
		1	y_i	z_i	ω_i
					-1
		1	y_i	z_i	ω_i
					-1
		1	y_m	z_m	ω_m
					-1

$\rightarrow$

Min

Bild 52

Liegt ein Gurtstab h auf der Verbindungsgeraden zwischen zwei Gurtstäben $h-2$ und $h+2$, so sind dessen Koordinaten y_h, z_h und ω_h Linearkombinationen der Koordinaten der beiden Gurtstäbe $h-2$ und $h+2$. Das heisst mit Blick auf das oben angegebene Tableau, dass auch die Dehnung ϵ_{xh} eine Linearkombination der Dehnungen $\epsilon_{x\ h-2}$ und $\epsilon_{x\ h+2}$ sein muss.

Es gilt

für: $\epsilon_{x\ h-2} > 0$

$\epsilon_{x\ h+2} > 0$

}

$\rightarrow \epsilon_{xh} > 0$

für: $\epsilon_{x\ h-2} > 0$

$\epsilon_{x\ h+2} = 0$

bzw.

$\epsilon_{x\ h-2} = 0$

$\epsilon_{x\ h+2} > 0$

}

$\rightarrow \epsilon_{xh} > 0$

für: $\epsilon_{x\ h-2} = 0$

$\epsilon_{x\ h+2} = 0$

}

$\rightarrow \epsilon_{xh} = 0$

Wie aus Bild 53 hervorgeht, kann für den Fall, dass mehr als zwei starre Gurtstäbe direkt hintereinander auf einer Geraden liegen, ein Mechanismus auftreten, bei dem im ganzen mehr als drei Gurtstäbe starr bleiben.

- D_L
 X : Drehpunkt des Längsmechanismus
 O : starre Gurtstäbe
 ● : fließende Gurtstäbe

Bild 53

Dann können die vier zur Verfügung stehenden Gleichgewichtsbedingungen nicht mehr zu einem regulären Gleichungssystem reduziert werden, da in vier Gleichungen mehr als vier Unbekannte (vier Gurtstabkräfte sowie der Widerstandsfaktor λ) vorkommen. Der Querschnittswiderstand lässt sich zwar bestimmen, nicht aber die Aufteilung der Kräfte auf die starr bleibenden Gurtstäbe des statisch unbestimmten Restquerschnittes. Dasselbe gilt bekanntlich auch für lokale Tragwerkmechanismen, bei denen die Traglast eindeutig gegeben, die Schnittkraftverteilung am statisch unbestimmten Restsystem für starr-plastisches Materialverhalten jedoch nicht definiert ist.

Interessieren neben dem Querschnittswiderstand auch die einzelnen Gurtstabkräfte (z.B. für die Abschätzung der Sprödbbruchgefahr), so kann man sich auf sehr einfache Weise behelfen, indem anstelle eines starr-plastischen ein elastisch-plastisches Materialverhalten vorausgesetzt wird. Nach starr-plastischer Theorie sind die Dehnungen für Gurtstäbe, welche ihre Fließgrenze nicht erreichen, voraussetzungsgemäss gleich null. In Wirklichkeit nehmen sie jedoch von null verschiedene Werte an und sind aufgrund der kinematischen Bedingungen linear zwischen den Gurtstäben $h-2$ und $h+2$ verteilt.

O : starre Gurtstäbe gemäss starr-plastischer Theorie

— : Querschnittscheiden

E : Elastizitätsmodul

F_h : Querschnittsfläche des Gurtstabes h

(bei Druckbeanspruchung ideelle Querschnittsfläche inklusive Beton)

Bild 54

Die Gurtstäbe h-2 bis h+2 befinden sich bei Annahme eines elastisch-plastischen Stoffgesetzes im elastischen Zustand.

$$\epsilon_{xh} = (1-\beta) \cdot \epsilon_{x, h-2} + \beta \cdot \epsilon_{x, h+2}$$

$$Z_{h-2} = E \cdot F_{h-2} \cdot \epsilon_{x, h-2}$$

$$Z_h = E \cdot F_h \cdot \epsilon_{xh}$$

$$Z_{h+2} = E \cdot F_{h+2} \cdot \epsilon_{x, h+2}$$

Folglich lässt sich die Gurtstabkraft Z_h in Funktion von Z_{h-2} und Z_{h+2} ausdrücken:

$$Z_h = E \cdot F_h \cdot [(1-\beta) \cdot \epsilon_{x, h-2} + \beta \cdot \epsilon_{x, h+2}]$$

oder

$$Z_h = \underbrace{(1-\beta) \cdot \frac{F_h}{F_{h-2}}}_{\text{Faktor}} \cdot Z_{h-2} + \underbrace{\beta \cdot \frac{F_h}{F_{h+2}}}_{\text{Faktor}} \cdot Z_{h+2}$$

Dank dieser zusätzlichen Gleichung erhält man schliesslich auch für den geschilderten Spezialfall aus den Gleichgewichtsbedingungen ein reguläres Gleichungssystem mit einem eindeutig bestimmten Lösungsvektor für den Widerstandsfaktor λ und die bis anhin unbekannten Gurtstabkräfte.

5.5.2 Schubmechanismus

Wird bei einem auf Schub (Q_y, Q_z, T_w) beanspruchten Querschnitt, auf den auch eine Längsbeanspruchung (N, M_y, M_z, M_w) wirken kann, jeglicher Längsmechanismus durch eine starke Längsarmierung, d.h. durch starke Gurtstäbe verhindert, so wird beim Erreichen des Querschnittswiderstandes ein sogenannter Schubmechanismus eintreten.

Diese Annahme vorausgesetzt, können die Gleichgewichtsbedingungen C und die Plastizitätsbedingungen D für die Längskräfte im Tableau des Bildes 48 in jedem Falle erfüllt werden. Sie haben demnach keinen Einfluss auf den Querschnittswiderstand und können weggelassen werden.

Zur Bestimmung des Widerstandsfaktors λ genügt in diesem Falle folgendes einfache Programm.

	1	λ	Q_2	$\dots\dots\dots Q_k$	$\dots\dots\dots Q_n$
$\lambda =$		1			→ Max
$O =$		$-Q_y$	$\cos\delta_2$	$\cos\delta_k$	$\cos\delta_n$
$O =$		$-Q_z$	$\sin\delta_2$	$\sin\delta_k$	$\sin\delta_n$
$O =$		$-T_w$	r_2	r_k	r_n

	1	λ	$ Q_2 $	$\dots\dots\dots Q_k $	$\dots\dots\dots Q_n $
$s_2 =$	Q_{f2}		-1		
$\vdots$					
$s_k =$	Q_{fk}			-1	
$\vdots$					
$s_n =$	Q_{fn}				-1

Bild 55

Die Fliess-Schubkraft Q_{fk} der k-ten Querschnittscheibe ist im wesentlichen eine Funktion der Bügelfliesskraft B_{fk} und der Diagonalenneigung α_k .

$$Q_{fk} = B_{fk} \cdot \frac{a_k}{t_k} \cdot \frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha_k|}$$

Bleibt, wie hier vorausgesetzt, die Längsarmierung starr, so kann Q_{fk} mit dem minimalen Winkel α_k bestimmt werden, da die Schubarmierung bei kleinster Diagonalenneigung α_k am wirksamsten ist und demzufolge der Widerstandsfaktor λ maximal wird. Dies führt nach (53) dazu, dass hier die Variablen $\frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha_k|}$ durch den konstanten Wert 2 ersetzt werden dürfen.

$$Q_{fk} = 2 \cdot B_{fk} \cdot \frac{a_k}{t_k}$$

Das nichtlineare Programm des Bildes 55 wird damit linear, und für den Schubmechanismus gilt, wie ohne Herleitung einzusehen ist, folgende Regel:

Beim Erreichen des Querschnittswiderstandes fliessen die Bügel in allen ausser höchstens zwei Querschnittscheiben. Das heisst, dass bei einem Schubmechanismus im Normalfall die Bügel zweier Querschnittscheiben starr bleiben.

