Die Methode der Antwortspektren aus der Sicht der probabilistischen Tragwerksdynamik

Working Paper**Author(s):**

Pfaffinger, Dieter

Publication date:

1979

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000217513>

Rights / license:

In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

Originally published in:

Bericht / Institut für Baustatik und Konstruktion ETH Zürich 90

**Die Methode der Antwortspektren
aus der Sicht der probabilistischen
Tragwerksdynamik**

Dieter D. Pfaffinger

Mai 1979
Bericht Nr. 90

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Pfaffinger, Dieter D.:

Die Methode der Antwortspektren aus der Sicht der probabilistischen Tragwerksdynamik/
Dieter D. Pfaffinger. - Basel, Stuttgart : Birkhäuser, 1979.

(Bericht/Institut für Baustatik und Konstruktion ETH Zürich; Nr. 90)

ISBN 3-7643-1121-5

Nachdruck verboten.

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen und
der Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm,
vorbehalten.

© Birkhäuser Verlag Basel · Boston · Stuttgart, 1979

ISBN 3-7643-1121-5

Die Methode der Antwortspektren aus der Sicht der probabilistischen Tragwerksdynamik

von

Dr. sc. techn. Dieter D. Pfaffinger

Institut für Baustatik und Konstruktion
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

Zürich
Mai 1979

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Vorwort	
1. EINLEITUNG	1
2. METHODE DER ANTWORTSPEKTREN	3
2.1 Definitionen und Eigenschaften	3
2.2 Diskretisierte Tragwerke	10
2.3 Beurteilung	15
3. PROBABILISTISCHE TRAGWERKSDYNAMIK	17
3.1 Zufallsprozesse	17
3.2 Tragwerksantwort	27
3.3 Beurteilung	40
4. METHODISCHE ZUSAMMENHAENGE	42
4.1 Antwortspektrum und Leistungsspektrum	42
4.2 Erwartete Extremwerte der Tragwerksgrößen	50
4.3 Beispiel	55
5. SCHLUSSFOLGERUNGEN	62
NOMENKLATUR	64
LITERATUR	67

Vorwort

Die Behandlung allgemeiner Tragwerke unter dynamischen Belastungen ist heute dank leistungsfähiger Computer und ausgebauter numerischer Methoden möglich. Da dynamische Untersuchungen aber selbst bei vorausgesetztem linearen Verhalten meist wesentlich aufwendiger sind als statische Berechnungen, spielen Näherungsverfahren hier eine grosse Rolle. Bei schockartiger Belastung ist die Methode der Antwortspektren heute die meistverwendete Näherungsmethode zur Bestimmung der Extremwerte der Verformungen und Schnittgrössen des Tragwerks. Haben die dynamischen Lasten den Charakter eines Zufallsprozesses wie beispielsweise Wind-, Wellen- oder auch Erdbebenbelastung, so liefert die probabilistische Tragwerksdynamik ebenfalls Aussagen über die Extremwerte der interessierenden Grössen. In der vorliegenden Arbeit werden die Zusammenhänge zwischen beiden Methoden bei stochastischen dynamischen Belastungen untersucht.

Die Anregungen zu diesen Untersuchungen kamen einerseits aus meiner praktischen Tätigkeit als beratender Ingenieur, wo im Zusammenhang mit dynamischen Berechnungen immer wieder offene Fragen der Methode der Antwortspektren aufgeworfen und diskutiert wurden. Die Anwendung probabilistischer Verfahren im Vergleich zur Methode der Antwortspektren in einigen ausgewählten Fällen zeigte, dass damit bei ebenfalls kleinem Aufwand das Tragwerksverhalten zutreffender und methodisch einheitlich erfasst werden kann. Andererseits gaben mir die Vorbereitungsarbeiten zu einer Vorlesung an der ETH Zürich über stochastische dynamische Lasten und nichtlineare dynamische Probleme Gelegenheit, die stochastischen Verfahren auch in ihrem Zusammenhang mit den übrigen heute gebräuchlichen Verfahren darzustellen. Entsprechend diesen Anregungen aus Theorie und Praxis wurde in der vorliegenden Arbeit auch versucht, die Zusammenhänge zwischen der Methode der Antwortspektren und einer probabilistischen Berechnung sowohl von der theoretischen Seite als auch von der Seite der praktischen Anwendungen her zu beleuchten.

Das Institut für Baustatik und Konstruktion der ETH Zürich hat diese Arbeit als Institutsbericht herausgegeben. Allen daran Beteiligten sei an dieser Stelle sehr herzlich gedankt.

Zürich, im Mai 1979

Dieter Pfaffinger

1. EINLEITUNG

Dynamische Untersuchungen von Tragwerken haben während der vergangenen Jahre zunehmende Bedeutung erhalten. Einer der Gründe für diese Entwicklung liegt in der Tendenz, durch Verwendung neuer Materialien und Konstruktionsverfahren schlankere Tragwerke zu bauen, welche oftmals erhöhte dynamische Empfindlichkeit aufweisen. Weiterhin verlangen die steigenden Sicherheitsanforderungen vermehrt die Berücksichtigung dynamischer Belastungen bei bestimmten Bauwerken wie beispielsweise die Untersuchung von Erdbebenanregung bei Kernkraftwerken oder Staumauern. Der Ingenieur ist heute durch den Einsatz leistungsfähiger Computer und entsprechender numerischer Methoden aber auch in der Lage, grössere dynamische Berechnungen durchzuführen.

Trotz dieser Möglichkeiten ist der Aufwand zur Bestimmung des vollständigen zeitabhängigen Verhaltens eines Bauwerks unter dynamischen Lasten häufig beträchtlich. Von den Ergebnissen benötigt der Ingenieur aber meist nur die Extremwerte der interessierenden Tragwerksgrössen und nur selten ihren detaillierten Verlauf. Dazu kommt, dass die Unsicherheiten in den Belastungen wie auch im mathematischen Modell des Tragwerks oftmals eine vereinfachte Berechnung nahelegen. Aus diesen Gründen haben Näherungsmethoden zur Abschätzung der auftretenden maximalen Verformungen und Kräfte grosse Bedeutung erhalten.

Für lineare Tragwerke ist eine derartige Abschätzung sowohl mit der Methode der Antwortspektren als auch mit Hilfe der probabilistischen Tragwerksdynamik einfach möglich. Die Methode der Antwortspektren ([7], [8], [14], [15], [21], [22]) ist die heute am meisten verbreitete dynamische Näherungsmethode vor allem bei schockartiger Belastung des Bauwerks oder von Teilen des Bauwerks. Dabei werden in einem ersten Schritt die zeitabhängigen Anregungen durch ihre Antwortspektren ersetzt. Diese sind definiert als der maximale relative Ausschlag eines Einmassenschwingers bestimmter Dämpfungsrate und Eigenfrequenz unter der Anregung. Die Spektren enthalten also nur mehr Information über die Extremwerte der Verschiebung des Einmassenschwingers in Funktion von Dämpfung und Frequenz aber nicht mehr in Funktion der Zeit. Da sich durch Uebergang auf Normalkoordinaten die Bewegung eines Tragwerks mit proportionaler Dämpfung aus voneinander unabhängigen Einmassenschwingerbewegungen aufbauen lässt, gewinnt man mit Hilfe der Antwortspektren die Extremwerte der interessierenden Tragwerksgrössen durch Ueberlagerung der Anteile in den Eigenschwingungen. In der probabilistischen Tragwerksdynamik ([2], [3], [6], [8], [10], [11], [27], [29]) geht man davon aus, dass viele dynamische Anregungen wie beispielsweise durch Wind, Erdbeben oder Wellen als Zufallsprozesse beschrieben werden können. Die Tragwerkseigenschaften hingegen werden als deterministisch angenommen. Im Falle stationärer normalverteilter Zufallsprozesse wird die Anregung vollständig durch ihr Leistungsspektrum, die durchschnittliche Leistung pro Frequenzeinheit, beschrieben.

Auch hier können durch Uebergang auf Normalkoordinaten die Leistungsspektren der interessierenden Tragwerksgrössen aus den Anteilen in den Eigenschwingungen aufgebaut werden. Damit lassen sich Aussagen über die Wahrscheinlichkeit des Auftretens bestimmter Werte und insbesondere über die zu erwartenden Extremwerte machen. Diese probabilistische Betrachtungsweise ist rechnerisch ebenfalls nicht aufwendig, im Konzept aber umfassender als die Methode der Antwortspektren.

Den Methoden zur Abschätzung der Extremwerte der Tragwerksgrössen stehen die Methoden zur Berechnung des vollständigen zeitlichen Verlaufs der Bewegung gegenüber. Hier ist zunächst die Methode der modalen Ueberlagerung zu nennen, bei der die Lösung durch Superposition der Anteile in den Eigenschwingungen mit den korrekten Phasenbeziehungen aufgebaut wird. Die Methode ist im wesentlichen auf lineare Systeme beschränkt. In vielen Fällen genügt die Berücksichtigung einer kleinen Anzahl von Eigenschwingungen, wodurch auch der Rechenaufwand relativ gering bleibt. Die modale Ueberlagerung ist besonders vorteilhaft bei Tragwerken mit proportionaler Dämpfung, kann aber auch auf nichtproportional gedämpfte Systeme angewendet werden. Bei der Methode der direkten Integration wird das volle System der gekoppelten Bewegungsgleichungen numerisch über die Zeit integriert. Falls keine Kondensation durchgeführt wurde, geht damit alle im numerischen Modell des Tragwerks enthaltene Information in die Lösung ein. Da die Tragwerkeigenschaften zu jedem Zeitschritt verändert werden können, eignet sich die direkte Integration auch zur Behandlung nichtlinearer Systeme. Schliesslich ist es durch die schnelle Fouriertransformation heute in einigen Fällen auch realistisch geworden, die Bewegungsgleichungen linearer Tragwerke zunächst im Frequenzbereich zu lösen und dann die Lösung durch Transformation in den Zeitbereich zu gewinnen.

In der vorliegenden Arbeit sollen die Zusammenhänge der Methode der Antwortspektren mit der probabilistischen Betrachtungsweise untersucht werden. Dabei werden lineares Verhalten der Tragwerke sowie proportionale Dämpfung vorausgesetzt. Die dynamische Anregung besteht aus stationären Gauss'schen Zufallsprozessen. Entsprechend der grossen Bedeutung der Erdbebensicherheit unserer Tragwerke werden in den numerischen Beispielen vor allem Erdbebenanregungen betrachtet. Die grundsätzlichen Ergebnisse dieser Arbeit gelten aber allgemein. Schliesslich wird davon ausgegangen, dass realistische Problemlösungen in der Tragwerksdynamik meist den Einsatz leistungsfähiger Computer erfordern. Der Gesichtspunkt computergerechter numerischer Lösungen wird daher besonders berücksichtigt.

2. METHODE DER ANTWORTSPEKTREN

2.1 Definitionen und Eigenschaften

Das Antwortspektrum einer zeitabhängigen Belastung soll definiert werden als die betragsmässig grösste Relativverschiebung $|q|_{\max}$ eines Einmassenschwingers der Kreisfrequenz ω_0 und der Dämpfungsrate ζ unter dieser Anregung. Wie in Fig. 2.1 dargestellt, kann die Anregung dabei aus einer Last $p(t)$

oder aus einer Auflagerverschiebung $x(t)$ bestehen. Durch Veränderung von ω_0 und ζ erhält man die Funktion

$$S_d(\omega_0, \zeta) = |q|_{\max}(\omega_0, \zeta) \quad (2.1)$$

Fig. 2.1: Einmassenschwinger

Handelt es sich bei der Anregung um einen Satz von Anregungen mit vergleichbaren Eigenschaften, so soll das Antwortspektrum als der Mittelwert der Antwortspektren der einzelnen Anregungen definiert werden. Für die praktischen

Anwendungen wird oftmals aus dem Antwortspektrum durch Glättung des Design-Spektrum gewonnen.

Die Bewegungsgleichung des Einmassenschwingers der Fig. 2.1 unter der Last $p(t)$ lautet

$$m \ddot{q} + c \dot{q} + k q = p \quad (2.2)$$

wobei $q(t)$ die Verschiebung relativ zum Auflager aus der statischen Ruhelage, m die Masse, k die Federsteifigkeit und c die Dämpfungskonstante für viskose Dämpfung bezeichnen. Wird der Schwinger durch eine Auflagerverschiebung $x(t)$ angeregt, so gilt

$$p(t) = -m \ddot{x}(t) \quad (2.3)$$

Gl. (2.2) lässt sich auch in der Form

$$\ddot{q} + 2\zeta \omega_0 \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{p}{m} \quad (2.4)$$

schreiben, wobei

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{k m}} = \frac{c}{c_{kr}} \quad (2.5)$$

die Dämpfungsrate und

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.6)$$

die Kreisfrequenz des ungedämpften Schwingers bedeuten. Durch die spezielle Wahl von $m = 1$ vereinfachen und vereinheitlichen sich die obigen Gleichungen. Die Definition des Antwortspektrums soll daher dahingehend erweitert werden, dass der Einmassenschwinger die Frequenz ω_0 , die Dämpfungsrate ζ sowie die Masse $m = 1$ aufweist.

Unter den Anfangsbedingungen

$$q(0) = \dot{q}(0) = 0 \quad (2.7)$$

ist die Bewegung gegeben durch das Duhamel-Integral

$$q(t) = \int_0^t \frac{p(\tau)}{m} h(t-\tau) d\tau \quad (2.8)$$

$$\text{mit} \quad h(t) = \frac{1}{\omega} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin \omega t \quad (2.9)$$

$$\text{und} \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} \quad (2.10)$$

Gl. (2.8) entspricht der Faltung der Last $p(t)$ mit $\frac{1}{m} h(t)$, der freien Schwingung unter einem Dirac-Stoss. Mit Gl. (2.9) und Gl. (2.10) wird Gl. (2.8) zu

$$q(t) = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}} \int_0^t \frac{p(\tau)}{m} e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \sin \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}(t-\tau) d\tau \quad (2.11)$$

Da $\frac{p(\tau)}{m}$ die Dimension einer Beschleunigung hat, besitzt das Integral der Gl. (2.11) die Dimension einer Geschwindigkeit. Der betragsmässig grösste Wert dieses Integrals soll daher als das Pseudo-Geschwindigkeitsspektrum $S_V(\omega_0, \zeta)$ definiert werden:

$$S_V(\omega_0, \zeta) = \left| \int_0^t \frac{p(\tau)}{m} e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \sin \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}(t-\tau) d\tau \right|_{\max} \quad (2.12)$$

Bei Anregung durch eine Auflagerbeschleunigung $\ddot{x}(t)$ erhält man mit Gl. (2.3)

$$S_V(\omega_0, \zeta) = \left| \int_0^t \ddot{x}(\tau) e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \sin \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}(t-\tau) d\tau \right|_{\max} \quad (2.13)$$

Da $m = 1$ sein soll, ist die Analogie zwischen Gl. (2.12) und Gl. (2.13) vollständig. Entsprechend der Definitionsgleichung Gl. (2.1) wird damit das Antwortspektrum zu

$$S_d(\omega_0, \zeta) = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}} S_V(\omega_0, \zeta) \quad (2.14)$$

Schliesslich definiert man als Pseudo-Beschleunigungsspektrum

$$S_a(\omega_0, \zeta) = \omega S_V(\omega_0, \zeta) = \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} S_V(\omega_0, \zeta) \quad (2.15)$$

In Gl. (2.12) bis Gl. (2.15) wird häufig statt der Kreisfrequenz ω_0 des ungedämpften Schwingers auch die Periode

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (2.16)$$

als unabhängige Variable verwendet.

Differentiation von Gl. (2.11) nach t liefert die wirkliche Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) = & - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \int_0^t \frac{p(\tau)}{m} e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \sin \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}(t-\tau) d\tau \\ & + \int_0^t \frac{p(\tau)}{m} e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \cos \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.17)$$

sowie die wirkliche Beschleunigung

$$\begin{aligned} \ddot{q}(t) = & \frac{p(t)}{m} - \frac{\omega_0(1-2\zeta^2)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \int_0^t \frac{p(\tau)}{m} e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \sin \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}(t-\tau) d\tau \\ & - 2\zeta\omega_0 \int_0^t \frac{p(\tau)}{m} e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \cos \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.18)$$

Man sieht, dass $\dot{q}(t)$ und $S_v(\omega_0, \zeta)$ keinen direkten Zusammenhang haben. Insbesondere verschwindet $\dot{q}(t)$ an den Zeiten extremer Verschiebung $|q|_{\max}$ und damit auch an der nach der Definitionsgleichung (2.12) für das Pseudo-Geschwindigkeitsspektrum massgebenden Zeit.

Im Falle einer Auflagerverschiebung erhält man aus Gl. (2.18) unter Berücksichtigung von Gl. (2.3) für die absolute Beschleunigung

$$\begin{aligned} \ddot{q}_a(t) = \ddot{q} + \ddot{x} = & \frac{\omega_0(1-2\zeta^2)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \int_0^t \ddot{x}(\tau) e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \sin \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}(t-\tau) d\tau \\ & + 2\zeta\omega_0 \int_0^t \ddot{x}(\tau) e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \cos \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.19)$$

Der Vergleich mit Gl. (2.15) und Gl. (2.13) zeigt, dass im Falle einer Auflageranregung das Pseudo-Beschleunigungsspektrum $S_a(\omega_0, \zeta)$ für $\zeta = 0$ die wirkliche maximale absolute Beschleunigung liefert. Besteht die Anregung aus einer Last $p(t)$, so kann man immer $p(t)$ mit

$$p(t) = m\ddot{z}(t) \quad (2.20)$$

durch eine Beschleunigung $\ddot{z}(t)$ der Masse m ausdrücken. Daraus sieht man, dass $S_a(\omega_0, \zeta=0)$ hier den betragsmässig grössten Wert der relativen Beschleunigung $\ddot{q}-\ddot{z}$ liefert.

Die dynamische Anregung $p(t)$ bzw. $x(t)$ soll nun ersetzt werden durch einen Satz von n Anregungen $p_i(t)$ bzw. $x_i(t)$, $i=1, \dots, n, n \rightarrow \infty$, welchen das gleiche physikalische Phänomen zugrunde liegt. Man spricht hier von einem Zufallsprozess. Bei endlichem n erhält man eine Stichprobe aus diesem Prozess. Für jede Funktion kann das Pseudo-Geschwindigkeitsspektrum $S_{v,i}(\omega_0, \zeta)$, $i=1, \dots, n$, entsprechend Gl. (2.12) bzw. Gl. (2.13) bestimmt werden. Damit erhält man den Erwartungswert $S_v(\omega_0, \zeta)$ des Pseudo-Geschwindigkeitsspektrums durch Bildung des Mittelwertes

$$S_v(\omega_0, \zeta) = E[S_v] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{v,i}(\omega_0, \zeta) \quad n \rightarrow \infty \quad (2.21)$$

Für endliche n liefert Gl. (2.21) einen Schätzwert des Erwartungswertes. Die Definitionsgleichungen (2.14) und (2.15) behalten auch für die Erwartungswerte $S_d(\omega_0, \zeta)$ des Antwortspektrums und $S_a(\omega_0, \zeta)$ des Pseudo-Beschleunigungsspektrums ihre Gültigkeit. Daher können auch nach dieser allgemeineren Definition mit $S_v(\omega_0, \zeta)$ sofort die Spektren $S_d(\omega_0, \zeta)$ und $S_a(\omega_0, \zeta)$ angegeben werden. Der einfache Zusammenhang entsprechend Gl. (2.14) und Gl. (2.15) erlaubt insbesondere die bekannte Darstellung aller drei Spektren in einem Nomogramm mit logarithmischen Skalen.

Zur Illustration zeigt Fig. 2.2 die von Housner [14] angegebenen Pseudo-Geschwindigkeitsspektren $S_v(T_0, \zeta)$ für Erdbebenanregung. Diese Spektren wurden

Fig. 2.2: Pseudo-Geschwindigkeitsspektren nach Housner

aus den normalisierten Accelerogrammen von vier verschiedenen Beben durch Bildung des Erwartungswertes und anschließendes Glätten und Normalisieren gewonnen. Man sieht, dass die Spektren für kleine Perioden d.h. hohe Frequenzen gegen Null streben. Das Spektrum $S_v(T_0, \zeta=0)$ wird im Bereich $T_0 = 0.5$ sec maximal. Da bei der Bewegung wirklicher Tragwerke stets

Dämpfungskräfte auftreten, wird im folgenden grundsätzlich $\zeta \neq 0$ angenommen. Bei der Berechnung von Pseudo-Geschwindigkeitsspektren nach Gl. (2.12) bzw. Gl. (2.13) wie auch bei der Auswertung der Gleichungen (2.14) und (2.15) wird mitunter vereinfachend $\sqrt{1-\zeta^2} \approx 1$ gesetzt. Dies ist für kleine Dämpfungs-raten gerechtfertigt. Da aber die Auswertung des Faltungsintegrals wie auch der anderen Ausdrücke nach dem hier eingenommenen Standpunkt mit dem Computer erfolgt, wird im folgenden mit den vollständigen Gleichungen gearbeitet.

Das Antwortspektrum einer Anregung liefert den Erwartungswert der maximalen Relativverschiebung eines Einmassenschwingers der Masse $m=1$ mit der Kreisfrequenz ω_0 und der Dämpfungsrate ζ . Die den einzelnen Frequenzen zugehörigen Zeiten des Eintretens dieses Maximalwertes, d.h. die Phasenbeziehungen, gehen

dabei verloren. Im Gegensatz dazu bleiben bei der Fourier-Transformation der Anregung auch die Phasenbeziehungen erhalten. So liefert eine Fourier-Transformation von Gl. (2.4) unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen Gl. (2.7)

$$(-\Omega^2 + 2 i \zeta \omega_0 \Omega + \omega_0^2) Q(\Omega) = \frac{1}{m} P(\Omega) \quad (2.22)$$

wobei

$$Q(\Omega) = \int_0^{\infty} q(t) e^{-i\Omega t} dt \quad (2.23)$$

$$P(\Omega) = \int_0^{\infty} p(t) e^{-i\Omega t} dt \quad (2.24)$$

die Fourier-Transformierten der Bewegung $q(t)$ und der Last $p(t)$ bezeichnen. Dabei ist durch die untere Integrationsgrenze berücksichtigt, dass $q(t)$ und $p(t)$ nur für $t \geq 0$ definiert sind.

