Modelle für das Dämpfungsverhalten von schwingenden Stahlbetonträgern im ungerissenen und gerissenen Zustand

Working Paper**Author(s):**

Dieterle, Rudolf

Publication date:

1981

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000602989>

Rights / license:

In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

Originally published in:

Bericht / Institut für Baustatik und Konstruktion ETH Zürich 111

**Modelle für das Dämpfungsverhalten
von schwingenden Stahlbetonträgern
im ungerissenen und gerissenen Zustand**

Rudolf Dieterle

April 1981
Bericht Nr. 111

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Dieterle, Rudolf:

Modelle für das Dämpfungsverhalten von schwingenden
Stahlbetonträgern im ungerissenen und gerissenen
Zustand / von Rudolf Dieterle. – Basel; Boston;
Stuttgart: Birkhäuser, 1981.

(Bericht / Institut für Baustatik und Konstruktion
ETH Zürich; Nr. 111)
ISBN 3-7643-1262-9

NE: Institut für Baustatik und Konstruktion <Zürich>:
Bericht

Nachdruck verboten.

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen und
der Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm,
verboten.

Modelle für das Dämpfungsverhalten von schwingenden Stahlbetonträgern im ungerissenen und gerissenen Zustand

von

Dr. sc. techn. Rudolf Dieterle

Institut für Baustatik und Konstruktion
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

Zürich
April 1981

Vorwort

Das Dämpfungsverhalten schwingender Stahlbetonkonstruktionen im ungerissenen und insbesondere im gerissenen Zustand ist ein komplexes und immer noch schlecht erforschtes Problem. Mit der vorliegenden Dissertation ist es unseres Wissens erstmals gelungen, die in Versuchen nach der Rissbildung und mit zunehmender Beanspruchungshöhe beobachtete starke Abnahme des Dämpfungsmasses durch ein physikalisch plausibles und mathematisch klar beschreibbares Gedankenmodell zu erklären.

Die Dämpfung hat einen erheblichen Einfluss auf die Verformungen und Beanspruchungen von Tragwerken, die beispielsweise durch Fahrzeuge, Maschinen oder Erdbeben zu Schwingungen angeregt werden. Die hier festgehaltenen Forschungsergebnisse stellen deshalb einen wichtigen Schritt dar zu einem besseren Verständnis eines wesentlichen Phänomens der Bauwerksdynamik.

Zürich, April 1981

Prof. Dr. H. Bachmann

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Vorwort	
1. Einleitung	1
1.1 Problemstellung	1
1.2 Zielsetzung	3
2. Grundlagen der Dämpfung	4
2.1 Begriff der Dämpfung	4
2.2 Allgemeines zur Schwingungsdifferentialgleichung	4
2.2.1 Tragwerksdynamische Grundlagen	4
2.2.2 Besonderheiten der Dämpfungsmatrix	9
2.3 Die Dämpfungsenergie	12
2.3.1 Massgrößen für die Dämpfungsenergie	12
2.3.2 Verhältnis der totalen Dämpfungsenergie zur Formänderungsenergie	15
2.4 Dämpfungsarten und Dämpfungsursachen	19
2.4.1 Dämpfungsarten	19
2.4.2 Materialdämpfung	20
2.4.3 Ursachen der inneren Dämpfung	24
2.5 Geläufige Modelle zur Berücksichtigung der Dämpfung	26
2.5.1 Viskose Dämpfung (dynamische Hysterese)	26
2.5.2 Äquivalente viskose Dämpfung	34
2.5.3 Hysteresis-Dämpfung (statische Hysterese)	36
2.5.4 Coulomb-Dämpfung (statische Hysterese)	38
2.5.5 Kombiniertes Dämpfungsmodell	44
2.5.6 "Structural Damping" (dynamische Hysterese)	49
3. Die Dämpfungseigenschaften von Beton und Stahl	55
3.1 Beton	55
3.2 Stahl	58
3.3 Stahlbeton und Spannbeton	60
3.3.1 Fremde Versuche	60
3.3.2 Eigene Versuche	61
4. Grundlagen des Verbundes zwischen Beton und Stahl	65
4.1 Die Differentialgleichung des verschieblichen Verbundes	65
4.2 Grundgesetz des Verbundes	67
4.3 Ermittlung der Verteilungsfunktionen für die Stahlspannungen, Verbundspannungen und Relativverschiebungen in einem gerissenen Biegeelement	68
4.4 Beanspruchung des Betons durch die Verbundspannung	72
4.4.1 Ringzugspannungen und Radialspannungen	72
4.4.2 Neuere Modellvorstellungen	74
4.5 Wichtige Feststellungen	77

	Seite
5. Dämpfungsmodelle für ein gerissenes und ungerissenes Biegeelement	78
5.1 Allgemeines	78
5.2 Dämpfungsmodell	82
5.2.1 Viskose Dämpfung	84
5.2.1.1 Energiedissipation durch viskose Dämpfung	85
5.2.1.2 Einfluss eines Vorzeichenwechsels des Biegemomentes	87
5.2.2 Coulomb-Dämpfung	89
5.2.2.1 Energiedissipation durch Coulomb-Dämpfung	91
5.2.2.2 Einfluss des Rissabstandes	97
5.2.2.3 Einfluss des Bewehrungsgehaltes	98
5.2.2.4 Einfluss eines Vorzeichenwechsels des Biegemomentes	100
5.2.3 Viskose Dämpfung kombiniert mit Coulomb-Dämpfung	101
6. Dämpfungsmodell eines Biegeträgers	103
6.1 Methoden zur Berechnung der Dämpfungseigenschaften	104
6.2 Energiedissipation eines vollkommen gerissenen Biegeträgers	106
6.2.1 Viskose Dämpfung	106
6.2.2 Coulomb-Dämpfung	108
6.2.3 Viskose Dämpfung kombiniert mit Coulomb-Dämpfung	111
6.3 Energiedissipation eines vollkommen ungerissenen Biegeträgers	112
6.4 Energiedissipation eines teilweise gerissenen Biegeträgers	113
6.4.1 Viskose Dämpfung	113
6.4.2 Coulomb-Dämpfung	114
6.4.3 Viskose Dämpfung kombiniert mit Coulomb-Dämpfung	116
7. Numerische Angaben und Vergleich mit Versuchsergebnissen	118
7.1 Quantitative Angaben über die Dämpfungsparameter eines Biegeelementes	118
7.1.1 Viskose Dämpfung	118
7.1.2 Coulomb-Dämpfung	120
7.2 Vergleich des theoretischen Modells mit eigenen Versuchen	127
7.2.1 Ausschwingversuche	128
7.2.2 Resonanzversuche	130
7.3 Kontrolle der Ergebnisse des Modells anhand fremder Versuche	132
7.4 Vergleich Beton - Leichtbeton	136
7.5 Einfluss einer Vorspannung	138
8. Praktische Beispiele	141
8.1 Grundsätzliches Vorgehen	141
8.2 Bestimmung der Dämpfungseigenschaften von Mehrmassenschwingern	143
8.3 Einfacher Stahlbetonbiegeträger als Einmassenschwinger	145
8.4 Einfacher Stahlbetonbiegeträger als Mehrmassenschwinger	148
8.5 Stahlbetonrahmen als Einmassenschwinger	151
8.6 Folgerungen	154
8.7 Anwendungsgrenzen	155
9. Schlussbemerkungen, ungelöste Probleme	157

	Seite
ZUSAMMENFASSUNG	160
RESUME	162
SUMMARY	164
BEZEICHNUNGEN	166
LITERATURVERZEICHNIS	171
ANHANG A1: Gerissenes und ungerissenes Biegeelement	174
ANHANG A2: Teilweise gerissener Stahlbetonträger	177
ANHANG A3: Vereinfachte Empfehlungen für die Annahme des Dämpfungs- masses	180

1. Einleitung

1.1 Problemstellung

Besser ausnützbare Materialien und neue Technologien ermöglichen den Bau von immer schlankeren Tragwerken, welche vor allem durch periodisch wirkende Kräfte sehr leicht in Schwingungen mit grösseren Amplituden versetzt werden können. Dies hat zur Folge, dass bei der Projektierung und bei späteren Kontrollen immer detailliertere Untersuchungen angestellt werden müssen und deshalb auch die dynamische Berechnung von Ingenieurtragwerken stark an Bedeutung gewonnen hat.

Wesentliche Bestandteile einer dynamischen Berechnung eines Tragwerks sind die Ermittlung der Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen sowie die Berechnung von Amplituden und Beanspruchungen infolge dynamischer Kräfte. Die Amplituden und Beanspruchungen werden bei periodischer Erregung sehr stark, bei stochastischer Erregung etwas schwächer und bei Stossbelastung in eher geringem Mass durch die Dämpfungseigenschaften des Tragwerks beeinflusst.

Während die Technik der dynamischen Analyse mittels Computerprogrammen schon weit fortgeschritten und entwickelt ist, fehlen heute noch bei vielen Materialien, insbesondere auch beim Stahlbeton, grundlegende Kenntnisse über deren Dämpfungseigenschaften. Die Ergebnisse einer dynamischen Berechnung können jedoch nur brauchbar sein, wenn sie auf wirklichkeitsnahen Grundlagen beruhen.

Die Kenntnis der Dämpfungseigenschaften von Stahlbetontragwerken im ungerissenen sowie im gerissenen Zustand bei Beanspruchungen unterhalb der Proportionalitätsgrenze ist in den folgenden praktischen Fällen von Bedeutung:

- Realistische Ermittlung der durch die dynamische Belastung erzeugten Amplituden, Beschleunigungen und Beanspruchungen.
- Beurteilung, ob infolge der dynamischen Belastung im Beton Risse entstehen können (Einfluss auf Steifigkeit bzw. Eigenfrequenz).
- Beurteilung, ob bei hoher dynamischer Belastung (z.B. Erdbeben) die Beanspruchung unterhalb der Proportionalitätsgrenze bleibt, oder ob diese überschritten wird (Einfluss auf Steifigkeit bzw. Eigenfrequenz sowie Amplituden und Energiedissipation). Bei hoher Dämpfung kann die durch die äusseren Kräfte zugeführte Energie möglicherweise dissipiert werden, ohne dass die Proportionalitätsgrenze überschritten wird. Bei geringer Dämpfung können die durch die dynamischen Kräfte erzeugten Beanspruchungen gross genug werden, um im Tragwerk plastische Verformungen zu erzeugen.

- Bei durch wiederholte Belastungen gefährdeten Tragwerken können die auftretenden Spannungen zutreffender ermittelt werden, womit das Problem der Ermüdung besser beurteilt werden kann.

Zur Ermittlung der Dämpfungseigenschaften von schlaff bewehrten und vorgespannten Bauteilen und Konstruktionen aus Stahlbeton wurden bis heute schon einige Versuche durchgeführt. Die Dämpfung dieser Tragwerke beruht auf verschiedenen, zum Teil wenig bekannten physikalischen Ursachen und hängt von zahlreichen Einflussparametern ab. Es ist deshalb nicht erstaunlich, dass die in den Versuchen festgestellten Werte für die Dämpfung innerhalb eines sehr weiten Bereiches streuen. Vor allem zwei Erscheinungen dürften für diese grosse Streuung verantwortlich sein:

Einerseits wird die Dämpfung von ganzen Stahlbetonkonstruktionen nicht allein durch die Dämpfungseigenschaften des Materials (Materialdämpfung), sondern auch - je nach dem Baugrund, der Ausbildung des statischen Systems, etc. - durch die Dämpfungseigenschaften der Umgebung (Systemdämpfung) beeinflusst. Da der Anteil der Systemdämpfung an der gesamten Dämpfung beträchtlich sein kann, ist es möglich, dass die an analogen Tragwerken festgestellte Dämpfung je nach Umgebung stark unterschiedlich sein kann.

Andererseits wird die Materialdämpfung von Stahlbetonbauteilen und Stahlbetonkonstruktionen sehr stark durch deren Risszustand beeinflusst. Während die Dämpfungseigenschaften von ungerissenen, insbesondere von voll vorgespannten Tragwerken in zahlreichen Untersuchungen mit recht gut übereinstimmenden Werten beschrieben werden, bestehen in der Literatur bei der Beurteilung des Einflusses des Risszustandes auf die Dämpfung in qualitativer und quantitativer Hinsicht grosse Unterschiede.

Modellvorstellungen, mit welchen die an gerissenen Tragwerken festgestellten Dämpfungsphänomene erklärt werden können, werden in der Literatur kaum mitgeteilt. Ueblicherweise wird angegeben, dass Tragwerke aus Stahlbeton im Risszustand nebst kleineren Eigenfrequenzen eine erheblich grössere Dämpfung als im ungerissenen Zustand aufweisen.

Zur Ueberprüfung dieses Sachverhaltes und zur Abklärung des Einflusses von wichtigen Konstruktionsparametern auf die (Material-)Dämpfungseigenschaften von Stahlbeton wurden am Institut für Baustatik und Konstruktion der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich (ETH) systematische Versuche an sieben schlaff bewehrten Beton- und Leichtbetonträgern durchgeführt. Diese Versuche und die dabei gewonnenen Resultate sind in [3.1] und [3.26] beschrieben. Anschliessend konnte damit begonnen werden, theoretische Modelle zur Erklärung der experimentell gefundenen Dämpfungsphänomene zu entwickeln. Die Ergebnisse dieses zweiten, theoretischen Teils der Forschungsarbeiten sind im folgenden festgehalten.