Diese Gesetzmässigkeit soll an folgendem Beispiel demonstriert werden:

- D_S
 x : Drehpunkt des Schubmechanismus
 — : starre Bügel
 = : fliessende Bügel

Spezialfälle:

Eine Ausnahme von der angegebenen Regel kann wie beim Längsmechanismus in jenen Fällen auftreten, wo mehr als zwei Gurtstäbe bzw. mehr als eine Querschnittscheibe direkt hintereinander auf einer Geraden liegen.

Bild 57

Die kinematischen Bedingungen verlangen, dass die Schiebungen der beiden Querschnittscheiben h-1 und h+1 gleich gross sind.

$$\gamma_{h+1} = \gamma_{h-1}$$

Unter der hier gültigen Voraussetzung starrer Gurtstäbe ergibt sich bei minimaler Diagonalenneigung aus (52b) ein direkter Zusammenhang zwischen Bügeldehnung und Schiebung.

$$\text{für } \gamma_k > 0 : \quad \gamma_k = \epsilon_{Bk} \cdot \operatorname{tg} \alpha_k = 0,5 \cdot \epsilon_{Bk}$$

$$\gamma_k < 0 : \quad \gamma_k = \epsilon_{Bk} \cdot \operatorname{tg} \alpha_k = -0,5 \cdot \epsilon_{Bk}$$

Demzufolge entsprechen sich auch die Bügeldehnungen der Querschnittscheiben h-1 und h+1.

$$\epsilon_{B \ h+1} = \epsilon_{B \ h-1}$$

Für den Spezialfall starrer Bügel in den Querschnittscheiben h-1 und h+1 kann, wie aus Bild 58 hervorgeht, ein Mechanismus auftreten, bei dem die

Bügel von mehr als zwei Querschnittscheiben starr und die betreffenden Bügelkräfte nach starr-plastischer Theorie unbestimmt bleiben.

D_s
 X : Drehpunkt des Schubmechanismus
 — : starre Bügel
 = : fließende Bügel

Bild 58

Bei gleichem Vorgehen wie bei den Gurtstabkräften, wo Z_h mit Hilfe eines elastisch-plastischen Materialverhaltens in Funktion von Z_{h-2} und Z_{h+2} ausgedrückt werden konnte, ist es hier möglich, die Schubkraft Q_{h+1} als Funktion der Schubkraft Q_{h-1} darzustellen.

$$Q_{h+1} = \underbrace{\frac{F_{h+1} \cdot \frac{a_{h+1}}{t_{h+1}}}{F_{h-1} \cdot \frac{a_{h-1}}{t_{h-1}}}}_{\text{Faktor}} \cdot Q_{h-1}$$

Damit kann aus den drei Gleichgewichtsbedingungen für den Schubfluss bzw. die Schubresultierenden Q_k im Tableau des Bildes 55 auch für den in Bild 58 dargestellten Mechanismus ein reguläres Gleichungssystem erhalten werden, was die eindeutige Bestimmung der Bügelkräfte im Bruchzustand ermöglicht.

5.5.3 Kombiniertes Mechanismus

Ein solcher Mechanismus tritt ein, wenn das Verhältnis der Längs- und der Bügelarmierung so gewählt ist, dass beide Armierungsanteile ins Fließen kommen. Für diesen Fall gilt die in (52a) angegebene Koppelung der Bügel- und Längsdehnungen, womit der kombinierte Mechanismus direkt aus dem zu Beginn dieses Abschnittes besprochenen Längsmechanismus abgeleitet werden kann. Es gilt im allgemeinen folgende Gesetzmässigkeit.

Bei einem kombinierten Mechanismus kommen alle ausser höchstens drei Gurtstäben ins Fließen. Zudem fließen die Bügel in jenen Querschnittscheiben, die sich an einen fließenden Gurtstab anschliessen.

Ausnahmen, wo die Bügel auch in einer neben einem fließenden Gurtstab liegenden Scheibe starr bleiben, sind ziemlich häufig. Wird nämlich in einzelnen Querschnittscheiben eine der beiden Umlagerungsgrenzen $|\tan \alpha_k| = 0,5$ bzw. $2,0$ erreicht, so gilt die Koppelung der Bügel- und Längsdehnungen nicht mehr über den gesamten Querschnitt. Dies ist immer der Fall, wenn die Querschnittscheiben sehr unterschiedliche Schubbeanspruchungen aufweisen, wofür jener Grenzfall typisch ist, bei dem die Schubresultierende einer einzelnen Querschnittscheibe verschwindet.

Bild 59

Mit dem Hinweis auf die zahlreichen Spezialfälle, welche sich aufgrund der beschränkten Diagonalenneigung (siehe oben) ergeben, kann die Besprechung der kombinierten Mechanismen als abgeschlossen betrachtet werden.

Zusammenstellung der Ergebnisse:

Nach der Beschreibung der verschiedenen Querschnitts-Mechanismen scheint eine Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse zwecks besserer Uebersicht angebracht.

1. Beim Erreichen des Querschnittswiderstandes ist entweder ein Längs-, ein Schub- oder ein kombinierter Mechanismus möglich.
2. Bei einem kombinierten Mechanismus kommen die Längs- und die Schubarmierung ins Fließen. Ein Längsmechanismus (Fließen der Längsarmierung) kommt zustande, wenn entweder die Schubbeanspruchung fehlt oder eine starke Schubarmierung lediglich ein Fließen der Gurtstäbe zulässt ($\tan \alpha = 2,0$). Wird hingegen durch

eine starke Längsarmierung ein Fließen der Gurtstäbe verhindert, so tritt ein Schubmechanismus (Fließen der Schubarmierung) ein ($\tan \alpha = 0,5$).

3. Bei einem kombinierten Mechanismus bleiben im Normalfall drei Gurtstäbe starr. Die Bügel bleiben meistens nur in jenen Querschnittscheiben starr, die zwischen zwei starren Gurtstäben liegen.
4. Bei einem Längsmechanismus bleiben neben der Schubarmierung im allgemeinen drei Gurtstäbe starr.
5. Bei einem Schubmechanismus bleiben neben der Längsarmierung normalerweise die Bügel von zwei Querschnittscheiben starr.

Für Spezialfälle und Ausnahmen von diesen Regeln sei auf den vorhergehenden Text verwiesen.

5.6 Praktische Traglastbestimmung

Es wäre ohne weiteres möglich, eines der in den Abschnitten 5.2 und 5.3 erhaltenen nichtlinearen Programme auf irgendeine Art zu linearisieren (Näherung) und dann numerisch zu lösen, doch ist dieser Weg für die gestellte Aufgabe viel zu aufwendig. Im folgenden wird eine einfache Näherungsmethode entwickelt, welche auf der Kenntnis der Querschnitts-Mechanismen basiert.

5.6.1 Prinzipielles Vorgehen

Die in Abschnitt 5.6.2 entwickelte Berechnungsmethode baut auf einem Vorgehen auf, welches in der Plastizitätstheorie zur Lösung linearer Probleme geläufig ist. Dieses Vorgehen soll zur Einführung am Beispiel reiner Längsbeanspruchung kurz erläutert werden.

Für den Spezialfall reiner Längsbeanspruchung ($Q_y = Q_z = T_w = 0$) tritt ein sogenannter Längsmechanismus ein, wie er im vorhergehenden Abschnitt beschrieben ist. Man schätzt nun den wahrscheinlichsten Längsmechanismus und bestimmt den Querschnittswiderstand bzw. den Widerstandsfaktor unter der bewiesenen Voraussetzung, dass mit Annahme von drei Gurtstäben alle ihre

Fliessgrenze erreichen. Die Lösung der Gleichgewichtsbedingungen ergibt dann neben dem Widerstandsfaktor die drei unbekannten Gurtstabkräfte. Sind diese kleiner oder höchstens gleich gross wie ihre Fliesskräfte, so sind die Plastizitätsbedingungen erfüllt und der exakte Wert des Querschnittswiderstandes ist gefunden. Wird jedoch eine dieser Plastizitätsbedingungen verletzt, so hat man eine obere Schranke erhalten. Die Berechnung ist in dem Fall mit einem neu angenommenen Mechanismus zu wiederholen, bis alle Plastizitätsbedingungen erfüllt sind, d.h. bis der exakte Querschnittswiderstand gefunden ist.