Besteht die Anregung aus einer Auflagerverschiebung, so ist entsprechend Gl. (2.3) die rechte Seite in Gl. (2.22) durch

$$\frac{1}{m} P(\Omega) = -X(\Omega) \quad (2.25)$$

mit

$$X(\Omega) = \int_0^{\infty} \ddot{x}(t) e^{-i\Omega t} dt \quad (2.26)$$

zu ersetzen. Die Funktionen $p(t)$ bzw. $\ddot{x}(t)$ sind im hier interessierenden Zusammenhang nur zwischen den Zeiten 0 und T ungleich null. Wählt man als obere Integrationsgrenze

$$\bar{T} = n \frac{2\pi}{\Omega} \geq T \quad (2.27)$$

dann lässt sich Gl. (2.24) auch als

$$P(\Omega) = \int_0^{\bar{T}} p(\tau) \cos \Omega(\bar{T} - \tau) d\tau + i \int_0^{\bar{T}} p(\tau) \sin \Omega(\bar{T} - \tau) d\tau \quad (2.28)$$

anschreiben. Aus Gl. (2.11) bzw. Gl. (2.17) folgt aber für die Verschiebung und Geschwindigkeit des ungedämpften Einmassenschwingers der Frequenz Ω zur Zeit $\bar{T}$

$$q(\bar{T}) = \frac{1}{m\Omega} \int_0^{\bar{T}} p(\tau) \sin \Omega(\bar{T} - \tau) d\tau \quad (2.29)$$

$$\dot{q}(\bar{T}) = \frac{1}{m} \int_0^{\bar{T}} p(\tau) \cos \Omega(\bar{T} - \tau) d\tau \quad (2.30)$$

Der Vergleich mit Gl. (2.28) liefert

$$\frac{P(\Omega)}{m} = \dot{q}(\bar{T}) + i \Omega q(\bar{T}) \quad (2.31)$$

Der Real- und Imaginärteil der Fourier-Transformierten an der Frequenz Ω entspricht also der Geschwindigkeit bzw. der Ω -fachen Verschiebung des ungedämpften Einmassenschwingers der Masse $m = 1$ mit der Frequenz Ω zur Zeit $\bar{T}$ unter dieser Belastung. Da $q(\bar{T})$ und $\dot{q}(\bar{T})$ aber eindeutig durch $q(T)$ und $\dot{q}(T)$ am Ende der Belastung gegeben sind, folgt, dass die Fourier-Transformierte an der Frequenz Ω durch Verschiebung und Geschwindigkeit des ungedämpften Schwingers der Frequenz Ω am Ende der Anregung eindeutig gegeben ist. Mit der Abschätzung

$$|q(\bar{T})| \leq |q|_{\max}(\Omega, \zeta=0) \quad (2.32)$$

folgt mit $\Omega = \omega_0$ aus Gl. (2.31) und Gl. (2.14)

$$S_V(\omega_0, \zeta=0) \geq \left| \operatorname{Im} \left(\frac{P(\omega_0)}{m} \right) \right| \quad (2.33)$$

Die bezogene Energie des Einmassenschwingers ist definiert als

$$\bar{E} = \sqrt{\frac{2E}{m}} \quad (2.34)$$

mit

$$E = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + \frac{1}{2} k q^2 = \frac{1}{2} m (\dot{q}^2 + \omega_0^2 q^2) \quad (2.35)$$

Nach Gl. (2.31) gilt

$$\left| \frac{P(\omega_0)}{m} \right|^2 = \dot{q}^2(\bar{T}) + \omega_0^2 q^2(\bar{T}) \quad (2.36)$$

und damit

$$\left| \frac{P(\omega_0)}{m} \right| = \bar{E} \quad (2.37)$$

Da beim ungedämpften Schwinger $\bar{E}$ für $t \geq T$ konstant bleibt gilt, dass $\left| \frac{P(\Omega)}{m} \right|$ gleich ist der bezogenen Energie des ungedämpften Schwingers am Ende der Bewegung. Aus der auch für den gedämpften Schwinger gültigen Beziehung

$$(\dot{q}^2 + \omega_0^2 q^2)_{\max} \geq \omega_0^2 q_{\max}^2 = \frac{S_V^2(\omega_0, \zeta)}{1 - \zeta^2} \quad (2.38)$$

folgt

$$S_V(\omega_0, \zeta) \leq \sqrt{1 - \zeta^2} \bar{E}_{\max}(\omega_0, \zeta) \quad (2.39)$$

wobei $\bar{E}_{\max}(\omega_0, \zeta)$ die maximale bezogene Energie des Schwingers mit Kreisfrequenz ω_0 und Dämpfungsrate ζ unter der Anregung bezeichnet.

Die Fourier-Transformierte $P(\Omega)$ beschreibt $p(t)$ vollständig, da $p(t)$ aus der

zu Gl. (2.24) inversen Transformation

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega \quad (2.40)$$

gewonnen werden kann. Im Gegensatz dazu beschreibt das Antwortspektrum die Anregung nicht vollständig. Das Antwortspektrum liefert aber direkt die für die Beurteilung des Tragwerks wichtigen Extremwerte unter Berücksichtigung der Dämpfung, während die Fourier-Transformierte nur zur Bewegung des ungedämpften Einmassenschwingers am Ende der Anregung in Beziehung gesetzt werden kann.

Aus Gl. (2.22) erhält man mit der Abkürzung

$$H(\Omega) = H(\Omega, \omega_0, \zeta) = \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\zeta\omega_0\Omega} \quad (2.41)$$

die Fourier-Transformierte der Bewegung zu

$$Q(\Omega) = \frac{1}{m} H(\Omega) P(\Omega) \quad (2.42)$$

$H(\Omega)$ charakterisiert die stationäre Bewegung des Einmassenschwingers mit der Frequenz ω_0 und der Dämpfungsrate ζ unter harmonischer Anregung mit der Frequenz Ω und wird als Frequenzgang bezeichnet. Für $\zeta \neq 0$ ist $H(\Omega)$ eine komplexe Zahl, deren absoluter Betrag

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_0^2\Omega^2]^{1/2}} \quad (2.43)$$

immer endlich bleibt. Die Rücktransformation von Gl. (2.42) in den Zeitbereich entsprechend Gl. (2.40) liefert die Bewegung

$$q(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\Omega)}{m} H(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega \quad (2.44)$$

Entsprechend der Definition von $S_V(\omega_0, \zeta)$ gilt also auch

$$S_V(\omega_0, \zeta) = \frac{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\Omega)}{m} H(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega \right|_{\max} \quad (2.45)$$

bzw. für Anregung durch eine Auflagerverschiebung

$$S_V(\omega_0, \zeta) = \frac{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) H(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega \right|_{\max} \quad (2.46)$$

Vergleich von Gl. (2.42) mit Gl. (2.8) liefert unter Berücksichtigung des Faltungssatzes, nach dem die Fourier-Transformation einer Faltung das Pro-

dukt der Fourier-Transformierten ergibt, das bekannte Ergebnis

$$H(\Omega) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-i\Omega t} dt \quad (2.47)$$

Damit wird auch die Analogie zwischen Gl. (2.45) bzw. Gl. (2.46) und Gl. (2.12) bzw. Gl. (2.13) offenkundig. Die über die Fourier-Transformation hergeleiteten obigen Ergebnisse gelten für einzelne Belastungen wie auch für einen ganzen Satz von Anregungen. In diesem Falle müssen noch die entsprechenden Erwartungswerte gebildet werden.

2.2 Diskretisierte Tragwerke

Die Methode der Antwortspektren lässt sich auf kontinuierliche wie auch auf diskretisierte Tragwerke anwenden. In der Berechnungspraxis wird heute allerdings fast nur mit diskretisierten numerischen Modellen gearbeitet, welche entweder aus äquivalenten Federn-Massen-Dämpfer-Systemen bestehen oder aber mit Hilfe der Methode der finiten Elemente oder der Differenzenrechnung gewonnen wurden. Dank ihrer Anschaulichkeit, Vielseitigkeit und der guten numerischen Eigenschaften besitzt die Methode der finiten Elemente heute die grösste Bedeutung. Im folgenden soll die Anwendung der Methode der Antwortspektren auf diskretisierte Tragwerksmodelle besprochen werden, deren Bewegungsgleichungen die Eigenschaften der mit Verschiebungsmodellen gewonnenen Gleichungen aufweisen. Derartige Bewegungsgleichungen erhält man generell durch Diskretisierung der Verschiebungen des Tragwerks mit einem Produktansatz aus ortsabhängigen Koordinatenfunktionen mit zeitabhängigen Koordinaten und Verwendung entweder des Hamilton'schen Variationsprinzips oder - als dessen Konsequenz - der Lagrange'schen Gleichungen.

Die Bewegungsgleichungen eines Tragwerks mit viskoser Dämpfung erscheinen mit dieser Art der Diskretisierung in der Form

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{p\} \quad (2.48)$$

mit der Massenmatrix $[M]$, der Dämpfungsmatrix $[C]$ und der Steifigkeitsmatrix $[K]$. Die Verschiebungsfreiheitsgrade $\{q(t)\}$ sind auf ein Inertialsystem bezogen und sollen nur mehr die unabhängigen Freiheitsgrade nach Elimination aller Bindungen wie Auflagerbedingungen etc. enthalten. Durch die Herleitung der Gleichungen über ein Variationsprinzip wird $[K]$ als Bestimmungsmatrix der Formänderungsenergie symmetrisch und bei stabil gelagerten Tragwerken positiv definit. $[M]$ beschreibt die kinetische Energie und ist deshalb symmetrisch und theoretisch ebenfalls immer positiv definit. Da in den Anwendungen aber oftmals bestimmte Elemente von $[M]$ wie beispielsweise Massenträgheitsmomente unterdrückt werden, ist $[M]$ häufig positiv semidefinit. Die Dämpfungsmatrix $[C]$ soll als Bestimmungsmatrix der Dissipationsleistung sym-

metrisch sein und bei der Transformation auf Normalkoordinaten in eine Diagonalmatrix übergehen. Gl. (2.48) lässt sich als die Gleichgewichtsbedingung zwischen den Trägheitskräften $-[M]\{\ddot{q}\}$, den Dämpfungskräften $-[C]\{\dot{q}\}$, den inneren Kräften $-[K]\{q\}$ und den äusseren Lasten $\{p(t)\}$ zu jeder Zeit t auffassen. Im folgenden wird immer vorausgesetzt, dass das Tragwerk aus der Ruhelage heraus angeregt wird, d.h. die Anfangsbedingungen

$$\{q(0)\} = \{\dot{q}(0)\} = \{0\} \quad (2.49)$$

gelten.

Wird das Tragwerk durch eine äussere Last belastet, so sind normalerweise die Komponenten von $\{p\}$ von einander verschiedene Zeitfunktionen. Der Lastvektor lässt sich aber in jedem Fall darstellen als

$$\{p(t)\} = \sum_{i=1}^1 \{p_{0,i}\} p_i(t) \quad (2.50)$$

wobei die $\{p_{0,i}\}$ zeitunabhängig sind. Liegt eine Auflagerbewegung $x_i(t)$ des i -ten Auflagerfreiheitsgrades vor, wird

$$\{p(t)\} = -\{k_i\} x_i(t) - \{c_i\} \dot{x}_i(t) - \{m_i\} \ddot{x}_i(t) \quad (2.51)$$

Die Vektoren $\{k_i\}$, $\{c_i\}$ und $\{m_i\}$ bestimmen die elastischen Kräfte, Dämpfungskräfte und Massenkräfte im Tragwerk unter Einheits-Verschiebung, -Geschwindigkeit und -Beschleunigung des i -ten Auflagerfreiheitsgrades. Sie lassen sich leicht aus den entsprechenden Kolonnen der globalen Matrizen vor Elimination der Auflagerfreiheitsgrade gewinnen. Bei Anregung mehrerer Auflagerpunkte ist über die einzelnen Anteile nach Gl. (2.51) zu summieren. Man sieht, dass der Lastvektor unter Auflagerbewegung ebenfalls in der Form der Gl. (2.50) erscheint. Eine wesentliche Vereinfachung ergibt sich für Tragwerke auf starrer Fundation, deren Auflagerpunkte alle der gleichen Bewegung $x(t)$ unterworfen sind. In diesem Falle lautet die Bewegungsgleichung

$$[M]\{\ddot{q}_r\} + [C]\{\dot{q}_r\} + [K]\{q_r\} = -[M]\{a\} \ddot{x}(t) \quad (2.52)$$

wobei $\{q_r\}$ die Verschiebungen relativ zu einem mit $x(t)$ mitbewegten System bezeichnet. In Gl. (2.52) wurde dabei angenommen, dass die Dämpfungskräfte nur von den relativen Verschiebungen abhängen. Der Vektor $\{a\}$ ist die starre Verschiebung des Tragwerks unter $x = 1$. Der Lastvektor der Gl. (2.52) entspricht wiederum der Gl. (2.50) mit nur einem Term. Die Matrizen $[M]$, $[C]$ und $[K]$ sind identisch mit den entsprechenden Matrizen der Gl. (2.48).

Die Eigenschwingungen des ungedämpften Tragwerks genügen der Gleichung

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \quad (2.53)$$

Bei N Freiheitsgraden und nichtsingulärer Massenmatrix existieren genau N elastische Eigenschwingungen

$$\{q_j(t)\} = \{\phi_j\} e^{i\omega_j t} \quad j=1, \dots, N \quad (2.54)$$

mit den voneinander linear unabhängigen Eigenvektoren $\{\phi_j\}$ und den Eigenkreisfrequenzen ω_j . Die ersten $n \leq N$ Eigenvektoren lassen sich zu der Modalmatrix

$$[\Phi] = [\{\phi_1\}\{\phi_2\} \dots \{\phi_n\}] \quad n \leq N \quad (2.55)$$

zusammenfassen. Damit kann eine allgemeine Bewegung $\{q(t)\}$ des Tragwerks mit den Normalkoordinaten $\{\eta(t)\}$ als

$$\{q(t)\}_N = [\Phi]_{N \times n} \{\eta(t)\}_n \quad (2.56)$$

dargestellt werden. Für $n = N$ erlaubt Gl. (2.56) die exakte Darstellung jeder beliebigen Bewegung $\{q(t)\}$. Für $n < N$ wird die Bewegung dergestalt approximiert, dass in den Anteilen der ersten n Eigenschwingungen volle Genauigkeit erhalten bleibt, während die Anteile der restlichen Eigenschwingungen unterdrückt werden.

Transformation von Gl. (2.48) auf Normalkoordinaten entsprechend Gl. (2.56) liefert unter Berücksichtigung der Orthogonalitätsrelationen der Eigenvektoren

$$[M_r]\{\ddot{\eta}\} + [C_r]\{\dot{\eta}\} + [K_r]\{\eta\} = [\Phi]^T\{p\} \quad (2.57)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} [M_r] &= [\Phi]^T[M][\Phi] \\ [C_r] &= [\Phi]^T[C][\Phi] \\ [K_r] &= [\Phi]^T[K][\Phi] \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

Die Elemente der Diagonalmatrizen $[M_r]$ und $[K_r]$ werden als verallgemeinerte Massen bzw. Steifigkeiten bezeichnet. Wie oben vorausgesetzt, soll auch die Dämpfungsmatrix $[C]$ bei der Transformation in eine Diagonalmatrix $[C_r]$ übergehen. Man beachte, dass die Bewegungsgleichungen gedämpfter Tragwerke ausschliesslich in diesem Falle entkoppeln. Die Gl. (2.57) zerfällt dann in n voneinander unabhängige Einmassenschwingergleichungen

$$m_r \ddot{\eta}_r + c_r \dot{\eta}_r + k_r \eta_r = p_r \quad r=1, \dots, n \quad (2.59)$$

mit

$$p_r(t) = \{\phi_r\}^T \{p(t)\} \quad (2.60)$$

bzw. in

$$\ddot{\eta}_r + 2 \zeta_r \omega_r \dot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = \frac{p_r}{m_r} \quad r=1, \dots, n \quad (2.61)$$

mit

$$\zeta_r = \frac{c_r}{2\sqrt{k_r m_r}} = \frac{c_r}{c_{kr,r}} \quad (2.62)$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k_r}{m_r}} \quad (2.63)$$

Durch entsprechende Normierung der Eigenvektoren kann stets erreicht werden, dass $[M_r]$ zur Einheitsmatrix wird, d.h., dass wiederum $m_r=1$ gilt.

Aus Gl. (2.60) folgt für die Belastung in der allgemeinen Form der Gl. (2.50)

$$p_r(t) = \sum_{i=1}^1 L_{ri} p_i(t) \quad (2.64)$$

mit den Partizipationsfaktoren

$$L_{ri} = \{\varphi_r\}^T \{p_{o,i}\} \quad (2.65)$$

L_{ri} ist ein Mass für die Grösse der Anregung der r-ten Eigenschwingung durch $\{p_{o,i}\}$. Beschränkt man sich in Gl. (2.50) auf nur einen Lastvektor $\{p_o\}p(t)$, so kommt analog

$$p_r(t) = L_r p(t) \quad (2.66)$$

mit

$$L_r = \{\varphi_r\}^T \{p_o\} \quad (2.67)$$

Für den Fall der Erdbebenanregung eines Tragwerks mit starrer Foundation erhält man mit dem Lastvektor der Gl. (2.52)

$$p_r(t) = -L_r \ddot{x}(t) \quad (2.68)$$

mit

$$L_r = \{\varphi_r\}^T [M] \{a\} \quad (2.69)$$

Wird das Tragwerk aus der Ruhelage heraus angeregt, dann ergibt sich der betragsmässig grösste Wert $|\eta_r|_{\max}$ der r-ten Normalkoordinate entsprechend Gl. (2.1) und Gl. (2.14) zu

$$|\eta_r|_{\max} = L_r S_d(\omega_r, \zeta_r) = \frac{L_r}{\omega_r \sqrt{1-\zeta_r^2}} S_v(\omega_r, \zeta_r) \quad (2.70)$$

wobei $S_V(\omega_r, \zeta_r)$ das Pseudo-Geschwindigkeitsspektrum von $p(t)$ nach Gl. (2.12) bzw. Gl. (2.13) mit $m=1$ bezeichnet. Entspricht $p(t)$ nicht einer einzigen Funktion, sondern den Funktionen eines Zufallsprozesses, so ist der nach Gl. (2.21) gebildete Erwartungswert des Pseudo-Geschwindigkeitsspektrums zu verwenden. Gl. (2.70) liefert entsprechend den erwarteten Extremwert von $|\eta_r|$.

Die Bewegung des i -ten Freiheitsgrades ist nach Gl. (2.56)

$$q_i(t) = \sum_{r=1}^n \phi_{ir} \eta_r(t) \quad (2.71)$$

Für den betragsmässig grössten Wert $|q_i|_{\max}$ gilt die Abschätzung

$$|q_i|_{\max} \leq \sum_{r=1}^n \phi_{ir} |\eta_r|_{\max} \quad (2.72)$$

Die Summation der absoluten Beträge der modalen Beiträge entsprechend Gl. (2.72) liefert meistens zu ungünstige Ergebnisse, da die Extrema der Normalkoordinaten η_r normalerweise nicht zur gleichen Zeit und bei der wirklichen Bewegung auch nicht mit gleichem Vorzeichen auftreten. In den Anwendungen der Methode der Antwortspektren wird daher meistens der Erwartungswert der maximalen Verschiebung als Wurzel der Summe der Quadrate der Anteile zu

$$|q_i|_{\max} = \left[\sum_{r=1}^n (\phi_{ir} |\eta_r|_{\max})^2 \right]^{1/2} \quad (2.73)$$

berechnet, wobei $|\eta_r|_{\max}$ die nach Gl. (2.70) gewonnenen Werte sind. Allerdings wird dieses Vorgehen nicht einheitlich gehandhabt. Gebräuchlich ist ebenfalls die Summation der absoluten Beträge entsprechend Gl. (2.72) oder eine gemischte Summation, wobei einige Terme nach Gl. (2.72) und die restlichen nach Gl. (2.73) behandelt werden. Für die Anteile nahe zusammenliegender Eigenfrequenzen kann Gl. (2.73) durch die allgemeinere Gleichung

$$|q_i|_{\max} = \left[\sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \epsilon_{rs} \phi_{ir} \phi_{is} |\eta_r|_{\max} |\eta_s|_{\max} \right]^{1/2} \quad (2.74)$$

ersetzt werden ([12], [17]). Der Koeffizient ϵ_{rs} beschreibt die Kopplung zwischen den Eigenschwingungen r und s . Er wird für $r=s$ zu eins und geht für $r \neq s$ mit zunehmendem Abstand der Frequenzen ω_r und ω_s gegen null. In [12] wird ϵ_{rs} in der Form

$$\epsilon_{rs} = \frac{(\zeta'_r \omega_r + \zeta'_s \omega_s)^2}{(\omega_r \sqrt{1-\zeta_r^2} - \omega_s \sqrt{1-\zeta_s^2})^2 + (\zeta'_r \omega_r + \zeta'_s \omega_s)^2} \quad (2.75)$$

mit

$$\zeta'_i = \zeta_i + \frac{2}{\omega_i T} \quad i=r,s \quad T = 10 \text{ sec} \quad (2.76)$$

verwendet, wobei ω_r und ω_s die ungedämpften Kreisfrequenzen und ζ_r , ζ_s die dazugehörigen Dämpfungsraten bezeichnet.

Für die Beurteilung eines Tragwerks werden neben den Verformungen vor allem die inneren Kräfte bzw. Spannungen benötigt. Diese sind zu den Verschiebungen proportional und lassen sich ebenfalls in der Form

$$S_i(t) = \sum_{r=1}^n \psi_{ir} \eta_r(t) \quad (2.77)$$

aus den modalen Anteilen aufbauen. Dabei bezeichnet S_i die i-te Kraft bzw. Spannung und ψ_{ir} den entsprechenden Anteil aus dem r-ten Eigenvektor. Damit kann $|S_i|_{\max}$ analog zu den Verschiebungen gebildet werden.

Die obigen Ueberlegungen bezogen sich zunächst auf den Fall eines einzigen Lasttermes. Bei allgemeiner Belastung nach Gl. (2.64) wird jede Last $p_i(t)$ durch ihr Pseudo-Geschwindigkeitsspektrum ausgedrückt. In den Bildungsgesetzen für die Extremwerte ist dann zusätzlich noch über die Lasten zu summieren.

