An Oscillation theorem for algebraic eigenvalue problems and its applications

Doctoral Thesis**Author(s):**

Sinden, Frank William

Publication date:

1954

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000170997>

Rights / license:

In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

Prom. No. 2322

An oscillation theorem for algebraic eigenvalue problems and its applications

THESIS

PRESENTED TO

**THE SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ZURICH**

FOR THE DEGREE OF

DOCTOR OF MATHEMATICS

BY

Frank W. Sinden

Citizen of the United States of America

Accepted on the recommendation of

Prof. Dr. E. Stiefel and Prof. Dr. M. Plancherel

Zürich 1954

L. Speich, Reproduktionsanstalt, Brandschenkestr. 47/49

ZUSAMMENFASSUNG

Man betrachte die lineare Transformation

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = y_2$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = y_n$$

die bequem dargestellt werden kann durch die Symbole

$$A\mathcal{r} = \mathcal{r}\mathcal{y}.$$

Es sei die Anzahl der Zeichenwechsel in der Folge $\mathcal{r} = x_1, \dots, x_n$ durch $V(\mathcal{r})$ bezeichnet.

Die Matrix A heisst variationsvermindernd, wenn für jedes n -tupel von Zahlen $\mathcal{r} = x_1, \dots, x_n$ die Beziehung

$$V(\mathcal{r}\mathcal{y}) \leq V(\mathcal{r})$$

gilt. *)

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit dem Eigenwertproblem

$$(1) \qquad A\mathcal{r} = \lambda D\mathcal{r},$$

wo A symmetrisch und positiv definit ist, und wo D eine positive Diagonalmatrix ist. **)

*) Gilt $V(\mathcal{r}\mathcal{y}) \geq V(\mathcal{r})$ für jedes $\mathcal{r}$, so heisst A variationsvermehrend.

**) d.h.

$$d_{ij} \begin{cases} = 0, & i \neq j \\ > 0, & i = j \end{cases}$$

Ist A auch noch variationsvermindernd, und sind alle codiagonale Elemente $a_{i,i-1}$, $a_{i,i+1}$ verschieden von Null, dann besitzen die Eigenvektoren und Eigenwerte des Problems (1) eine Reihe interessanter und nützlicher Eigenschaften:

(a) Sämtliche Eigenwerte sind positiv und einfach:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$$

(b) *) Ist $\mathcal{N}_k$ der dem Eigenwert λ_k entsprechende Eigenvektor, so gilt

$$V(\mathcal{N}_k) = k - 1.$$

(c) **) Ist $\mathcal{N} = (u_1, \dots, u_n)$ ein Eigenvektor, so gilt für die Komponenten

$$u_1 \neq 0$$

$$u_i = 0 \quad \text{nur dann, wenn} \quad u_{i-1} u_{i+1} < 0$$

$$u_n \neq 0$$

Die Behauptungen (a) und (b) sind denjenigen des klassischen Sturm-Liouvilleschen Oszillationstheorems in ganz anschaulicher Weise analog.

Prinzip des Beweises. Wenn die Behauptung (c) einmal feststeht, so ist der Beweis von (a) und (b) im Prinzip einfach. Die Eigenwerte sind positiv wegen der positiven Definitheit, und keiner ist mehrfach, denn sonst könnte man durch lineare Kombination einen zugehörigen Eigenvektor mit verschwindender erster (oder letzter) Komponente bilden, was Behauptung (c) widersprechen würde.

*) Allgemeiner gilt folgendes. Ist $\mathcal{M}$ irgendeine Kombination von Eigenvektoren:

$$\mathcal{M} = (c_r \mathcal{N}_r + \dots + c_s \mathcal{N}_s) \quad 1 \leq r \leq s \leq n$$

dann ist $r - 1 \leq V(\mathcal{M}) \leq s - 1$.

**) Einen Vektor mit der Eigenschaft (c) nennen wir einen "inneren" Vektor aus folgendem Grunde. Es existiert im n -dimensionalen Raum dann und nur dann eine Umgebung des Vektors $\mathcal{N}$, in der alle Vektoren dieselbe Wechselzahl wie $\mathcal{N}$ selbst besitzen, wenn $\mathcal{N}$ die Eigenschaft (c) hat. Nach (c) ist also jeder Eigenvektor ein innerer Vektor.

Um (b) zu beweisen, iteriert man nach beiden Richtungen. Ausgehend von einem Vektor $\mathcal{M}_0$, dessen Entwicklung nach Eigenvektoren durch

$$\mathcal{M}_0 = \sum_{i=r}^s c_i \tilde{\mathcal{M}}_i \quad 1 \leq r \leq s \leq n$$

gegeben ist, erhält man durch Iteration mit $B = AD^{-1}$ sowie mit B^{-1} zwei Folgen von Vektoren, die gegen $\tilde{\mathcal{M}}_r$ bzw. $\tilde{\mathcal{M}}_s$ konvergieren:

$$\mathcal{M}_y = B \mathcal{M}_{y-1} \quad \lim \mathcal{M}_y = \tilde{\mathcal{M}}_r$$

$$\mathcal{M}_{-y} = B^{-1} \mathcal{M}_{-y+1} \quad \lim \mathcal{M}_{-y} = \tilde{\mathcal{M}}_s$$

(Dabei müssen die $\mathcal{M}_y$ nach jedem Schritt normiert werden.) Da aber B variationsvermindernd und B^{-1} variationsvermehrend ist, gilt

$$V(\mathcal{M}_y) \leq V(\mathcal{M}_{-y}).$$

Man kann zeigen, dass dies auch im Grenzfall gilt:

$$V(\tilde{\mathcal{M}}_r) \leq V(\tilde{\mathcal{M}}_s).$$

Indem noch gezeigt wird, dass $V(\tilde{\mathcal{M}}_r) \neq V(\tilde{\mathcal{M}}_s)$ für $r \neq s$, ist der Beweis erbracht.