Der beschriebene analytische Lösungsweg ist im allgemeinen sehr rasch, da bei den häufig vorkommenden Belastungsfällen und Querschnitten der Bruchmechanismus meist auf Anhieb richtig geschätzt werden kann.

5.6.2 Berechnungsmethode

Im allgemeinen nichtlinearen Fall kann der Querschnittswiderstand nach einer Näherungsmethode bestimmt werden, welche auf dem vorher geschilderten Vorgehen aufbaut. Sie besitzt den Vorteil, einfach und übersichtlich zu sein und trotzdem gute Resultate zu liefern.

Als Basis für die Berechnung dienen die im vorangehenden Abschnitt aufgestellten Regeln für den Längs- und den Schubmechanismus. Es wird absichtlich nicht von einem kombinierten Mechanismus ausgegangen, da für eine auf diese Weise bestimmte Näherungslösung immer mit dem vollständigen Programm, d.h. mit sieben Gleichgewichtsbedingungen gleichzeitig gearbeitet werden müsste. Bei der im folgenden beschriebenen Methode werden die beiden Unterprogramme für die Längs- und die Schubbeanspruchung einzeln gelöst und erst am Schluss miteinander gekoppelt. Die gesamte Berechnung kann in drei Schritte unterteilt werden.

Erster Schritt:

In einem ersten Schritt wird das aus dem Tableau des Bildes 48 herausgelöste und in Bild 60 dargestellte Unterprogramm für die Schubbeanspruchung behandelt.

	1	λ	$Q_2 \dots \dots \dots Q_k \dots \dots \dots Q_n$	
$\lambda =$		1		→ Max
$O =$		$-Q_y$	$\cos\delta_2$	$\cos\delta_k$ $\cos\delta_n$
$O =$		$-Q_z$	$\sin\delta_2$	$\sin\delta_k$ $\sin\delta_n$
$O =$		$-T_w$	r_2	r_k r_n
	1	λ	$ Q_2 $	$ Q_k $ $ Q_n $
$s_2 =$	Q_{f2}		-1	
$\vdots$				
$s_k =$	Q_{fk}			-1
$\vdots$				
$s_n =$	Q_{fn}			-1

Bild 60

In diesem Programm kommen neben dem Widerstandsfaktor λ und den Schubresultierenden Q_k der einzelnen Querschnittscheiben auch noch die in den Fließschubkräften Q_{fk} enthaltenen Diagonalenneigungen α_k als Unbekannte vor, welche eine einfache Lösung des Problems verunmöglichen. Aus diesem Grunde werden die in Wirklichkeit von Scheibe zu Scheibe ändernden Winkel α_k durch eine über den ganzen Querschnitt dem Betrag nach gleich angenommene Diagonalenneigung α ersetzt. Man beschränkt dadurch die volle Umlagerungsmöglichkeit und wird immer eine untere Schranke des Querschnittswiderstandes erhalten, was angesichts der Tatsache, dass sich ein sehr handliches Berechnungsverfahren ergibt, jedoch nicht ins Gewicht fällt.

Mit Einführung einer mittleren Diagonalenneigung α transformieren sich die in (76) angegebenen Schubkräfte zu:

$$\left. \begin{aligned} Q_k &= B_k \cdot \frac{a_k}{t_k} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \bar{Q}_k \cdot \frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|} \\ |Q_k| &= B_k \cdot \frac{a_k}{t_k} \cdot \frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|} = |\bar{Q}_k| \cdot \frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|} \\ Q_{fk} &= B_{fk} \cdot \frac{a_k}{t_k} \cdot \frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|} = \bar{Q}_{fk} \cdot \frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|} \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Weil nach (77) alle Fliess-Schubkräfte Funktionen desselben Winkels α sind, kann die Lösung wie für einen reinen Schubmechanismus erfolgen. Werden die Schubresultierenden in allen ausser zwei Querschnittscheiben A und B durch die betreffenden Fliess-Schubkräfte ersetzt, so erhält man aus den im Tableau des Bildes 60 enthaltenen Gleichgewichtsbedingungen ein reguläres Gleichungssystem.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -Q_y & \cos \delta_A & \cos \delta_B \\ -Q_z & \sin \delta_A & \sin \delta_B \\ -T_w & r_A & r_B \end{bmatrix}}_{[Q]} \cdot \begin{bmatrix} \lambda \\ Q_A \\ Q_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|}$$

Dabei ergibt sich die rechte Seite dieses Gleichungssystems aus den Fliess-Schubkräften der massgebenden Querschnittscheiben ($k=fk$), d.h. aller Querschnittscheiben ausser A und B. Die von ihnen aufgenommenen Schnittkraftanteile an Q_y , Q_z und T_w kommen als Belastungsglieder vor, wobei die Koeffizienten q_1 bis q_3 (vgl. (77)) Abkürzungen der folgenden Summen sind.

$$q_1 = \sum_{k=fk} \bar{Q}_k \cdot \cos \delta_k$$

$$q_2 = \sum_{k=fk} \bar{Q}_k \cdot \sin \delta_k$$

$$q_3 = \sum_{k=fk} \bar{Q}_k \cdot r_k$$

Die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{Bmatrix} \lambda \\ Q_A \\ Q_B \end{Bmatrix} = [Q]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|}$$

sind Funktionen der mittleren Diagonalenneigung α .

$$\lambda = \bar{\lambda} \cdot \frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|} \quad (78)$$

sowie:

$$\begin{aligned} Q_A &= \bar{Q}_A \cdot \frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|} \\ Q_B &= \bar{Q}_B \cdot \frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|} \end{aligned} \quad (79)$$

Wie aus (77) entnommen werden kann, sind die Plastizitätsbedingungen für die Schub-, resp. Bügelkräfte dann erfüllt, wenn die Ungleichungen

$$\begin{aligned} |\bar{Q}_A| &\leq \bar{Q}_{fA} \\ |\bar{Q}_B| &\leq \bar{Q}_{fB} \end{aligned} \quad (80)$$

eingehalten werden.

Zweiter Schritt:

In diesem zweiten Schritt wird der Spannungszustand in Stablängsrichtung untersucht. Dabei sind selbstverständlich auch die aus der Schubbeanspruchung resultierenden Längskräfte zu berücksichtigen.

$$Z_k = |Q_k| \cdot \frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|} = |\bar{Q}_k| \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (81)$$

Mit den Abkürzungen

$$b_{1\alpha} = \sum_{k=2}^n |\bar{Q}_k|$$
$$b_{2\alpha} = \sum_{k=2}^n |\bar{Q}_k| \cdot y_k$$
$$b_{3\alpha} = \sum_{k=2}^n |\bar{Q}_k| \cdot z_k$$
$$b_{4\alpha} = \sum_{k=2}^n |\bar{Q}_k| \cdot \omega_k$$

erhält man aus den Gleichgewichts- und Plastizitätsbedingungen für die Längskräfte (siehe Tableau des Bildes 48) folgendes Programm für den zu maximierenden Widerstandsfaktor λ .