2.3 Beurteilung

Die Methode der Antwortspektren ist heute das am häufigsten verwendete Näherungsverfahren zur Bestimmung der Erwartungswerte der maximalen Verschiebungen und Kräfte eines dynamisch angeregten Tragwerks. Dabei wird die Anregung durch das Pseudo-Geschwindigkeitsspektrum oder die daraus ableitbaren Spektren für Verschiebung bzw. Beschleunigung beschrieben. Die Extremwerte der Tragwerksgrößen können damit durch Ueberlagerung der Anteile in den einzelnen Eigenschwingungen erhalten werden. Hat man einmal die Eigenfrequenzen und Eigenvektoren des Tragwerks bestimmt, so ist die weitere Rechnung nach der Methode der Antwortspektren wenig aufwendig. Da man sich in vielen Fällen auf die Mitnahme nur weniger Frequenzen beschränken kann, ist oftmals auch der Aufwand für die Eigenwertberechnung gering.

Im Gegensatz zur Fourier-Transformierten einer Anregung enthält das Antwortspektrum keine Information über die zeitlichen Beziehungen der Komponenten in den einzelnen Frequenzen. Die Zeitfunktion lässt sich daher aus ihrem Antwortspektrum nicht mehr zurückgewinnen. Der Verlust der Phasenbeziehungen wird dadurch berücksichtigt, dass man die modalen Anteile meist nicht mit ihrem Betrag, sondern nach Gl. (2.73) bzw. Gl. (2.74) für den erwarteten Extremwert der gesuchten Größe superponiert. Der Extremwert kann dabei über- oder unterschätzt werden.

Aus der Definition des Antwortspektrums folgt, dass die Methode nur für lineare Tragwerke verwendet werden kann, deren modale Bewegungsgleichungen ent-

koppeln. Dies bedeutet, dass die Dämpfungsmatrix $[C]$ beim Uebergang auf Normalkoordinaten eine Diagonalmatrix werden muss. Bei Tragwerken aus verschiedenen Teilen mit stark unterschiedlicher Materialdämpfung oder auch beim Vorliegen lokaler Dämpfungsmechanismen trifft diese Voraussetzung nicht mehr zu. Ebenso wird auf der Seite der Belastungen Unabhängigkeit der Lasten vorausgesetzt. Es können daher insbesondere keine statistischen Abhängigkeiten zwischen den Lasten berücksichtigt werden. Schliesslich liefert die Methode der Antwortspektren grundsätzlich Aussagen über die zu erwartenden Extremwerte der Verschiebungen und der - zu den Verschiebungen proportionalen - inneren Kräfte bzw. Spannungen. Hingegen können über die Extremwerte der wirklichen Geschwindigkeiten oder, bei gedämpften Tragwerken, der Beschleunigungen keine Aussagen gemacht werden. Auch wenn die Verschiebungen und Kräfte meistens die grösste Bedeutung besitzen, so muss doch diese Beschränkung auf nur einen Teil der das Tragwerksverhalten charakterisierenden Grössen als methodischer Nachteil angesehen werden.

3. PROBABILISTISCHE TRAGWERKSDYNAMIK

3.1 Zufallsprozesse

Ein Zufallsprozess ist beschrieben durch n stochastische Variable x_i , $i = 1, \dots, n$, $n \rightarrow \infty$, welchen das gleiche physikalische Phänomen zugrunde liegt. Im hier interessierenden Zusammenhang sollen die Variablen x_i nur von der Zeit t abhängen. Für eine feste Zeit t_1 (Fig. 3.1) ist der Erwartungswert

Fig. 3.1: Funktion $x_i(t)$ eines Zufallsprozesses

der Variablen $x_i(t_1)$ definiert als

$$\mu(t_1) = E[x(t_1)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t_1) \quad n \rightarrow \infty \quad (3.1)$$

Die Varianz σ_x^2 zur Zeit t_1 ist

$$\sigma_x^2(t_1) = E[(x(t_1) - \mu(t_1))^2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [x_i(t_1) - \mu(t_1)]^2 \quad n \rightarrow \infty \quad (3.2)$$

Der Prozess heisst stationär, falls alle Mittelwerte wie beispielsweise Erwartungswert und Varianz unabhängig von der betrachteten Zeit t_1 sind. Für einen stationären Prozess lässt sich durch entsprechende Wahl des Bezugspunktes immer erreichen, dass der Erwartungswert $\mu = 0$ wird. Damit folgt für die Varianz nach Gl. (3.2)

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2(t) \quad n \rightarrow \infty \quad (3.3)$$

wobei t eine beliebige aber feste Zeit bezeichnet. Für die Kovarianz μ_{12} der stochastischen Variablen $x_i(t_1)$ und $x_i(t_2) = x_i(t_1 + \tau)$ entsprechend Figur 3.1 erhält man analog für einen stationären Prozess mit Mittelwert Null

$$\begin{aligned} \mu_{12}(\tau) &= E[(x(t_1) - \mu(t_1))(x(t_2) - \mu(t_2))] = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t_1) x_i(t_1 + \tau) \quad n \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.4)$$

Man beachte, dass für stationäre Zufallsprozesse die Kovarianz μ_{ij} für zwei allgemeine Zeiten t_i und t_j nur von der Differenz $\tau = t_j - t_i$ abhängt.

Ein Zufallsprozess liefert für jede Zeit t eine stochastische Variable $x(t)$. Zur vollständigen Beschreibung des Prozesses im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist also die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte aller dieser Variablen nötig. In vielen Fällen kann die Verteilung als Gauss'sche Verteilung (Normalverteilung) angenommen werden. Die Begründung dafür liegt im zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wonach die Ueberlagerung von statistisch unabhängigen Variablen zu einer normalverteilten Variablen führt. Die Normalverteilung ist mit den Varianzen und Kovarianzen der stochastischen Variablen vollständig bestimmt. Man definiert die Autokorrelationsfunktion des Zufallsprozesses $x(t)$ als

$$R_x(t_1, t_2) = E[(x(t_1) - \mu(t_1))(x(t_2) - \mu(t_2))] \quad (3.5)$$

$R_x(t_1, t_2)$ entspricht nach Gl. (3.4) der Kovarianz μ_{12} . Für einen stationären Prozess mit Mittelwert Null kommt insbesondere

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t_1) x_i(t_1 + \tau) \quad n \rightarrow \infty \quad (3.6)$$

Weiterhin gelten die Beziehungen

$$R_x(0) = \sigma_x^2 \quad (3.7)$$

$$R_x(-\tau) = R_x(\tau) \quad (3.8)$$

Die Autokorrelationsfunktion ist ein Mass für die statistische Abhängigkeit der stochastischen Variablen des Zufallsprozesses und liefert alle Varianzen und Kovarianzen. Für n auf ihren Mittelwert bezogene stochastische Variable

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \\ \vdots \\ x_n - \mu_n \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

ist die Normalverteilung durch

$$P(\{x\}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\mu|^{-\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \{x\}^T [\mu]^{-1} \{x\}} \quad (3.10)$$

mit der Kovarianzmatrix

$$[\mu] = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu_{2n} \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ \mu_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

gegeben. Die Diagonalterme von $[\mu]$ entsprechen im allgemeinen Fall den Varianzen und werden für stationäre Prozesse alle gleich σ_x^2 . Für statistisch unabhängige Prozesse verschwinden zudem die Kovarianzen, d.h. $[\mu]$ wird zur Diagonalmatrix. Mit R_x sind alle Elemente von $[\mu]$ bekannt. Die Autokorrelationsfunktion bestimmt also einen Gauss'schen Prozess vollständig.

Ein stationärer Zufallsprozess lässt sich statt durch $R_x(\tau)$ im Zeitbereich auch durch sein Leistungsspektrum $S_x(\Omega)$ im Frequenzbereich vollständig beschreiben. Das Leistungsspektrum soll definiert werden als der doppelte Wert der Fourier-Transformierten von $R_x(\tau)$:

$$S_x(\Omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\Omega\tau} d\tau = 4 \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos \Omega\tau d\tau \quad (3.12)$$

Aus Gl. (3.12) folgt, dass auch $S_x(\Omega)$ eine gerade Funktion ist. Die inverse Transformation liefert

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\Omega) e^{i\Omega\tau} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S_x(\Omega) \cos \Omega\tau d\Omega \quad (3.13)$$

Für $\tau = 0$ folgt aus Gl. (3.13) und Gl. (3.7)

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S_x(\Omega) d\Omega \quad (3.14)$$

Das Leistungsspektrum entspricht also dem Beitrag an die Varianz des Prozesses pro Frequenzeinheit. Mit der aus Gl. (3.12) mit Gl. (3.6) folgenden Beziehung

$$\begin{aligned} S_x(\Omega) &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} x_k(t) x_k(t+\tau) e^{-i\Omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} x_k(t) e^{i\Omega t} x_k(\eta) e^{-i\Omega\eta} d\eta \quad n \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.15)$$

mit

$$\eta = t + \tau \quad (3.16)$$

erhält man unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die anregenden Funktionen $x_k(t)$ in den Anwendungen nur für $0 \leq t \leq T$ definiert sind, durch Integration von Gl. (3.15) über t

$$S_x(\Omega) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2 |X_k(\Omega)|^2}{T} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_{x_k}(\Omega) \quad n \rightarrow \infty \quad (3.17)$$

Dabei bezeichnet $X_k(\Omega)$ die Fourier-Transformierte von $x_k(t)$ entsprechend Gl. (2.24). $S_x(\Omega)$ ist demnach der Erwartungswert der Leistungsspektren

$$S_{x_k}(\Omega) = \frac{2 |X_k(\Omega)|^2}{T} \quad (3.18)$$

der einzelnen Funktionen des Prozesses. Ein interessanter Zusammenhang mit den Funktionen im Zeitbereich ergibt sich durch Integration von Gl. (3.7) für $\tau = 0$ über die Dauer T . Man erhält

$$\int_0^T R_x(0) dt = T \sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^T x_i^2(t) dt \quad n \rightarrow \infty \quad (3.19)$$

und durch Vergleich mit Gl. (3.14) und Gl. (3.17)

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\int_0^T x_i^2(t) dt}{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi} \frac{2 \int_0^\infty |X_i(\Omega)|^2 d\Omega}{T} \quad n \rightarrow \infty \quad (3.20)$$

Die Varianz σ_i^2 der Funktionen $x_i^2(t)$ des Zufallsprozesses ist aber entsprechend Gl. (3.14) und Gl. (3.18) unter Berücksichtigung von Gl. (3.20) durch

$$\sigma_{x_i}^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{2 \int_0^\infty |X_i(\Omega)|^2 d\Omega}{T} = \frac{\int_0^T x_i^2(t) dt}{T} \quad (3.21)$$

gegeben. Die Varianz σ_x^2 ist demnach der Erwartungswert der $\sigma_{x_i}^2$ und entspricht dem erwarteten zeitlichen Durchschnitt von $x^2(t)$. Die aus Gl. (3.21) folgende Beziehung

$$\int_0^T x^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |X(\Omega)|^2 d\Omega \quad (3.22)$$

ist ein Spezialfall der Parseval'schen Gleichung. Fasst man die Funktionen $x_i(t)$ als die Belastung eines ungedämpften Einmassenschwingers der Masse $m = 1$ und der Frequenz Ω auf, so folgt aus Gl. (2.37) mit Gl. (2.34)

$$|X(\Omega)|^2 = 2 E(\Omega) \quad (3.23)$$

wobei $E(\Omega)$ die Energie des Schwingers am Ende der Anregung bezeichnet. Die durchschnittliche Leistung während der Anregungsdauer T beträgt

$$\frac{E(\Omega)}{T} = \frac{1}{2} \frac{|X(\Omega)|^2}{T} \quad (3.24)$$

Man sieht durch Vergleich mit Gl. (3.17) und Gl. (3.18), dass $S_x(\Omega)$ bis auf einen konstanten Faktor dem Erwartungswert der durchschnittlichen Leistung pro Frequenzeinheit für die Frequenz Ω entspricht. Die Varianz σ_x^2 ist als Integral nach Gl. (3.14) demnach proportional zum Erwartungswert der durchschnittlichen Gesamtleistung des Prozesses.

Ein stationärer Gauss'scher Prozess ist durch sein Leistungsspektrum ebenso vollständig wie durch seine Autokorrelationsfunktion beschrieben, da beide Funktionen durch eine Fourier-Transformation ein-eindeutig verknüpft sind. Für eine einzige stochastische Variable x mit Mittelwert Null erhält man insbesondere nach Gl. (3.10) die Wahrscheinlichkeitsdichte zu

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma_x})^2} \tag{3.25}$$

Man nennt σ_x die Streuung der Variablen x . Durch Integration von Gl. (3.25) lassen sich in bekannter Weise die Wahrscheinlichkeiten ϕ für das Ueberschreiten der Sicherheitsgrenze

$$|x| = \kappa \sigma_x \tag{3.26}$$

angeben.

ϕ	κ
0.50	0.675
0.10	1.645
0.05	1.960
0.01	2.576
0.001	3.291

Tab. 3.1: Werte ϕ und κ für Sicherheitsgrenzen nach Normalverteilung

Tabelle 3.1 gibt einige repräsentative Werte für ϕ und κ . Bei gegebener Eintretenswahrscheinlichkeit ϕ erhält man damit die dazugehörigen Sicherheitsgrenzen $\pm \kappa \sigma_x$.

Für die Beschreibung starker Erdbeben als stationärer stochastischer Prozess wird das Leistungsspektrum der anregenden Bodenbeschleunigung $\ddot{x}(t)$ nach Kanai und Tajimi ([2]), [30]) oftmals mit

$$S_x(\Omega) = S_0 \frac{1 + 4 \zeta_g^2 (\frac{\Omega}{\omega_g})^2}{[1 - (\frac{\Omega}{\omega_g})^2]^2 + 4 \zeta_g^2 (\frac{\Omega}{\omega_g})^2} \tag{3.27}$$

angesetzt. Dabei bezeichnet ω_g die unterste Eigenfrequenz des Bodens, ζ_g die Dämpfungsrate des Bodens und S_0 einen Skalierungsfaktor. Für die Werte

$$\begin{aligned} \omega_g &= 15.5 \text{ rad s}^{-1}; \quad \zeta_g = 0.64; \\ S_0 &= 0.00048 \text{ m}^2 \text{ s}^{-3} \end{aligned} \tag{3.28}$$

entspricht das Leistungsspektrum der Gl. (3.27) gut den für Housner's Antwortspektren verwendeten Beben ([2], [27]). Fig. 3.2 zeigt den Verlauf von $S_x(\Omega)/S_0$ nach Gl. (3.27) für $\Omega/\omega_g \geq 0$ bei verschiedenen Dämpfungsraten ζ_g . Man sieht, dass das Leistungsspektrum für zunehmende Werte $\Omega/\omega_g > 1$ rasch abnimmt. Gl.(3.27) basiert auf der Annahme einer Anregung durch

Fig.3.2: Leistungsspektrum nach Kanai und Tajimi

einen Prozess konstanten Leistungsspektrums (White-Noise-Prozess), der durch einen den Boden charakterisierenden Einmassenschwinger gefiltert wird. Andere Formen des Leistungsspektrums für Erdbebenanregung sind vorgeschlagen worden ([9]), welche sich durch die Form des Zählerpolynoms von Gl. (3.27) unterscheiden. Dadurch kann insbesondere erreicht werden, dass für $|\Omega| \geq \Omega_E$ $S_x = 0$ wird, d.h. Energie nur in den Frequenzen $|\Omega| \leq \Omega_E$ übertragen wird. Im folgenden soll das Leistungsspektrum einer Erdbebenanregung in der Form

$$S_x(\Omega) = S_0 \frac{Z(\Omega)}{(\omega_g^2 - \Omega^2)^2 + 4 \zeta_g^2 \omega_g^2 \Omega^2} \quad (3.29)$$

angenommen werden. Das Zählerpolynom $Z(\Omega)$ wird bei Verwendung von Gl. (3.27) zu

$$Z(\Omega) = \omega_g^4 + 4 \zeta_g^2 \omega_g^2 \Omega^2 \quad (3.30)$$

Von besonderem Interesse ist der zu erwartende Extremwert $|x|_{\max}$ der Funktionen eines Zufallsprozesses. Dieser lässt sich aus der Wahrscheinlichkeitsdichte der Extremwerte berechnen. Zu ihrer Bestimmung benötigt man die Varianz σ_x^2 des Prozesses $\dot{x}(t)$ der Geschwindigkeiten. Aus Gl. (3.6) und Gl. (3.13) erhält man zunächst die Beziehung

$$R_{\dot{x}}(\tau) = - \frac{d^2 R_x(\tau)}{d\tau^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \Omega^2 S_x(\Omega) \cos \Omega \tau \, d\Omega \quad (3.31)$$

und schliesst daraus

$$S_{\dot{x}}(\Omega) = \Omega^2 S_x(\Omega) \quad (3.32)$$

Allgemein wird das Leistungsspektrum der n-ten zeitlichen Ableitung $\frac{d^n x}{dt^n}$ des Prozesses zu

$$S_{\frac{d^n x}{dt^n}} = \Omega^{2n} S_x(\Omega) \quad (3.33)$$

Für die Varianz $\sigma_{\dot{x}}^2$ kommt

$$\sigma_{\dot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \Omega^2 S_x(\Omega) \, d\Omega \quad (3.34)$$

und ein entsprechendes Ergebnis gilt für die Varianzen der höheren Ableitungen.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte der statistisch unabhängigen Prozesse $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ mit Mittelwerten Null ist bei Annahme einer Normalverteilung entsprechend Gl. (3.10) durch

$$p(x, \dot{x}) = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_{\dot{x}}} e^{-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{\sigma_x} \right)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\sigma_{\dot{x}}} \right)^2 \right]} \quad (3.35)$$

gegeben. Die Wahrscheinlichkeit, dass x einen Wert x_m mit positiver Steigung gerade überschreitet (Fig. 3.1), ist demnach

$$P(x_m) = \int_{\dot{x}=0}^{\infty} p(x_m, \dot{x}) \dot{x} dx = dt \int_{\dot{x}=0}^{\infty} p(x_m, \dot{x}) \dot{x} d\dot{x} \quad (3.36)$$

mit

$$dx = \dot{x} dt \quad (3.37)$$

Für $x_m = 0$ erhält man aus Gl. (3.36) mit Gl. (3.35) nach Division durch dt die zu erwartende Frequenz f des Prozesses zu

$$f = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_{\dot{x}}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}}{\sigma_{\dot{x}}} \right)^2} \dot{x} d\dot{x} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\int_0^{\infty} \Omega^2 S_x(\Omega) d\Omega}{\int_0^{\infty} S_x(\Omega) d\Omega} \right]^{1/2} \quad (3.38)$$

Die Varianzen sind aber nach den früheren Ueberlegungen proportional zu den Erwartungswerten der durchschnittlichen Gesamtleistungen und entsprechen damit Energieausdrücken. Das Bildungsgesetz für f als Quotient zweier Energieausdrücke erinnert daher an einen Rayleigh-Quotienten. Die erwartete Frequenz f spielt eine zentrale Rolle in der Ermüdungsanalyse von Tragwerken unter stochastischen Lasten.

Für einen Zufallsprozess mit Mittelwert Null wird die zu erwartende Anzahl Ueberschreitungen von $|x_m|$ in der Zeit T gleich

$$n(|x_m|) = 2 \frac{T}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_m}{\sigma_x} \right)^2} = 2 f T e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_m}{\sigma_x} \right)^2} \quad (3.39)$$

Für grosse Werte von $|x_m|$ ist die Wahrscheinlichkeit für $n = r$, d.h., dass r Ueberschreitungen der Schranke $|x_m|$ eintreten, ein seltenes Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch eine Poisson-Verteilung gegeben ist:

$$P(n=r) = \frac{n^r}{r!} e^{-n} \quad (3.40)$$

Für $r = 0$ erhält man die Wahrscheinlichkeit, dass alle während T auftretenden Extrema betragsmässig kleiner als x_m sind, zu

$$P(r=0) = e^{-n} = \exp \left[-2 f T e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_m}{\sigma_x} \right)^2} \right] \quad (3.41)$$

Da Gl. (3.41) die kumulative Wahrscheinlichkeit der Verteilung $p(x_m)$ der Extremwerte darstellt, folgt

$$p(x_m) = \frac{d}{dx_m} P(r=0) = \frac{2f}{\sigma_x} T \left(\frac{x_m}{\sigma_x}\right) \exp \left[-2f T e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_m}{\sigma_x}\right)^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x_m}{\sigma_x}\right)^2 \right] \quad (3.42)$$

Fig. 3.3: Wahrscheinlichkeitsdichte der Extremwerte der normierten Variablen x ($\sigma_x = 1$)

Fig. 3.3 zeigt die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x_m)$ nach Gl. (3.42) für die normierte Variable x der Streuung $\sigma_x = 1$ für verschiedene Werte von $f T$. Die Grösse $f T$ entspricht der Dauer des Zufallsprozesses ausgedrückt in Vielfachen der zu erwartenden Periode $\frac{1}{f}$.

Aus Gl. (3.41) erhält man für die Wahrscheinlichkeit ϕ des Ueberschreitens der Sicherheitsgrenze

$$|x_m| = \kappa \sigma_x \quad (3.43)$$

den Ausdruck

$$\phi = 1 - \exp \left(-2f T e^{-\frac{1}{2} \kappa^2} \right) \quad (3.44)$$

beziehungsweise

$$\kappa = \sqrt{2 \ln \frac{2f T}{\ln \frac{1}{1-\phi}}} \quad (3.45)$$

$\begin{matrix} \text{fT} \\ \phi \end{matrix}$	κ				
	1	10	100	1000	10000
0.50	1.456	2.593	3.366	3.992	4.532
0.10	2.426	3.239	3.886	4.439	4.930
0.05	2.707	3.454	4.067	4.598	5.074
0.01	3.254	3.898	4.449	4.940	5.386
0.001	3.899	4.450	4.941	5.387	5.798

Tab. 3.2 Werte ϕ und κ für Sicherheitsgrenzen nach Extremwertverteilung

Tabelle 3.2 zeigt einige Werte von ϕ und κ . Vergleich mit den aus der Normalverteilung des Prozesses erhaltenen Werten nach Tabelle 3.1 zeigt, dass bei vorgegebener Eintretenswahrscheinlichkeit ϕ die Sicherheitsgrenzen $\pm \kappa \sigma_x$ stark von der bezogenen Dauer $f T$ des Prozesses abhängen und höher als die nur aus der Normalverteilung gegebenen Grenzen liegen.