Ist A variationsvermehrend und gelten auch die übrigen Voraussetzungen, dann gilt statt (b) die Behauptung

$$(b^*) \quad V(\tilde{\mathcal{M}}_k) = n - k.$$

Dies lässt sich aus dem Hauptsatz mit Hilfe der sogenannten "Schachbrett-Transformation" herleiten.

Es stellt sich nun die Frage, ob die kritische Voraussetzung, (i.e. dass die Matrix A variationsvermindernd, bzw. -vermehrend sei) praktisch brauchbar ist. Im zweiten Teil der Arbeit wird eine Klasse derartiger Matrizen definiert, welche mehrere für die Praxis wichtige Spezialmatrizen umfasst. Am anschaulichsten (wenn auch etwas ungenau) kann

diese Klasse vielleicht folgendermassen erklärt werden. Man betrachte den Differentialoperator

$$(2) \quad z(x) = \frac{d}{dx} \left[p_{\mu-1} \frac{d}{dx} \left[\dots \left[p_2 \frac{d}{dx} \left[p_1 \frac{dy}{dx} \right] \right] \dots \right] \right]$$

wo μ eine gerade Zahl ist, und wo $p_1(x), \dots, p_{\mu-1}(x)$ positive, genügend differenzierbare Funktionen sind. Ist ferner

$$p_i(x) = p_{\mu-i}(x) \quad i = 1, 2, \dots$$

so ist (2) selbstadjungiert. Abgesehen von diesen Einschränkungen dürfen die $p_i(x)$ beliebig gewählt werden. Man denke sich den Operator (2) in μ Etappen zerlegt:

$$\begin{aligned} z_1 &= p_1 y' \\ z_2 &= p_2 z_1' \\ &\dots\dots\dots \\ z &= z_{\mu-1}' \end{aligned}$$

An den Randpunkten $x = a$ und $x = b$ sei vorgeschrieben, dass von den μ Funktionen $y, z_1, \dots, z_{\mu-1}$ genau die Hälfte verschwinden. Es folgt nun aus dem Rolleschen Satz, dass im Intervall (a, b) die Funktion $z(x)$ nie weniger Nullstellen besitzt als $y(x)$. Der Operator (2) ist also in diesem Sinne variationsvermehrend. Konstruiert man den Differenzenoperator, dem (2) entspricht (unter Berücksichtigung der oben erwähnten Randbedingung), so ist der resultierende Matrixoperator tatsächlich variationsvermehrend. Diese Matrix hängt von einer Anzahl beliebiger Grössen ab, die von den beliebigen Funktionen $p_i(x)$ herkommen.

Das Eigenwertproblem des transversal schwingenden, inhomogenen Stabes stellt wohl das wichtigste Anwendungsgebiet dieser Ideen dar. Dieses Problem wird daher im Detail besprochen, und insbesondere wird in einem Anhang der mehrfach gestützte, sowie der mehrfach gelenkig gegliederte Stab behandelt.

Der Satz ist besonders nützlich bei der Berechnung von oberen und unteren Schranken für die Eigenwerte. Man betrachte wiederum das Eigenwertproblem (1). Von einem Versuchsvektor λ_0 ausgehend, bilde man die Vektoren

$$(u_1, \dots, u_n) = \mathcal{M} = A \lambda_0$$

$$(v_1, \dots, v_n) = \mathcal{M}^0 = D \lambda_0$$

und die Quotienten

$$q_i = \frac{u_i}{v_i}.$$

Nach dem Einschliessungssatz von L. COLLATZ liegt (mindestens) ein Eigenwert zwischen den Schranken $\text{Max}(q_i)$ und $\text{Min}(q_i)$. Die Nummer des eingeschränkten Eigenwerts, d.h. seine relative Lage im Spektrum, ist noch unbekannt. Ist aber A variationsvermindernd (bzw. -vermehrend) und gelten auch die übrigen Voraussetzungen, so kann diese Auskunft ohne weiteres ermittelt werden. Man hat in diesem Falle nur die Zeichenwechsel des Versuchsvektors λ_0 zu zählen. Ist $V(\lambda_0) = k$, so liegt der $(k+1)$ -te (bzw. der $(n-k)$ -te) Eigenwert zwischen den Schranken. *)

*) Dies gilt mit Sicherheit nur dann, wenn $\text{Min}(q_i) > 0$, was allerdings bei brauchbaren Schranken fast immer der Fall sein wird.