	1	λ	Z_1		Z_i		Z_m	
$\lambda =$		1						→ Max
$0 =$	$-b_{1\alpha} \cdot \frac{1}{\text{tg}^2 \alpha}$	$-N$	1		1		1	
$0 =$	$-b_{2\alpha} \cdot \frac{1}{\text{tg}^2 \alpha}$	$-M_y$	y_1		y_i		y_m	
$0 =$	$-b_{3\alpha} \cdot \frac{1}{\text{tg}^2 \alpha}$	$-M_z$	z_1		z_i		z_m	
$0 =$	$-b_{4\alpha} \cdot \frac{1}{\text{tg}^2 \alpha}$	$-M_\omega$	ω_1		ω_i		ω_m	
$s_1 =$	Z_{f1}		-1					
.....								
$s_i =$	Z_{fi}				-1			
.....								
$s_m =$	Z_{fm}						-1	

Bild 61

Die Lösung dieses Programmes kann wie für einen reinen Längsmechanismus erfolgen, indem alle ausser drei Gurtstäben D, E und F ihre Fließkräfte erreichen. In diesem Fall ergibt sich aus den vier Gleichgewichtsgleichungen im Tableau des Bildes 61 ein Gleichungssystem von folgender Form.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -N & 1 & 1 & 1 \\ -M_y & y_D & y_E & y_F \\ -M_z & z_D & z_E & z_F \\ -M_\omega & \omega_D & \omega_E & \omega_F \end{bmatrix}}_{[M]} \cdot \begin{bmatrix} \lambda \\ Z_D \\ Z_E \\ Z_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 \\ -b_2 \\ -b_3 \\ -b_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1\alpha} \\ b_{2\alpha} \\ b_{3\alpha} \\ b_{4\alpha} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Als Belastungsglieder kommen neben $b_{1\alpha}$ bis $b_{4\alpha}$, welche durch die Schubbeanspruchung bedingt sind, die Ausdrücke b_1 bis b_4 vor. Sie resultieren aus den fließenden Gurtstäben ($i=fi$) und drücken die von ihnen aufgenommenen Schnittkraftanteile an N , M_y , M_z und M_ω aus.

$$b_1 = \sum_{i=fi} Z_i$$

$$b_2 = \sum_{i=fi} Z_i \cdot y_i$$

$$b_3 = \sum_{i=fi} Z_i \cdot z_i$$

$$b_4 = \sum_{i=fi} Z_i \cdot \omega_i$$

Wie im ersten Schritt sind auch hier die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ Z_D \\ Z_E \\ Z_F \end{bmatrix} = [M]^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} -b_1 \\ -b_2 \\ -b_3 \\ -b_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1\alpha} \\ b_{2\alpha} \\ b_{3\alpha} \\ b_{4\alpha} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \right)$$

Funktionen der mittleren Diagonalenneigung α . Sie können wie folgt angeschrieben werden:

$$\lambda = \lambda_0 - \lambda_\alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (82)$$

und

$$\begin{aligned} Z_D &= Z_{D0} + Z_{D\alpha} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \\ Z_E &= Z_{E0} + Z_{E\alpha} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \\ Z_F &= Z_{F0} + Z_{F\alpha} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \end{aligned} \quad (83)$$

Für den Spezialfall reiner Längsbeanspruchung ($Q_y = Q_z = T_w = 0$) verschwinden in diesen Ausdrücken jeweils die zweiten Glieder, welche die aus der Schubbeanspruchung resultierenden Anteile darstellen. Somit entspricht λ_0 dem für $Q_y = Q_z = T_w = 0$ gültigen Widerstandsfaktor λ .

Dritter Schritt:

Nun braucht man nur noch die im ersten und zweiten Schritt gelösten Unterprogramme miteinander zu koppeln. Im Falle eines kombinierten Mechanismus müssen die beiden für den Widerstandsfaktor λ erhaltenen Ausdrücke (78) und (82) übereinstimmen.

$$\bar{\lambda} \cdot \frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|} = \lambda_0 - \lambda_{\alpha} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Die Verschmelzung der beiden Unterprogramme ist damit vollzogen. Aus der obigen Gleichung lässt sich die bis anhin unbekannte Diagonalenneigung α bestimmen,

$$\frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|} = - \frac{\bar{\lambda}}{2 \cdot \lambda_{\alpha}} + \sqrt{\left(\frac{\bar{\lambda}}{2 \cdot \lambda_{\alpha}}\right)^2 + \frac{\lambda_0}{\lambda_{\alpha}}} \quad (84)$$

wobei folgende Begrenzung des Winkels α zu beachten ist.

$$0,5 \leq \frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|} \leq 2,0 \quad (85)$$

Bewegt sich die Diagonalenneigung α innerhalb der angegebenen Grenzen, so tritt ein kombinierter Mechanismus ein. Die Gleichungen (78) und (82) liefern dann denselben Widerstandsfaktor λ . Kommt hingegen eine der beiden Umlagerungsgrenzen ins Spiel, so entwickelt sich die Richtigkeit dieser Grenzen vorausgesetzt, entweder ein Längs- oder ein Schubmechanismus. Dementsprechend werden sich die aus (78) und (82) erhaltenen Widerstandsfaktoren unterscheiden. Massgebend ist der kleinere der beiden Werte, so dass in jedem Falle folgende Beziehung gilt.

$$\lambda = \operatorname{Min.} \left\{ \begin{array}{l} \bar{\lambda} \cdot \frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|} \\ \lambda_0 - \lambda_{\alpha} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \end{array} \right\} \quad (86)$$

Damit hat man, falls auch die nach (83) zu ermittelnden Gurtstabkräfte die Plastizitätsbedingungen erfüllen, den Bruchwiderstand des Querschnittes gefunden.

Spezialfall reiner Schubbeanspruchung:

Für den Fall $N = M_y = M_z = M_\omega = 0$ ist das für die Längsbeanspruchung gültige Programm in Bild 61 wie folgt umzuschreiben:

	1	$\frac{1}{\text{tg}^2\alpha}$	Z_1		Z_i		Z_m	
$\frac{1}{\text{tg}^2\alpha} =$		1						→ Max
0 =		$-b_{1\alpha}$	1		1		1	
0 =		$-b_{2\alpha}$	y_1		y_i		y_m	
0 =		$-b_{3\alpha}$	z_1		z_i		z_m	
0 =		$-b_{4\alpha}$	ω_1		ω_i		ω_m	
$s_1 =$	Z_{f1}		-1					
.....								
$s_i =$	Z_{fi}				-1			
.....								
$s_m =$	Z_{fm}						-1	

Bild 62

Die Zielfunktion $\frac{1}{\text{tg}^2\alpha} \rightarrow$ Maximum ist gleichbedeutend mit der Frage nach dem grössten Widerstandsfaktor λ , denn der Betrag der Schubbeanspruchung (λ) ist nach Gleichung (78) eine direkte Funktion von $\frac{1}{|\text{tg}\alpha|}$ und damit von $\frac{1}{\text{tg}^2\alpha}$. Physikalisch gesehen bedeutet dies, dass nach der flachsten Diagonalenneigung α gesucht wird, welche aufgrund der vorhandenen Längsarmierung noch möglich ist.

Bei genau gleichem Vorgehen wie bei einem reinen Längsmechanismus, wo alle ausser drei Gurtstäben D, E und F ihre Fließsgrenze erreichen, führt das angegebene Programm zu einem linearen Gleichungssystem.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -b_{1\alpha} & 1 & 1 & 1 \\ -b_{2\alpha} & y_D & y_E & y_F \\ -b_{3\alpha} & z_D & z_E & z_F \\ -b_{4\alpha} & \omega_D & \omega_E & \omega_F \end{bmatrix}}_{[M_Q]} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \\ z_D \\ z_E \\ z_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 \\ -b_2 \\ -b_3 \\ -b_4 \end{bmatrix}$$

oder

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \\ z_D \\ z_E \\ z_F \end{bmatrix} = [M_Q]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -b_1 \\ -b_2 \\ -b_3 \\ -b_4 \end{bmatrix}$$

Wie man sieht, lässt sich die Diagonalenneigung α direkt aus diesem Gleichungssystem bestimmen. Kennt man die Diagonalenneigung, so ist der Widerstandsfaktor gegeben,

$$\lambda = \bar{\lambda} \cdot \frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|} \quad (87)$$

wobei der Umlagerungswinkel α wie folgt zu begrenzen ist.

$$\frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|} \leq 2,0 \quad (88)$$

Erreicht die Funktion $\frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|}$ einen Wert, welcher die untere Grenze 0,5 unterschreitet, so ist der berechnete Wert und nicht der Grenzwert 0,5 in Gleichung (87) einzusetzen, weil sonst - infolge der im Tableau des Bildes 62 enthaltenen Annahme fließender Bügel (erster Schritt) - die aus der Schubbeanspruchung resultierenden Längskräfte nicht mehr aufgenommen werden könnten.