Aus Gl. (3.42) erhält man den erwarteten Extremwert $|x|_{\max}$ sowie die dazugehörige Varianz $\sigma_{\max}^2$ zu

$$|x|_{\max} = E[x_m] = \int_0^{\infty} x_m p(x_m) dx_m \quad (3.46)$$

$$\sigma_{\max}^2 = E[(x_m - |x|_{\max})^2] = \int_0^{\infty} (x_m - |x|_{\max})^2 p(x_m) dx_m \quad (3.47)$$

Die Integrale lassen sich nach Davenport [10] angenähert mit

$$|x|_{\max} = \sigma_x \left(\sqrt{2 \ln 2f T} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln 2f T}} \right) \quad (3.48)$$

$$\sigma_{\max}^2 = \sigma_x^2 \left(\frac{\pi^2}{6} \frac{1}{2 \ln 2f T} \right) \quad (3.49)$$

auswerten, wobei $\gamma = 0.577216$ die Euler'sche Konstante bedeutet. Man sieht, dass die Varianz für zunehmende Werte von $f T$ abnimmt, die Verteilung also immer enger um den Erwartungswert liegt. Da die Verteilung $p(x_m)$ nach Gl. (3.42) nicht symmetrisch ist (Fig. 3.3), entspricht $|x|_{\max}$ nicht dem wahrscheinlichsten Wert. Dieser lässt sich aus der Bedingung

$$\frac{d p(x_m)}{dx_m} = 0 \quad (3.50)$$

ermitteln und ist kleiner als der Erwartungswert. Damit Gl. (3.48) und Gl. (3.49) physikalisch sinnvolle Werte ergeben, muss

$$\ln 2f T > 0 \quad (3.51)$$

sein. Daraus folgt mit

$f\ T > 0.5$

(3.52)

eine untere Grenze für die bezogene Dauer $f\ T$. In Tabelle 3.3 sind die numerischen Werte von $|x|_{\max}$, $\sigma^2_{\max}$ sowie der Streuung $\sigma_{\max}$ für die normalisierte Variable x mit $\sigma_x = 1$ angegeben. Die Erwartungswerte und Streuungen sind ebenfalls in Fig. 3.3 eingetragen.

$f\ T$	$ x _{\max}$	$\sigma^2_{\max}$	$\sigma_{\max}$
1	1.6677	1.1866	1.0893
10	2.6836	0.2746	0.5240
100	3.4326	0.1552	0.3940
1000	4.0470	0.1082	0.3290
10000	4.5802	0.0831	0.2882

Tab. 3.3 Erwartungswert, Varianz und Streuung der Extremwerte für die normalisierte Variable x ($\sigma_x=1$)

Für grosse Werte von $f\ T$ kann man den zweiten Term in Gl. (3.48) vernachlässigen und den erwarteten Extremwert $|x|_{\max}$ vereinfacht mit

$|x|_{\max} = \sigma_x \sqrt{2 \ln 2f\ T}$

(3.53)

berechnen. Setzt man in Gl.(3.39) $n=1$ und löst nach x_m auf, so erhält man ebenfalls die Beziehung der Gl. (3.53). Der erwartete Extremwert $|x|_{\max}$ nach Gl. (3.53) entspricht also jenem Wert x_m , welcher während der bezogenen Dauer $f\ T$ des Zufallsprozesses genau einmal überschritten wird.

Ein stationärer Gauss'scher Prozess wird durch sein Leistungsspektrum ebenso wie durch seine Autokorrelationsfunktion im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung vollständig beschrieben. Umgekehrt lassen sich aber auch aus einem gegebenen Leistungsspektrum Zeitfunktionen $x_r(t)$ mit den entsprechenden statistischen Eigenschaften aufbauen. So besitzt ein Prozess mit den Funktionen

$$x_i(t) = A \sum_{n=n_1}^{n_2} \cos (n\Omega t + \theta_n)$$

(3.54)

nach Durchführung der Grenzübergänge $\Omega \rightarrow 0$, $\frac{A^2}{\Omega} \rightarrow S_0$, $n_1\Omega \rightarrow \Omega_1$ und $n_2\Omega \rightarrow \Omega_2$ das Leistungsspektrum

$$S_x(\Omega) = \begin{cases} S_0 & \Omega_1 \leq |\Omega| \leq \Omega_2 \\ 0 & |\Omega| < \Omega_1 ; |\Omega| > \Omega_2 \end{cases}$$

(3.55)

Der Phasenwinkel θ_n ist dabei eine stochastische Variable der konstanten Wahrscheinlichkeitsdichte

$p(\theta) = \frac{1}{2\pi}$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

(3.56)

Durch Superposition von Prozessen der Form der Gl. (3.54) und Grenzübergang kann im Zeitbereich ein Prozess mit vorgegebenem Leistungsspektrum aufgebaut werden. Man beachte, dass die Funktionen $x_i(t)$ durch $S_x(\Omega)$ nur im statisti-

schen Sinne, nicht aber bezüglich des deterministischen Verlaufes der einzelnen Funktionen festgelegt sind.

3.2 Tragwerksantwort

Als Vorbereitung soll zunächst noch einmal der Einmassenschwinger der Fig. 2.1 betrachtet werden, wobei die Anregung $p(t)$ bzw. $x(t)$ einen stationären Gauss'schen Zufallsprozess darstellen soll. Aus einer Fourier-Transformation der Bewegungsgleichung (2.4) unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $q(0) = \dot{q}(0) = 0$ erhält man von früher

$$Q(\Omega) = \frac{1}{m} H(\Omega) P(\Omega) \quad (2.42)$$

mit dem Frequenzgang

$$H(\Omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2 i \zeta \omega_0 \Omega} \quad (2.41)$$

Multiplikation beider Seiten mit dem konjugiert komplexen Ausdruck liefert

$$|Q(\Omega)|^2 = \frac{1}{m^2} |H(\Omega)|^2 |P(\Omega)|^2 \quad (3.57)$$

und durch Uebergang auf die Leistungsspektren nach Gl. (3.17) erhält man

$$S_q(\Omega) = |H(\Omega)|^2 S_p(\Omega) \quad (3.58)$$

mit

$$S_p(\Omega) = \frac{1}{m^2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2|P_i(\Omega)|^2}{T} \quad n \rightarrow \infty \quad (3.59)$$

$$S_q(\Omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2|Q_i(\Omega)|^2}{T} \quad n \rightarrow \infty \quad (3.60)$$

und

$$|H(\Omega)|^2 = H_{00}(\omega_0, \zeta, \Omega) = \frac{1}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4 \zeta^2 \omega_0^2 \Omega^2} \quad (3.61)$$

Damit ist das Leistungsspektrum $S_q(\Omega)$ des Output-Prozesses $q(t)$ aus dem Leistungsspektrum $S_p(\Omega)$ des Input-Prozesses $1/m p(t)$ ermittelbar. Bei Anregung durch eine Bodenbeschleunigung $\ddot{x}(t)$ erhält man analog

$$S_q(\Omega) = |H(\Omega)|^2 S_x(\Omega) = H_{00}(\omega_0, \zeta, \Omega) S_x(\Omega) \quad (3.62)$$

wobei $S_x(\Omega)$ das Leistungsspektrum des Prozesses $\ddot{x}(t)$ bezeichnet. Da voraus-

setzungsgemäss immer $m = 1$ gilt, sind Gl. (3.58) und Gl. (3.62) völlig analog und werden als das Uebertragungsfunktions-Theorem bezeichnet. Mit $S_q(\Omega)$ sind ebenfalls die Leistungsspektren der zu $q(t)$ proportionalen Grössen (Kräfte, Spannungen) wie auch nach Gl. (3.33) die Leistungsspektren der zeitlichen Ableitungen von $q(t)$ bekannt. Entsprechend den früheren Ergebnissen können aus dem Leistungsspektrum der interessierenden Tragwerksgrösse sofort die Varianz, die zu erwartende Frequenz, der zu erwartende Extremwert sowie Sicherheitsgrenzen ermittelt werden.

In den hier gemachten Ueberlegungen wurde der anregende Prozess als ein stationärer Gauss'scher Zufallsprozess vorausgesetzt. Da lineares Tragwerks-

ζ	T/T_0		
	$s = 0.10$	$s = 0.05$	$s = 0.01$
0.01	18.3	23.8	36.7
0.02	9.3	11.9	18.3
0.05	3.8	4.8	7.3
0.10	1.9	2.4	3.8
0.20	0.9	1.3	1.9

man einen ebenfalls normalverteilten Output-Prozess. Allerdings ist dieser Prozess nicht von vorneherein stationär. Da der Schwinger aus der Ruhelage heraus angeregt wird, erfolgt vielmehr ein Einschwingvorgang, welcher erst nach einer bestimmten Zeit T

Tab. 3.4 Einschwingzeiten für stationäre Tragwerksantwort

in die stationäre Bewegung übergeht. (Gl. 3.58) bzw. Gl. (3.62) gelten

als zeitunabhängige Beziehungen nur für diesen stationären Anteil der Tragwerksantwort. Der Output-Prozess wird umso schneller stationär, je grösser die Dämpfung des Tragwerks ist. Für einen Einmassenschwinger der Kreisfrequenz ω_0 und der Dämpfungsrate ζ unter einem White-Noise-Prozess, d.h. einem Prozess mit dem konstanten Leistungsspektrum S_0 , wird die Varianz der Bewegung $q(t)$ nach [2], [8] für die hier gewählte Definitionsgleichung (3.12) des Leistungsspektrums zu

$$\sigma_q^2 = \frac{S_0}{8 \zeta \omega_0^3} [1-s(t)] \quad (3.63)$$

wobei

$$s(t) = e^{-2\zeta\omega_0 t} \left(1 + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin 2\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t + \frac{2\zeta^2}{1-\zeta^2} \sin^2 \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t \right) \quad (3.64)$$

den instationären Anteil bedeutet. In Tabelle 3.4 sind die auf die Periode T_0 des Einmassenschwingers bezogenen Einschwingzeiten

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\omega_0 T}{2\pi} \quad (3.65)$$

für das Erreichen vorgegebener Werte $s(\frac{T}{T_0})$ bei verschiedenen Dämpfungsraten ζ angegeben. Man sieht, dass für grössere Dämpfungsraten der stationäre Zustand rasch erreicht wird.

Die Bewegungsgleichungen eines allgemeinen diskretisierten Tragwerks sind

durch

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{p\} \quad (2.48)$$

gegeben. Grundsätzlich kann der Vektor der Leistungsspektren der Freiheitsgrade $\{q\}$ durch Fourier-Transformation von Gl. (2.48), Multiplikation mit dem konjugiert-komplexen Ausdruck und Mittelwertbildung aus dem Vektor der Leistungsspektren der Belastung $\{p\}$ aufgebaut werden, ohne dass auf Normalkoordinaten übergegangen werden muss. Dabei wird der Zusammenhang zwischen Input- und Output-Prozessen im wesentlichen durch die komplexe Matrix

$$[H(\Omega)] = [-\Omega^2[M] + i\Omega[C] + [K]]^{-1} \quad (3.66)$$

beschrieben. Die Berechnung von $[H(\Omega)]$ über den massgebenden Frequenzbereich kann aber bei grösseren Systemen aufwendig sein. Aus diesem Grund ist der Uebergang auf Normalkoordinaten fast immer zu empfehlen.

Unter den früher gemachten Voraussetzungen erhält man bei Transformation von Gl. (2.48) auf die n Normalkoordinaten $\eta_1, \dots, \eta_n$ mit Hilfe von Gl. (2.56) die n Einmassenschwingergleichungen

$$\ddot{\eta}_r + 2\zeta_r \omega_r \dot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = \frac{p_r}{m_r} \quad r = 1, \dots, n \quad (2.61)$$

mit der Belastung

$$p_r(t) = \{\varphi_r\}^T \{p(t)\} \quad (2.60)$$

Durch entsprechende Normierung der Eigenvektoren kann wiederum $m_r = 1$ erreicht werden. Gl. (2.61) gilt unter der Voraussetzung, dass die Dämpfungsmatrix beim Uebergang auf Normalkoordinaten entkoppelt. Man kann für die probabilistische Untersuchung diese Voraussetzung grundsätzlich fallen lassen und erhält dann eine $n \times n$ Dämpfungsmatrix, durch welche die modalen Gleichungen gekoppelt werden. Die weitere Behandlung erfolgt wie für das volle System der Gl. (2.48), allerdings mit nurmehr n Freiheitsgraden. Für den hier interessierenden Zusammenhang mit der Methode der Antwortspektren soll aber vorausgesetzt werden, dass die modalen Gleichungen entkoppeln.

Bestehen die Komponenten des Lastvektors $\{p\}$ aus stationären normalverteilten Zufallsprozessen, so entsprechen $p_r(t)$ und $\eta_r(t)$ ebenfalls solchen Prozessen. Für die Verschiebung $q_i(t)$ gilt wiederum

$$q_i(t) = \sum_{r=1}^n \varphi_{ir} \eta_r(t) \quad (2.71)$$

und für die zu den Verschiebungen proportionalen Tragwerksgrössen gilt die analoge Gl. (2.77). Bezeichnet man allgemein mit $\{\psi_i\}^T$ die modalen Beiträge

zur Tragwerksgrösse S_i und mit $\{\hat{\eta}(t)\}$ den Vektor der Normalkoordinaten bzw. ihrer zeitlichen Ableitungen, so gilt

$$S_i = \{\psi_i\}^T \{\dot{\eta}(t)\} \quad (3.67)$$

bzw. mit der Matrix $[\Psi]$ der modalen Anteile

$$\{S\} = [\Psi]\{\dot{\eta}(t)\} \quad (3.68)$$

Bezeichnet $\{S\}$ die Verschiebungen $\{q\}$, so wird $\{\hat{\eta}\} = \{\eta\}$ und $[\Psi] = [\Phi]$. $\{\psi_i\}^T$ entspricht dann der i -ten Zeile von $[\Phi]$.

Die Fourier-Transformation von Gl. (2.71) liefert unter Verwendung der obigen Bezeichnungen

$$Q_i(\Omega) = \{\psi_i\}^T \{\eta(\Omega)\} \quad (3.69)$$

mit

$$\eta_r(\Omega) = \int_0^{\infty} \eta_r(t) e^{-i\Omega t} dt \quad (3.70)$$

Multiplikation beider Seiten mit dem konjugiert-komplexen Ausdruck und Durchführung des Grenzüberganges nach Gl. (3.17) für die Leistungsspektren liefert

$$S_{q_i}(\Omega) = \{\psi_i\}^T [S^n(\Omega)] \{\psi_i\} \quad (3.71)$$

Die Matrix $[S^n(\Omega)]$ soll als modale Spektralmatrix bezeichnet werden. Ihre Elemente

$$S_{rs}^n(\Omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2 \eta_r(\Omega) \bar{\eta}_s(\Omega)}{T} \quad n \rightarrow \infty \quad (3.72)$$

sind die Leistungsspektren ($r = s$) und die Cross-Spektren ($r \neq s$) der Normalkoordinaten. Die Cross-Spektren sind ein Mass für die statistische Abhängigkeit der Prozesse $\eta_r(t)$ und $\eta_s(t)$. Entsprechend lassen sich auch Cross-Spektren der Output-Prozesse $q_i(t)$ und $q_j(t)$ definieren. Man erhält

$$S_{q_i, q_j}(\Omega) = \{\psi_i\}^T [S^n(\Omega)] \{\psi_j\} \quad (3.73)$$

Interessiert man sich nur für die Leistungsspektren $S_{q_i}(\Omega)$ entsprechend Gl. (3.71) und nicht auch für die Cross-Spektren, so folgt aus

$$S_{rs}^n(\Omega) = \overline{S_{sr}^n(\Omega)} \quad (3.74)$$

dass man sich auf die Berechnung der Realteile beschränken kann, da durch den symmetrischen Aufbau der Gl. (3.71) die Imaginärteile herausfallen. Mit

Hilfe von $[S^n(\Omega)]$ können ebenfalls alle zu den Verschiebungen proportionalen Grössen aufgebaut werden, wobei $\{\psi_i\}$ in Gl. (3.71) nunmehr die entsprechenden modalen Beiträge bezeichnet. Das Leistungsspektrum der n -ten zeitlichen Ableitung von $\eta_r(t)$ ist nach Gl. (3.33) gleich $\Omega^{2n} \mathfrak{P}_r(\Omega)$. Man erhält daher die Spektralmatrizen für Tragwerksgrössen, welche nach Gl. (3.67) bzw. Gl. (3.68) mit zeitlichen Ableitungen von $\eta_r(t)$ aufgebaut werden, durch Multiplikation der Elemente von $[S^n(\Omega)]$ mit Ω^{4n} . Die modale Spektralmatrix besitzt somit eine zentrale Bedeutung für die Bildung der Leistungsspektren und Cross-Spektren aller interessierender Tragwerksgrössen und soll deshalb im folgenden weiter untersucht werden.

Durch eine Fourier-Transformation von Gl. (2.61) erhält man analog zu den früheren Ergebnissen

$$\mathfrak{P}_r(\Omega) = \frac{1}{m_r} H_r(\Omega) P_r(\Omega) \quad (3.75)$$

mit

$$H_r(\Omega) = \frac{1}{\omega_r^2 - \Omega^2 + 2i \zeta_r \omega_r \Omega} \quad (3.76)$$

und

$$P_r(\Omega) = \int_0^\infty p_r(t) e^{-i\Omega t} dt \quad (3.77)$$

Substitution von Gl. (3.75) in Gl. (3.72) gibt

$$S_{rs}^n(\Omega) = \frac{1}{m_r m_s} H_r(\Omega) \overline{H_s(\Omega)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2P_r(\Omega) \overline{P_s(\Omega)}}{T} \quad n \rightarrow \infty \quad (3.78)$$

Definiert man mit

$$S_{rs}^P(\Omega) = \frac{1}{m_r m_s} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2P_r(\Omega) \overline{P_s(\Omega)}}{T} \quad n \rightarrow \infty \quad (3.79)$$

die Leistungsspektren und Cross-Spektren der modalen Belastungen p_r/m_r und p_s/m_s mit $m_r = m_s = 1$, so erhält man

$$S_{rs}^n(\Omega) = H_r(\Omega) \overline{H_s(\Omega)} S_{rs}^P(\Omega) \quad (3.80)$$

Gl. (3.76) liefert

$$H_r(\Omega) \overline{H_s(\Omega)} = \frac{(\omega_r^2 - \Omega^2)(\omega_s^2 - \Omega^2) + 4\zeta_r \zeta_s \omega_r \omega_s \Omega^2 + i[2(\omega_r^2 - \Omega^2)\zeta_s \omega_s \Omega - 2(\omega_s^2 - \Omega^2)\zeta_r \omega_r \Omega]}{[(\omega_r^2 - \Omega^2)^2 + 4\zeta_r^2 \omega_r^2 \Omega^2][(\omega_s^2 - \Omega^2)^2 + 4\zeta_s^2 \omega_s^2 \Omega^2]} \quad (3.81)$$

Der Realteil von $H_r(\Omega) \overline{H_s(\Omega)}$ ist eine gerade Funktion von Ω , während der Imaginärteil eine ungerade Funktion ist. Der Realteil soll im folgenden mit

$$H_{rs}(\Omega) = \text{Re}[H_r(\Omega) \overline{H_s(\Omega)}] = \frac{(\omega_r^2 - \Omega^2)(\omega_s^2 - \Omega^2) + 4\zeta_r \zeta_s \omega_r \omega_s \Omega^2}{[(\omega_r^2 - \Omega^2)^2 + 4\zeta_r^2 \omega_r^2 \Omega^2][(\omega_s^2 - \Omega^2)^2 + 4\zeta_s^2 \omega_s^2 \Omega^2]} \quad (3.82)$$

Fig. 3.4: Verlauf von $H_{rs}(\Omega) = \text{Re}[H_r(\Omega) \cdot \overline{H_s(\Omega)}]$

auszudrücken. Bei dem in den Anwendungen besonders häufigen Fall nur eines Lastterms

$$p_r(t) = L_r p(t) \quad (2.66)$$

mit dem Partizipationsfaktor

$$L_r = \{\phi_r\}^T \{p_o\} \quad (2.67)$$

wird

$$P_r(\Omega) = L_r P(\Omega) \quad (3.84)$$

wobei $P(\Omega)$ die Fourier-Transformierte von $p(t)$ bezeichnet. Damit folgt aus Gl. (3.79)

abgekürzt werden, wobei

$$H_{sr}(\Omega) = H_{rs}(\Omega) \quad (3.83)$$

ist. Fig. 3.4 zeigt den Verlauf von $H_{rs}(\Omega)$ für verschiedene Werte des Frequenzenverhältnisses $\kappa = \omega_s/\omega_r$, $\omega_s \geq \omega_r$ sowie für die Dämpfungsraten $\zeta = \zeta_r = \zeta_s = 0.01$ und $\zeta = 0.10$. Man sieht, dass $H_{rs}(\Omega)$ für zunehmende Werte von κ betragsmäßig rasch abnimmt. Für $\kappa \neq 1$ kann $H_{rs}(\Omega)$ positive wie auch negative Werte annehmen.

Die modalen Belastungen sind nach Gl. (2.64) entsprechend der Belastung in Form der Gl. (2.50) Linearkombinationen von Anregungen des diskretisierten Systems. Damit ist es möglich, $S_{rs}^P(\Omega)$ durch die Leistungsspektren und Cross-Spektren dieser Anregungen

$$S_{rs}^P(\Omega) = L_r L_s \frac{1}{m_r m_s} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2P(\Omega) \bar{P}(\Omega)}{T} \quad n \rightarrow \infty \quad (3.85)$$

Mit dem Leistungsspektrum

$$S_p(\Omega) = \frac{1}{m_r m_s} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2|P(\Omega)|^2}{T} \quad n \rightarrow \infty \quad (3.86)$$

des Prozesses $p(t)$, wobei $m_r = m_s = 1$ ist, erhält man den einfachen Ausdruck

$$S_{rs}^P(\Omega) = L_r L_s S_p(\Omega) \quad (3.87)$$

Im speziell interessierenden Fall der gleichförmigen Anregung des Tragwerks durch eine Auflagerbeschleunigung $\ddot{x}(t)$ ist L_r durch Gl. (2.69) gegeben.