1.2 Zielsetzung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, physikalisch plausible Modelle zur Erfassung der Dämpfungseigenschaften von Stahlbetonbauteilen und Stahlbetonkonstruktionen zu entwickeln, wobei nur die Materialdämpfung berücksichtigt werden soll. Die Modelle sollen unter den folgenden Voraussetzungen und Bedingungen angewendet werden können:

- Schlaff bewehrte und voll vorgespannte Tragwerke.
- Beanspruchung vorwiegend auf Biegung und Biegung mit Axialkraft.
- Beanspruchung aller Querschnitte unterhalb der Proportionalitätsgrenze.
- Ungerissene und gerissene Querschnitte.

Besonderes Gewicht wird dem Risszustand von schlaff bewehrten Tragwerken beigemessen.

2. Grundlagen der Dämpfung

In diesem Kapitel sollen aufgrund einer Literaturlauswertung die wichtigsten physikalischen Tatsachen, die üblichen Modellvorstellungen zur Erfassung der Dämpfung und die zugehörigen mathematischen Zusammenhänge dargestellt werden. Insbesondere sollen die für das Verständnis dieser Arbeit und die Herleitung der gesuchten Dämpfungsmodelle für Stahlbetonkonstruktionen im Risszustand benötigten Grundlagen angeführt werden.

Nach der begrifflichen Klärung werden zuerst einige bauwerksdynamische Grundlagen sowie Besonderheiten der Schwingungsdifferentialgleichungen unter Berücksichtigung der Dämpfung dargelegt. In einem weiteren Abschnitt wird auf die Bedeutung und Berechnung der Dämpfungsenergie eingegangen. Die verschiedenen Erscheinungsformen der Dämpfung werden gruppiert und ihre möglichen physikalischen Ursachen dargelegt. Im letzten Abschnitt werden die heute geläufigen Modelle zur Berücksichtigung der Dämpfung vorgestellt.

2.1 Begriff der Dämpfung

Unter dem Begriff "Dämpfung", wie er im weiteren verwendet wird, verstehen wir die Eigenschaft eines Materials oder Systems, Schwingungsenergie (potentielle und kinetische Energie) in andere Energieformen umzuwandeln [2.2]. Dadurch wird bewirkt, dass mechanische Bewegungen stets endliche Ausmasse haben, und dass sich bewegende Körper ohne Einwirkung einer anderen Kraft zur Ruhe kommen. Mit dieser Definition muss die Energie innerhalb des Systems dissipiert werden (innere Dämpfung, vgl. Abschn. 2.4). In den meisten Fällen wird dabei mechanische Energie in Wärme umgewandelt. Weitere sinngemäss ähnliche Definitionen werden zum Beispiel in [1.1], [3.2] und [3.3] gegeben.

2.2 Allgemeines zur Schwingungsdifferentialgleichung

2.2.1 Tragwerksdynamische Grundlagen

Dynamische Beanspruchungen von Bauteilen und Tragwerken können entstehen durch

- Wind
- Erdbeben
- Verkehr
- Wasserwellen
- Explosionen
- laufende Maschinen
- usw.

Diese periodischen, nichtperiodischen oder stochastischen Belastungen bewirken beim Tragwerk mit der Zeit veränderliche Verformungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. Letztere sind die Ursache von Trägheitskräften, die zusätzlich zur statischen Belastung auf das Tragwerk einwirken. Je nach deren Grösse können die dynamischen Zusatzbeanspruchungen für die Bemessung eines Tragwerks massgebend werden.

Tragwerke sind Schwingssysteme mit - theoretisch gesehen - unendlich vielen Freiheitsgraden. Dem entsprechen Differentialgleichungssysteme mit unendlich vielen Gleichungen. In der Regel kann jedoch die Zahl der relevanten Freiheitsgrade beschränkt und damit der Lösungsaufwand in erträglichem Rahmen gehalten werden.

Wenn die physikalischen Eigenschaften eines Systems so beschaffen sind, dass deren Bewegung durch einen einzigen Freiheitsgrad beschrieben werden kann, und keine andere Bewegung möglich ist, kann das System als Einmassenschwinger behandelt werden.

Wendet man das Prinzip von d'Alembert auf diesen einfachsten Schwingertyp, den Einmassenschwinger, an, so erhält man die Differentialgleichung

$$m \cdot \ddot{w} + R(z, \dot{z}) = P(t) \quad . \quad (2.1)$$

Die Trägheitskraft $m \cdot \ddot{w}$ (die Trägheitskraft muss mit der absoluten Beschleunigung $\ddot{w}$, d.h. der Führungsbeschleunigung und Relativbeschleunigung $\ddot{z}$ berechnet werden), und die bewegungshemmende Kraft $R(z, \dot{z})$ (die bewegungshemmende Kraft R muss mit der Relativverschiebung z bzw. Relativgeschwindigkeit $\dot{z}$ berechnet werden) müssen also zu jedem Zeitpunkt mit der äusseren Belastung $P(t)$ im Gleichgewicht sein. Durch die Belastung $P(t)$ wird dem Tragwerk bzw. Schwingssystem Energie zugeführt. Kann diese Energie nicht vom Tragwerk absorbiert werden (z.B. durch Umwandlung in Wärme), so wird das Tragwerk immer weiter aufgeschaukelt bis es zu Bruch geht. Bekanntlich besitzt jedoch jedes Material die Fähigkeit, allerdings in sehr bescheidenem Ausmass, Bewegungsenergie zu absorbieren. Diese Eigenschaft wird Dämpfungsvermögen genannt. Je geringer die Dämpfung eines Materials bzw. einer Konstruktion ist, desto höher sind die auftretenden Beschleunigungen und Trägheitskräfte.

Man unterscheidet zwischen linearen und nichtlinearen Schwingern bzw. Differentialgleichungen.

Bei linearen Einmassenschwingern bzw. Differentialgleichungen wird R aufgeteilt in einen Teil $k \cdot z$, der nur zu z und einen Teil $c \cdot \dot{z}$, der nur zu $\dot{z}$ proportional ist ($k, c = \text{konstant}$). Wird zugleich angenommen, dass die absolute Verschiebung w und die relative Verschiebung z gleich sind (ruhender Aufhängepunkt in Bild 1), so erhält man die Bewegungsgleichung eines Einmassen-

schwingers mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung

$$m \cdot \ddot{z} + c \cdot \dot{z} + k \cdot z = P(t). \quad (2.2)$$

In Bild 1 ist das Modell des zur Gl. (2.2) gehörenden Einmassenschwingers abgebildet.

Bild 1: Modell eines Einmassenschwingers

$k \cdot z$ entspricht der elastischen Rückstellkraft F_F der Feder, $c \cdot \dot{z}$ der Dämpfungskraft F_D des im Modell angegebenen Dämpfungselementes. Damit c und k als konstant betrachtet werden dürfen, müssen sie unabhängig von der Geschichte der Bewegung, der Amplitude z , der Belastung $P(t)$ und der Zeit t sein. Ungedämpfte Systeme ($c = 0$) sind konservativ. Sobald die Dämpfung in Betracht gezogen wird, haben wir es mit einem nichtkonservativen System zu tun, da Energie dissipiert wird.

In Bild 2 ist ein als einfacher Balken mit Kragarm gelagerter Biegeträger abgebildet. Dessen Masse, Steifigkeit, Dämpfung und Belastung werden durch die längs der Balkenachse variablen Größen $m(x)$, $EI(x)$, $c(x)$ und $p(x,t)$ sowie durch die diskret angeordneten Massenpunkte m_i , Federn k_i , Dämpfer c_i und Lasten $P_i(t)$ beschrieben.

Wenn dieser Träger als Einmassenschwinger berechnet werden soll, können die Koeffizienten m , k , c und die Belastung $P(t)$ der Differentialgleichung (2.2) z.B. durch Anwendung des Hamiltonschen Prinzips berechnet werden [1.2]. Bei bekanntem oder geschätztem Verlauf der Schwingungsform $\Psi(x)$ erhält man

$$\begin{aligned} m &= \int_0^L m(x) \cdot \Psi^2(x) \cdot dx + \sum m_i \cdot \Psi_i^2 + \sum I_{oi} \cdot \Psi_i'^2 \\ k &= \int_0^L EI(x) \cdot \Psi''^2(x) \cdot dx + \int_0^L k(x) \cdot \Psi^2(x) \cdot dx + \sum k_i \cdot \Psi_i^2 \\ c &= \int_0^L c(x) \cdot \Psi^2(x) \cdot dx + \sum c_i \cdot \Psi_i^2 \\ P(t) &= \int_0^L p(x) \cdot \Psi(x) \cdot dx + \sum P_i \cdot \Psi_i \end{aligned} \quad (2.3)$$

Bild 2: Biegeträger mit verteilt und diskret angeordneten Eigenschaften

Bei linearen Mehrmassenschwingern mit m Freiheitsgraden müssen m Differentialgleichungen mit zu Gl.(2.2) analogem Aufbau aufgestellt werden. Benützt man die Matrizen-Schreibweise, so führt dies zum Differentialgleichungssystem

$$[M] \cdot \{\ddot{z}\} + [C] \cdot \{\dot{z}\} + [K] \cdot \{z\} = \{P(t)\} . \quad (2.4)$$

Die Massenmatrix $[M]$ kann auf zwei Arten bestimmt werden:

- Bei der Verwendung einer "lumped-mass"-Matrix wird angenommen, dass die ganze Masse an den Knoten konzentriert ist, bei welchen die Verschiebungsvektoren definiert sind. In diesem Fall ist $[M]$ eine Diagonal-Matrix.
- Bei der Verwendung einer "consistent-mass"-Matrix kann die kontinuierliche Verteilung der Massen beibehalten werden. Die Koeffizienten $m_{i,j}$ eines Tragwerkelementes können in zu Gl. (2.3) analoger Weise aus

$$m_{i,j} = \int_0^L m(x) \cdot \psi_i(x) \cdot \psi_j(x) \cdot dx \quad (2.5)$$

berechnet werden, wobei für die Verschiebungsfunktionen $\psi_i(x)$ bzw. $\psi_j(x)$ im allgemeinen spezielle Annahmen (Hermitsche Polynome) getroffen werden. Wenn die Koeffizienten $m_{i,j}$ eines Tragwerkelementes bestimmt worden sind,

kann die Massenmatrix des gesamten Tragwerks durch geeignete Superposition der Element-Massenkoeffizienten berechnet werden.

Die Steifigkeitsmatrix $[K]$ kann ebenfalls auf zwei Arten bestimmt werden:

- Ausgehend von der Definition der Koeffizienten $k_{i,j}$ (= Kraft am Knoten i , wenn beim Knoten j eine Einheitsverschiebung erzeugt wird und alle anderen Knotenverschiebungen gleich null sind) können diese in einer statischen Analyse bestimmt werden.
- Wie bei der Bestimmung der "consistent-mass"-Matrix können auch zuerst die Koeffizienten $k_{i,j}$

$$k_{i,j} = \int_0^L EI(x) \cdot \Psi_i''(x) \cdot \Psi_j''(x) \cdot dx \quad (2.6)$$

eines Tragwerkelementes bestimmt werden. Durch geeignete Superposition der Koeffizienten $k_{i,j}$ kann die Steifigkeitsmatrix des gesamten Tragwerks berechnet werden.

Die Dämpfungsmatrix $[C]$ wird am besten in Analogie zur "consistent-mass"-Matrix berechnet. Die Dämpfungskoeffizienten $c_{i,j}$ eines Tragwerkelementes

$$c_{i,j} = \int_0^L c(x) \cdot \Psi_i(x) \cdot \Psi_j(x) \cdot dx \quad (2.7)$$

können auch hier durch geeignete Superposition zur Dämpfungsmatrix $[C]$ des ganzen Tragwerks zusammengesetzt werden. Die m gekoppelten Differentialgleichungen (2.4) eines linearen Mehrmassenschwingers können mit dem Ansatz

$$\{z(x,t)\} = [\Phi] \cdot \{\eta(t)\} \quad (2.8)$$

in m entkoppelte und somit voneinander unabhängige Differentialgleichungen umgewandelt werden (vgl. z.B. [1.2] und [1.5])

$$\ddot{\eta}_i + 2 \cdot \xi_i \cdot \omega_i \cdot \dot{\eta}_i + \omega_i^2 \cdot \eta_i = \frac{p_i(t)}{m_i} \quad (2.9)$$

wobei: Φ i -ter Eigenvektor

$[\Phi]$ Matrix der Eigenvektoren

η_i Normalkoordinate zur Festlegung des i -ten Freiheitsgrades

ξ_i Dämpfungsmass der i -ten Eigenschwingung

ω_i Eigenkreisfrequenz der i -ten Eigenschwingung

$$m_i = \Phi_i^T \cdot [M] \cdot \Phi_i$$

$$p_i(t) = \Phi_i^T \cdot P_i(t)$$

Wenn das Dämpfungsmass ξ_i der i -ten Eigenschwingung bekannt ist, kann der Beitrag der i -ten Eigenschwingung an der gesamten Bewegung aus Gl. (2.9) ermittelt werden. Mit Gl. (2.8) kann, nachdem die Lösungen der m Differential-

gleichungen (2.9) ermittelt worden sind, die Bewegung des Tragwerks berechnet werden.