Somit entfällt für eine reine Schubbeanspruchung die Kontrolle der Umlagerungsgrenze $\frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|} \geq 0,5$ bei der numerischen Bestimmung des Querschnitts-

widerstandes. Liegt der berechnete Wert unter 0,5, so ist lediglich daran zu denken, dass die Bügel wegen der in Wirklichkeit beschränkten Diagonalenneigung α ihre Fließgrenze nicht mehr erreichen.

5.6.3 Numerisches Beispiel

Zur Illustration des vorher beschriebenen Lösungsweges wird folgendes Beispiel durchgerechnet.

Gegeben:

Querschnitt:

Bild 63

Fliesskräfte der Armierung:

$$Z_{f1} = Z_{f9} = 2 \cdot Z_f$$

$$Z_{f3} = Z_{f5} = Z_{f7} = Z_f$$

$$\frac{B_{fk}}{t_k} = \frac{0,20}{a} \cdot Z_f \quad \text{für alle } k$$

Schnittkräfte:

Bild 64

Grösse resp. Verhältnis der Schnittkräfte:

$M_z = Z_f \cdot a$	$Q_z = 0,10 \cdot Z_f$
$M_w = Z_f \cdot a^2$	$T_w = 0,10 \cdot Z_f \cdot a$

Gesucht: Plastischer Querschnittswiderstand $\lambda \cdot (M_z, M_w, Q_z, T_w)$

Koordinaten:

Bild 65

Erster Schritt:

Annahme eines Schubmechanismus:

$$\bar{Q}_6 = \bar{Q}_{f6} = B_{f6} \cdot \frac{a_6}{t_6} = 0,20 \cdot \sqrt{5} \cdot Z_f$$
$$\bar{Q}_8 = \bar{Q}_{f8} = B_{f8} \cdot \frac{a_8}{t_8} = 0,40 \cdot Z_f$$

Bild 66

→

$$q_1 = \sum_{k=fk} \bar{Q}_k \cdot \cos \delta_k = 0,40 \cdot Z_f$$

$$q_2 = \sum_{k=fk} \bar{Q}_k \cdot \sin \delta_k = 0,60 \cdot Z_f$$

$$q_3 = \sum_{k=fk} \bar{Q}_k \cdot r_k = 0,80 \cdot Z_f \cdot a$$

Gleichgewichtsbedingungen für die Schubkräfte:

$$\begin{aligned} Q_4 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} &= - 0,40 \cdot Z_f \cdot \frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|} \\ - \lambda \cdot 0,10 \cdot Z_f - Q_2 - Q_4 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} &= - 0,60 \cdot Z_f \cdot \frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|} \\ - \lambda \cdot 0,10 \cdot Z_f \cdot a + Q_2 \cdot 2a &= - 0,80 \cdot Z_f \cdot a \cdot \frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|} \end{aligned}$$

→

$$\lambda = \bar{\lambda} \cdot \frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|} = 8 \cdot \frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|}$$

$$Q_2 = \bar{Q}_2 \cdot \frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|} = 0$$

$$Q_4 = \bar{Q}_4 \cdot \frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|} = 0,20 \cdot \sqrt{5} \cdot Z_f \cdot \frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|}$$

Plastizitätsbedingungen für die Bügel:

$$\left. \begin{aligned} |\bar{Q}_2| &= 0 < \bar{Q}_{f2} = 0,40 \cdot Z_f \\ |\bar{Q}_4| &= 0,20 \cdot \sqrt{5} \cdot Z_f = \bar{Q}_{f4} = 0,20 \cdot \sqrt{5} \cdot Z_f \end{aligned} \right\} \text{ i.O.}$$

Zweiter Schritt:

Längsbeanspruchung aus Q_k für $\frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|} = 1$:

$$b_{1\alpha} = \sum_{k=2}^n |\bar{Q}_k| = 1,294 \cdot Z_f$$

$$b_{2\alpha} = \sum_{k=2}^n |\bar{Q}_k| \cdot y_k = 0,80 \cdot Z_f \cdot a$$

$$b_{3\alpha} = \sum_{k=2}^n |\bar{Q}_k| \cdot z_k = 1,247 \cdot Z_f \cdot a$$

$$b_{4\alpha} = \sum_{k=2}^n |\bar{Q}_k| \cdot \omega_k = 0,80 \cdot Z_f \cdot a^2$$

Annahme eines Längsmechanismus:

$$Z_3 = Z_{f3} = Z_f$$

$$Z_9 = Z_{f9} = 2 \cdot Z_f$$

Bild 67

→

$$b_1 = \sum_{i=fi} Z_i = 3 \cdot Z_f$$

$$b_2 = \sum_{i=fi} Z_i \cdot y_i = 2 \cdot Z_f \cdot a$$

$$b_3 = \sum_{i=fi} Z_i \cdot z_i = 7 \cdot Z_f \cdot a$$

$$b_4 = \sum_{i=fi} Z_i \cdot \omega_i = 8 \cdot Z_f \cdot a^2$$

Gleichgewichtsbedingungen für die Längskräfte:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 \cdot a & 0 & 2 \cdot a \\ -Z_f \cdot a & 3 \cdot a & 0 & a \\ -Z_f \cdot a^2 & -4 \cdot a^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[M]} \cdot \begin{bmatrix} \lambda \\ Z_1 \\ Z_5 \\ Z_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \cdot Z_f \\ -2 \cdot Z_f \cdot a \\ -7 \cdot Z_f \cdot a \\ -8 \cdot Z_f \cdot a^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,294 \cdot Z_f \\ 0,80 \cdot Z_f \cdot a \\ 1,247 \cdot Z_f \cdot a \\ 0,80 \cdot Z_f \cdot a^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$[M]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4 \cdot Z_f \cdot a} & \frac{-1}{2 \cdot Z_f \cdot a} & \frac{-1}{2 \cdot Z_f \cdot a^2} \\ 0 & \frac{-1}{16 \cdot a} & \frac{1}{8 \cdot a} & \frac{-1}{8 \cdot a^2} \\ 1 & \frac{-3}{8 \cdot a} & \frac{-1}{4 \cdot a} & \frac{1}{4 \cdot a^2} \\ 0 & \frac{7}{16 \cdot a} & \frac{1}{8 \cdot a} & \frac{-1}{8 \cdot a^2} \end{bmatrix}$$

→

$$\lambda = \lambda_0 - \lambda_\alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = 7 - 0,824 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$Z_1 = Z_{10} + Z_{1\alpha} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = Z_f \cdot (0,25 + 0,006 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha})$$

$$Z_5 = Z_{50} + Z_{5\alpha} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = Z_f \cdot (-2,50 + 0,882 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha})$$

$$Z_7 = Z_{70} + Z_{7\alpha} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = Z_f \cdot (-0,75 + 0,406 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha})$$

Dritter Schritt:

Mittlere Diagonalenneigung:

$$\frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|} = -\frac{\bar{\lambda}}{2 \cdot \lambda_\alpha} + \sqrt{\left(\frac{\bar{\lambda}}{2 \cdot \lambda_\alpha}\right)^2 + \frac{\lambda_0}{\lambda_\alpha}} =$$

$$= -\frac{8}{2 \cdot 0,824} + \sqrt{\left(\frac{8}{2 \cdot 0,824}\right)^2 + \frac{7}{0,824}}$$

$$\frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|} = 0,808$$

=====

Kontrolle der Diagonalenneigung:

$$0,5 \leq \frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|} \leq 2,0$$

i.O.