$S_p(\Omega)$ ist durch das Leistungsspektrum $S_x(\Omega)$ des Prozesses $\ddot{x}(t)$ zu ersetzen. Die Berechnung der Terme $S_{rs}^n(\Omega)$ nach Gl. (3.80) vereinfacht sich mit Gl. (3.87) zu

$$S_{rs}^n(\Omega) = L_r L_s H_r(\Omega) \bar{H}_s(\Omega) S_p(\Omega) \quad (3.88)$$

Im Falle einer allgemeinen Anregung

$$p_r(t) = \sum_{i=1}^1 L_{ri} p_i(t) \quad (2.64)$$

erhält man entsprechend

$$S_{rs}^n(\Omega) = H_r(\Omega) \bar{H}_s(\Omega) \sum_{i=1}^1 \sum_{j=1}^1 L_{ri} L_{sj} S_{p_i p_j}(\Omega) \quad (3.89)$$

$S_{p_i p_j}(\Omega)$ bezeichnet die Leistungsspektren bzw. Cross-Spektren der Anregungen $p_i(t)/m_r$. Sind die modalen Belastungen $p_i(t)$ und $p_j(t)$ statistisch unabhängig, so verschwinden die Cross-Spektren und Gl. (3.89) vereinfacht sich zu

$$S_{rs}^n(\Omega) = H_r(\Omega) \bar{H}_s(\Omega) \sum_{i=1}^1 L_{ri} L_{si} S_{p_i}(\Omega) \quad (3.90)$$

Um wahrscheinlichkeitstheoretische Aussagen über die interessierenden Tragwerksgrößen machen zu können, werden die Varianz und die erwartete Frequenz der entsprechenden Output-Prozesse benötigt. Für die Verschiebungen mit dem durch Gl. (3.71) gegebenen Leistungsspektrum wie auch für die dazu proportionalen Größen macht dies nach den Definitionsgleichungen (3.14) und (3.38) die Bildung der Kovarianzmatrizen $[\Sigma_0]$ und $[\Sigma_2]$ erforderlich. Die Elemente von $[\Sigma_0]$ entsprechen den Varianzen bzw. Kovarianzen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{o,rr} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S_{rr}^{\eta}(\Omega) d\Omega \\ \sigma_{o,rs} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S_{rs}^{\eta}(\Omega) d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (3.91)$$

der durch die modale Spektralmatrix gegebenen Prozesse, während die Elemente von $[\Sigma_2]$ den Varianzen bzw. Kovarianzen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{2,rr} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \Omega^2 S_{rr}^{\eta}(\Omega) d\Omega \\ \sigma_{2,rs} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \Omega^2 S_{rs}^{\eta}(\Omega) d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (3.92)$$

der ersten zeitlichen Ableitung dieser Prozesse entsprechen. Analoge Kovarianzmatrizen werden für die zu zeitlichen Ableitungen der Verschiebungen proportionalen Tragwerksgrößen benötigt. Man beachte, dass die Integrationen in Gl. (3.91) und (3.92) eigentlich zwischen den Grenzen $-\infty$, $+\infty$ auszuführen wären. Da aber die Imaginärteile von $S_{rs}^{\eta}(\Omega)$ auch im allgemeinen Fall der Gl. (3.89) ungerade Funktionen von Ω sind genügt es, nur die Realteile von $S_{rs}^{\eta}(\Omega)$ zwischen den Grenzen 0, ∞ zu integrieren. Die Integrationen werden numerisch (z.B. Simpson oder Gauss'sche Integration) durchgeführt. Mit Hilfe der Kovarianzmatrizen erhält man dann beispielsweise für die Verschiebung q_i die Varianz zu

$$\sigma_{q_i}^2 = \{\psi_i\}^T [\Sigma_o] \{\psi_i\} \quad (3.93)$$

und die erwartete Frequenz zu

$$f_{q_i} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\{\psi_i\}^T [\Sigma_2] \{\psi_i\}}{\{\psi_i\}^T [\Sigma_o] \{\psi_i\}} \right]^{1/2} \quad (3.94)$$

Bezeichnet man die Dauer des stationären Output-Prozesses $q_i(t)$ mit T , dann wird nach Gl. (3.48) der zu erwartende Extremwert zu

$$|q_i|_{\max} = \sigma_{q_i} \left(\sqrt{2 \ln 2 f_{q_i} T} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln f_{q_i} T}} \right) \quad (3.95)$$

Analoge Ergebnisse lassen sich für die übrigen Tragwerksgrößen herleiten. Man beachte, dass bei Hinzunahme weiterer Eigenschwingungen für die Berechnung die modale Spektralmatrix wie auch die Kovarianzmatrizen nur um die entsprechenden Kolonnen und Zeilen erweitert werden müssen.

Aus Gl. (3.89) sowie den obigen Überlegungen folgt, dass im Falle allgemeiner Anregung für die Kovarianzmatrizen Integrale der Form

$$J_{rs} = \int_0^{\infty} \Omega^{2n} \operatorname{Re}[H_r(\Omega) \overline{H_s(\Omega)} S_{p_i p_j}(\Omega)] d\Omega \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.96)$$

ausgewertet werden müssen. Da die Frequenzgänge $H_r(\Omega)$ und $H_s(\Omega)$ bei kleinen Dämpfungsraten ausserhalb der jeweiligen Eigenfrequenzen ω_r und ω_s betragsmässig rasch abnehmen und sich mit zunehmendem Abstand $|\omega_r - \omega_s|$ immer weniger überschneiden, werden auch die Terme für $r \neq s$ entsprechend kleiner. Es ist daher zu erwarten, dass für Tragwerke mit gut getrennten Eigenfrequenzen und kleinen dazugehörigen Dämpfungsraten die Kovarianzmatrizen nur in der Nähe der Hauptdiagonalen signifikante Terme besitzen.

Um in diesen Sachverhalt tieferen Einblick zu erhalten und gleichzeitig eine wenig aufwendige Näherungsmethode zur Berechnung der Kovarianzmatrizen für den praktisch am wichtigsten Fall unkorrelierter Anregungen anzugeben, sollen mit Gl. (3.82) die Integrale

$$I_{rs}(\Omega_E) = \int_0^{\Omega_E} H_{rs}(\Omega) d\Omega = \int_0^{\Omega_E} \frac{(\omega_r^2 - \Omega^2)(\omega_s^2 - \Omega^2) + 4\zeta_r \zeta_s \omega_r \omega_s \Omega^2}{[(\omega_r^2 - \Omega^2)^2 + 4\zeta_r^2 \omega_r^2 \Omega^2][(\omega_s^2 - \Omega^2)^2 + 4\zeta_s^2 \omega_s^2 \Omega^2]} d\Omega \quad (3.97)$$

bzw. für $r = s$

$$I_{rr}(\Omega_E) = \int_0^{\Omega_E} H_{rr}(\Omega) d\Omega = \int_0^{\Omega_E} \frac{1}{(\omega_r^2 - \Omega^2)^2 + 4\zeta_r^2 \omega_r^2 \Omega^2} d\Omega \quad (3.98)$$

untersucht werden. Für $r \neq s$ erhält man mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung

$$I_{rs}(\Omega_E) = A_{rs} \ln a_r + A_{sr} \ln a_s + B_{rs} (\arctan b_r + \arctan \bar{b}_r + \arctan b_s + \arctan \bar{b}_s) \quad (3.99)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} a_r &= \frac{\Omega_E^2 - 2\Omega_E \omega_r \sqrt{1-\zeta_r^2} + \omega_r^2}{\Omega_E^2 + 2\Omega_E \omega_r \sqrt{1-\zeta_r^2} + \omega_r^2} \\ a_s &= \frac{\Omega_E^2 - 2\Omega_E \omega_s \sqrt{1-\zeta_s^2} + \omega_s^2}{\Omega_E^2 + 2\Omega_E \omega_s \sqrt{1-\zeta_s^2} + \omega_s^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.100)$$

$$\left. \begin{aligned} b_r &= \frac{\Omega_E + \omega_r \sqrt{1-\zeta_r^2}}{\zeta_r \omega_r} \\ \bar{b}_r &= \frac{\Omega_E - \omega_r \sqrt{1-\zeta_r^2}}{\zeta_r \omega_r} \\ b_s &= \frac{\Omega_E + \omega_s \sqrt{1-\zeta_s^2}}{\zeta_s \omega_s} \\ \bar{b}_s &= \frac{\Omega_E - \omega_s \sqrt{1-\zeta_s^2}}{\zeta_s \omega_s} \end{aligned} \right\} \quad (3.101)$$

und den Koeffizienten

$$\left. \begin{aligned}
 A_{rs} &= \frac{1}{4\Delta\omega_r\sqrt{1-\zeta_r^2}} \left\{ (\omega_r^2 - \omega_s^2)^3 + 2\omega_r\omega_s\zeta_r\zeta_s \{ (\omega_r^2 + \omega_s^2)^2 - 4\omega_r^2[\omega_r^2(1-\zeta_r^2) + \omega_s^2\zeta_s^2] \} \right. \\
 &\quad \left. - 2\omega_r^2\zeta_r^2\{\omega_r^4 - \omega_s^4 - 4\omega_s^2[\omega_r^2(1-\zeta_r^2) - \omega_s^2(1-\zeta_s^2)]\} + 4\omega_r^2\omega_s^2\zeta_s^2(\omega_r^2 - \omega_s^2) \right\} \\
 A_{sr} &= \frac{1}{4\Delta\omega_s\sqrt{1-\zeta_s^2}} \left\{ (\omega_s^2 - \omega_r^2)^3 + 2\omega_r\omega_s\zeta_r\zeta_s \{ (\omega_r^2 + \omega_s^2)^2 - 4\omega_s^2[\omega_s^2(1-\zeta_s^2) + \omega_r^2\zeta_r^2] \} \right. \\
 &\quad \left. - 2\omega_s^2\zeta_s^2\{\omega_s^4 - \omega_r^4 - 4\omega_r^2[\omega_s^2(1-\zeta_s^2) - \omega_r^2(1-\zeta_r^2)]\} + 4\omega_r^2\omega_s^2\zeta_r^2(\omega_s^2 - \omega_r^2) \right\} \\
 B_{rs} &= \frac{1}{\Delta} \{ (\omega_r^4 + \omega_s^4)(\omega_r\zeta_r + \omega_s\zeta_s) - 4\omega_r\omega_s\zeta_r\zeta_s(\omega_r^3\zeta_r + \omega_s^3\zeta_s) - 2\omega_r^2\omega_s^2[\omega_r\zeta_r(1-2\zeta_r^2) + \\
 &\quad + \omega_s\zeta_s(1-2\zeta_s^2)] \} \\
 \Delta &= (\omega_r^2 - \omega_s^2)^4 + 8\omega_r^2\omega_s^2\{ (\omega_r^4 + \omega_s^4)[\zeta_r^2(1-\zeta_s^2) + \zeta_s^2(1-\zeta_r^2)] - 2\omega_r^2\omega_s^2[\zeta_r^2(1-\zeta_r^2) + \\
 &\quad + \zeta_s^2(1-\zeta_s^2)] \}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.102)$$

Man sieht, dass der Term $(\omega_r^2 - \omega_s^2)^4$ im Nenner Δ ein rasches Abnehmen des Integralwertes mit zunehmendem Frequenzenabstand bewirkt.

Für $r = s$ kommt analog

$$I_{rr}(\Omega_E) = A_{rr} \ln a_r + B_{rr} (\arctan b_r + \arctan \bar{b}_r) \quad (3.103)$$

mit

$$\left. \begin{aligned}
 A_{rr} &= - \frac{1}{8\omega_r^3 \sqrt{1-\zeta_r^2}} \\
 B_{rr} &= \frac{1}{4\zeta_r \omega_r^3}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.104)$$

Lässt man die obere Integrationsgrenze Ω_E gegen Unendlich streben, so erhält man

$$\begin{aligned}
 I_{rs}(\Omega_E \rightarrow \infty) &= \int_0^\infty H_{rs}(\Omega) d\Omega \\
 &= 2\pi \frac{(\omega_r^4 + \omega_s^4)(\omega_r\zeta_r + \omega_s\zeta_s) - 4\omega_r\omega_s\zeta_r\zeta_s(\omega_r^3\zeta_r + \omega_s^3\zeta_s) - 2\omega_r^2\omega_s^2[\omega_r\zeta_r(1-2\zeta_r^2) + \omega_s\zeta_s(1-2\zeta_s^2)]}{(\omega_r^2 - \omega_s^2)^4 + 8\omega_r^2\omega_s^2\{ (\omega_r^4 + \omega_s^4)[\zeta_r^2(1-\zeta_s^2) + \zeta_s^2(1-\zeta_r^2)] - 2\omega_r^2\omega_s^2[\zeta_r^2(1-\zeta_r^2) + \zeta_s^2(1-\zeta_s^2)] \}}
 \end{aligned} \quad (3.105)$$

sowie für $r = s$ aus Gl. (3.103) das bekannte Ergebnis

$$I_{rr}(\Omega_E \rightarrow \infty) = \int_0^{\infty} H_{rr}(\Omega) d\Omega = 2\pi \frac{1}{8\zeta_r \omega_r^3} \quad (3.106)$$

Im Falle unkorrelierter Anregungen vereinfachen sich die für die Kovarianzmatrizen auszuwertenden Integrale der Gl. (3.96) zu

$$J_{rs} = \int_0^{\infty} \Omega^{2n} S_p(\Omega) H_{rs}(\Omega) d\Omega \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.107)$$

Eine näherungsweise analytische Auswertung erhält man durch Ersetzen der Anregung

$$F(\Omega) = \Omega^{2n} S_p(\Omega) \quad (3.108)$$

durch ein Treppen-Leistungsspektrum (Fig. 3.5) mit stückweise gleichen Flächen.

Fig. 3.5: Äquivalentes Treppen-Leistungsspektrum.

Da

$$\int_{\Omega_A}^{\Omega_E} H_{rs}(\Omega) d\Omega = I_{rs}(\Omega_E) - I_{rs}(\Omega_A) \quad (3.109)$$

und ein analoges Ergebnis für $r = s$ gilt, lässt sich für Gl. (3.107) eine approximative analytische Lösung mit

$$J_{rs} \approx \sum_{i=1}^n F_i [I_{rs}(\Omega_{E,i}) - I_{rs}(\Omega_{A,i})] \quad (3.110)$$

angeben. Man beachte, dass die Integrationsgrenzen nur in den Parametern a und b der Gl. (3.100) und (3.101) auftreten. Die Genauigkeit des analytisch berechneten Integralwertes nach Gl. (3.110) kann durch Verfeinerung der Treppenkurve praktisch beliebig gesteigert werden. Für die Anwendungen genügen aber oft relativ grobe Approximationen.

Die Vorteile der analytischen Berechnung der Elemente der Kovarianzmatrizen liegen einmal darin, dass die einzige Approximation im Ersetzen der Anregung $F(\Omega)$ durch eine Treppenkurve besteht, die das Tragwerk beschreibende Funktion $H_{rs}(\Omega)$ aber exakt berücksichtigt wird. Weiterhin hat man sich nicht um Fragen der Wahl des Integrationsschrittes bzw. der Genauigkeit bei numerischer Integration zu kümmern. Man sieht aus dem Verlauf von H_{rs} (Fig. 3.4), dass für kleine Dämpfungsrate auch kleine Integrationsschritte gewählt werden müssen. Dementsprechend ist der Rechenaufwand für die numerische Integration fast immer viel höher als bei analytischer Auswertung.

Die obigen Beziehungen lassen sich einfach für die Computerrechnung programmieren. Für kleine Dämpfungsrate ζ_r und ζ_s können die Gleichungen (3.100)

bis (3.104) beispielsweise durch Unterdrückung aller quadratischer Terme ζ_r^2 , ζ_s^2 , $\zeta_r \zeta_s$ sowie durch Reihenentwicklung der $\ln$ - und $\arctan$ -Terme weiter vereinfacht werden. Entsprechend dem in dieser Arbeit eingenommenen Standpunkt der computerorientierten Rechnung sollen aber diese Möglichkeiten hier nicht weiter behandelt werden.

Zur Illustration der Genauigkeitsverhältnisse soll das Integral der Gl. (3.107) für das Leistungsspektrum der Gl. (3.29) für $n = 0$ und $n = 1$ einmal numerisch und einmal approximativ analytisch ausgewertet werden. Dabei wird durch Verwendung des Zählerpolynoms

$$\left. \begin{aligned} Z(\Omega) &= (\omega_g^4 + 4\zeta_g^2 \omega_g^2 \Omega^2) \left[1 - 3 \left(\frac{\Omega}{b \omega_g} \right)^2 + 2 \left(\frac{|\Omega|}{b \omega_g} \right)^3 \right] \\ 0 &\leq |\Omega| \leq b \omega_g \end{aligned} \right\} \quad (3.111)$$

nach Damrath [9] angenommen, dass das anregende Leistungsspektrum Energie nur bis zu einer oberen Frequenz $b \omega_g$ überträgt. Diese Annahme ist physikalisch plausibel und hat auf der numerischen Seite die Konsequenz, dass das Integral Gl. (3.107) auch für $n \neq 0$ konvergiert. Für $b = 10$ erhält man damit

$$S_x(\Omega) = S_0 \frac{[1 + 4\zeta_g^2 (\frac{\Omega}{\omega_g})^2] [1 - 0.03 (\frac{\Omega}{\omega_g})^2 + 0.002 (\frac{|\Omega|}{\omega_g})^3]}{[1 - (\frac{\Omega}{\omega_g})^2]^2 + 4\zeta_g^2 (\frac{\Omega}{\omega_g})^2} \quad (3.112)$$

Fig. 3.6 zeigt den Verlauf von $S_x(\Omega)$ und $\Omega^2 S_x(\Omega)$ nach Damrath (Gl. 3.112) und nach Kanai und Tajimi (Gl. 3.27) für eine Bodendämpfungsrate von $\zeta_g = 0.60$.

Fig. 3.6: Verlauf von $S_x(\Omega)$ und $\Omega^2 S_x(\Omega)$

Man sieht, dass die Abweichungen zwischen Gl. (3.112) und (3.27) für $S_x(\Omega)$ gering sind, für $\Omega^2 S_x(\Omega)$ dagegen beträchtlich werden. In Fig. 3.6 wurden ebenfalls äquivalente Treppen-Leistungsspektren für $S_x(\Omega)$ und $\Omega^2 S_x(\Omega)$ eingetragen. In den Tabellen 3.5 und 3.6 sind die Werte von J_{rs} für $S_x(\Omega)$ und $\Omega^2 S_x(\Omega)$ nach Gl. (3.107) für verschiedene Werte der Parameter $\zeta_r = \zeta_s$,

		$\omega_g/\omega_r = 0.2$		$\omega_g/\omega_r = 0.5$		$\omega_g/\omega_r = 1$		$\omega_g/\omega_r = 2$		$\omega_g/\omega_r = 5$	
$\zeta_r = \zeta_s$	ω_s/ω_r	num.	analyt.	num.	analyt.	num.	analyt.	num.	analyt.	num.	analyt.
0.01	1	0.4786	0.5082	5.3520	5.8096	20.4551	20.4485	18.2271	16.8958	13.4814	14.5017
	2	0.0249	0.0238	0.0612	0.0705	0.0335	0.0320	-0.0418	-0.0659	0.0001	0.0066
	5	0.0039	0.0038	0.0098	0.0111	0.0081	0.0086	-0.0030	-0.0059	-0.0031	-0.0017
0.02	1	0.2894	0.3019	2.7844	2.9955	10.1634	10.1631	9.0803	8.4223	6.7390	7.2517
	2	0.0248	0.0239	0.0612	0.0667	0.0362	0.0348	-0.0354	-0.0520	0.0039	0.0105
	5	0.0039	0.0038	0.0097	0.0105	0.0080	0.0083	-0.0029	-0.0049	-0.0029	-0.0015
0.05	1	0.1751	0.1780	1.2374	1.3010	3.9932	3.9912	3.5934	3.3458	2.6935	2.9017
	2	0.0247	0.0241	0.0612	0.0628	0.0440	0.0434	-0.0168	-0.0251	0.0152	0.0217
	5	0.0039	0.0038	0.0094	0.0097	0.0079	0.0079	-0.0023	-0.0033	-0.0024	-0.0009
0.10	1	0.1357	0.1362	0.7117	0.7301	1.9433	1.9385	1.7662	1.6588	1.3451	1.4517
	2	0.0245	0.0241	0.0611	0.0611	0.0556	0.0557	0.0112	0.0072	0.0320	0.0384
	5	0.0038	0.0038	0.0090	0.0090	0.0077	0.0077	-0.0014	-0.0018	-0.0015	-0.0001
Faktor: $2\pi S_o \omega_r^{-3}$											

Tab. 3.5: Numerische und analytische Berechnung von J_{rs} für $S_x(\Omega)$

		$\omega_g/\omega_r = 0.2$		$\omega_g/\omega_r = 0.5$		$\omega_g/\omega_r = 1$		$\omega_g/\omega_r = 2$		$\omega_g/\omega_r = 5$	
$\zeta_r = \zeta_s$	ω_s/ω_r	num.	analyt.	num.	analyt.	num.	analyt.	num.	analyt.	num.	analyt.
0.01	1	0.3815	0.3833	5.1092	5.0113	20.2434	20.1308	18.2624	18.7803	13.5167	12.2892
	2	0.0022	0.0025	0.0005	0.0007	-0.0845	-0.0904	-0.1425	-0.2606	0.0277	0.0525
	5	0.0004	0.0004	0.0008	0.0009	-0.0110	-0.0117	-0.0424	-0.0587	-0.0449	-0.0407
0.02	1	0.1926	0.1934	2.5442	2.4986	0.9552	9.9085	9.1137	9.2661	6.7739	6.2262
	2	0.0022	0.0024	0.0015	0.0015	-0.0772	-0.0800	-0.1292	-0.2140	0.0348	0.0623
	5	0.0004	0.0004	0.0008	0.0008	-0.0106	-0.0110	-0.0415	-0.0529	-0.0434	-0.0409
0.05	1	0.0791	0.0793	1.0047	0.9900	3.7947	3.7822	3.6213	3.6008	2.7273	2.5857
	2	0.0023	0.0023	0.0045	0.0044	-0.0559	-0.0566	-0.0904	-0.1329	0.0556	0.0841
	5	0.0004	0.0004	0.0008	0.0008	-0.0097	-0.0097	-0.0390	-0.0445	-0.0393	-0.0382
0.10	1	0.0411	0.0411	0.4909	0.4657	1.7590	1.7528	1.7860	1.7443	1.3770	1.3635
	2	0.0023	0.0023	0.0090	0.0089	-0.0239	-0.0244	-0.0323	-0.0484	0.0866	0.1090
	5	0.0004	0.0004	0.0008	0.0008	-0.0082	-0.0082	-0.0347	-0.0368	-0.0328	-0.0324
Faktor: $2\pi S_o \omega_r^{-1}$											

Tab. 3.6: Numerische und analytische Berechnung von J_{rs} für $\Omega^2 S_x(\Omega)$

ω_g/ω_r und ω_s/ω_r mit $\omega_s \geq \omega_r$ angegeben. Dabei wurde J_{rs} einmal numerisch mit einer Simpson-Integration und zum anderen analytisch nach Gl. (3.110) mit den in Fig. 3.6 eingezeichneten äquivalenten Treppen-Leistungsspektren bestimmt. Man sieht aus den Werten, dass die mit den Treppenfunktionen erzielte Genauigkeit sehr gut ist. Weiterhin nehmen die Werte mit zunehmendem Abstand von ω_r und ω_s wie auch mit zunehmenden Dämpfungsraten rasch ab. Die Schrittweite für die äquivalenten Treppen-Leistungsspektren hat sich dabei nach der Neigung der darzustellenden Kurven zu richten. Die numerischen Ergebnisse zeigen, dass für Leistungsspektren, welche unterhalb von $\omega_r \leq \omega_s$ liegen, schon grobe Idealisierungen genügen, während für Anregungen in der Nähe von $\omega_r/\omega_s = 1$ feiner idealisiert werden muss. Dies hängt mit dem Vorzeichenwechsel von $H_{rs}(\Omega)$ (Fig. 3.4) zusammen.