Bei nichtlinearen Einmassenschwingern ergeben sich nichtlineare Differentialgleichungen. Nichtlinearität kann durch ein nichtlineares Kraft-Verschiebungsgesetz (Federgesetz), d.h. durch

- $k \neq$ konstant und/oder
- eine Abweichung vom verschiebungsproportionalen Ansatz und/oder durch ein nichtlineares Dämpfungsgesetz, d.h. durch
- $c \neq$ konstant und/oder
- eine Abweichung vom geschwindigkeitsproportionalen Ansatz bedingt sein.

Die nichtlineare Schwingungsdifferentialgleichung wird häufig am besten numerisch gelöst.

Bei nichtlinearen Mehrmassenschwingern können die nichtlinearen Differentialgleichungen nicht entkoppelt werden. Die Lösung erfolgt über Näherungsverfahren (Verfahren der Harmonischen Balance, Verfahren von Krylow/Bogoljubov, usw.) oder über numerische Methoden. Je nach Modellvorstellung, die der Dämpfung zugrunde gelegt wird, muss für das Dämpfungsglied in den Gleichungen (2.1) und (2.2) ein entsprechender linearer oder nichtlinearer Ansatz gemacht werden.

2.2.2 Besonderheiten der Dämpfungsmatrix

Bei bekanntem Dämpfungskoeffizienten $c(x)$ können die Koeffizienten $c_{i,j}$ der Dämpfungsmatrix $[C]$ gemäss Gl. (2.7) problemlos berechnet werden. In der Praxis ist es jedoch meist nicht möglich, den Dämpfungskoeffizienten $c(x)$ eines Tragwerks auf experimentellem Weg zu ermitteln. Die Berechnung der Dämpfungsmatrix gemäss Gl. (2.7) ist somit im allgemeinen nur von theoretischem Wert und muss für praktische Zwecke durch andere geeignetere, nach Möglichkeit sowohl physikalisch vertretbare als auch mathematisch einfach zu handhabende Ansätze ersetzt werden. Für das Gleichungssystem (2.4) kann eine einfache analytische Lösung angegeben werden, wenn die Dämpfungsmatrix $[C]$ bestimmte Bedingungen erfüllt. Nach [1.3] kann eine solche einfache Lösung gefunden werden, wenn eine Transformation existiert, welche die drei Matrizen $[M]$, $[K]$ und $[C]$ diagonalisiert.

Diese Bedingungen sind erfüllt, wenn $[C]$ durch eine Linearkombination von $[M]$ und $[K]$ ausgedrückt werden kann

$$[C] = \alpha \cdot [K] + \beta \cdot [M] , \quad (2.10)$$

d.h., wenn für $[C]$ ein steifigkeitsproportionaler, massenproportionaler oder kombiniert steifigkeits-/massenproportionaler Ansatz gemacht werden kann.

Diese Ansätze werden proportional genannt. Andere (auch geschwindigkeitsproportionale) Ansätze, die nicht in der genannten Form dargestellt werden können, werden nichtproportional genannt. Die Differentialgleichungen mit proportionaler und nichtproportionaler Dämpfung können entkoppelt werden [1.5]. Bei proportionaler Dämpfung schwingt das System in einer Kombination von verschiedenen Eigenschwingungsformen, welche die gleiche Form wie beim ungedämpften System haben und deren Schwingungsknoten stets am gleichen Ort bleiben.

- Bei steifigkeitsproportionaler Dämpfung, d.h. mit

$$[C] = \alpha \cdot [K]$$

$$c_{i,j} = \alpha \cdot k_{i,j}$$

erhält man nach einigen Zwischenrechnungen für das Dämpfungsmass ξ_i der i-ten Eigenschwingung

$$\xi_i = \alpha \cdot \frac{\omega_i}{2} \quad . \quad (2.11)$$

Demzufolge weisen Eigenschwingungsformen mit höheren Eigenkreisfrequenzen bei diesem Dämpfungsansatz ein grösseres Dämpfungsmass auf als solche mit kleineren Eigenkreisfrequenzen (vgl. Bild 3).

- Bei massenproportionaler Dämpfung, d.h. mit

$$[C] = \beta \cdot [M]$$

$$c_{i,j} = \beta \cdot m_{i,j}$$

erhält man wiederum nach einigen Zwischenrechnungen für das Dämpfungsmass ξ_i der i-ten Eigenschwingungsform

$$\xi_i = \frac{\beta}{2 \cdot \omega_i} \quad . \quad (2.12)$$

Im Gegensatz zum vorhergehenden Fall ist das Dämpfungsmass ξ_i der einzelnen Eigenschwingungsformen umgekehrt proportional zu deren Eigenkreisfrequenz (vgl. Bild 3).

- Bei kombiniert steifigkeits- und massenproportionaler Dämpfung, d.h. mit dem Ansatz von Gl. (2.10) erhält man für

$$\xi_i = \frac{\beta + \alpha \cdot \omega_i^2}{2 \cdot \omega_i} \quad . \quad (2.13)$$

Bild 3 zeigt, wie das Dämpfungsmass ξ_i der einzelnen Eigenschwingungsformen von der Eigenkreisfrequenz ω_i abhängt.

Bild 3: Dämpfungsmass ξ in Funktion der Frequenz ω

Die meisten Materialien und Strukturen, die in der Praxis anzutreffen sind, haben ein Dämpfungsmass, das praktisch von der Frequenz unabhängig ist. Der Ansatz von Gl. (2.10) lässt sich also nur aus praktischen, d.h. mathematischen Gründen rechtfertigen. Während es noch möglich erscheint, sich bei einem viskoelastischen Material einen mit der Steifigkeit gekoppelten Dämpfungsmechanismus vorzustellen, erscheint der massenproportionale Ansatz sehr willkürlich, da ein mit der Massenträgheit verknüpfter Dämpfungsmechanismus fast unvorstellbar ist. Mit dem Ansatz von Gl. (2.10) kann für das Dämpfungsmass ξ_i von Gl. (2.13) nur dann ein frequenzunabhängiger Wert gefunden werden, wenn das System nur zwei Freiheitsgrade und demzufolge nur zwei Eigenkreisfrequenzen aufweist.

Eine vom physikalischen Standpunkt aus gesehen befriedigendere Lösung kann gefunden werden, wenn direkt z.B. vom Dämpfungsmass ξ oder dem logarithmischen Dekrement δ ausgegangen wird. Diese können mit geringem Aufwand in einfachen Experimenten bestimmt werden.

Im durch Entwicklung nach den Eigenschwingungsformen entkoppelten Differentialgleichungssystem (2.9) kann für jede Eigenschwingung das zu ihr gehörige Dämpfungsmass ξ_i definiert werden. Bei der Festlegung der Grösse von ξ_i könnte auch eine allfällige Frequenzabhängigkeit berücksichtigt werden.

Bei der Berechnung von nichtlinearen Strukturen kann es notwendig sein, dass die Dämpfungsmatrix $[C]$ aus den vorhin festgelegten Dämpfungsmassen ξ_i berechnet werden muss. Nach [1.1] kann dies gemäss der Beziehung

$$[C] = [M] \cdot \left[\sum_{i=1}^m \frac{2 \cdot \xi_i \cdot \omega_i}{m_i} \cdot \phi_i \cdot \phi_i^T \right] \cdot [M] \quad (2.14)$$

erfolgen.

Bei nichtproportionaler Dämpfung schwingt das System ebenfalls in einer Kombination von entkoppelten Eigenschwingungsformen. Alle Punkte unterliegen einer gedämpften Bewegung, haben jedoch eine untereinander wechselnde Phase,

so dass die Schwingungsknoten ihre Lage ändern. Die Lösung der Schwingungsdifferentialgleichungen erfolgt am besten in der komplexen Ebene (vgl. z.B. [1.5]). Wegen des zusätzlichen Einflusses der Phasenverschiebungen müssen bei einem System mit m Freiheitsgraden $2 \cdot m$ Gleichungen gelöst werden.

2.3 Die Dämpfungsenergie

In diesem Abschnitt werden wichtige Begriffe, welche die bei einer periodischen Bewegung durch die Dämpfung dissipierte Schwingungsenergie erfassen, definiert und deren gegenseitige Abhängigkeit aufgezeigt. Im weiteren wird angegeben wie die am häufigsten verwendeten Dämpfungskenngrößen, nämlich die dimensionslosen Größen Dämpfungsmass ξ , logarithmisches Dekrement ϑ und Verlustfaktor η , aus den neu definierten Dämpfungsenergien berechnet werden können. Zur Charakterisierung der Dämpfungseigenschaften eines Materials bzw. einer Konstruktion werden zwei Kenngrößen verwendet:

- Die Dämpfungsenergie, die pro Schwingungszyklus dissipiert wird.
- Das Verhältnis zwischen der oben genannten Dämpfungsenergie und der maximalen Formänderungsenergie des ganzen Prüfkörpers.

2.3.1 Massgrößen für die Dämpfungsenergie

Zur Erfassung der Dämpfungsenergie können die folgenden Begriffe definiert werden (vgl.

- D_0 bezeichnet die totale Dämpfungsenergie, welche während eines Schwingungszyklus im ganzen Prüfkörper bzw. in der ganzen Konstruktion dissipiert wird [Nm/Zyklus].
- D_m bezeichnet die mittlere spezifische Dämpfungsenergie, welche durch den Quotienten aus der totalen Dämpfungsenergie D_0 und dem Volumen des Prüfkörpers oder der Konstruktion, innerhalb welchem/welcher Energie dissipiert wird, gebildet wird [Nm/m³·Zyklus].
- D bezeichnet die spezifische Dämpfungsenergie eines Volumenelementes bzw. einer Volumeneinheit, welche während eines Schwingungszyklus an einer ganz bestimmten Stelle des Prüfkörpers dissipiert wird [Nm/m³·Zyklus].

Die totale Dämpfungsenergie D_0 kann mit Hilfe der spezifischen Dämpfungsenergie aus der Beziehung

$$D_0 = \int_V D \cdot dV \quad (2.15)$$

berechnet werden.

Aufgrund der Kenntnisse der wahrscheinlichen Dämpfungsursachen (vgl. Abschnitt 2.4.3) ist es möglich, Angaben über die Einflussparameter der Dämpfung bzw. der Dämpfungsenergie zu machen. Die Dämpfung hängt vor allem von den folgenden drei Gruppen von Einflussfaktoren ab (vgl. [2.1]):

1. Art des Materials:

- Struktur und Aufbau des Materials
- Zustand infolge Temperatur und mechanischer Vorbehandlung
- Inhomogenitäten

2. Innerer Spannungszustand:

- anfänglicher Spannungszustand
- durch Belastungs- und Temperaturgeschichte bedingte Änderungen

3. Aufgebrachter Spannungszustand:

- Art der Spannung (Zug, Druck, usw.)
- Spannungszustand (einachsig, mehrachsig)
- Höhe der Spannung
- zeitlicher Verlauf der Spannung, Frequenz
- Umgebungsbedingungen (Temperatur, umgebendes Medium)

Mit dem Ausdruck

$$D = d \cdot \left(\frac{\sigma}{\beta_p} \right)^n \quad (2.16)$$

wie er zum Beispiel auch in [2.3] für andere Baustoffe unter linearen (einachsigen) Spannungszuständen vorgeschlagen wurde, wird ein sehr allgemein gültiger Ansatz für die spezifische Dämpfungsenergie gemacht, der bei allen geläufigen Modellen zur Darstellung des Dämpfungsverhaltens (vgl. Abschnitt 2.5) Gültigkeit hat. Dabei wird d spezifischer Dämpfungskoeffizient und n wird Dämpfungsexponent genannt. Damit der mit n zu potenzierende Klammerausdruck dimensionslos dargestellt werden kann, wurde in Gl. (2.16) die Spannung β_p als Bezugsgrösse eingeführt. Für die vorliegende Arbeit bedeutet β_p die Prismendruckfestigkeit des Betons. Gemäss Gl. (2.16) ist die spezifische Dämpfungsenergie D , d.h. die in einem Volumenelement dissipierte Energie, proportional zur n -ten Potenz der maximalen in jedem Schwingungszyklus an diesem Volumenelement aufgetragenen Spannung σ . Erfahrungsgemäss liegt der Wert von n bei niedrigen Beanspruchungen zwischen 1.0 und 3.0. Bei hohen Beanspruchungen kann n den Wert von 3.0 weit übersteigen.

Der spezifische Dämpfungskoeffizient d trägt vor allem den oben genannten ersten beiden Gruppen von Einflussfaktoren Rechnung. Der Ausdruck σ/β_p und insbesondere der Dämpfungsexponent n berücksichtigen im wesentlichen die Einflussfaktoren der dritten Gruppe.

Im Abschnitt 2.4.3 wird bei den Ursachen der Dämpfung darauf hingewiesen, dass die Höhe der vorhandenen Spannung den wesentlichsten Einfluss auf die Grösse der Dämpfung hat. Ein Ausdruck zur Berechnung einer Energie muss im allgemeinen als Produkt von Kraft und Weg bzw. Spannung und Dehnung dargestellt werden. Somit erscheint der Ansatz von Gl. (2.16) auch aus dieser Sicht vernünftig.