Resultat:

$$\lambda = \bar{\lambda} \cdot \frac{1}{|\operatorname{tg} \alpha|} = 6,46$$

$$\lambda = \lambda_0 - \lambda_\alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = 6,46$$

$$\lambda = 6,46$$

=====

Plastizitätsbedingungen für die Gurtstäbe:

$$Z_1 = 0,25 \cdot Z_f < Z_{f1} = 2 \cdot Z_f$$

$$Z_5 = -1,92 \cdot Z_f < Z_{f5} = Z_f$$

$$Z_7 = -0,48 \cdot Z_f < Z_{f7} = Z_f$$

i.O.

5.7 Anwendungsgrenzen

Das angenommene Bruchmodell gilt nur für unterarmierte Querschnitte, deren Bruchwiderstand durch das Fließen der Armierung bestimmt wird. Dies setzt eine entsprechende konstruktive Ausbildung der Tragwerke voraus, welche ein lokales Versagen wie z.B. ein Verankerungsbruch oder ein Ausbrechen der Betondiagonalen in den Querschnittsecken ausschliesst. Ausserdem ist darauf zu achten, dass weder der Beton für ein Versagen massgebend wird, noch die Armierung beim ersten Anriss des Betons durchreisst. Derartige Spröddbrüche sind zu vermeiden.

- a) Bruch bei Bildung der ersten Risse durch Zerreissen der Armierung.
- b) Stauchungsbruch eines auf Druck beanspruchten Gurtstabes vor dem Fließen der Armierung.
- c) Stauchungsbruch der Betondruckdiagonalen vor dem Fließen der Armierung.

Um ein Zerreissen der Armierung beim Auftreten der ersten Betonrisse zu

verhindern, muss die beim Reißen freiwerdende Energie durch die Armierung aufgenommen werden können. Da sich Stahlbeton bis zum Eintreten der Risse ungefähr wie ein homogener elastischer Baustoff verhält, lässt sich die erforderliche Minimalarmierung mit Hilfe der Elastizitätstheorie bestimmen. Eine Größenordnung gibt die bekannte Minimalarmierung für reine Biegung.

Für das Versagen druckbeanspruchter Gurtstäbe sind die mitwirkenden Betondruckzonen von Bedeutung. Ihre Ausdehnung ist, weil der Bruch durch Stahlfließen verursacht werden soll, derart zu beschränken, dass die für den Mechanismus massgebenden Gurtstäbe tatsächlich ins Fließen kommen ($\epsilon_x = \frac{\sigma_f}{E_e} \approx 3\text{‰}$). Als Grenzfall interessiert jener Zustand, bei dem gleichzeitig mit Beginn des Mechanismus die Bruchgrenze eines auf Druck beanspruchten Gurtstabes erreicht wird. Die Randbruchstauchung des Betons kann dabei wie im Falle reiner Biegung auf etwa $\epsilon_x = -3\text{‰}$ fixiert werden, so dass man für den erwähnten Grenzzustand folgende Dehnungs- und Spannungsverteilung erhält.

Bild 68

Mit Hilfe dieser Skizze, worin β_p die rechnerische Prismendruckfestigkeit des Betons bedeutet, lassen sich die Druckbruchkräfte der Gurtstäbe abschätzen. Sie dürfen, wenn ein Versagen des Betons vor dem Fließen der massgebenden Zugarmierung ausgeschlossen werden soll, bei keinem Gurtstab überschritten werden.

$$\begin{aligned}
 Z_{Di} &= -Z_i + \frac{1}{2} \cdot \left(\left| \frac{Q_{i-1}}{\operatorname{tg} \alpha_{i-1}} \right| + \left| \frac{Q_{i+1}}{\operatorname{tg} \alpha_{i+1}} \right| \right) \leq \\
 &\leq Z_{ui} = \underbrace{0,75 \cdot F_{Di} \cdot \beta_p}_{\text{Anteil Beton} \quad (>0)} + \underbrace{Z_{fi}}_{\text{Anteil Stahl} \quad (>0)}
 \end{aligned} \tag{89}$$

Da sich die Druckzone F_{Di} auf die angrenzenden Querschnittscheiben erstreckt, wird sie nicht nur durch die Gurtstabkraft Z_i sondern auch durch die Schubkräfte der Querschnittscheiben beansprucht. Für die dargestellte Ausdehnung der Druckzone erhält man infolge Schub eine zusätzliche Beanspruchung des Betons in Längsrichtung, wie sie in (89) angegeben ist. Sie erklärt sich aus der Wirkungsweise einer schubbeanspruchten Querschnittscheibe (Abschnitt 5.1).

Führt die Kontrolle der beim Widerstandsfaktor λ vorhandenen Druckkräfte $Z_{Di}(\lambda)$ zu einer Verletzung der Ungleichung (89), so muss mit einem vorzeitigen Sprödbbruch gerechnet werden. Der Widerstandsfaktor λ , welcher unter Voraussetzung duktilen Bruchverhaltens (Stahlfliessen) ermittelt wurde, liegt dann über dem effektiven Wert λ_{eff} , da die massgebende Längszugarmierung bei Einhaltung der Bedingung (89) nicht mehr ins Fliessen kommen kann. In diesem Falle lässt sich der Querschnittswiderstand folgendermassen abschätzen,

$$\begin{aligned}
 \lambda_{eff} &\approx \lambda \cdot \left| \frac{Z_{ui}}{Z_{Di}(\lambda)} \right|_{\min} \\
 \text{für } Z_{Di}(\lambda) &\geq Z_{ui}
 \end{aligned} \tag{90}$$

indem der Widerstandsfaktor λ derart vermindert wird, bis der am meisten gefährdete Gurtstab i seine Bruchgrenze Z_{ui} nicht mehr überschreitet. Für λ_{eff} ist damit neben den Gleichgewichts- und Plastizitätsbedingungen auch die Bedingung (89) erfüllt.

In diesem Zusammenhang ist darauf hinzuweisen, dass die anfallende Druckbeanspruchung nach Abschnitt 5.5 und 5.6 (duktiler Bruchverhalten) innerhalb dreier Gurtstäbe aufgenommen werden muss, da bei einem Längsmechanismus alle andern Gurtstäbe fliessen. Aus diesem Grunde darf der Bereich der erwähnten drei Gurtstäbe nicht zu klein oder, was auf dasselbe herauskommt, die Anzahl der für die Berechnung angenommenen Gurtstäbe nicht zu gross gewählt werden.

Man sieht aus dem folgenden Beispiel sofort, dass bei einer grossen Anzahl

Bild 69

von Gurtstäben die Bedingung (89) viel eher massgebend wird, was bei der zur Verfügung stehenden Berechnungsmethode (Abschnitt 5.6) keineswegs erwünscht ist. In normalen Fällen dürfte man optimale Werte erhalten, wenn für den Hauptquerschnitt (vgl. Abschnitt 2.4) vier bis sechs Gurtstäbe angenommen werden.

Um ein Versagen der Betondruckdiagonalen vor einem Fliessen der Armierung zu verhindern, wird wie im Falle des Querkraftschubes mit einer oberen Schubspannungsgrenze τ_u gearbeitet. Für dünnwandige Querschnitte entspricht dieser Wert etwa der oberen Schubspannungsgrenze eines auf Schub beanspruchten Balkensteges. Es gilt:

$$\tau_k = \frac{Q_k}{a_k \cdot d_k} \leq \tau_u \quad (91)$$

Wird diese obere Schubspannungsgrenze beim Erreichen des Widerstandsfaktors λ irgendwo überschritten, so ergibt sich eine ähnliche Abminderung des Widerstandsfaktors gegenüber dem berechneten Wert λ wie im Falle eines Gurtstab-Stauchungsbruches.

$$\lambda_{\text{eff}} \approx \lambda \cdot \left| \frac{\tau_u}{\tau_k(\lambda)} \right|_{\min} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{für } \tau_k(\lambda) \geq \tau_u \end{array} \right\} \quad (92)$$

Für gedrungene Querschnitte, welche bisher nicht behandelt wurden, scheinen abschliessend einige Bemerkungen angebracht. Bei solchen Querschnitten kann die Plattenwirkung nicht mehr ohne weiteres vernachlässigt werden. Sie beeinflusst das Tragverhalten, indem sie zu einer Erhöhung des Bruchwider-

standes führt. Wird ihr Anteil am Bruchwiderstand für die Bemessung ausgenutzt, so treten bei gedrungener Querschnittsausbildung schon im Gebrauchszustand grosse Risse auf, welche auf die ungleiche Dehnungsverteilung über die Querschnittsdicke (Plattenverformung) zurückzuführen sind. Das heisst, dass sich die Plattenwirkung, obwohl sie den Bruchwiderstand beachtlich erhöhen kann, ungünstig auf das Verformungs- und Rissverhalten im Gebrauchszustand auswirkt. Aus diesem Grunde darf die Plattenwirkung nach den bisherigen Untersuchungen (z.B. [12]) nur bei eingehender Prüfung des Gebrauchszustandes voll in Rechnung gestellt werden. Wird sie für eine Bemessung vernachlässigt, so erhält man in jedem Falle neben einer ausreichenden Bruchsicherheit auch ein vernünftiges Verformungs- und Rissverhalten im Gebrauchszustand.