Das angegebene Verfahren zur analytischen Berechnung der Varianzen und Kovarianzen lässt sich wesentlich verfeinern. Aus Gl. (3.97) bzw. (3.98) sieht man nämlich, dass die Integrale vom Typ der Gl. (3.107) ebenfalls direkt über eine Partialbruchzerlegung analytisch gelöst werden können, wenn $F(\Omega) = \Omega^{2n} S_p(\Omega)$ stückweise durch Polynome bis zum 3. Grad dargestellt wird. Dadurch lässt sich die Güte der Approximation von $F(\Omega)$ stark verbessern. Das Treppen-Leistungsspektrum erscheint damit als der Spezialfall von Interpolationspolynomen, welche nur aus dem konstanten Term bestehen. Die Ausarbeitung dieser Überlegungen zeigt, dass man auf diese Weise eine leistungsfähige Computermethode zur analytischen Berechnung der Elemente der Kovarianzmatrizen erhält.

3.3 Beurteilung

Die probabilistische Tragwerksdynamik erlaubt wahrscheinlichkeitstheoretisch fundierte Aussagen über die interessierenden Tragwerksgrößen. Unter der Voraussetzung linearen Verhaltens und stationärer normalverteilter Anregungen können insbesondere die zu erwartenden Extremwerte sowie für gegebene Eintretenswahrscheinlichkeiten die zugehörigen Sicherheitsgrenzen einfach ermittelt werden. Die Methode liefert sämtliche interessierende Größen des Tragwerks. Die Belastungen sind ebenfalls allgemein und können voneinander statistisch abhängig sein. Die probabilistische Berechnung ist grundsätzlich sowohl in Normalkoordinaten bei entkoppelnden Bewegungsgleichungen wie auch mit den ursprünglichen gekoppelten Bewegungsgleichungen möglich. Es können daher auch Tragwerke mit nichtproportionaler Dämpfung in Normalkoordinaten behandelt werden. Aus Gründen des Rechenaufwandes ist der Übergang auf Normalkoordinaten meistens zu empfehlen.

Die Beschreibung der Anregungen als stationäre Gauss'sche Prozesse ist in vielen Fällen physikalisch gerechtfertigt. Da bei der Methode der Antwortspektren die Anregungen durch die ebenfalls von der Zeit unabhängigen Spektren der Gleichungen (2.12) bis (2.15) beschrieben werden, sind für die hier

interessierenden Zusammenhänge mit der probabilistischen Tragwerksdynamik die stationären Zufallsprozesse zu betrachten. In einer allgemeinen Behandlung der probabilistischen Dynamik wären allerdings auch die instationären Prozesse mit einzubeziehen. Als Wahrscheinlichkeitsdichte der Prozesse wurde hier eine Normalverteilung vorausgesetzt. Die Verallgemeinerung der Theorie auf andere Verteilungen ist ebenfalls von Interesse. Alle bisherigen Ergebnisse bezogen sich auf lineare Tragwerke. Da aber aus dem Leistungsspektrum eines Prozesses die einzelnen Funktionen im Zeitbereich mit den entsprechenden statistischen Eigenschaften hergeleitet werden können ist es möglich, probabilistische Ergebnisse auch für nichtlineare Tragwerke durch Monte-Carlo Studien mit direkter Integration der gekoppelten Bewegungsgleichungen im Zeitbereich zu erhalten.

4. METHODISCHE ZUSAMMENHAENGE

4.1 Antwortspektrum und Leistungsspektrum

Das Antwortspektrum einer dynamischen Anregung wurde in Kapitel 2 definiert als der Erwartungswert der betragsmässig grössten Relativverschiebung $|q|_{\max}$ eines Einmassenschwingers der Masse $m = 1$, der Kreisfrequenz ω_0 und der Dämpfungsrate ζ unter dieser Anregung. Mit dem Pseudo-Geschwindigkeitsspektrum der Gl. (2.12) bzw. Gl. (2.13) eines anregenden Zufallsprozesses erhält man nach Gl. (2.1) und Gl. (2.14)

$$|q|_{\max}(\omega_0, \zeta) = S_d(\omega_0, \zeta) = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}} S_v(\omega_0, \zeta) \quad (4.1)$$

Der anregende Prozess soll nunmehr als stationärer Gauss'scher Prozess mit Mittelwert Null und dem Leistungsspektrum $S_x(\Omega)$ angenommen werden. Für das Leistungsspektrum $S_q(\Omega)$ der relativen Verschiebung eines Einmassenschwingers mit $m = 1$, ω_0 und ζ gilt nach Gl. (3.62)

$$S_q(\Omega) = |H(\Omega)|^2 S_x(\Omega) = H_{00}(\Omega) S_x(\Omega) \quad (4.2)$$

mit

$$|H(\Omega)|^2 = H_{00}(\omega_0, \zeta, \Omega) = \frac{1}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega_0^2 \Omega^2} \quad (3.61)$$

Man beachte, dass $H_{00}(\Omega)$ mit der Funktion $H_{rs}(\Omega)$ der Gl. (3.82) bei $r = s = 0$ übereinstimmt. Die Varianz σ_q^2 und die erwartete Frequenz f_q erhält man zu

$$\sigma_q^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty H_{00}(\Omega) S_x(\Omega) d\Omega \quad (4.3)$$

und

$$f_q = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\int_0^\infty \Omega^2 H_{00}(\Omega) S_x(\Omega) d\Omega}{\int_0^\infty H_{00}(\Omega) S_x(\Omega) d\Omega} \right]^{1/2} \quad (4.4)$$

Da $H_{00}(\Omega)$ immer positiv ist, sind die obigen Integrale sehr stabil. Bezeichnet man die Dauer der durch $S_x(\Omega)$ hervorgerufenen stationären Bewegung mit T , so wird der Erwartungswert der betragsmässig grössten Relativverschiebung nach Gl. (3.48) zu

$$|q|_{\max} = \sigma_q \left(\sqrt{2 \ln 2 f_q T} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln 2 f_q T}} \right) \quad (4.5)$$

Gleichsetzen von Gl. (4.5) mit Gl. (4.1) liefert die grundlegenden Beziehungen

$$S_d(\omega_0, \zeta) = \sigma_q \left(\sqrt{2 \ln 2 f_q T} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln 2 f_q T}} \right) \quad (4.6)$$

bzw.

$$S_v(\omega_0, \zeta) = \sigma_q \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} \left(\sqrt{2 \ln 2 f_q T} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln 2 f_q T}} \right) \quad (4.7)$$

Bei gegebenem Leistungsspektrum $S_x(\Omega)$ kann daher mit Hilfe der Gleichungen (4.3), (4.4) und (4.7) sofort das entsprechende Pseudo-Geschwindigkeitsspektrum bestimmt werden. Zur Illustration zeigen die Figuren 4.1 a) und b) den Verlauf von σ_q und f_q unter dem Leistungsspektrum der Gl. (3.112) mit

$$\zeta_g = 0.60 \quad ; \quad \omega_g = 5\pi \quad (4.8)$$

für verschiedene Dämpfungsraten ζ des Einmassenschwingers in Funktion seiner Eigenfrequenz $f_0 = \omega_0/2\pi$.

Fig. 4.1: Streuung σ_q und erwartete Frequenz f_q , berechnet aus dem Leistungsspektrum

Nimmt man das anregende Leistungsspektrum als konstant mit dem Wert S_0 an, so folgt aus Gl. (3.106), dass der Verlauf von σ_q qualitativ durch

$$\sigma_q = \frac{S_0}{\sqrt{8 f_0^3}} \quad (4.9)$$

gegeben ist. Weiterhin sieht man aus Fig. 4.1 b), dass die erwartete Frequenz f_q für $\omega_0 < \omega_g$ gut durch

$$f_q = f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (4.10)$$

approximiert werden kann. Für kleine Dämpfungsraten stimmt f_q insgesamt gut mit der Eigenfrequenz f_0 des Einmassenschwingers überein. In Fig. 4.2 wurde das aus σ_q und f_q berechnete Pseudo-Geschwindigkeitsspektrum nach Gl. (4.7) wie auch nach dem vereinfachten Ausdruck

$$S_V(\omega_0, \zeta) = \sigma_q \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} \sqrt{2 \ln 2f_q T} \quad (4.11)$$

Fig. 4.2: Pseudo-Geschwindigkeitsspektren, berechnet aus dem Leistungsspektrum

für eine Dauer von $T = 10$ sec des stationären Prozesses dargestellt. Für die Spektren nach Gl. (4.7) wurde der Skalierungsfaktor S_0 des Leistungsspektrums durch Vergleich mit Housner's Spektren an der Stelle $T_0 = 3.0$ bestimmt. Alle gerechneten Spektren wurden dann mit dem Durchschnittswert $S_0 = 0.283$ skaliert. Man sieht durch Vergleich mit den in Fig. 4.2 ebenfalls angegebenen Spektren nach Housner, dass die aus $S_X(\Omega)$ ermittelten Spektren für $\zeta \neq 0$ qualitativ sehr ähnlich verlaufen. Für die gewählten Werte der

Parameter von $S_X(\Omega)$ ist die Übereinstimmung für grosse Dämpfungsraten auch quantitativ gut, während für kleine Dämpfungsraten die gerechneten Spektren für kleine Perioden kleinere und für die grösseren Perioden grössere Werte als Housner's Spektren ergeben.

Die Lösung der inversen Aufgabe, nämlich die Bestimmung des Leistungsspektrums bei vorgegebenem Pseudo-Geschwindigkeitsspektrum, ist wesentlich schwieriger. Quadrieren von Gl. (4.7) liefert die Beziehung

$$\sigma_q^2 (2 \ln 2f_q T + \frac{\gamma^2}{2 \ln 2f_q T} + 2\gamma) = \frac{S_V^2(\omega_0, \zeta)}{\omega_0^2 (1-\zeta^2)} \quad (4.12)$$

bei der nun keine Wurzel ausdrücke mehr vorkommen. Da σ_q^2 und f_q Integralausdrücke von $S_X(\Omega)$ sind, stellt Gl. (4.12) eine nichtlineare Integralgleichung für $S_X(\Omega)$ dar, welche keine geschlossene analytische Lösung besitzt. Es ist daher sinnvoll, $S_X(\Omega)$ in geeigneter Form mit freien Parametern $p_1 \dots p_n$ anzusetzen, welche dann als bestmögliche Werte im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden. Verwendet man beispielsweise Gl. (3.112) als Ansatz, so sind die freien Parameter $p_1 = S_0$, $p_2 = \omega_g$ und $p_3 = \zeta_g$. Für die Anwendungen ist es besonders interessant, $S_X(\Omega)$ durch eine Anzahl von Stützwerten zu beschreiben und die Funktion im einfachsten Fall als Treppenfunktion oder auch stückweise durch Polynome darzustellen. Die freien Parameter entsprechen dann den zu bestimmenden Stützwerten.

Gl. (4.12) enthält als weitere Grösse die Dauer T des stationären Bewegungsteils. Man sieht aus

$$2 \ln 2f_q T = \ln(2f_q)^2 + \ln T^2 \quad (4.13)$$

dass T im wesentlichen die Rolle einer Skalierungsgrösse spielt. Da der Ansatz für $S_x(\Omega)$ aber ebenfalls einen Skalierungsfaktor entweder explizit (z.B. S_0 in Gl. (3.112)) oder implizit (z.B. Grösse der Stützwerte) enthält, wird durch die Wahl von T als feste Grösse eine doppelte Skalierung vermieden. Damit erhält man ein gut konditioniertes Gleichungssystem. Man kann aber auch T als Variable betrachten und in die Ausgleichsrechnung mit einbeziehen. Wegen des schlechter konditionierten Gleichungssystems konvergiert die Lösung aber normalerweise wesentlich langsamer. Als Ergebnis erhält man dafür nicht nur die ausgeglichenen Werte der freien Parameter von $S_x(\Omega)$, sondern auch noch den ausgeglichenen Wert von T .

Mit dem Ansatz

$$S_x(\Omega) = S_x(p_1, p_2 \dots p_n, \Omega) \quad (4.14)$$

werden die Varianz σ_q^2 und die erwartete Frequenz f_q entsprechend Gl. (4.3) bzw. Gl. (4.4) Funktionen von $\omega_0, \zeta, p_1 \dots p_n$. Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} J_0 &= J_0(\omega_0, \zeta, p_1 \dots p_n) = \int_0^\infty H_{00}(\Omega) S_x(\Omega) d\Omega = \\ &= \int_0^\infty \frac{S_x(p_1, \dots, p_n, \Omega)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega_0^2 \Omega^2} d\Omega \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} J_2 &= J_2(\omega_0, \zeta, p_1 \dots p_n) = \int_0^\infty \Omega^2 H_{00}(\Omega) S_x(\Omega) d\Omega = \\ &= \int_0^\infty \frac{\Omega^2 S_x(p_1 \dots p_n, \Omega)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega_0^2 \Omega^2} d\Omega \end{aligned} \quad (4.16)$$

wird Gl. (4.12) zu

$$F(\omega_0, \zeta, p_1 \dots p_n) = S_V^2(\omega_0, \zeta) \quad (4.17)$$

mit

$$F(\omega_0, \zeta, p_1 \dots p_n) = \frac{\omega_0^2(1-\zeta^2)}{2\pi} J_0 \left(g + \frac{\gamma^2}{g} + 2\gamma \right) \quad (4.18)$$

mit der Abkürzung

$$g = 2 \ln 2f_q T = \ln \frac{T^2}{\pi^2} \frac{J_2}{J_0} \quad (4.19)$$

Entwicklung von F um feste Werte $p_1^i \dots p_n^i$ der freien Parameter gibt

$$\begin{aligned} F(\omega_0, \zeta, p_1^i + \Delta p_1^i \dots p_n^i + \Delta p_n^i) &= F(\omega_0, \zeta, p_1^i \dots p_n^i) + \\ &+ \sum_{l=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_l^i} \Delta p_l^i \end{aligned} \quad (4.20)$$

und damit folgt aus Gl. (4.17)

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_1^i} \Delta p_1^i = S_V^2(\omega_0, \zeta) - F(\omega_0, \zeta, p_1^i \dots p_n^i) \quad (4.21)$$

Für die partiellen Ableitungen liefert Gl. (4.18)

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} = \frac{\omega_0^2(1-\zeta^2)}{2\pi} \left[\frac{\partial J_0}{\partial p_1} \left(g + \frac{\gamma^2}{g} + 2\gamma \right) + \left(\frac{\partial J_0}{\partial p_1} - \frac{J_0}{J_2} \frac{\partial J_2}{\partial p_1} \right) \left(\frac{\gamma^2}{g} - 1 \right) \right] \quad (4.22)$$

Betrachtet man die Dauer T ebenfalls als Variable, so wird die linke Seite von Gl. (4.21) um den Term

$$\frac{\partial F}{\partial T^i} \Delta T^i \quad (4.23)$$

mit

$$\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{\omega_0^2(1-\zeta^2)}{\pi} \frac{J_0}{T} \left(1 - \frac{\gamma^2}{g} \right) \quad (4.24)$$

erweitert. Statt mit Gl. (4.7) kann man auch mit dem vereinfachten Ausdruck der Gl. (4.11) für den erwarteten Extremalwert arbeiten. In den obigen Beziehungen fallen in diesem Falle alle Terme mit γ weg.

Gl. (4.21) lässt sich für alle Werte ω_0^k, ζ^k anschreiben, für welche $S_V(\omega_0^k, \zeta^k)$ bekannt ist. Bei m Werten von S_V erhält man m Gleichungen für die Korrekturen $\Delta p_1^i \dots \Delta p_n^i$ und gegebenenfalls ΔT^i in der Form

$$[A]\{\Delta p^i\} = \{r^i\} \quad (4.25)$$

mit

$$A_{kl} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial p_1^i} F(\omega_0^k, \zeta^k, p_1^i \dots p_n^i) \\ \frac{\partial}{\partial T^i} F(\omega_0^k, \zeta^k, p_1^i \dots p_n^i, T^i) \end{cases} \quad (4.26)$$

$$\{\Delta p^i\} = \begin{Bmatrix} \Delta p_1^i \\ \vdots \\ \Delta p_n^i \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

wobei gegebenenfalls $\Delta p_n^i = \Delta T^i$ gilt,

$$r_k^i = S_V^2(\omega_0^k, \zeta^k) - F(\omega_0^k, \zeta^k, p_1^i \dots p_n^i) \quad (4.28)$$

Die Forderung minimaler Fehlerquadrate führt auf das bekannte Gleichungssystem

$$([A]^T[A]) \{\Delta p^i\} = [A]^T\{r^i\} \quad (4.29)$$

Nach der Auflösung werden die verbesserten Parameterwerte zu

$$p_1^{i+1} = p_1^i + \Delta p_1^i \quad l = 1, \dots, n \quad (4.30)$$

welche als Ausgangswerte für eine neue Ausgleichsrechnung genommen werden. Auf diese Weise erhält man iterativ die endgültigen Werte. Für die erste Iteration setzt man Schätzwerte der freien Parameter ein.

Für Housner's Pseudo-Geschwindigkeitsspektrum für $\zeta = 0.02$ wurden aus 24 Stützwerten im Abstand von $\Delta T_0 = 0.125$ zwischen $T_0 = 0.125$ und $T_0 = 3.0$ die ausgeglichenen Parameter

$$p_1 = S_0 ; \quad p_2 = \omega_g ; \quad p_3 = \zeta_g \quad (4.31)$$

des Leistungsspektrums mit dem schon früher verwendeten Ansatz

$$S_x(\Omega) = S_0 \frac{[1 + 4\zeta_g^2(\frac{\Omega}{\omega_g})^2][1 - 0.03(\frac{\Omega}{\omega_g}) + 0.002(\frac{|\Omega|}{\omega_g})^3]}{[1 - (\frac{\Omega}{\omega_g})^2]^2 + 4\zeta_g^2(\frac{\Omega}{\omega_g})^2} \quad (3.112)$$

bestimmt. Die Dauer T wurde zunächst mit $T = 10$ sec fest vorgegeben. Die Integrale J_0 und J_2 wurden numerisch mit Simpson ausgewertet. Tab. 4.1 gibt die konvergierten Werte der Parameter an, wobei als Konvergenzkriterium für die Korrekturen

$$|\Delta p_1^i| \leq 10^{-3} |p_1^i| \quad l = 1, \dots, n \quad (4.32)$$

gewählt wurde. Tab. 4.1 enthält auch die Anzahl der Iterationen sowie das Fehlermass

$$R = \sum_{k=1}^m [S_v(\omega_0^k, \zeta^k) - \bar{S}_v]^2 \quad (4.33)$$

wobei $\bar{S}_v$ mit Gl. (4.7) aus dem Leistungsspektrum der Gl. (3.112) mit den ausgeglichenen Parametern berechnet wurde. Für das obige Leistungsspektrum wurde eine weitere Ausgleichsrechnung mit T als Variablen, d.h. mit den freien Parametern

$$p_1 = S_0 ; \quad p_2 = \omega_g ; \quad p_3 = \zeta_g ; \quad p_4 = T \quad (4.34)$$

durchgeführt. Man sieht aus Tab. 4.1, dass R weiter abnimmt, dafür aber auch mehr Iterationen erforderlich sind. Schliesslich wurde für das Leistungs-

Fall	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	R	Anzahl Iterationen
Gl. (4.31)	0.04838	12.3356	0.513	---	---	---	0.055	5
Gl. (4.34)	0.09298	13.5379	0.762	2.50	---	---	0.009	7
Gl. (4.35)	0.05104	0.06846	0.09052	0.08417	0.08027	0.05565	0.063	7

Tab. 4.1: Ausgegliche Werte der freien Parameter

Fig. 4.3: Ansatz für Treppen-Leistungsspektrum

spektrum der in Fig. 4.3 dargestellte Ansatz als Treppenfunktion gemacht, bei dem die freien Parameter sechs unbestimmte Stützwerte sind:

$$p_i = S_i \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.35)$$

Für die Dauer T wurde wiederum $T = 10$ sec fest vorgegeben. Die Integrale J_0 und J_2 lassen sich für diesen Ausdruck mit Hilfe der Gl. (3.110) besonders einfach in der Form

$$J_0 = \sum_{i=1}^6 S_i \left[I_0\left(\Omega_i + \frac{\Delta\Omega_i}{2}\right) - I_0\left(\Omega_i - \frac{\Delta\Omega_i}{2}\right) \right] \quad (4.36)$$

$$J_2 = \sum_{i=1}^6 \Omega_i^2 S_i \left[I_0\left(\Omega_i + \frac{\Delta\Omega_i}{2}\right) - I_0\left(\Omega_i - \frac{\Delta\Omega_i}{2}\right) \right] \quad (4.37)$$

mit

$$I_0(\Omega) = - \frac{1}{8\omega_0^3 \sqrt{1-\zeta^2}} \ln \frac{\Omega^2 - 2\Omega \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} + \omega_0^2}{\Omega^2 + 2\Omega \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} + \omega_0^2} \quad (4.38)$$

$$+ \frac{1}{4 \omega_0^3 \zeta} \left(\arctan \frac{\Omega + \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}}{\omega_0 \zeta} + \arctan \frac{\Omega - \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}}{\omega_0 \zeta} \right)$$

auswerten. Insbesondere erhält man für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial J_0}{\partial p_1} = I_0\left(\Omega_1 + \frac{\Delta\Omega_1}{2}\right) - I_0\left(\Omega_1 - \frac{\Delta\Omega_1}{2}\right) \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial p_1} = \Omega_1^2 \frac{\partial J_0}{\partial p_1} \quad (4.40)$$

Die ausgeglichenen Stützwerte S_i sind ebenfalls in Tab. 4.1 angegeben. Fig. 4.4 zeigt den Verlauf der Leistungsspektren mit den ausgeglichenen Parametern der Gl. (4.31) und der Gl. (4.35) bei festem $T = 10$ sec. Man sieht, dass die Übereinstimmung für die unteren Frequenzen recht gut ist.