Für eine übersichtlichere Darstellung empfiehlt es sich, die spezifische Dämpfungsenergie D_d

$$D_d = d \cdot \left(\frac{\sigma_d}{\beta_p} \right)^n \quad (2.17)$$

einzuführen. Mit D_d wird die im höchstbeanspruchten Volumenelement des ganzen Körpers (d.h. an derjenigen Stelle des Körpers, wo die Spannung $\sigma = \sigma_d$ maximal ist) während eines Schwingungszyklus dissipierte Energie bezeichnet.

Mit Gl. (2.17) und durch geeignete Umwandlung von Gl. (2.15) kann die totale Dämpfungsenergie D_o bzw. die mittlere spezifische Dämpfungsenergie D_m zu

$$D_o = D_d \cdot V_o \cdot \alpha$$

und

$$D_m = \frac{D_o}{V_o} = D_d \cdot \alpha \quad (2.18)$$

$$\text{mit } \alpha = \int_0^1 \left(\frac{\sigma}{\sigma_d} \right)^n \cdot \frac{d(V/V_o)}{d(\sigma/\sigma_d)} \cdot d\left(\frac{\sigma}{\sigma_d} \right)$$

berechnet werden. Der Koeffizient α ist einerseits durch die Grösse des Dämpfungsexponenten n und die Spannungsverteilung und andererseits durch die Spannungs-Volumen-Funktion

$$\frac{d(V/V_o)}{d(\sigma/\sigma_d)},$$

die nur von der Form des Körpers und der Spannungsverteilung abhängt, bestimmt. Die Spannungs-Volumen-Funktion und der Koeffizient α sind in [2.1], [2.3], [2.4] und [2.5] für verschiedene Dämpfungsexponenten n , statische Systeme und Beanspruchungsarten berechnet worden.

Die spezifische Dämpfungsenergie D ist die fundamentalste aller drei aufgeführten Dämpfungsenergien, da sie nur vom betrachteten Material abhängt und weder durch die Form und das Volumen des Körpers noch durch die vorhandene Spannungsverteilung beeinflusst wird.

Beim Vergleich der Dämpfung von verschiedenen Körpern oder Konstruktionen muss beachtet werden, dass die Dämpfungsenergie nicht nur durch die Materialeigenschaften, sondern auch durch die Form und durch den Beanspruchungszustand bestimmt wird.

2.3.2 Verhältnis der totalen Dämpfungsenergie zur Formänderungsenergie

Für einen elastischen Körper unter linearem (einachsigen) Beanspruchungszustand kann die Formänderungsenergie W anhand der Gleichung

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_V \frac{\sigma^2}{E} \cdot dV \quad (2.19)$$

berechnet werden. Mit dem Koeffizienten β und der früher eingeführten Spannung σ_d kann für die maximale während der Schwingung im ganzen Körper elastisch gespeicherte Energie W_0

$$W_0 = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \sigma_d^2 \cdot V_0 \cdot \beta$$

mit $\beta = \int_0^1 \left(\frac{\sigma}{\sigma_d}\right)^2 \cdot \frac{d(V/V_0)}{d(\sigma/\sigma_d)} \cdot d\left(\frac{\sigma}{\sigma_d}\right)$ (2.20)

geschrieben werden. Der Koeffizient β stellt wie der Koeffizient α (vgl. Gl. (2.18)) eine Abkürzung für ein dimensionsloses Integral dar, dessen Wert von der Spannungsverteilung und der Spannungs-Volumen-Funktion abhängt. Aus dem Verhältnis der totalen Dämpfungsenergie D_0 zur maximalen totalen Formänderungsenergie W_0 lassen sich das Dämpfungsmass ξ

$$\xi = \frac{D_0}{4 \cdot \pi \cdot W_0} \quad (2.21)$$

und andere auf einfache Weise aus dem Dämpfungsmass ξ umrechenbare Dämpfungskenngrößen berechnen.

Mit den Gleichungen (2.15), (2.16) und (2.19) erhält man für das Dämpfungsmass ξ^{el} des Materials bzw. eines Volumenelementes (der hochgestellte Index "el" gibt an, dass sich das so berechnete Dämpfungsmass auf das Volumenelement bezieht)

$$\xi^{el} = \frac{D \cdot dV}{4 \cdot \pi \cdot W \cdot dV} = \frac{d \cdot \sigma^n \cdot E}{2 \cdot \pi \cdot \beta_p^n \cdot \sigma^2} = \frac{d \cdot E \cdot \sigma^{n-2}}{2 \cdot \pi \cdot \beta_p^n} \quad (2.22)$$

Das Dämpfungsmass ξ des gesamten Prüfkörpers ergibt sich aus

$$\xi = \frac{D_0}{4 \cdot \pi \cdot W_0} \quad (2.23)$$

Das logarithmische Dekrement $\vartheta = 2 \cdot \pi \cdot \xi$ und der Verlustfaktor $\eta = 2 \cdot \xi$ betragen somit

$$\vartheta = \frac{D_0}{2 \cdot W_0} \quad \text{bzw.} \quad \eta = \frac{D_0}{2 \cdot \pi \cdot W_0}$$

Das Dämpfungsmass entspricht somit dem prozentualen Betrag der Formänderungsenergie bzw. Schwingungsenergie, welcher durch die Dämpfung in jeder Schwingungsperiode dissipiert wird. Die Verwendung der dimensionslosen Dämpfungskenngrössen ξ , ϑ und η hat den Vorteil, dass diese - im Gegensatz zum Dämpfungskoeffizienten c - aus Schwingungsversuchen (Ausschwingversuche, Resonanzversuche) ohne grossen Berechnungsaufwand schnell und direkt ermittelt werden können.

Wenn in Gl. (2.23) für D_0 und W_0 die in den Gleichungen (2.18) und (2.20) angegebenen Ausdrücke eingesetzt werden, erhält man für das Dämpfungsmass ξ des ganzen Prüfkörpers

$$\xi = \frac{D_d \cdot V_0}{4 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot E \cdot \sigma_d^2 \cdot V_0} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{d \cdot E \cdot \sigma_d^{n-2}}{2 \cdot \pi \cdot \beta_p^n} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \xi^{el} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \quad (2.24)$$

In Bild 4 ist das Verhältnis β/α für Prüfkörper mit verschiedenen Querschnitten unter verschiedenen Beanspruchungsarten in Funktion des Dämpfungsexponenten n angegeben. Ausser beim Zug-Druck-Stab nimmt das Verhältnis β/α mit steigendem Dämpfungsexponenten n bei allen Prüfkörpern sehr schnell grosse Werte an.

Wenn in Gl. (2.16) der Dämpfungsexponent $n = 2$ gesetzt werden kann, gilt unabhängig von der Spannungsverteilung $\alpha = \beta$ (vgl. Bild 4).

Bild 4 : Verhältnis β/α in Funktion von n nach [2.1]

Aus den Gleichungen (2.22) und (2.24) folgt, dass in diesem Fall das Dämpfungsmass ξ des ganzen Körpers stets gleich gross ist wie das Dämpfungsmass ξ^{el} des Materials

$$\xi = \xi^{el} = \frac{E \cdot d}{2 \cdot \pi \cdot \beta_p^2} \quad . \quad (2.25)$$

Wenn der spezifische Dämpfungskoeffizient d als konstant vorausgesetzt wird, ist das Dämpfungsmass ξ gemäss Gl. (2.25) unabhängig von der Höhe der Beanspruchung.

Für einen Prüfkörper mit gleichmässig verteilter Spannung ($\sigma = \sigma_d$, zum Beispiel Zug-Druck-Stab) gilt unabhängig von der Grösse des Dämpfungsexponenten n : $\alpha = \beta$ bzw. $\beta/\alpha = 1$. Das Dämpfungsmass ξ des ganzen Prüfkörpers ist somit stets gleich gross wie das Dämpfungsmass ξ^{el} des Materials

$$\xi = \xi^{el} = \frac{E \cdot D_d}{2 \cdot \pi \cdot \sigma_d^2} = \frac{E \cdot d \cdot \sigma_d^{n-2}}{2 \cdot \pi \cdot \beta_p^n} \quad .$$

Mit dem Verhältnis β/α ist es möglich, den Einfluss des statischen Systems (Abmessungen, Lagerungsbedingungen, Schnittkraftverlauf) und der Beanspruchungsart (Normalkraft, Biegung, Querkraft, Torsion) auf das Dämpfungsmass ξ zu berücksichtigen.

Die Beziehung (2.16) wurde aufgrund von Versuchen an Prüfkörpern unter linearem (einachsigem) Spannungszustand ermittelt und kann somit streng genommen nur auf solche Tragwerke angewendet werden, bei welchen ein linearer Spannungszustand vorliegt. Für die später betrachteten Stahlbetonbiegeträger bedeutet dies jedoch in den meisten Fällen keine nennenswerte Einschränkung, da dieser Spannungszustand im allgemeinen dominiert (Fachwerkmodell; Beton: Druck, Bewehrungsstahl: Zug). Bei Tragwerken unter ebenem oder räumlichem Spannungszustand muss der Ausdruck von Gl. (2.16) für die Dämpfungsenergie genau gleich wie die entsprechenden Beziehungen für die Formänderungsenergie erweitert werden.

In sehr vielen Publikationen über die Dämpfung werden die Koeffizienten α und β nicht berücksichtigt. Es wird dabei sozusagen stillschweigend vorausgesetzt, dass der Dämpfungsexponent $n = 2$ ist, und dass das Dämpfungsmass ξ des Prüfkörpers und das Dämpfungsmass ξ^{el} des Materials somit gleich gross sind. Bevor diese Annahme getroffen wird, sollte sie jedoch auf ihre Richtigkeit untersucht werden. Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass das Dämpfungsmass des ganzen Prüfkörpers im allgemeinen von demjenigen des Materials bzw. des Volumenelementes abweicht und von der Höhe der Beanspruchung abhängt. Nur wenn der Dämpfungsexponent $n = 2$ gesetzt werden darf oder bei gleichmässig verteilter Spannung über den ganzen Querschnitt und über die ganze Länge des Prüfkörpers sind die beiden Dämpfungsmasse gleich gross und von der Höhe der Beanspruchung unabhängig.

Anhand des folgenden Beispiels eines harmonisch schwingenden Körpers mit viskoser Dämpfung soll gezeigt werden, dass der sehr allgemeine Ansatz von Gl. (2.16) zusammen mit Gl. (2.21) die Beziehungen beinhaltet, welche aufgrund der heute geläufigen Modelle zur Darstellung des Dämpfungsverhaltens (vgl. Abschnitt 2.5) hergeleitet werden können.

Die während eines Schwingungszyklus im Volumenelement dissipierte Energie D kann sowohl aus Gl. (2.16) als auch aus

$$D = \int_0^T \sigma \cdot \dot{\epsilon} \cdot dt \quad (2.26)$$

berechnet werden. Bei einem harmonisch schwingenden Körper mit viskoser Dämpfung gilt

$$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \sin(\omega t) \quad ; \quad \dot{\epsilon} = \epsilon_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) = \frac{\sigma_0}{E} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$$

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \sin(\omega t + \eta) \quad .$$

Damit erhält man für D

$$D = \frac{\sigma_0^2 \cdot \omega}{E} \int_0^T (\sin(\omega t) \cdot \cos \eta + \cos(\omega t) \cdot \sin \eta) \cdot \cos(\omega t) \cdot dt$$

$$D = \frac{\sigma_0^2 \cdot \pi \cdot \sin \eta}{E} \quad . \quad (2.27)$$

Wenn für den spezifischen Dämpfungskoeffizienten d

$$d = \frac{\sin \eta \cdot \pi}{E} \cdot \beta_p^2 \quad (2.28)$$

gesetzt wird, erhält man in Übereinstimmung mit Gl. (2.17, $n = 2$)

$$D = d \cdot \frac{\sigma_0^2}{\beta_p^2} \quad . \quad (2.29)$$

Da η im allgemeinen ein sehr kleiner Winkel ist, kann mit guter Genauigkeit

$$\sin \eta = \tan \eta = \eta$$

geschrieben werden. Mit $\eta = 2 \cdot \xi$ erhält man aus Gl. (2.29) in Übereinstimmung mit Gl. (2.25)

$$\xi = \frac{d \cdot E}{2 \cdot \pi \cdot \beta_p^2} \quad .$$

Aus Gl. (2.29) kann nachträglich geschlossen werden, dass bei viskoser bzw. linearer Dämpfung der Dämpfungsexponent $n = 2$ beträgt.

Bei nichtlinearer Dämpfung weicht der Dämpfungsexponent n meistens vom Wert 2.0 ab. Damit hängt in diesem Fall das Dämpfungsmass im allgemeinen von der Höhe der Beanspruchung bzw. der Amplitude ab.

2.4 Dämpfungsarten und Dämpfungsursachen

2.4.1 Dämpfungsarten

Die Dämpfung mechanischer Systeme lässt sich anhand des in Bild 5 angegebenen Schemas klassieren.

Bild 5 : Klassierung der Dämpfung mechanischer Systeme

Ueblicherweise wird zwischen innerer und äusserer Dämpfung bzw. Material- und Systemdämpfung unterschieden, je nachdem, ob die irreversible Energieumwandlung im Innern, oder ausserhalb des betrachteten Körpers erfolgt. Dämpfungskräfte können sowohl vom schwingenden System als auch von den umgebenden Elementen verursacht werden.