Infolge der Plattenverformung treten bei gedrungenen Querschnitten sehr hohe Betonbeanspruchungen auf. So werden die Druck-Gurtstäbe und die Betondruckdiagonalen neben der zentrischen Normalkraft nach dem Fachwerkmodell auch durch eine Krümmung beansprucht. Demzufolge spielen die aus der Plattenverformung resultierenden Betonstauchungen eine bedeutende Rolle für die Art des eintretenden Bruches. Wie leicht einzusehen ist, wird für bestimmte Stahldehnungen (z.B. Fliessbeginn) die Verdrehung und damit die Plattenverformung umso kleiner, je weiter die einzelnen Querschnittscheiben auseinander liegen, d.h. je grösser die Aussenabmessungen eines Querschnittes sind. Die durch die Plattenverformung bedingten Betonrandstauchungen vergrössern sich mit zunehmender Wandstärke, so dass die Gedrungtheit eines Querschnittes, welche durch das Verhältnis der Wandstärke zu den Abmessungen des Hauptquerschnittes ausgedrückt werden kann, eine Grössenordnung der zu erwartenden Betonbeanspruchung gibt.

Bild 70

Reduziert man nun die in Rechnung zu stellende Wandstärke auf ein vernünftiges Mass, z.B.,

$$\left(\frac{d}{b}\right)_{\max} = \frac{1}{8} \quad (93)$$

so trägt man den zusätzlichen Betonbeanspruchungen aus der Plattenverformung auf einfachste Weise Rechnung. Bei gedrunenen Querschnitten dürfte kein unerwarteter Spröddbruch eintreten, solange die zentrische Beanspruchung unter Verwendung der reduzierten Wandstärke (93) die in (89) und (91) angegebenen Grenzen nicht überschreitet.

ZUSAMMENFASSUNG

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Bestimmung der Traglast von beliebig belasteten Stäben mit dünnwandigen offenen Querschnitten.

Zunächst werden die grundlegenden statischen und kinematischen Beziehungen hergeleitet. Dabei findet man, dass in den Gleichgewichtsbedingungen eine formelle Analogie zwischen Wölb-torsion und Balkenbiegung besteht. Folglich kann für die statischen Beziehungen der Wölb-torsion auf die Biegetheorie von Balken zurückgegriffen werden.

Es wird gezeigt, dass die Bedeutung des Schubmittelpunktes für die Torsion genauso wie diejenige des Schwerpunktes für die Biegung in der Elastizitätstheorie begründet ist. Folglich verliert der Schubmittelpunkt, um den sich ein elastischer Stab bei reiner Torsion verdreht, im plastischen Zustand seine Bedeutung.

Weil die Traglast eines Stabtragwerkes von den Querschnittswiderständen und der Lage der plastifizierten Querschnitte beim Bruchmechanismus abhängt, wird die Bestimmung der Querschnittswiderstände zur eigentlichen Hauptaufgabe, die mit Hilfe der beiden Grenzwertsätze der Plastizitätstheorie gelöst wird.

Zunächst werden Träger aus homogenen isotropen Materialien wie z.B. Stahl untersucht. Der Querschnitt wird zwecks einfacher mathematischer Behandlung in einzelne Elemente unterteilt und deren Fließbedingungen linearisiert. So erhält man den Querschnittswiderstand als Lösung linearer Programme, wobei der statische Grenzwertsatz in Form einer Maximumsaufgabe und der kinematische in Form einer Minimumsaufgabe der linearen Programmierung formuliert werden kann. Da beide Programme wegen ihrer Dualität denselben Querschnittswiderstand liefern, spielt es keine Rolle, welches der beiden Programme zur Lösung der Aufgabe verwendet wird.

Zur Beschreibung des Verhaltens von Stahlbeton- und Spannbetonträgern wird ein räumliches Fachwerkmodell mit den Längseisen als Gurtungen, den Bügeln als Pfosten und den Betondruckdiagonalen als Streben angenommen. Es ergeben sich nach beiden Grenzwertsätzen der Plastizitätstheorie wegen der variablen Neigung der Betondruckdiagonalen nichtlineare Programme, welche zueinander dual sind und demzufolge denselben Querschnittswiderstand liefern. Nach einer eingehenden Beschreibung der möglichen Bruchmechanismen wird eine einfache Näherungsmethode zur Lösung des nichtlinearen Maximumproblems entwickelt. Ein Beispiel veranschaulicht den Lösungsweg und zeigt die Effizienz der angegebenen Methode.

RESUME

Le but de ce travail est la détermination de la charge de rupture des poutres de section ouverte à parois minces soumises à des charges quelconques.

Premièrement les équations fondamentales statiques et cinématiques sont dérivées. Il se trouve dans les relations statiques une analogie mathématique entre la torsion due au gauchissement empêché et la flexion. C'est-à-dire, que les équations statiques pour la torsion due au gauchissement empêché peuvent être formulées selon la théorie de la flexion des barres.

On montre que le centre de cisaillement a pour la torsion la même signification que le centre de gravité pour la flexion dans le domaine élastique. Dans le domaine plastique, le centre de cisaillement déterminant l'axe de rotation du domaine élastique pour la torsion pure n'a plus aucune importance.

La charge de rupture d'une structure dépend des résistances statiques des sections et de la position des sections plastifiées qui forment le mécanisme de rupture. Ainsi la détermination de la résistance statique des sections devient le problème le plus important. Il est résolu par l'application des théorèmes de l'état-limite ultime de plasticité.

Des poutres de matériau homogène et isotrope (p.ex. en acier) sont analysées. Pour la simplification du calcul la section d'une poutre est subdivisée en plusieurs éléments et leurs conditions de fluage sont linéarisées. Par cela la résistance statique est formulée sous forme des programmes linéaires. Le théorème de l'état-limite ultime pour la limite inférieure livre un programme de maximum, le théorème pour la limite supérieure un programme de minimum selon la théorie d'optimisation. Comme les deux programmes montrent une forme duale et donnent la même solution, on peut appliquer n'importe lequel de ces deux théorèmes.

Le comportement des poutres en béton armé et précontraint est simulé au moyen d'un treillis spatial avec l'armature longitudinale comme membrures, les étriers comme montants et des bielles comprimées en béton. A cause de l'inclinaison variable des bielles, les deux théorèmes de plasticité se transforment en programmes nonlinéaires, qui montrent une forme duale et donnent par conséquent la même résistance pour la section. Après une discussion détaillée des mécanismes de rupture, un algorithme approximatif pour la solution du programme selon le théorème de l'état-limite ultime pour la limite inférieure est développé. Un exemple montre l'algorithme et l'efficacité de la méthode développée.

SUMMARY

The aim of this study is the determination of the plastic resistance of arbitrarily loaded beams with thinwalled open cross section.

The basic static and kinematic equations are first derived. Thereby it is shown that a mathematical analogy exists between warping torsion and bending. Hence the bending theory of beams can be used to formulate the static equations for warping torsion of beams with thinwalled open cross sections.