Fig. 4.4: Verlauf der ausgeglichenen Leistungsspektren für $T = 10 \text{ sec}$

Damit bestätigt sich die generelle Form des Leistungsspektrums der Housner's Spektren zugrundeliegenden Beben. In Fig. 4.5 sind die Pseudo-Geschwindigkeitsspektren nach Gl. (4.7) aus den einzelnen ausgeglichenen Leistungsspektren für $\zeta = 0.02$ berechnet und zusammen mit Housner's Spektrum für $\zeta = 0.02$

Fig. 4.5: Pseudo- Geschwindigkeitsspektren für $\zeta = 0.02$

dargestellt worden. Man sieht, dass die aus den Leistungsspektren berechneten Spektren generell für kleine Perioden, d.h. hohe Frequenzen, kleinere Werte als das Spektrum nach Housner annehmen. Für die Periode $T_0 \cong 0.7 \text{ sec}$ des Einmassenschwingers ist die Uebereinstimmung aller Spektren sehr gut. Für einen White-Noise-Prozess folgt aus Tab. 3.4 für $\zeta = 0.02$ und $s = 0.01$ eine Einschwingdauer von 12.8 sec. Da der ausgeglichene Wert der Dauer des stationären Anteils des Prozesses $q(t)$ nach Tab. 4.1 2.5 sec beträgt, lässt sich die Dauer der stationären Anregung mit etwa 15 sec abschätzen.

Auch hier lässt sich das angegebene Verfahren zur Bestimmung der Stützwerte des Leistungsspektrums wesentlich verbessern, indem - wie früher ausgeführt - die Interpolation nicht mit einer Treppenfunktion, sondern stückweise mit Polynomen bis zum dritten Grade durchgeführt wird. Damit lässt sich die Ausgleichsrechnung mit einer kleinen Anzahl von Stützwerten numerisch sehr effizient durchführen.

4.2 Erwartete Extremwerte der Tragwerksgrößen

Die Methode der Antwortspektren und die probabilistische Tragwerksdynamik liefern die Erwartungswerte der Extremwerte der interessierenden Tragwerksgrößen. So erhält man für die erwartete Verschiebung $|q_i|_{\max}$ des Tragwerks unter einer Belastung mit dem Antwortspektrum

$$S_d(\omega, \zeta) = \frac{S_v(\omega, \zeta)}{\omega \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (2.14)$$

entsprechend Gl. (2.74) mit Gl. (2.70) im allgemeinen Fall

$$|q_i|_{\max} = \left[\sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \epsilon_{rs} \phi_{ir} \phi_{is} L_r L_s S_d(\omega_r, \zeta_r) S_d(\omega_s, \zeta_s) \right]^{1/2} \quad (4.41)$$

Nach der probabilistischen Tragwerksdynamik wird $|q_i|_{\max}$ bei Anregung durch eine Belastung mit dem Leistungsspektrum $S_p(\Omega)$ nach Gl. (3.95) mit Gl. (3.87), Gl. (3.90) und Gl. (3.93) zu

$$|q_i|_{\max} = a \sigma_{q_i} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left[\sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \phi_{ir} \phi_{is} L_r L_s \int_0^\infty H_{rs}(\Omega) S_o(\Omega) d\Omega \right]^{1/2} \quad (4.42)$$

mit

$$a = \sqrt{2 \ln 2 f_{q_i} T} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln 2 f_{q_i} T}} \quad (4.43)$$

Man sieht durch Vergleich von Gl. (4.41) mit Gl. (4.42), dass $|q_i|_{\max}$ in beiden Fällen als Wurzel aus der Summe der Quadrate der modalen Anteile gebildet wird. Die Methode der Antwortspektren bildet demnach den erwarteten Extremwert entsprechend dem Bildungsgesetz für die Streuung σ_{q_i} . In Gl. (4.42) spielt die Grösse a die Rolle eines Skalierungsfaktors, welcher von der erwarteten Frequenz f_{q_i} sowie von der Dauer T des stationären Anteils der Bewegung abhängt. Tabelle 3.3 enthält die numerischen Werte von $a = |x|_{\max}$ für verschiedene Werte von $f_{q_i} T$. Aus dem Bildungsgesetz Gl. (3.94) für f_{q_i} folgt:

$$f_{q_i} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \phi_{ir} \phi_{is} L_r L_s \int_0^\infty \Omega^2 H_{rs}(\Omega) S_p(\Omega) d\Omega}{\sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \phi_{ir} \phi_{is} L_r L_s \int_0^\infty H_{rs}(\Omega) S_p(\Omega) d\Omega} \right]^{1/2} \quad (4.44)$$

Die Eigenschaften des nichtlinearen Ausdruckes Gl. (4.44) sind mathematisch schwer zu diskutieren, physikalisch jedoch qualitativ abschätzbar. Da nämlich bei den meisten Tragwerken unter der Anregung die erste Eigenschwingung den Verlauf der Verschiebungen dominiert, wird f_{q_i} sehr nahe bei der ersten Frequenz $f_1 = \omega_1/2\pi$ des Tragwerks liegen. Bei den Kräften und Spannungen hingegen sind meistens auch noch die höheren Eigenschwingungen stärker beteiligt.

Hier liegt die erwartete Frequenz f normalerweise im Bereich der unteren Frequenzen. Die Dauer T des stationären Bewegungsteils lässt sich nach Tab. 3.4 entsprechend den Perioden und Dämpfungsraten des Tragwerks als Differenz aus Anregungsdauer und Einschwingvorgang abschätzen.

Aus Gl. (4.41) und Gl. (4.42) folgt die Beziehung

$$\epsilon_{rs} S_d(\omega_r, \zeta_r) S_d(\omega_s, \zeta_s) = \frac{a^2}{2\pi} \int_0^\infty H_{rs}(\Omega) S_p(\Omega) d\Omega \quad (4.45)$$

Der Kopplungskoeffizient ϵ_{rs} zwischen den modalen Anteilen muss symmetrisch in r und s sein und nimmt für $r = s$ den Wert 1 an. Aus Gl. (4.45) sieht man, dass ϵ_{rs} im wesentlichen den Verlauf von $\int_0^\infty H_{rs}(\Omega) S_p(\Omega) d\Omega$ wiedergeben muss. Diese Ueberlegung erlaubt, ϵ_{rs} mit Hilfe der früheren Ergebnisse der probabilistischen Tragwerksdynamik abzuschätzen. Nimmt man nämlich die Anregung als Prozess mit dem konstanten Leistungsspektrum $S_p(\Omega) = S_0$ an, so folgt aus Gl. (3.105) mit

$$\kappa = \frac{\omega_s}{\omega_r} \geq 1 \quad (4.46)$$

unter der Annahme $\omega_s \geq \omega_r$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty H_{rs}(\Omega) S_p(\Omega) d\Omega &= S_0 \int_0^\infty H_{rs}(\Omega) d\Omega = \\ &= \frac{2\pi S_0}{\omega_r^3} \frac{(1+\kappa^4)(\zeta_r + \kappa\zeta_s) - 4\kappa\zeta_r\zeta_s(\zeta_r + \kappa^3\zeta_s) - 2\kappa^2[\zeta_r(1-2\zeta_r^2) + \kappa\zeta_s(1-2\zeta_s^2)]}{(1-\kappa^2)^4 + 8\kappa^2\{(1+\kappa^4)[\zeta_r^2(1-\zeta_s^2) + \zeta_s^2(1-\zeta_r^2)] - 2\kappa^2[\zeta_r^2(1-\zeta_r^2) + \zeta_s^2(1-\zeta_s^2)]\}} \end{aligned} \right\} \quad (4.47)$$

Für $\kappa = 1$ aber getrennt geführten Dämpfungsraten ζ_r und $\zeta_s = \zeta_r$ erhält man in Uebereinstimmung mit Gl. (3.106)

$$S_0 \int_0^\infty H_{rr}(\Omega) d\Omega = \frac{\pi S_0}{2\omega_r^3(\zeta_r + \zeta_s)} \quad (4.48)$$

Damit lässt sich durch Skalierung von Gl. (4.47) der Kopplungskoeffizient ϵ_{rs} mit

$$\epsilon_{rs} = 4(\zeta_r + \zeta_s) \frac{(1+\kappa^4)(\zeta_r + \kappa\zeta_s) - 4\kappa\zeta_r\zeta_s(\zeta_r + \kappa^3\zeta_s) - 2\kappa^2[\zeta_r(1-2\zeta_r^2) + \kappa\zeta_s(1-2\zeta_s^2)]}{(1-\kappa^2)^4 + 8\kappa^2\{(1+\kappa^4)[\zeta_r^2(1-\zeta_s^2) + \zeta_s^2(1-\zeta_r^2)] - 2\kappa^2[\zeta_r^2(1-\zeta_r^2) + \zeta_s^2(1-\zeta_s^2)]\}} \quad (4.49)$$

angeben. Aus Gl. (4.49) gewinnt man einen vereinfachten Ausdruck für kleine Dämpfungsraten durch Vernachlässigung aller Terme von wenigstens 3. Ordnung in ζ sowie durch die Abschätzung

$$\zeta_r^2 + \zeta_s^2 \approx \frac{1}{2} (\zeta_r + \zeta_s)^2 \quad (4.50)$$

Wegen der Schwarz'schen Ungleichung

$$\zeta_r^2 + \zeta_s^2 \geq \frac{1}{2} (\zeta_r + \zeta_s)^2 \quad (4.51)$$

und der Tatsache, dass die Terme $(\zeta_r^2 + \zeta_s^2)$ im Nenner von Gl. (4.49) auftreten, führt Gl. (4.50) auf eine konservative Abschätzung. Als Ergebnis erhält man den vereinfachten Ausdruck

$$\epsilon_{rs} = \frac{4(\zeta_r + \zeta_s)(\zeta_r + \kappa \zeta_s)}{(1 - \kappa^2)^2 + 4\kappa^2(\zeta_r + \zeta_s)^2} \quad (4.52)$$

welcher wiederum symmetrisch in r und s ist und für $\kappa = 1$ den Wert 1 annimmt.

Die numerische Auswertung von Gl. (4.49) und Gl. (4.52) für $0.01 \leq \zeta \leq 0.10$ und $1 \leq \kappa \leq 10$ zeigt, dass Gl. (4.52) eine sehr gute Approximation von Gl. (4.49) liefert, deren prozentualer Fehler bei den betrachteten Werten von ζ und κ stets kleiner als 1% bleibt.

Fig. 4.6: Kopplungskoeffizient ϵ_{rs}

In Fig. 4.6 wurde der Verlauf von ϵ_{rs} nach Gl. (4.52) für einige repräsentative Dämpfungsrate angegeben. Man sieht, dass für kleine Dämpfungsrate die modalen Anteile sehr schnell entkoppeln. Wie früher bereits ausgeführt, gilt dieses Ergebnis allgemein. Um den Vergleich der obigen Ergebnisse mit dem bei der Methode der Antwortspektren verwendeten Kopplungskoeffizienten

$$\epsilon_{rs} = \frac{(\zeta'_r \omega_r + \zeta'_s \omega_s)^2}{(\omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2} - \omega_s \sqrt{1 - \zeta_s^2})^2 + (\zeta'_r \omega_r + \zeta'_s \omega_s)^2} \quad (2.75)$$

zu ermöglichen, werden die folgenden Vereinfachungen eingeführt:

$$\left. \begin{aligned} \zeta'_i &= \zeta_i + \frac{2}{\omega_i} \approx \zeta_i & i &= r, s \\ \sqrt{1 - \zeta_i^2} &\approx 1 & i &= r, s \end{aligned} \right\} \quad (4.53)$$

Diese Vereinfachungen führen zu einer Unterschätzung der Werte von ϵ_{rs} nach Gl. (2.75). Für grössere ω_i und kleine Dämpfungsrate ζ_i sind die Abweichungen gering. Damit erhält man mit $\kappa = \omega_s / \omega_r \geq 1$

$$\epsilon_{rs} = \frac{(\zeta_r + \kappa \zeta_s)^2}{(1 - \kappa)^2 + (\zeta_r + \kappa \zeta_s)^2} \quad (4.54)$$

Man sieht, dass Gl. (4.54) und Gl. (4.52) ähnlich aufgebaut sind. Der Kopplungskoeffizient nach Gl. (4.54) wurde ebenfalls in Fig. 4.6 angegeben und weist eine wesentlich höhere Kopplung der modalen Anteile als nach der probabilistischen Tragwerksdynamik aus. Insbesondere strebt Gl. (4.54) für grosse Werte von κ gegen einen konstanten Wert, während Gl. (4.52) gegen null strebt. Es wird daher vorgeschlagen, auch für die Methode der Antwortspektren den Kopplungskoeffizienten ϵ_{rs} nach Gl. (4.52) zu verwenden.

In den praktischen Anwendungen der Methode der Antwortspektren wird heute meistens auf die Verwendung von Kopplungstermen zwischen den einzelnen Eigenschwingungen gesamthaft verzichtet. Gl. (4.41) nimmt damit die Form

$$q_{i,\max}^2 = \sum_{r=1}^n \varphi_{ir}^2 L_r^2 S_d^2(\omega_r, \zeta_r) \quad (4.55)$$

an und analoge Ausdrücke erhält man für die übrigen Tragwerksgrössen. Verwendet man in Gl. (4.42) ebenfalls nur die Diagonalterme, so folgt

$$q_{i,\max}^2 = \frac{a^2}{2\pi} \sum_{r=1}^n \varphi_{ir}^2 L_r^2 \int_0^\infty H_{rr}(\Omega) S_p(\Omega) d\Omega \quad (4.56)$$

H_{rr} entspricht aber dem Frequenzgang H_{oo} der Gl. (3.61) für ω_r und ζ_r . $S_d(\omega_o, \zeta)$ und $S_p(\Omega)$ sollen dem gleichen stochastischen Prozess zugeordnet sein und insbesondere Gl. (4.12) erfüllen. Mit

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty H_{rr}(\Omega) S_p(\Omega) d\Omega \quad (4.57)$$

folgt aber aus Gl. (4.12) mit Gl. (2.14) und Gl. (4.43)

$$\frac{a_r^2}{2\pi} \int_0^\infty H_{rr}(\Omega) S_p(\Omega) d\Omega = S_d^2(\omega_r, \zeta_r) \quad (4.58)$$

mit

$$a_r = \sqrt{2 \ln 2 f_r T_r} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln 2 f_r T_r}} \quad (4.59)$$

wobei f_r entsprechend Gl. (4.4) die erwartete Frequenz in der r -ten Eigenschwingung und T_r die Dauer des stationären Output-Prozesses bezeichnen. Mit diesem Ergebnis sieht man aus dem Vergleich von Gl. (4.55) und Gl. (4.56), dass bei Summation nur der Diagonalterme beide Methoden das gleiche Ergebnis liefern, falls $a_r = a$ als konstant angesehen wird. Dies ist meist näherungsweise der Fall, zumal man in den Summationen oft nur wenige Eigenschwingungen zu berücksichtigen braucht. In den Anwendungen der Gl. (4.55) und Gl. (4.56) wird aber Gl. (4.58) nur angenähert wie beispielsweise im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate erfüllt sein und zudem der Faktor a^2 nach Gl. (4.43) und Gl. (4.44) von allen mitgenommenen Eigenschwingungen abhängen. Damit stimmen auch die aus beiden Methoden berechneten erwarteten Extremwerte nicht

mehr überein. Da man in der probabilistischen Tragwerksdynamik generell mit Gl. (4.42) und nicht mit dem vereinfachten Ausdruck der Gl. (4.56) arbeitet, werden hier auch die Phasenbeziehungen zwischen den Eigenschwingungen durch die Kopplungsterme in statistischem Sinne erfasst. Diese Kopplungsterme können grundsätzlich positive wie negative Werte annehmen. Daher erlaubt die probabilistische Methode eine genauere Erfassung des Tragwerkverhaltens als die Methode der Antwortspektren, selbst wenn für diese die Summation nach Gl. (4.41) mit $\epsilon_{rs} \geq 0$ verwendet wird. Man beachte, dass zusätzlich die Produkte $L_r L_s$ und $\phi_{ir} \phi_{is}$ positiv wie auch negativ werden können. Nach Gl. (4.42) ist mit dem erwarteten Extremwert $|q_i|_{\max}$ auch die Streuung σ_{q_i} bekannt. Für gegebene Eintretenswahrscheinlichkeiten ϕ können damit und mit Hilfe von Gl. (3.45) sofort auch die entsprechenden Sicherheitsgrenzen angegeben werden.

Die Ergebnisse der probabilistischen Tragwerksdynamik erlauben, aus einem gegebenen Antwortspektrum beispielsweise am Fusspunkt des Tragwerks die Stockwerks-Antwortspektren an bestimmten Punkten zu berechnen. Diese Spektren werden ihrerseits dazu benutzt, Einbauten wie Rohrleitungen oder Geräte nach der Methode der Antwortspektren unabhängig vom Tragwerk zu untersuchen. Um die Stockwerks-Antwortspektren zu berechnen, bestimmt man zunächst nach Abschnitt 4.1 für das gegebene Spektrum das entsprechende Leistungsspektrum S_p . Das Leistungsspektrum der Verschiebung q_i des interessierenden Punktes ist nach Gl. (3.71) mit Gl. (3.88) durch

$$S_{q_i} = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \phi_{ir} \phi_{is} L_r L_s H_r(\Omega) \bar{H}_s(\Omega) S_p(\Omega) \quad (4.60)$$

gegeben.

Das Leistungsspektrum der Beschleunigung $\ddot{q}_i$ wird entsprechend Gl. (3.33) zu

$$S_{\ddot{q}_i} = \Omega^4 S_{q_i}(\Omega) \quad (4.61)$$

und damit erhält man das Leistungsspektrum der Relativverschiebung eines mit $\ddot{q}_i$ angeregten Einmassenschwingers nach Gl. (3.62) zu

$$S(\Omega) = H_{00}(\omega_0, \zeta, \Omega) \Omega^4 S_{q_i}(\Omega) \quad (4.62)$$

Daraus lässt sich mit Hilfe der Gl. (4.7) das Pseudo-Geschwindigkeitsspektrum der Anregung in Richtung von q_i ermitteln. Da bei den Integrationen für $\sigma_{q_i}^2$ und f_{q_i} wiederum die Imaginärteile von Gl. (4.60) verschwinden genügt es, Gl. (4.60) als

$$S_{q_i} = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \phi_{ir} \phi_{is} L_r L_s H_{rs}(\Omega) S_p(\Omega) \quad (4.63)$$

anzuschreiben.

Im allgemeinsten Fall der Anregung des Tragwerks durch mehrere Lasten liefert die Methode der Antwortspektren den Erwartungswert der maximalen Verschiebung $|q_i|_{\max}$ ebenfalls entsprechend Gl. (4.41), wobei nun aber auch noch über die einzelnen Anregungen zu summieren ist. Ebenso ist bei der probabilistischen Behandlung im Falle unkorrelierter Anregungen nach Gl. (4.42) über alle Lasten zu summieren. Damit behalten die für eine einzige Anregung festgestellten methodischen Zusammenhänge auch hier ihre Gültigkeit. Sind die Anregungen dagegen voneinander statistisch abhängig, so erlaubt nur die probabilistische Tragwerksdynamik die Erfassung der Korrelationen während die Methode der Antwortspektren nur mit den entkoppelten Anregungen arbeitet. Es ist allerdings stets möglich, durch eine Variablentransformation korrelierte Variable in einen Satz unabhängiger Variablen überzuführen. Weiterhin ist eine Verallgemeinerung der Methode der Antwortspektren auf statistisch abhängige Anregungen durch die Definition von Cross-Antwortspektren denkbar.

4.3 Beispiel

Fig. 4.7 zeigt die Idealisierung des stählernen Sicherheitsbehälters eines Kernkraftwerks mit finiten Elementen. Die Struktur ist symmetrisch zur y-z-Ebene und weist auf der einen Seite eine mit Dreieckselementen modellierte Zone stark erhöhter Massendichte entsprechend verschiedenen Einbauten auf. Sämtliche Fusspunkte des Tragwerks sind durch eine Fundationsplatte starr miteinander gekoppelt. Nach Elimination aller Bindungen weist das Modell 1'305 Freiheitsgrade auf. Als Belastung wirkt eine horizontale Erdbebenanregung in y-Richtung, wobei der Sicherheitsbehälter sowohl nach der Methode der Antwortspektren als auch nach der probabilistischen Tragwerksdynamik berechnet werden soll. Für die numerischen Untersuchungen wurden neben speziell geschriebenen Routinen auch die Programme EASE2 [16] und MSC/NASTRAN [19] verwendet.