Unter Materialdämpfung versteht man die Energiedissipation innerhalb eines aus einem bestimmten Material gefertigten Kontinuums, d.h. den komplexen physikalischen Vorgang, durch welchen kinetische Energie und potentielle Energie (Formänderungsenergie) innerhalb eines schwingenden mechanischen Systems in Wärme umgewandelt wird. Die Materialdämpfung kann weiter unterteilt werden in die Dämpfung durch dynamische und statische Hysterese (vgl. Abschnitt 2.4.2).

Die Stukturdämpfung erfasst die Dämpfungserscheinungen, die zwischen den Grenzflächen von unterscheidbaren Partikeln des betrachteten Materials bzw. zwischen den verschiedenen Materialien einer Konstruktion auftreten.

Mit Systemdämpfung werden die Dämpfungserscheinungen an den Grenzen oder im Einflussbereich eines Kontinuums bezeichnet. Die durch Systemdämpfung dissipierte Schwingungsenergie geht dem schwingenden Körper somit nicht innerhalb des Materials, sondern in seiner näheren Umgebung verloren. Dies kann z.B.

der Fall sein bei Tragwerken, bei welchen durch den Baugrund, durch Lagerreibung oder auch durch künstliche Dämpfungsvorrichtungen Schwingungsenergie dissipiert wird.

Die Zuordnung bestimmter Dämpfungserscheinungen zur Materialdämpfung, Strukturdämpfung oder Systemdämpfung hängt im allgemeinen von der Definition und der Abgrenzung des betrachteten Systems ab. Je nachdem, ob die Dämpfung z.B. von Stahlbeton als makroskopische oder mikroskopische Erscheinung betrachtet wird, kann die Dämpfung an den Kontaktflächen zwischen der Zementmatrix und den Zuschlagstoffen des Betons oder zwischen dem Beton und der Bewehrung eines Stahlbetonträgers als innere oder äussere bzw. als Materialdämpfung oder Strukturdämpfung bezeichnet werden. Wenn z.B. ein Körper aus Stahlbeton als homogen betrachtet wird (Stahlbeton als 1 Baustoff betrachtet), wird man dessen Dämpfung der Materialdämpfung zuordnen (makroskopische Betrachtung). Wenn die Inhomogenitäten eines Körpers aus Stahlbeton berücksichtigt werden sollen, können den einzelnen verwendeten Baustoffkomponenten Materialdämpfungseigenschaften zugeordnet werden, während die Dämpfungserscheinungen an den Kontaktflächen zwischen den verschiedenen Baustoffkomponenten als Strukturdämpfung bezeichnet werden müssen (mikroskopische Betrachtung).

Im folgenden wird von der makroskopischen Betrachtung ausgegangen, d.h. es werden alle Dämpfungserscheinungen im Innern eines Stahlbetonkörpers als Materialdämpfung bezeichnet.

2.4.2 Materialdämpfung

Die Materialdämpfung kann in die beiden folgenden in Bild 6 aufgeführten Hauptgruppen

- Dynamische Hysterese (geschwindigkeitsabhängige Hysterese, viskoelastisches Verhalten)
- Statische Hysterese (geschwindigkeitsunabhängige Hysterese, plastisches Verhalten)

unterteilt werden.

a) Dynamische Hysterese

Materialien mit dynamischer Hysterese folgen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen, die durch Differentialgleichungen beschrieben werden, welche Spannungen, Dehnungen und die zeitlichen Ableitungen derselben enthalten. Diese Differentialgleichungen müssen nicht unbedingt linear sein (lineare Dämpfung vgl. Abschnitt 2.2), zur Vereinfachung der mathematischen Beziehungen werden sie jedoch im allgemeinen als linear angenommen. Die dynamische Hysterese nimmt in einem Koordinatensystem gewöhnlich die Gestalt einer Ellipse an. Die von der Hysterese umschlossene Fläche entspricht der pro Schwingungszyklus dissipierten Energie D und ist proportional zur Frequenz der Schwingung (vgl. Gl. (2.38) in Abschnitt 2.5.1).

MATERIALDÄMPFUNG		
	dynamische Hysterese	statische Hysterese
Charakteristik	viskoelastisches Verhalten geschwindigkeitsabhängige Hysterese	plastisches Verhalten geschwindigkeitsunabhängige Hysterese
σ - ϵ -Diagramm	vorwiegend linear	vorwiegend nicht linear
Differentialgleichung	enthält σ , ϵ und deren zeitliche Ableitungen i. a. lineare Dämpfung	enthält keine zeitlichen Ableitungen von σ , ϵ i. a. nichtlineare Dämpfung
Frequenzabhängigkeit	i. a. ja	i. a. nein
Dämpfungsexponent n (vgl. Gl. (2.17))	2	1-.... $\gg$ 2
Abhängigkeit des Dämpfungsmasses ξ von σ	keine	stark
Bedeutung	bei geringer Beanspruchung (im elastischen Bereich)	i. a. bei hoher Beanspruchung (nichtelastischer Bereich)
Modelle	vgl. Bild 7	vgl. Bild 8

Bild 6 : Materialdämpfung

Bei genügend langsam aufgebrachter Belastung, d.h. insbesondere bei statischer Belastung, entsteht bei einem ideal viskoelastischen Körper keine Hysterese.

Es wurde in Abschnitt 2.3 darauf hingewiesen, dass bei linearer viskoser Dämpfung der Dämpfungsexponent $n = 2$ gesetzt werden kann, und dass damit das Dämpfungsmass ξ amplitudenunabhängig wird (vgl. Gl. (2.25)). Die dynamische Hysterese ist vor allem bei geringen Beanspruchungen von Bedeutung, bei welchen Dämpfungserscheinungen aufgrund eines nicht elastischen Materialverhaltens (z.B. Hysteresis-Dämpfung, vgl. Abschnitt 2.5.3) noch unbedeutend sind.

In Bild 7 sind einige Modelle zur Darstellung des Verhaltens von Materialien mit dynamischer Hysterese abgebildet.

Modell	Symbol	Kraft-Weg-Hysteresese	Dämpfungsenergie in Funktion der Frequenz
Feder			0
Viskoser Dämpfer			∞
Maxwell - Modell
Voigt - Modell

Bild 7: Modelle für dynamische Hysteresese

Zusätzlich sind die zugehörigen bewegungshemmenden Kräfte R in Funktion der Amplitude z und die Dämpfungsenergie D in Funktion der Frequenz ω angegeben. Das Voigt-Modell wird sehr häufig zur Darstellung des Schwingungsverhaltens eines Einmassenschwingers (vgl. Abschnitt 2.2) verwendet.

Zur naturgetreuen Erfassung des zeitabhängigen Verhaltens eines durch statische oder dynamische Kräfte beanspruchten Körpers mit dynamischer Hysteresese müssen sehr häufig kompliziertere, durch Verwendung von mehreren Feder- und Dämpfungselementen gebildete Modelle herbeigezogen werden. Zur Darstellung des Schwingungsverhaltens eines Einmassenschwingers sind diese Modelle jedoch weniger geeignet, da zu ihrer mathematischen Erfassung mehr als eine Lagekoordinate verwendet werden muss.

b) Statische Hysteresese

Materialien mit statischer Hysteresese weisen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen auf, welche vorwiegend nichtlinear und von den zeitlichen Ableitungen der Spannungen und Dehnungen unabhängig sind. Der gleichgewichtige Dehnungszustand wird für jede Grösse der Spannung unabhängig von der Belastungsgeschwindigkeit sofort erreicht. Die von der statischen Hysteresese umschlossene Fläche, d.h. die pro Schwingungszyklus dissipierte Schwingungsenergie D , ist somit nicht von der Frequenz der Belastung abhängig. Der Dämpfungsexponent n kann Werte von 1 bis weit über 2 annehmen. Dies hat zur Folge, dass das Dämpfungsmass ξ im allgemeinen sehr stark von der Amplitude abhängt (vgl. Gl. (2.22)). Die Dämpfung durch statische Hysteresese ist vor allem bei

hohen Beanspruchungen von Bedeutung, da die nichtlinearen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen im allgemeinen erst hier massgebend werden.

In Bild 8 sind einige Modelle zur Darstellung des Verhaltens von Materialien mit statischer Hysterese angegeben.

Modell	Symbol	Kraft-Weg-Hysterese	Dämpfungs-mass in Funktion der Amplitude
Anschlag			0
Coulomb-Reibung			∞
Serienschaltung Feder-Reibungs- element
Parallelschaltung Feder-Reibungs- element

Bild 8: Modelle für statische Hysterese

Zusätzlich sind die zugehörigen bewegungshemmenden Kräfte R und das Dämpfungsmass ξ in Funktion der Amplitude z angegeben. Das Modell der reinen Coulomb-Reibung ist ein Modell für starr-plastisches Verhalten. Eine Auslenkung kann erst stattfinden, wenn die Kraft eine bestimmte Grenze erreicht hat. Die Reibungskraft ist unabhängig von der Auslenkgeschwindigkeit. Da die gesamte am System geleistete Energie durch Reibung in Wärme umgewandelt wird, ist hier das Dämpfungsmass unendlich ($W_0 = 0$). Das Modell mit den in Serie geschalteten Feder- und Reibungselementen ist ein Modell für ideal-elastisch, ideal-plastisches Verhalten. Bei Beanspruchungen im elastischen Bereich ($z < z_0$) wird keine Energie dissipiert ($D_0 = \xi = 0$), da das Reibungselement in Ruhe bleibt. Bei Beanspruchungen bis in den plastischen Bereich ($z > z_0$) wird mit grösser werdender Amplitude immer mehr Energie dissipiert. Somit nimmt hier das Dämpfungsmass ξ linear mit der Amplitude zu.

Das Modell mit den parallelgeschalteten Feder- und Reibungselementen ist ein Modell zur Darstellung eines ideal-elastischen Materialverhaltens mit zusätzlichem Auftreten von Reibungsdämpfung. Dessen Eigenschaften werden im Abschnitt 2.5.4 näher beschrieben.

Kombinierte Modelle mit parallel- oder in Serie geschalteten Feder- und Dämpfungselementen können wie bei den linearen Modellen konstruiert werden. Je nachdem wie die einzelnen Elemente kombiniert werden, nimmt das Dämpfungsmaß mit steigender Amplitude zu oder ab.

Die in den Bildern 7 und 8 dargestellten Modelle können zu komplexeren Modellen miteinander kombiniert werden. Mit solchen Modellen könnte das Dämpfungsverhalten eines Materials mit frequenz- und amplitudenabhängiger Dämpfung wirklichkeitsnah abgebildet werden.

2.4.3 Ursachen der inneren Dämpfung

Ueber die Ursachen der Dämpfung in unbewehrtem und bewehrtem Beton und die zugehörigen Mechanismen liegen bis jetzt sehr wenig Informationen vor.

In den Berichten von Teichen [3.2] und Ali/Kesler [3.3] werden die folgenden Phänomene aufgezählt, die hier wie folgt den verschiedenen Dämpfungsarten zugeordnet werden:

Materialdämpfung

- Flüssige Reibung:

Der Anteil der flüssigen Reibung an der inneren Dämpfung von Betonbauteilen und -konstruktionen dürfte bedeutend sein. Die zwischen den Gelpartikeln des Zementes physikalisch gebundenen Wassermoleküle dissipieren Schwingungsenergie durch molekulare Diffusion.

- Plastifizierungseffekte:

Auch im sogenannten elastischen Beanspruchungsbereich eines als homogen aufgefassten Materials sind irreversible Verformungen auf mikroskopischer Ebene möglich (z.B. infolge Spannungskonzentrationen an Berührungsstellen von Partikeln). Der Anteil der Plastifizierungseffekte an der gesamten Materialdämpfung dürfte jedoch nur bei hohen Beanspruchungen nennenswert sein.

- Thermoelastische Effekte:

(Einflüsse infolge der Wechselwirkung von Wärme und mechanischem Verhalten). Bei einem schwingenden Biegeträger werden die jeweiligen Zugfasern abgekühlt, die Druckfasern erwärmt, so dass innerhalb des Querschnittes ein Wärmeausgleich vor sich gehen will. Bei periodisch wechselnden Spannungen entsteht ein periodisch wechselnder Temperaturgradient. Bei sehr hohen Frequenzen bleibt keine Zeit für einen Wärmefluss (adiabatische Verhältnisse), bei sehr niedrigen Frequenzen wird das Wärmegleichgewicht ständig aufrechterhalten (isotherme Verhältnisse). In beiden Extremfällen entsteht kein Energieverlust, während bei mittleren Frequenzen Energie dissipiert wird.

- Interkristalliner Schlupf:

An den Korngrenzen von aneinanderliegenden Gel-Partikeln kann ungeordnetes Material vorhanden sein, welches beim Aufbringen einer Spannung geordnet wird, wobei Energie dissipiert wird. Dieser Mechanismus gleicht der flüssigen Reibung an den Korngrenzen von Metallen. Sofern die Gel-Partikel des Zementes eine kristalline Struktur haben, ist zu erwarten, dass dieser Mechanismus beim Beton ebenfalls einen Beitrag zur Energiedissipation liefert.

- Intrakristalliner Schlupf:

Dieser Mechanismus kann voraussichtlich sowohl in den Gel-Partikeln des Zementes als auch in den Zuschlagstoffen des Betons entstehen. Unter der aufgetragenen Spannung können Kristalle längs einer zur Kristallachse geneigten Ebene gleiten und Energie dissipieren.