It is shown that both the shear centre and the centroid are meaningful in their application for torsion and bending within the theory of elasticity. However in the plastic range the shear centre, which determines the axis of rotation for pure torsion in the elastic range, has no meaning.

The ultimate load of a structure depends on the plastic resistances of the cross sections and the development of plastic hinges to form a collapse mechanism. Thus the determination of the ultimate capacities of cross sections is of primary importance. This problem is solved by use of lower and upper bound theorem of plasticity.

Beams of homogeneous and isotropic (elastic-ideally plastic) materials such as steel are investigated. In order to simplify the mathematical approach the cross section of a beam is subdivided into several elements and their yield conditions are linearized. The carrying capacity can then be formulated in form of linear programs. The use of the lower bound theorem of plasticity leads to a maximum problem, the use of the upper bound theorem to a minimum problem of linear programming. Since a mathematical duality exists between the two programs they both lead to the same result.

To describe the behavior of reinforced and prestressed concrete beams a space truss model is assumed with the longitudinal bars acting as stringers, the stirrups as vertical ties and the concrete diagonals as inclined struts. Because of the variable inclination of struts the application of the upper and lower bound theorem lead to nonlinear programs. Due to their duality they give the same carrying capacity of a cross section. After a detailed discussion of failure mechanisms a simple approximate method is given for the solution of the nonlinear maximum problem. An example illustrates the algorithm showing the effectiveness of the developed method.

BEZEICHNUNGEN

A	Koordinatenursprung des kartesischen Koordinatensystems x, y, z
A_a	Arbeit der äusseren Kräfte
A_d	Dissipationsarbeit
A_i	Arbeit der inneren Kräfte
B	Ursprung der Querschnittskoordinate s
B_k	Bügelzugkraft in der k -ten Querschnittscheibe
B_{fk}	Fliesskraft eines Bügels der k -ten Querschnittscheibe
D	Bezugspunkt für die Torsionsbelastung
D_k	Resultierende der Betondruckspannungen in den Diagonalen der Querschnittscheibe k
E	Elastizitätsmodul
F	Querschnittsfläche
F_{Di}	Betondruckzone um den druckbruchgefährdeten Gurtstab i (nach Abschnitt 5.7)
ΔF_i	Querschnittsfläche des Elementes i mit der Seitenlänge Δs_i
G	Schubmodul
I_y, I_z	Trägheitsmomente
I_ω	Wölbkonstante
K	Torsionskonstante
M_y, M_z	Biegemomente
M_ω	Wölbmoment
N	Normalkraft
Q_i	Schubresultierende des Elementes i
Q_k	Schubresultierende der k -ten Querschnittscheibe
$\bar{Q}_k$	Schubresultierende für $\operatorname{tg} \alpha_k = 1$
Q_{fk}	Fliessschubkraft der k -ten Querschnittscheibe
$\bar{Q}_{fk}$	Fliessschubkraft für $\operatorname{tg} \alpha_k = 1$
S	Schubfluss ($S = \tau_{xs} \cdot d$)
T	Torsionsmoment
T_s	St. Venant'sches Torsionsmoment

T_w	Wölb-torsionsmoment
Z_i	Zugkraft im Element i, Zugkraft im Gurtstab i
Z_k	aus der Schubbeanspruchung Q_k resultierende Längskraft
Z_{Di}	anfallende Druckkraft im Gurtstab i (nach Abschnitt 5.7)
Z_{fi}	Fliesszugkraft des Gurtstabes i
Z_{ui}	Druckbruchkraft des Gurtstabes i
a_k	Seitenlänge der k-ten Querschnitts-scheibe
b	Aussenabmessung des Querschnittes
c_k	Verformungsparameter der k-ten Querschnitts-scheibe (nominelle Rissdehnung)
d	Wandstärke des Querschnittes
d_k	Betonstärke der k-ten Querschnitts-scheibe
f	Tangente an den Querschnitt
i	Numerierung der Elemente: $i = 1, \dots, m$ (laufend), Numerierung der Gurtstäbe: $i = 1, \dots, m$ (ungerade Zahlen)
k	Numerierung der Querschnitts-scheiben: $k = 2, \dots, n$ (gerade Zahlen)
m_y, m_z, m_w	verteilte Momentenbelastungen infolge der Längsbelastung $\bar{p}_x$
m_x	Torsionsbelastung [mt/m]
p_x	Integral [t/m] der Längsbelastung $\bar{p}_x$
$\bar{p}_x$	Längsbelastung [t/m ²]
p_y, p_z	Querbelastungen [t/m]
r	Abstand der Querschnittstangente f vom Bezugspunkt der Torsionsbelastung
s	Querschnitts-kordinate
s_i, s_k } $s_{i1} \dots s_{i6}$	Schlupfvariablen
t_k	Bügelabstand in der k-ten Querschnitts-scheibe
u, v, w	Verschiebungen des Querschnittes in Richtung der Koordina- tenachsen x, y und z (ohne Schiebungsanteile)
x, y, z	Koordinatenachsen, Koordinaten

α	mittlere Neigung der Betondruckdiagonalen im Fachwerkmodell
α_k	Neigung der in der k-ten Querschnittscheibe liegenden Betondruckdiagonalen
$\beta_{i1} \dots \beta_{i6}$	Verformungsparameter für das Element i
β_p	Prismendruckfestigkeit des Betons
γ	Schiebung ($\gamma = \gamma_{xs}$)
γ_y, γ_z	Schiebung des Querschnittes in Richtung der y-, bzw. z-Axe
γ_ϑ	Drehschiebung des Querschnittes um den Punkt D
δ	Winkel zwischen der Querschnittstangente f und der y-Axe
ϵ	Dehnung
ϵ_B	Bügeldehnung
ϵ_f	Dehnung der Armierung bei Fließbeginn
ϵ_x	Längsdehnung
ϑ	Verdrehung des Querschnittes um den Punkt D (ohne Schiebungsanteil)
λ	Widerstandsfaktor
$\bar{\lambda}, \lambda_o, \lambda_\alpha$	Abkürzungen gemäss Abschnitt 5.6.2
σ	Normalspannung
σ_f	Fließspannung bzw. Streckgrenze der Armierung
σ_x	Längsspannung
τ	Schubspannung ($\tau = \tau_{xs}$)
τ_u	obere Schubspannungsgrenze
ω	sektorielle oder Wölbkoordinate

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Wlassow W.S.: "Dünnwandige elastische Stäbe", Band 1, VEB Verlag für Bauwesen Berlin, 1964.
- [2] Kollbrunner C.F./Basler K.: "Torsion", Springer Verlag Berlin/Heidelberg/New York, 1966.
- [3] Kollbrunner C.F./Hajdin N.: "Dünnwandige Stäbe", Band 1, Springer Verlag Berlin/Heidelberg/New York, 1972.
- [4] Lundgren H.: "Cylindrical Shells", Danish Technical Press Copenhagen, 1949.
- [5] Prager W.: "Probleme der Plastizitätstheorie", Birkhäuser Verlag Basel/Stuttgart, 1955.
- [6] Thürlimann B./Ziegler H.: "Plastische Berechnungsmethoden", Eidgenössische Technische Hochschule (ETH) Zürich, 1963.
- [7] Basler K./Thürlimann B.: "Strength of Plate Girders in Bending", ASCE-Proc. No. 2913, ST6, p. 154 (Aug. 1961).
- [8] Basler K.: "Strength of Plate Girders in Shear", ASCE-Proc. No. 2967, ST7, p. 151 (Oct. 1961).
- [9] Lampert P.: "Bruchwiderstand von Stahlbetonbalken unter Torsion und Biegung", Dissertation Nr. 4445, ETH Zürich, 1970.
- [10] Stiefel E.: "Einführung in die numerische Mathematik", Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart, 1965.
- [11] Künzi H.P./Krelle W.: "Einführung in die mathematische Optimierung", Verlag Industrielle Organisation Zürich, 1969.
- [12] Grob J./Thürlimann B.: "Wölb-torsionsversuche an Stahlbetonbalken mit offenem Querschnitt", Bericht Nr. 6506-6, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, 1974.