Für beide Verfahren ist im hier interessierenden Zusammenhang zuerst die Bestimmung der Eigenfrequenzen und Eigenvektoren nötig. Die Eigenvektoren wurden dabei so skaliert, dass nach Gl. (2.58) die verallgemeinerten Massen $m_r = 1$ sind. In Tabelle 4.2 sind die Eigenfrequenzen f_0 zwischen 0 und 25 Hz des ungedämpften Tragwerks, die dazugehörigen Perioden T_0 sowie die Partizipationsfaktoren L für Anregung in y-Richtung entsprechend Gl. (2.69) angegeben. Man sieht aus den Partizipationsfaktoren, dass vor allem die beiden ersten Eigenschwingungen angeregt werden. In Fig. 4.8 sind die Eigenschwingungsformen des Sicherheitsbehälters für die betrachteten Frequenzen dargestellt. Diese Formen zeigen, dass die Struktur im Bereich der Einbauten besonders beansprucht wird.

Fig. 4.7: Sicherheitsbehälter eines Kernkraftwerkes

Nr.	f_0 [Hz]	T_0	L	$S_V(T_0, \zeta = 0.02)$	$\overline{S}_V(T_0, \zeta = 0.02)$
1	5.8153	0.1720	- 7.7779	0.259	0.189
2	7.4660	0.1339	- 3.4223	0.201	0.129
3	13.5523	0.0738	0.0604	0.111	0.044
4	17.5967	0.0568	0.6798	0.086	0.025
5	21.3780	0.0468	2.0154	0.070	0.016
6	22.6068	0.0442	- 0.5535	0.067	0.015
7	23.8586	0.0419	- 0.1046	0.063	0.014
8	24.4066	0.0410	0.0727	0.062	0.014

Tab. 4.2: Eigenfrequenzen und zugehörige Größen

Fig. 4.8: Eigenschwingungsformen der Frequenzen bis 25 Hz

Für die Berechnung nach der Methode der Antwortspektren wird angenommen, dass die Anregung durch Housner's Pseudo-Geschwindigkeitsspektrum der Fig.2.2 für $\zeta = 0.02$ gegeben sei. Allerdings werden die Ordinatenwerte als Werte in $[\frac{m}{s}]$ statt in $[\frac{ft}{s}]$ verwendet. Dadurch erhält man ein Spektrum, das einer maximalen Bodenbeschleunigung von etwa 0.4 g entspricht. Aus den Stützwerten dieses Spektrums $S_v(T_0, \zeta = 0.02)$ wurden durch lineare Interpolation die in Tabelle 4.2 angegebenen Werte an der Stelle der Eigenfrequenzen gewonnen. Für die in Fig. 4.9 angegebenen Knotenpunkte wurden dann die erwarteten Extremwerte der Verschiebungen q_2 in y-Richtung sowie für die angegebenen Elemente die erwarteten Extremwerte der Biegemomente M_y nach der Methode der Antwortspektren berechnet, wobei die Summation nach Gl. (4.55) ohne modale Kopplungsterme durchgeführt wurde. Die Nachrechnung mit den Kopplungskoeffizienten der Gl. (2.75), Gl. (4.54) sowie der Gl. (4.52) ergab nur unwesentlich andere Werte. In Fig. 4.11 sind die Ergebnisse der Methode der Antwortspektren bei einer Berechnung mit acht Eigenschwingungen sowie bei Berücksichtigung nur der ersten Eigenschwingung angegeben. Man sieht, dass die erste Eigenschwingung hier einen wesentlichen Anteil der endgültigen Werte liefert.

Fig. 4.9: Knotenpunkte und Elemente für Resultatauswertung

206.4298	6.2587	-.0296	-.1976	-.3968	.0974	.0165	-.0110
6.2587	10.7040	-.0083	-.0551	-.1104	.0271	.0046	-.0030
-.0296	-.0083	.0001	.0003	.0006	-.0001	-.0000	.0000
-.1976	-.0551	.0003	.0026	.0040	-.0010	-.0002	.0001
-.3968	-.1104	.0006	.0040	.0078	-.0019	-.0003	.0002
.0974	.0271	-.0001	-.0010	-.0019	.0005	.0001	-.0001
.0165	.0046	-.0000	-.0002	-.0003	.0001	.0000	-.0000
-.0110	-.0030	.0000	.0001	.0002	-.0001	-.0000	.0000

a) Kovarianzmatrix $[\Sigma_0]$ Faktor: 10^{-6}

248.2011	1.1940	-.0001	-.0086	-.0309	.0083	.0015	-.0010
1.1940	20.2238	-.0009	-.0085	-.0224	.0058	.0010	-.0007
-.0001	-.0009	.0005	.0002	.0004	-.0001	-.0000	.0000
-.0086	-.0085	.0002	.0092	.0043	-.0010	-.0002	.0001
-.0309	-.0224	.0004	.0043	.0085	-.0019	-.0003	.0002
.0083	.0058	-.0001	-.0010	-.0019	.0004	.0001	-.0000
.0015	.0010	-.0000	-.0002	-.0003	.0001	.0000	-.0000
-.0010	-.0007	.0000	.0001	.0002	-.0000	-.0000	.0000

b) Kovarianzmatrix $[\Sigma_2]$ Faktor: 10^{-3}

Fig. 4.10: Kovarianzmatrizen

Für die probabilistische Berechnung des Sicherheitsbehälters wurde für die Anregung das Leistungsspektrum $S_x(\Omega)$ nach Gl. (3.112) mit den in Tab. 4.1 angegebenen ausgeglichenen Werten der vier freien Parameter S_0 , ω_g , ζ_g und T verwendet. Dieses Leistungsspektrum entspricht im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate der Housner's Spektrum $S_v(T_0, \zeta = 0.02)$ zugrundeliegenden Anregung. Es wird angenommen, dass der ausgeglichene Wert $T = 2.5$ sec der Dauer des stationären Output-Prozesses auch für die Tragwerksgrößen gilt. In Tab. 4.2 sind die aus dem Leistungsspektrum $S_x(\Omega)$ folgenden Werte des Pseudo-Geschwindigkeitsspektrums $\bar{S}_v(T_0, \zeta = 0.02)$ nach Gl. (4.7) für die berechneten Eigenfrequenzen des Tragwerks ebenfalls angegeben. Wie früher bereits festgestellt, liefert das ausgeglichene Leistungsspektrum im Bereich der kleinen Perioden deutlich kleinere Werte als Housner's Spektrum. Fig. 4.10 zeigt die Kovarianzmatrizen $[\Sigma_0]$ und $[\Sigma_2]$ mit den Elementen

$$\sigma_{0,rs} = \frac{L_r L_s}{2\pi} \int_0^{\infty} H_{rs}(\Omega) S_x(\Omega) d\Omega \quad r,s = 1, \dots, 8 \quad (4.64)$$

$$\sigma_{2,rs} = \frac{L_r L_s}{2\pi} \int_0^{\infty} \Omega^2 H_{rs}(\Omega) S_x(\Omega) d\Omega \quad r,s = 1, \dots, 8 \quad (4.65)$$

unter Berücksichtigung der ersten acht Eigenschwingungen des Tragwerks. Dabei wurden die Integrationen numerisch durchgeführt. Man sieht, dass wegen des raschen Abklingens der Werte der Integrale wie auch der Partizipationsfaktoren nur die beiden ersten Eigenschwingungen wesentliche Bedeutung besitzen. Figur 4.11 zeigt die nach der probabilistischen Methode berechneten erwarteten Extremwerte für acht Eigenschwingungen sowie nur für die erste Eigenschwingung.

Fig. 4.11: Erwartete Extremwerte und Sicherheitsgrenzen ausgewählter Tragwerksgrößen

Für diesen letzteren Fall verhalten sich die probabilistischen Ergebnisse zu den entsprechenden Ergebnissen nach der Methode der Antwortspektren wie die Pseudo-Geschwindigkeitsspektren der Tab. 4.2 für die erste Frequenz. Mit Hilfe der mit acht Eigenschwingungen ermittelten Varianzen und erwarteten Frequenzen wurden für die Eintretenswahrscheinlichkeiten $\phi = 0.01$ (1%) und $\phi = 0.001$ (1‰) nach Gl. (3.43) und Gl. (3.45) die Sicherheitsgrenzen ermittelt und in Fig. 4.11 eingezeichnet. Man sieht, dass die Methode der Antwortspektren in diesem Beispiel konservative Ergebnisse für die erwarteten Extremwerte im Vergleich zu der probabilistischen Berechnung liefert, welche zwischen den 1% und 1‰ Sicherheitsgrenzen liegen.

5. SCHLUSSFOLGERUNGEN

Die probabilistische Tragwerksdynamik erlaubt eine umfassende und einheitliche Behandlung von Tragwerken unter dynamischen Lasten, welche einem Zufallsprozess entsprechen. Als Ergebnisse erhält man auf der Basis der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Erwartungswerte der Extremwerte der Tragwerksgrössen sowie die Sicherheitsgrenzen bei gegebener Eintretenswahrscheinlichkeit. Statistische Abhängigkeiten zwischen den Belastungen wie auch zwischen den Tragwerksgrössen können behandelt werden. Die probabilistische Dynamik liefert als Teilergebnis die erwarteten Frequenzen, welche in der Ermüdungsanalyse eine zentrale Rolle spielen. In der vorliegenden Arbeit wurde der Schwerpunkt auf die Formulierung in Normalkoordinaten mit entkoppelnden Bewegungsgleichungen gelegt. Die Methode lässt sich aber ebenfalls auf gekoppelte dynamische Gleichungen anwenden und erlaubt damit insbesondere auch die Behandlung von Tragwerken mit nichtproportionaler Dämpfung. In der modalen Formulierung mit entkoppelten Gleichungen ist die probabilistische Methode im Aufwand vergleichbar mit der Methode der Antwortspektren, falls die zur Bildung der Kovarianzmatrizen nötigen Integrationen analytisch durchgeführt werden. Der Weg zu einer entsprechenden Computermethode wurde in der vorliegenden Arbeit aufgezeigt. Schliesslich erlaubt das in der probabilistischen Dynamik benötigte Leistungsspektrum der Anregung bzw. ihre Autokorrelationsfunktion den Aufbau der entsprechenden Funktionen im Zeitbereich. Damit können auch nichtlineare Probleme behandelt werden.

Betrachtet man die Methode der Antwortspektren vor diesem Hintergrund der probabilistischen Tragwerksdynamik, so sieht man, dass es sich um eine ingenieurmässig vereinfachte Methode mit probabilistischen Elementen handelt. Diese finden sich einmal in der Definition des Antwortspektrums als Erwartungswert der extremen Relativverschiebung eines Einmassenschwingers. Zum anderen wird der Erwartungswert der Extremwerte der Tragwerksgrössen normalerweise entsprechend dem Bildungsgesetz der Streuung σ in der probabilistischen Dynamik aufgebaut. Die Kopplung zwischen den Eigenschwingungen kann näherungsweise berücksichtigt werden, wobei die Kopplungskoeffizienten nach Gl.(2.75) zumindest für eine White-Noise-Anregung zu konservativen Ergebnissen führen. Die Methode der Antwortspektren ist grundsätzlich auf Systeme mit diagonalen modalen Dämpfungsmatrix beschränkt und liefert nur die Verschiebungen und die dazu proportionalen Grössen. Da im Antwortspektrum die Phasenbeziehungen zwischen den Eigenschwingungen nicht mehr vorhanden sind, führt die Methode meist zu konservativen Resultaten. Zudem können aus dem Antwortspektrum die zugrundeliegenden Zeitfunktionen nicht rekonstruiert werden.

Aus dem Antwortspektrum einer gegebenen Anregung lässt sich mit der Methode der kleinsten Quadrate das Leistungsspektrum des entsprechenden stationären Prozesses berechnen. Dabei kann man zusätzlich einen ausgeglichenen Wert der Dauer des stationären Output-Prozesses erhalten. Damit lässt sich bei ge-

gegebenem Antwortspektrum ebenfalls die genauere probabilistische Berechnung durchführen. Umgekehrt erlaubt die Kenntnis eines Leistungsspektrums sofort auch die Bestimmung des zugehörigen Antwortspektrums. Diese Zusammenhänge lassen sich dazu benützen, um aus gegebenen Antwortspektren Stockwerks-Antwortspektren zu berechnen, ohne den Schritt über Zeitfunktionen machen zu müssen. Die probabilistische Tragwerksdynamik erlaubt weiterhin die Herleitung eines modalen Kopplungskoeffizienten für die Methode der Antwortspektren.

Da die probabilistische Tragwerksdynamik auf der Basis stationärer normalverteilter Prozesse eine genaue, rechnerisch einfache und methodisch saubere Berechnung erlaubt ist zu erwarten, dass diese Methode zunehmend an Bedeutung gewinnt. Dabei sind Erweiterungen auf nichtstationäre stochastische Prozesse wie auch auf nichtnormalverteilte Prozesse möglich. Alle hier gemachten Ueberlegungen basierten auf der Annahme, dass die Lasten stochastische Prozesse seien, die Tragwerkseigenschaften aber deterministisch bestimmt sind. In Wirklichkeit sind aber auch die Tragwerkseigenschaften stochastische Größen mit Mittelwerten und Varianzen. In einer allgemeinen probabilistischen Betrachtung des Tragwerkverhaltens muss dieser Umstand ebenfalls berücksichtigt werden. Die probabilistische Tragwerksdynamik wird damit zu einem Teil einer umfassenden Theorie der Tragwerkssicherheit.

NOMENKLATUR

a	Konstante
{a}	Verschiebungen unter Einheits-Auflagerbewegung
A	Amplitude ; Konstante
b	Konstante
B	Konstante
c	Dämpfungskonstante
c_{kr}	kritische Dämpfung: $c_{kr} = 2\sqrt{k m}$
[C]	Viskose Dämpfungsmatrix
e	Basis der natürlichen Logarithmen: $e = 2.718282$
E	Energie; Erwartungswert
f	Frequenz in Hertz; erwartete Frequenz
$F(\Omega)$	Anregendes Leistungsspektrum
g	Erdbeschleunigung: $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$
$h(t)$	Freie Schwingung unter Einheits-Anfangsgeschwindigkeit
$H(\Omega)$	Frequenzgang des Einmassenschwingers
$H_{rs}(\Omega)$	Realteil von $H_r(\Omega)$ $\bar{H}_s(\Omega)$
i	imaginäre Einheit; Index
I	Integralwert
j	Index
J	Integralwert
k	Steifigkeit; Index
[K]	Steifigkeitsmatrix
L	Partizipationsfaktor
m	Masse
M	Masse; Moment
[M]	Massenmatrix
n	Konstante; Index
N	Konstante
p	Last; Wahrscheinlichkeitsdichte
{p}	Lastvektor
P	Fourier-Transformierte von p; kumulative Wahrscheinlichkeit
q, {q}	Verschiebungen

$Q, \{Q\}$	Fourier-Transformierte von q bzw. $\{q\}$
r	Index
R	Autokorrelationsfunktion
$s(t)$	Instationärer Anteil der Varianz
$S, \{S\}$	Tragwerksgrösse
$S(\Omega)$	Leistungsspektrum
S_d	Antwortspektrum
S_v	Pseudo-Geschwindigkeitsspektrum
S_a	Pseudo-Beschleunigungsspektrum
$[S]$	Modale Spektralmatrix
t	Zeit
T	Schwingungsperiode; Dauer
x	Raumkoordinate; Auflagerverschiebung; stochastische Variable; Funktion
X	Fourier-Transformierte von x
y	Raumkoordinate
z	Raumkoordinate
$Z(\Omega)$	Zählerpolynom
γ	Euler'sche Konstante: $\gamma = 0.577216$
Δ	Determinante
ϵ_{rs}	Kopplungskoeffizient zwischen r -ter und s -ter Eigenschwingung
ζ	Dämpfungsrate: $\zeta = c/c_{kr}$
$\eta, \{\eta\}$	Normalkoordinaten
η	Fourier-Transformierte von η
κ	Frequenzenverhältnis; Konstante
μ	Erwartungswert
$[\mu]$	Kovarianzmatrix
π	Zahl $\pi = 3.1415927$
σ	Streuung
σ^2	Varianz
$[\Sigma]$	Kovarianzmatrix in Normalkoordinaten
τ	Zeit
ϕ	Wahrscheinlichkeit für Sicherheitsgrenzen
$\{\phi\}$	Eigenvektor
$[\Phi]$	Modalmatrix
$\{\Psi\}$	Modale Tragwerksgrössen

$[\Psi]$	Matrix der modalen Tragwerksgrössen
ω	Kreisfrequenz
Ω	Kreisfrequenz

LITERATUR

- [1] Amin, M. and Ang, A., Nonstationary Stochastic Model of Earthquake Motions. J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 94, EM2, April 1968.
- [2] Ang, A., Probability Concepts in Earthquake Engineering. Applied Mechanics in Earthquake Engineering, W.D. Iwan, Editor. AMD-Vol.8, ASME, New York, 1974.
- [3] Anthony, K.C., The Background of the Statistical Approach. Paper 2, Proc.Seminar on "The Modern Design of Wind-sensitive Structures", Inst. of Civil Engineers, London, June 1970.
- [4] Bathe, K.-J. and Wilson, E.L., Numerical Methods in Finite Element Analysis. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976.
- [5] Blume, J.A. and Monroe, R.E., The Spectral Matrix Method of Predicting Damage from Ground Motion. Report JAB-99-81, UC-35. John A. Blume and Ass. Research Div., San Francisco, 1971.
- [6] Bolotin, V.V., Statistical Theory of the Aseismic Design of Structures. Proc. 2nd World Conf. on Earthquake Engineering, Tokyo and Kyoto, 1960.
- [7] Clough, R.W., Earthquake Analysis by Response Spectrum Superposition. Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 52, No. 3, 1962.
- [8] Clough, R.W. and Penzien, J., Dynamics of Structures. McGraw-Hill, Inc., New York, 1975.
- [9] Damrath, R., Ein stochastisches Verfahren der seismischen Analyse von Bauwerken mit Anwendung auf Kernkraftwerke. Diss., Techn. Universität Berlin, Berlin 1974.
- [10] Davenport, A.G., Note on the Distribution of the Largest Value of a Random Function with Application to Gust Loading. Proc. Inst. of Civil Engineers, Vol. 28, paper No. 6739, 1964.
- [11] Davenport, A.G., On the Prediction of Response to the Wind Environment. Lecture Series 45, von Karman Inst. for Fluid Dynamics, "Wind Effects on Buildings and Structures", Rhode Saint Genese, Belgium, Feb. 1972.
- [12] De Salvo, G.J. and Swanson, J.A., ANSYS Engineering Analysis System User's Manual. Swanson Analysis Systems Inc., Elisabeth, PA, 1975.
- [13] Gersch, W., Nielsen, N., Akaike, H., Statistically Efficient and Computationally Efficient Identification of Structural Parameters from Random Vibration Records. Proc. 5th World Conf. on Earthquake Engineering, Rome, 1973.
- [14] Housner, G.W., Behaviour of Structures during Earthquakes. J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 85, EM4, Oct. 1959.
- [15] Kessler, E., Schockresponse-Spektren. Schweizerische Bauzeitung, 95. Jahrgang, Heft 49, 1977.
- [16] Kirby, R., Blissmer, F., Peterson, F., EASE2 Statics and Dynamics. Publ. No. 165, FIDES Trust Company, 1978.
- [17] Kohnke, P.C., ANSYS Theoretical Manual. Swanson Analysis Systems Inc., Elisabeth, PA, 1977.
- [18] MacNeal, R.H., Barnoski, R.L., Bailie, J.A., Response of a Simple Oscillator to Nonstationary Random Noise. J. Spacecraft and Rockets, AIAA, 1966.

- [19] MacNeal, R.H., Editor, The NASTRAN Theoretical Manual. NASA SP-221(01), 1972.
- [20] Melzer, H.-J., Niemann, H.-J., Schuëller, G.I., Statistische Methoden und ihre Anwendungen im Ingenieurbau. Teil II: Anwendungen. Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke, Lab. für den konstruktiven Ingenieurbau, T.U. München, Heft 27, 1978.
- [21] Newmark, N.M. and Rosenblueth, E., Fundamentals of Earthquake Engineering. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1971.
- [22] Newmark, N.M., Blume, J.A., Kapur, K.K., Seismic Design Spectra for Nuclear Power Plants. J. Power Div., ASCE, Vol. 99, PO2, Nov. 1973.
- [23] Pfaffinger, D.D., Comparative Seismic Analysis. Proc. European NASTRAN User's Conference, Munich, 1976.
- [24] Pfaffinger, D.D., Dynamische Probleme unter Anwendung Finiter Elemente. Tagung "Finite Berechnungsmethoden im konstruktiven Ingenieurbau". Mitteilung Nr. 76-8, Inst. für konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, Bochum 1976.
- [25] Pfaffinger, D.D., Computermethoden in der Dynamik II. Vorlesungsnotizen, 1977.
- [26] Rice, S.O., Mathematical Analysis of Random Noise. Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, N. Wax, Editor. Dover Publications Inc., New York, 1954.
- [27] Ruiz, P. and Penzien, J., Probabilistic Study of the Behaviour of Structures during Earthquakes. Earthquake Eng. Research Center, University of California, Berkeley, 1969.
- [28] Schiff, A., Feil, P., Bogdanoff, J., Estimating Structural Parameters from Response Data. Proc. 5th World Conf. on Earthquake Engineering, Rome, 1973.
- [29] Schuëller, G.I., On the Reliability of the Spectral Method for the Design of Offshore Structures. J. of Hydraulic Research, Vol.14, No. 3, 1976.
- [30] Tajimi, H., A Statistical Method of determining the Maximum Response of a Building Structure during an Earthquake. Proc. 2nd World Conf. on Earthquake Engineering, Tokyo and Kyoto, 1960.
- [31] Wieland, M., State-of-the-Art Report über das dynamische Verhalten von Staumauern und von Staumauerbeton während Erdbeben. Mitteilung Nr. 24, Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie der ETH Zürich, Zürich, 1977.
- [32] Wilson, E.L., Bathe, K.-J., Peterson F., Dovey, H.H., Computer Program for Static and Dynamic Analysis of Linear Structural Systems. Report No. EERC 72-10, College of Engineering, University of California, Berkeley, 1972.