- Energieverlust im Kapillarwasser:

Durch die Phasenverschiebung zwischen der Bewegung des Kapillarwassers und derjenigen des umgebenden Betons wird während des Schwingungsvorganges Energie dissipiert.

- Diffusion von Anmachwasser:

In einem schwingenden Betonkörper herrschen im allgemeinen an verschiedenen Stellen verschiedene Spannungszustände. Unter solchen Bedingungen versucht das nicht chemisch gebundene Anmachwasser von den hoch beanspruchten Stellen zu den wenig beanspruchten Stellen zu diffundieren. Dabei wird Energie dissipiert.

- Chemische Diffusion:

Das Gel-Wasser enthält verschiedene gelöste Salze. Unter verschiedenen Spannungszuständen kann sich deren Löslichkeit verändern. Die gelösten Salze werden versuchen, von einem Ort mit geringer Löslichkeit zu einem Ort mit hoher Löslichkeit zu diffundieren. Daraus resultiert ein Energieverlust.

Strukturdämpfung

- Rissbildung an Haftflächen:

Beim Bruch zwischen Gruppen von benachbarten Partikeln kann Schwingungsenergie dissipiert werden.

- Trockene Reibung:

Trockene Reibung oder Coulomb-Reibung kann durch Gleitbewegungen zwischen benachbarten Partikeln entstehen. Der Anteil der trockenen Reibung an der gesamten Materialdämpfung ist unter anderem vom Spannungszustand abhängig.

Mit den heutigen Kenntnissen ist es unmöglich, den Beitrag der durch die aufgezählten Dämpfungsursachen bewirkten Dämpfungserscheinungen an die ge-

samte innere Dämpfung des Betons anzugeben. Dem Verfasser der vorliegenden Arbeit scheinen jedoch vor allem die Phänomene der flüssigen Reibung und der Plastifizierungseffekte sowie die trockene Reibung für die Dämpfung von Beton und Stahlbeton massgebend zu sein.

Aus gemessenen Dämpfungswerten lässt sich der Charakter der Energiedissipation oft nicht erkennen. Dies hat seine Ursache darin, dass die unmittelbare Folge der diesbezüglichen inneren Vorgänge im Material, nämlich der Verlust an Schwingungsenergie, nur als pauschale, makroskopische Erscheinung auftritt. Für das gesuchte Dämpfungsmodell für Betonkonstruktionen bedeutet dies, dass es praktisch ausgeschlossen ist, ein Modell zu entwickeln, das sich aus verschiedenen Elementen zusammensetzt, die den zahlreichen möglichen Ursachen separat Rechnung tragen. Vielmehr muss ein globales Modell gefunden werden, welches sich an den experimentell ermittelten Resultaten orientiert und diese möglichst gut erklärt.

2.5 Geläufige Modelle zur Berücksichtigung der Dämpfung

Aus den vorhergehenden Abschnitten über die Dämpfungsarten und Dämpfungursachen ist ersichtlich, dass, je nachdem welche Dämpfungsart oder Dämpfungursache als massgebend betrachtet wird, verschiedene Modelle zur Beschreibung des wirklichen Verhaltens verwendet werden müssen.

In diesem Abschnitt sollen deshalb die am häufigsten verwendeten Modelle zur Darstellung des Schwingungsverhaltens von gedämpften Schwingern vorgestellt und ihre charakteristischen Eigenschaften aufgezeigt werden.

2.5.1 Viskose Dämpfung (dynamische Hysterese)

Mit dem Modell der viskosen Dämpfung kann vor allem die flüssige Reibung erfasst werden. Das Modell der viskosen Dämpfung entspricht einem linearen, geschwindigkeitsproportionalen Ansatz der Dämpfungskraft, d.h. einem Dämpfungsmechanismus durch dynamische Hysterese. Lineare Newtonsche Viskosität, die dem Modell der viskosen Dämpfung zugrunde liegt, wird sehr häufig als die Hauptform der Energiedissipation betrachtet. Viele Kunststoffe und andere Materialien, z.B. auch Beton, bei welchen die Verformungen zeitunabhängig sein können, weisen teilweise die Eigenschaften von linear viskoelastischem Material auf.

Wenn ein Einmassenschwinger viskose Dämpfung und ein lineares Federgesetz aufweist, wird seine Bewegung durch die lineare Differentialgleichung (2.2) beschrieben. Das zugehörige Schwingungsmodell ist in Bild 1 angegeben. Der Ansatz der viskosen Dämpfung hat den grossen Vorteil, dass die analytische Lösung damit besonders vereinfacht wird.

Bei einer freien Schwingung ($P(t) = 0$, z.B. Ausschwingen, vgl. Bild 9) erhält man als Lösung von Gl. (2.2)

$$z(t) = z_0 \cdot e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot (\cos(\omega' t) + \xi \cdot \frac{\omega}{\omega'} \cdot \sin(\omega' t)) \quad (2.30)$$

wobei für $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega' = \omega \cdot (1 - \xi^2)$

und für die Anfangsbedingungen

$$z(t=0) = z_0$$

$$\dot{z}(t=0) = 0$$

eingesetzt wurde. Durch den Term $e^{-\xi \cdot \omega \cdot t}$ wird die anfängliche Amplitude z_0 immer stärker reduziert bis die Schwingung zum Erliegen kommt.

Wenn aus dem gemessenen Amplitudenverlauf eines frei schwingenden Prüfkörpers (Ausschwingversuch) untersucht werden soll, ob die vorhandene Dämpfung dem Modell der viskosen Dämpfung entspricht, kann wie folgt vorgegangen werden (vgl. Bild 9):

Bild 9 : Ausschwingversuch und Kontrolle des Modells der viskosen Dämpfung anhand eines Ausschwingversuches

Auf der Abszisse des abgebildeten Diagramms wird die Anzahl der Schwingungsperioden m aufgetragen, auf der Ordinate der natürliche Logarithmus der beim Ausschwingversuch nach m Perioden erzielten maximalen Amplitude z . Ist die Verbindungslinie eine Gerade, so ist die Annahme der viskosen Dämpfung korrekt, andernfalls ergibt sich eine gekrümmte Linie. Die Neigung einer Tangente an die Kurve an einem bestimmten Punkt entspricht der Größe des logarith-

mischen Dekrementes ϑ .

Bei einer erzwungenen harmonischen Schwingung

$$P(t) = P_0 \cdot \sin(\Omega t) \quad (2.31)$$

erhält man mit dem Frequenzverhältnis

$$\beta = \frac{\Omega}{\omega}$$

als Lösung von Gl. (2.2) einen zweiteiligen Ausdruck

$$z(t) = e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot (A \cdot \sin(\omega' t) + B \cdot \cos(\omega' t)) + \\ + \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \beta)^2} \cdot [(1-\beta^2) \cdot \sin(\Omega t) - 2 \cdot \xi \cdot \beta \cdot \cos(\Omega t)] . \quad (2.32)$$

Der erste Teil stellt die Lösung des homogenen Teils der Differentialgleichung (2.2) dar. Dieser Teil wird durch den Term $e^{-\xi \cdot \omega \cdot t}$ mit der Zeit "herausgedämpft". Damit bleibt nach einer gewissen Zeit nur noch der zweite Teil von Gl. (2.32) übrig. Dieser stellt die stationäre Schwingung dar, nachdem der Einschwingvorgang abgeklungen ist.

Mit

$$z_0 = \frac{P_0}{k} \cdot [(1-\beta^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \beta)^2]^{-1/2} \quad (2.33)$$

und dem Phasenwinkel θ

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2 \cdot \xi \cdot \beta}{1-\beta^2} , \quad (2.34)$$

welcher ein Mass ist für den Zeitabstand, mit dem die "Antwort" des Schwingers $z(t)$ der Erregerkraft $P(t)$ nacheilt, kann der stationäre Teil $z(t)$ stationär von Gl. (2.32) vereinfacht geschrieben werden als

$$z(t)_{\text{stationär}} = z_0 \cdot \sin(\Omega t - \theta) . \quad (2.35)$$

Bei Resonanz, d.h. wenn die Erregerfrequenz Ω gleich gross ist wie die Eigenfrequenz ω des Schwingers ($\beta=1$), kann die maximale Amplitude $z_{\max}$ aus Gl. (2.33) zu

$$z_{\max} = \frac{P_0}{k \cdot 2 \cdot \xi} \quad (2.36)$$

berechnet werden.

Der Vergrößerungsfaktor V_0 gibt an, wievielmals grösser die stationäre dynamische Amplitude z_0 gegenüber der unter gleich grosser Kraft erzielten statischen Verschiebung z_{statisch} ist. Mit den Gleichungen (2.33) bzw. (2.36) erhält man für V_0 bzw. V_{max}

$$V_0 = \frac{z_0}{z_{\text{statisch}}} = \frac{z_0}{P_0/k} = [(1-\beta^2)^2 + (2\cdot\xi\cdot\beta)^2]^{-1/2}$$

$$V_{\text{max}} = \frac{z_{\text{max}}}{z_{\text{statisch}}} = \frac{z_{\text{max}}}{P_0/k} = \frac{1}{2\cdot\xi}$$

Der zeitliche Verlauf der stationären Amplitude $z(t)_{\text{stationär}}$, der Federkraft $F_F(t)$ und der Dämpfungskraft $F_{VD}(t)$ ist in Bild 10 angegeben.

Bild 10: Zeitlicher Verlauf der Feder- und Dämpfungskraft

Dieselben Grössen lassen sich in das in Bild 11 dargestellte Vektordiagramm eintragen.

Bild 11 : Vektordiagramm

Die Dämpfungskraft F_{VD} ist gegenüber der Federkraft F_F um den Winkel $\pi/2$ phasenverschoben. Die resultierende bewegungshemmende Kraft R erhält man durch Vektoraddition ihrer beiden Komponenten F_F und F_{VD} . Sie ist um den Winkel θ gegenüber der Federkraft F_F phasenverschoben.

Wichtige Informationen können durch eine Energiebetrachtung gewonnen werden.

In Bild 12 ist die resultierende Rückstellkraft R in Funktion der Amplitude z dargestellt.

Bild 12: Rückstellkraft R in Funktion der Amplitude z

Wegen der Dämpfungskraft F_{VD} bzw. wegen der Phasenverschiebung θ entsteht eine elliptische Figur, deren Flächeninhalt der pro Schwingungsperiode T dissipierten Energie D_0 entspricht. Diese Energie kann durch das Integral

$$D_0 = \int R \cdot dz = \int R \cdot \frac{dz}{dt} \cdot dt = \int_0^T R \cdot \dot{z} \cdot dt \quad (2.37)$$

berechnet werden.

Für einen harmonisch schwingenden Einmassenschwinger mit viskoser Dämpfung gilt

$$R = k \cdot z + c \cdot \dot{z}$$

und

$$z(t) = z_0 \sin(\Omega t - \theta)$$

$$\dot{z}(t) = z_0 \cdot \Omega \cdot \cos(\Omega t - \theta) \quad .$$

Mit Gl. (2.37) erhält man für D_0

$$\begin{aligned}
 D_0 &= \int_0^T ((k \cdot z + c \cdot \dot{z}) \cdot \Omega \cdot z_0 \cdot \cos(\Omega t - \theta)) \cdot dt \\
 &= k \cdot \Omega \cdot z_0^2 \cdot \int_0^T \sin(\Omega t - \theta) \cdot \cos(\Omega t - \theta) \cdot dt + c \cdot \Omega^2 \cdot z_0^2 \cdot \int_0^T \cos^2(\Omega t - \theta) \cdot dt \\
 &= 0 + c \cdot \Omega^2 \cdot z_0^2 \cdot \frac{\pi}{\Omega} \\
 D_0 &= \pi \cdot c \cdot \Omega \cdot z_0^2 \quad .
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Die maximale Formänderungsenergie W_0 beträgt

$$W_0 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot z_0^2 \quad . \tag{2.39}$$

Damit erhält man für das Dämpfungsmass ξ die bekannte Beziehung

$$\xi = \frac{D_0}{4 \cdot \pi \cdot W_0} = \frac{2 \cdot \pi \cdot c \cdot \Omega \cdot z_0^2}{4 \cdot \pi \cdot k \cdot z_0^2} = \frac{c \cdot \Omega}{2 \cdot k} = \frac{c \cdot \sqrt{k}}{2 \cdot k \cdot \sqrt{m}} = \frac{c}{c_{kr}} \quad , \tag{2.40}$$

wobei für c_{kr}

$$c_{kr} = 2 \cdot \sqrt{k \cdot m}$$

eingesetzt wurde.

Aus den in Gl. (2.40) dargestellten Beziehungen geht hervor, dass das Dämpfungsmass ξ von der Höhe der Amplitude z unabhängig ist (vgl. Bild 13).

Bild 13 : Dämpfungsmass ξ infolge viskoser Dämpfung in Funktion der Amplitude z

Wenn die Dämpfungskraft F_{VD} gemäss Gl. (2.2) mit

$$F_{VD} = c \cdot \dot{z}$$

angenommen wird, d.h. wenn vom Dämpfungskoeffizienten c ausgegangen wird, ist die durch viskose Dämpfung dissipierte Energie von der Höhe der Frequenz abhängig (vgl. Gl. (2.38)).

Eine frequenzunabhängige viskose Dämpfung kann dadurch erreicht werden, dass anstatt vom Dämpfungskoeffizienten c zum Beispiel vom dimensionslosen Dämpfungsmass ξ oder von anderen, durch einfache Umrechnung aus ξ herleitbaren Grössen ausgegangen wird (vgl. Gl. (2.40)).

Ebenfalls bekannte Resultate können bestätigt werden, wenn man sich der komplexen Schreibweise bedient. Aus Bild 11 geht hervor, dass die bewegungshemmende Kraft R auch mit

$$R = F_F + i \cdot F_{VD} = E' \cdot z + i \cdot E'' \cdot z \quad (2.41)$$

geschrieben werden kann. Dabei werden E' als Speichermodul und E'' als Verlustmodul definiert. Mit dem komplexen E-Modul E^*

$$E^* = E' + i \cdot E'' = |E| \cdot e^{i \cdot \theta} \quad (2.42)$$

erhält man für R

$$R = E^* \cdot z = |E| \cdot z \cdot e^{i \cdot \theta} \quad (2.43)$$

Bei einer erzwungenen harmonischen Schwingung gilt für stationäre Verhältnisse (vgl. Gl. (2.35))

$$z(t) = z_0 \cdot e^{i \cdot (\Omega t - \theta)} \quad (2.44)$$

womit man für R

$$R = |E| \cdot z_0 \cdot e^{i \cdot (\Omega t - \theta)} \cdot e^{i \cdot \theta} = |E| \cdot z_0 \cdot e^{i \cdot (\Omega t)}$$

$$R = R_0 \cdot e^{i \cdot (\Omega t)}$$

erhält. Damit betragen die Dämpfungsenergie D_0

$$D_0 = \pi \cdot E'' \cdot z_0^2 \quad (2.45)$$

und die Formänderungsenergie W_0

$$W_0 = \frac{1}{2} \cdot E' \cdot z_0^2 \quad (2.46)$$

Der Winkel θ zwischen der erregenden Kraft (Richtung von R) und dem Schwingungsweg (Richtung des Federwiderstandes F_F) im Fall $\Omega = 0.618 \cdot \omega$ wird als Verlustwinkel bezeichnet. Der Tangens dieses Verlustwinkels ist, wie die nachstehende Beziehung zeigt, gleich dem Verlustfaktor $\eta = 2 \cdot \xi$

$$\eta = \frac{D_0}{2 \cdot \pi \cdot W_0} = \frac{E''}{E'} = \tan \theta \approx \theta \quad . \quad (2.47)$$

Bei stationären Verhältnissen müssen die dem Schwinger durch die Erregerkraft $P(t)$ zugeführte Energie E_0 und die dissipierte Energie D_0 gleich gross sein. Mit den Gleichungen (2.31) und (2.35) erhält man für E_0

$$E_0 = \int P(t) \cdot dz = \int_0^T P(t) \cdot \dot{z} \cdot dt$$

$$E_0 = P_0 \cdot z_0 \cdot \Omega \cdot \int \sin(\Omega t) \cdot \cos(\Omega t - \theta) \cdot dt$$

$$E_0 = P_0 \cdot z_0 \cdot \pi \cdot \sin \theta \quad . \quad (2.48)$$

Die stationäre Amplitude z_0 kann aus Gl. (2.38) und

$$E_0 = P_0 \cdot z_0 \cdot \pi \cdot \sin \theta = c \cdot \Omega \cdot z_0^2 \cdot \pi = D_0$$

zu

$$z_0 = \frac{P_0 \cdot \sin \theta}{c \cdot \Omega} \quad (2.49)$$

berechnet werden.

Die durch den Schwinger zugeführte Energie E_0 und die dissipierte Energie D_0 sind in Bild 14 in Funktion der Amplitude z dargestellt.

Bild 14 : Energetischer Zustand eines Einmassenschwingers mit viskoser Dämpfung bei einer erzwungenen Schwingung (Resonanz)

Der Schnittpunkt der beiden Kurven entspricht der stationären Amplitude z_0 .

Bei Resonanz beträgt $\theta = \frac{\pi}{2}$ (vgl. Gl. (2.34)), womit die Amplitude z_0 maximal wird. Mit

$$c = \xi \cdot c_{kr} = \xi \cdot 2 \cdot \sqrt{k \cdot m} \quad \text{und} \quad \omega = \Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

erhält man somit für $z_0 = z_{\max}$

$$z_{\max} = \frac{P_0}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{k \cdot m} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{P_0}{2 \cdot \xi \cdot k},$$

womit die Gl. (2.36) durch eine andere Herleitung bestätigt werden konnte.

2.5.2 Äquivalente viskose Dämpfung

Zur Berechnung von Einmassenschwingern mit nichtlinearem Dämpfungsverhalten wird sehr häufig die sogenannte äquivalente viskose Dämpfung verwendet.

Die Verwendung der äquivalenten viskosen Dämpfung, z.B. des äquivalenten viskosen Dämpfungsmasses ξ_{eq} , ermöglicht es, einen Einmassenschwinger mit einem vom linearen und geschwindigkeitsproportionalen Ansatz abweichenden Dämpfungsverhalten, das z.B. in den Differentialgleichungen

$$m \cdot \ddot{z} + F(\dot{z}) + k \cdot z = P(t)$$

oder

$$m \cdot \ddot{z} + c(z_0) \cdot \dot{z} + k \cdot z = P(t) \quad (2.50)$$

oder auch in Gl. (2.1) zum Ausdruck kommen kann, als linearen Schwinger (Gl. (2.2)) vereinfacht zu berechnen.

Dabei wird die nichtlineare bewegungshemmende Kraft R des nichtlinearen Schwingers durch die lineare bewegungshemmende Kraft R eines linearen Schwingers mit viskoser Dämpfung ersetzt. Die Steifigkeit des Ersatzschwingers muss so gewählt werden, dass sowohl der lineare als auch der nichtlineare Schwinger dieselbe Periode T haben. Die Energiedissipation des nichtlinearen Schwingers wird ersetzt durch eine äquivalente viskose Dämpfung des linearen Schwingers, wobei das äquivalente viskose Dämpfungsmass ξ_{eq} des linearen Schwingers so festgelegt wird, dass beide Schwinger pro Schwingungsperiode dieselbe Energie D_0 dissipieren.

Mit dem Konzept der äquivalenten viskosen Dämpfung ist es somit möglich, auch solche Systeme, deren Dämpfungseigenschaften z.B. durch ein in den folgenden

Abschnitten 2.5.3 bis 2.5.6 beschriebenes Modell charakterisiert werden, als Systeme mit viskoser Dämpfung zu beschreiben. Dabei muss allerdings in Kauf genommen werden, dass das äquivalente viskose Dämpfungsmass ξ_{eq} im Gegensatz zum Dämpfungsmass ξ infolge viskoser Dämpfung (vgl. Bild 13), z.B. von der Grösse der Amplitude abhängig werden kann (vgl. z.B. die Bilder 18, 23 und 28).

In Bild 15 ist die Rückstellkraft R eines linearen Schwingers (Gl. (2.2)) und eines Schwingers mit nichtlinearer Dämpfung (z.B. Gl. (2.50)) jeweils bei Resonanz ($\theta = 90^\circ$) in Funktion der Amplitude z aufgetragen.

Bild 15: Rückstellkraft R in Funktion der Amplitude z bei Resonanz

Aus Bild 11 geht hervor, dass bei Resonanz die Erregerkraft P gleich gross sein muss wie die Dämpfungskraft F_D . Wenn das Dämpfungsgesetz dem linear-viskosen Ansatz folgt, resultiert als Figur eine Ellipse. Bei einem anderen Dämpfungsverhalten ergibt sich eine beliebige geschlossene Kurve (gestrichelt). In diesem Fall kann in die geschlossene Kurve eine flächengleiche Ellipse eingezeichnet werden, welche auf der Abszisse ebenfalls durch den Punkt z_{max} geht. Mit Hilfe der sich innerhalb der Figur ergebenden Fläche E

$$E = P_0 \cdot z_{max} \cdot \pi$$

kann der Dämpfungskoeffizient c zu

$$c = \frac{E}{\pi \cdot \omega \cdot z_{max}^2} \quad (2.51)$$

berechnet werden [1.2]. Wenn das Dämpfungsverhalten nicht linear-viskos ist, wird mit Gl. (2.51) für c ein äquivalenter viskoser Dämpfungskoeffizient c_{eq} gefunden. Für E muss dabei die Fläche innerhalb der gestrichelten Kurve eingesetzt werden.

Bei bekannter Dämpfungsenergie D_0 und Formänderungsenergie W_0 kann das äquivalente viskose Dämpfungsmass ξ_{eq} aus Gl. (2.23) berechnet werden.

Im folgenden wird sehr häufig vom Konzept der äquivalenten viskosen Dämpfung Gebrauch gemacht. Der Einfachheit halber wird zukünftig nicht mehr zwischen ξ und ξ_{eq} unterschieden.

2.5.3 Hysteresis-Dämpfung (statische Hysterese)

Durch das Modell der Hysteresis-Dämpfung lassen sich vor allem die Plastifizierungseffekte erfassen.

Der Verlust an Schwingungsenergie ist die Folge einer nichtlinearen Spannungs-Dehnungs-Beziehung bzw. eines nichtlinearen Federgesetzes.

In Bild 16 ist die bewegungshemmende Kraft R eines nichtlinearen Einmassenschwingers in Funktion der Amplitude z aufgetragen.

Bild 16: Einmassenschwinger mit Hysteresisdämpfung

Bei einem elastischen, ungedämpften Schwinger erfolgt die Bewegung entlang der Geraden CA. Bei einem Schwinger mit nichtlinearem Federgesetz gemäss Bild 16 erfolgt die Bewegung bei der Erstbelastung entlang der Kurve OA, bei darauffolgenden Entlastungen und Wiederbelastungen entlang den Kurven ABCD.

Die Bewegung des gedämpften Schwingers wird durch die Differentialgleichung

$$m \cdot \ddot{z} + R(z) = P(t) \quad (2.52)$$

beschrieben. Die momentane Steifigkeit des Schwingers, d.h. die Neigung der Kurve ABCD zum betreffenden Zeitpunkt ist amplitudenabhängig. Damit wird auch die Eigenkreisfrequenz ω von der Höhe der Amplitude z abhängig (vgl. Bild 17). Die Fläche, welche durch die in Bild 16 angegebene Kurve ABCD umschlossen wird, entspricht der pro Schwingungszyklus dissipierten Energie D_0 . Je gröss-

Bild 17: Resonanzkurve eines elastisch-plastischen Einmassenschwingers

ser diese Fläche ist, desto grösser ist die vorhandene Dämpfung. Sowohl die Dämpfungsenergie D_0 als auch das Dämpfungsmass ξ hängen von der Höhe der Amplitude ab.

Die Eigenschaften eines Einmassenschwingers mit Hysteresis-Dämpfung sollen am Beispiel des in Bild 17 abgebildeten ideal-elastischen, ideal-plastischen Einmassenschwingers verdeutlicht werden.

In Bild 17 sind die Resonanzkurven dieses Schwingers für unterschiedlich grosse, harmonische Erregerkräfte P_0 dargestellt.

Die Abhängigkeit der Steifigkeit bzw. der Eigenfrequenz von der Amplitude kommt sehr schön im "nach links Kippen" der Resonanzkurven zum Ausdruck. Wenn die Erregerkraft P_0 vergrößert wird, gerät der Schwinger stärker in den plastischen Bereich, wodurch seine Steifigkeit bzw. seine Eigenfrequenz vermindert wird.

Das Konzept der äquivalenten viskosen Dämpfung kann auch auf einen Schwinger mit Hysteresis-Dämpfung angewendet werden. In Bild 18 ist das Dämpfungsmass ξ eines elastisch-plastischen Einmassenschwingers in Funktion der Amplitude z angegeben.

Bild 18 : Äquivalentes viskoses Dämpfungsmass eines elastisch-plastischen Einmassenschwingers

Nach Erreichen des Fließbeginns nimmt das Dämpfungsmass mit grösser werden-der Amplitude sehr stark zu. Zur richtigen Erfassung der Hysteresis-Dämpfung müssen die genauen Materialeigenschaften, d.h. die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen bzw. die Kraft-Verschiebungs-Beziehungen bei Be- und Entlastung bekannt sein.

Zur Vereinfachung der Lösung der Schwingungsdifferentialgleichung werden für die oben genannten Beziehungen häufig spezielle Annahmen getroffen. So wird z.B. ein Materialverhalten entsprechend dem "Masing-type-system" [1.1] oder das von Ramberg/Osgood vorgeschlagene Verhalten angenommen. Das Verhalten eines Schwingers mit Hysteresis-Dämpfung, z.B. dasjenige des in Bild 17 abgebildeten ideal-elastischen, ideal-plastischen Schwingers, lässt sich in speziellen Fällen auch durch das Modell der Coulomb-Dämpfung (vgl. die Hysteresis der in Serie geschalteten Elemente in Bild 8 mit dem Last-Durchbiegungs-Diagramm von Bild 17) beschreiben.

Im allgemeinen Fall muss die Differentialgleichung (2.52) numerisch gelöst werden.

2.5.4 Coulomb-Dämpfung (statische Hysterese)

Mit dem Modell der Coulomb-Dämpfung kann die trockene Reibung erfasst werden. Coulomb-Dämpfung entsteht infolge Reibung bei der Bewegung eines Körpers auf einer trockenen Unterlage. Die Grösse der Reibungs- bzw. Dämpfungskraft F_{CD} hängt von der Druckkraft N zwischen dem Körper und der Unterlage sowie vom Gleitreibungskoeffizienten $\bar{\mu}$ ab, d.h.

$$F_{CD} = \bar{\mu} \cdot N(z, \dot{z}, \ddot{z}) \quad (2.53)$$

Dabei kann N eine beliebige Funktion z.B. der Amplitude, Geschwindigkeit oder

Beschleunigung sein. Die Richtung der Reibungs- bzw. Dämpfungskraft F_{CD} ist der Richtung der Geschwindigkeit $\dot{z}$ entgegengesetzt.

Bei einem Schwinger mit Coulomb-Dämpfung kann nur dann Energie dissipiert werden, wenn die angreifenden Kräfte gross genug sind, um die an der betrachteten Grenzfläche wirkenden Haftreibungskräfte zu überwinden. Sobald diese Haftung überwunden ist, gleiten die beiden Kontaktflächen aufeinander, wobei mechanische Energie in Wärme umgewandelt wird. Die dissipierte Energie oder Dämpfungsenergie ist einerseits eine Funktion der Reibungskraft F_{CD} bzw. der wirkenden Normalkraft N und des Gleitreibungskoeffizienten $\bar{\mu}$ und andererseits eine Funktion der Relativverschiebung zwischen den entsprechenden Oberflächen. Bei sehr hoher Normalkraft ist die Verschiebung gleich null, da die Haftreibung nicht überwunden werden kann. Bei sehr kleiner Normalkraft ist die Reibungskraft praktisch gleich null. In beiden Fällen wird keine Energie dissipiert. Dazwischen liegt ein Punkt, bei welchem die Reibungskraft und die zugehörige Verschiebung so gross sind, dass die dissipierte Energie maximal wird.

In Bild 19 ist das Modell eines Einmassenschwingers mit Coulomb-Dämpfung dargestellt.

Bild 19: Modell eines Einmassenschwingers mit Coulomb - Dämpfung

a) Coulomb-Dämpfung mit konstanter Reibungskraft

Ein spezieller Fall von Coulomb-Dämpfung ergibt sich, wenn $N = \text{konstant}$ und $\bar{\mu} = \text{konstant}$ bzw. $F_{CD} = \text{konstant}$ gesetzt wird. Die Differentialgleichung eines Einmassenschwingers mit linearem Federgesetz und konstanter Reibungskraft F_{CD} lautet

$$m \cdot \ddot{z} \pm F_{CD} + k \cdot z = P(t) \quad . \quad (2.54)$$

Wenn berücksichtigt wird, dass F_{CD} stets der Richtung von $\dot{z}$ entgegengesetzt gerichtet ist, kann Gl. (2.54) als

$$m \cdot \ddot{z} + \frac{\dot{z}}{|\dot{z}|} \cdot F_{CD} + k \cdot z = P(t) \quad . \quad (2.55)$$

geschrieben werden.

Da die Reibungskraft F_{CD} jeweils an den Stellen, wo $\dot{z} = 0$ ist einen Sprung macht (Vorzeichenwechsel), wird die Differentialgleichung (2.55) in den Bereichen mit $\dot{z} > 0$ und $\dot{z} < 0$ separat gelöst.

Bei einer freien Schwingung ($P(t) = 0$, z.B. Ausschwingen) und konstanter Reibungskraft ($F_{CD} = \text{konstant}$) erhält man durch Lösen der Differentialgleichung (2.55) den in Bild 20 angegebenen Amplitudenverlauf.

Bild 20: Amplitudenverlauf beim Ausschwingversuch eines Einmassenschwingers mit Coulomb-Dämpfung ($F_{CD} = \text{konstant}$)

Die Eigenkreisfrequenz ω ist dieselbe wie beim ungedämpften Schwinger. Die Verringerung der Amplitudenmaxima Δz pro Schwingungsperiode ist stets gleich gross und beträgt

$$\Delta z = \frac{4 \cdot F_{CD}}{k} \quad (2.56)$$

Die Umhüllende der Amplitudenmaxima ist somit eine Gerade. Die Bewegung kommt nach einer endlichen Anzahl von Schwingungsperioden zur Ruhe.

Bei einer erzwungenen harmonischen Schwingung ($P(t) = P_0 \cdot \sin(\Omega t)$) kann für die stationäre Schwingung eine exakte analytische Lösung angegeben werden, die allerdings eine recht umfangreiche Herleitung erfordert [2.7]. Mit dem Konzept der äquivalenten viskosen Dämpfung kann für die Amplitude z_0 der stationären Schwingung der Ausdruck

$$z_0 = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{4}{\pi} \cdot \frac{F_{CD}}{P_0}\right)^2}}{1 - \beta^2} \quad (2.57)$$

angegeben werden, der für genügend kleine Werte von $F_{CD} \leq \frac{\pi \cdot P_0}{4}$ sehr gut mit der exakten Lösung übereinstimmt. Aus Gl. (2.57) ist ersichtlich, dass für

jede Reibungskraft F_{CD}

$$F_{CD} < \frac{\pi \cdot P_0}{4}$$

die Amplituden bei Resonanz unabhängig von der Dämpfung theoretisch unendlich gross werden. Im ersten Moment erscheint es erstaunlich, dass eine gedämpfte Schwingung theoretisch unendlich grosse Amplituden zur Folge haben kann. Dies lässt sich jedoch aufgrund einer Energiebetrachtung erklären:

In Bild 21 ist die zum Modell von Bild 19 gehörige bewegungshemmende Kraft R in Funktion der Amplitude z aufgetragen.

Bild 21: Rückstellkraft R in Funktion der Amplitude z eines Einmassenschwingers mit Coulomb-Dämpfung ($F_{CD} = \text{konstant}$)

Sobald die Haftreibungskraft überschritten ist, wird pro Schwingungsperiode entsprechend dem Inhalt der umschlossenen Fläche Energie in der Höhe von

$$D_0 = 4 \cdot F_{CD} \cdot z_0 \quad (2.58)$$

dissipiert. Bei konstanter Reibungskraft F_{CD} nimmt die dissipierte Energie D_0 linear mit zunehmender Amplitude zu. Die dem Schwinger durch die Erregerkraft $P(t)$ zugeführte Energie E_0 kann nach Gl. (2.48) berechnet werden. In Bild 22 sind die Energien E_0 (Gl. (2.48)) und D_0 (Gl. (2.58)) in Funktion der Amplitude z dargestellt.

Ein stationärer Zustand kann nur erreicht werden, wenn

$$E_0 = P_0 \cdot \pi \cdot z_0 = 4 \cdot F_{CD} \cdot z_0 = D_0, \quad \text{bzw.}$$

$$F_{CD} = \frac{\pi \cdot P_0}{4}$$

gilt.

Bild 22: Energetischer Zustand bei einer erzwungenen Schwingung eines Einmassenschwingers mit Coulomb-Dämpfung (Resonanz)

Falls die zugeführte Energie E_o grösser ist als die dissipierte Energie D_o bzw. für $F_{CD} < \pi \cdot P_o / 4$, müssen die Amplituden, wie dies schon weiter oben bemerkt wurde, schliesslich unendlich werden. Für $E_o < D_o$ bzw. $F_{CD} > \pi \cdot P_o / 4$ kann keine Schwingung entstehen (vgl. Bild 67).

Mit dem in Gl. (2.39) für die Formänderungsenergie W_o angegebenen Ausdruck erhält man für das Dämpfungsmass ξ_{CD} infolge Coulomb-Dämpfung

$$\xi_{CD} = \frac{4 \cdot F_{CD} \cdot z_o}{4 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot k \cdot z_o^2} = \frac{2 \cdot F_{CD}}{\pi \cdot k \cdot z_o} \quad (2.59)$$

In Bild 23 ist der Verlauf von ξ_{CD} in Funktion der Amplitude z aufgetragen.

Bild 23: Dämpfungsmass ξ_{CD} eines Einmassenschwingers mit Coulomb-Dämpfung ($F_{CD} = \text{konstant}$)

Da die Dämpfungsenergie im Gegensatz zur Formänderungsenergie nur linear mit der Amplitude zunimmt, nimmt das Dämpfungsmass mit grösser werdender Amplitude ab (vgl. Gl. (2.23)).

Aus Gl. (2.58) ist ersichtlich, dass bei konstanter Reibungskraft F_{CD} der Dämpfungsexponent n $n = 1$ beträgt.

b) Coulomb-Dämpfung mit beliebiger Reibungskraft

Grundsätzlich kann beim Modell der Coulomb-Dämpfung vom Ansatz

$$N = \text{konstant} \quad \text{bzw.} \quad F_{CD} = \text{konstant}$$

$$\bar{\mu} = \text{konstant}$$

beliebig abgewichen werden.

Die Normalkraft N muss z.B. sehr häufig proportional zur Amplitude gesetzt werden. Für das Modell von Bild 19 erhält man damit das in Bild 24 angegebene Rückstellkraft-Amplituden-Diagramm.

Bild 24: Rückstellkraft R in Funktion der Amplitude z eines Einmassenschwingers mit Coulomb-Dämpfung (F_{CD} prop. zur Amplitude)

Die pro Schwingungszyklus dissipierte Energie $D_{o,CD}$ beträgt

$$D_{o,CD} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot F_{CD,max} \cdot z_0 = \text{konstant} \cdot z_0^2 \quad (2.60)$$

und ist somit proportional zum Quadrat der Amplitude. Damit liegen bei einer amplitudenproportionalen Reibungskraft ähnliche Verhältnisse vor wie bei der viskosen Dämpfung (vgl. Gl. (2.38)). Mit den Gleichungen (2.23) und (2.39) erhält man für das Dämpfungsmass ξ_{CD}

$$\xi_{CD} = \frac{\text{konst.} \cdot z_0^2}{4 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot k \cdot z_0^2} = \text{konstant} \quad (2.61)$$

In Bild 25 ist das Dämpfungsmass ξ_{CD} in Funktion der Amplitude z dargestellt.

Aus Gl. (2.61) folgt, dass das Dämpfungsmass von der Höhe der Amplitude unabhängig ist. Der Dämpfungsexponent n beträgt in diesem Fall wie bei der viskosen Dämpfung

$$n = 2.$$

**Bild 25: Dämpfungsmass ξ_{CD} eines Einmassenschwingers mit Coulomb-Dämpfung
(F_{CD} prop. zur Amplitude)**

2.5.5 Kombiniertes Dämpfungsmodell

Die in der Wirklichkeit zu beobachtenden Dämpfungsphänomene können oft nicht ausschliesslich mit einem der oben beschriebenen Dämpfungsmodelle allein erklärt werden. Häufig können bessere Resultate erzielt werden, wenn mehrere Dämpfungsmodelle miteinander kombiniert werden. Im folgenden wird ein Dämpfungsmodell beschrieben, welches wesentlich allgemeiner formuliert ist als die drei vorstehend dargestellten Modelle je für sich allein, und in welchem die Modelle der viskosen Dämpfung und der Coulomb-Dämpfung als Spezialfälle enthalten sind. Dieses allgemeinere Modell zeigt sehr schön, welchen Einfluss ein bestimmter Ansatz der Dämpfungskraft auf die Dämpfungsenergie bzw. das äquivalente viskose Dämpfungsmass haben kann. Zudem kann mit Hilfe dieses allgemeinen Ansatzes ein kombiniertes Dämpfungsmodell mit viskoser Dämpfung und Coulomb-Dämpfung mit $F_{CD} = \text{konstant}$ vorgestellt werden.

In [2.7] und [2.8] wird die Dämpfungskraft F_D mit

$$F_D = -c_m \cdot |\dot{z}|^m \cdot \text{sgn } \dot{z} \quad (2.62)$$

angesetzt, d.h. die Dämpfungskraft F_D ist proportional zur mit einem beliebigen Exponenten m potenzierten Geschwindigkeit $\dot{z}$ und der Richtung dieser Geschwindigkeit entgegengesetzt.

Bild 26 zeigt den Wert der Funktion $\text{sgn } \dot{z}$ in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit $\dot{z}$.

Bild 26: Funktion $\text{sgn } \dot{z}$ in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit $\dot{z}$

Für einen Einmassenschwinger, welcher ein lineares Federgesetz und eine Dämpfungskraft gemäss Gl. (2.62) aufweist und durch eine harmonische Erregerkraft gemäss Gl. (2.31) belastet wird, können mit Hilfe des Konzeptes der äquivalenten viskosen Dämpfung unabhängig vom Wert des Exponenten m gute und einfache Lösungen der Schwingungsdifferentialgleichung (2.1) gefunden werden. Aus der resultierenden harmonischen Bewegung

$$z = z_0 \cdot \sin(\omega t)$$

erhält man aus Gl. (2.62) für die Dämpfungskraft F_D

$$F_D = F_{D,\max} \cdot |\cos^m(\omega t)| \cdot \text{sgn } \cos(\omega t) \tag{2.63}$$

mit

$$F_{D,\max} = c_m \cdot \omega^m \cdot z_0^m$$

In Bild 27 sind die Dämpfungskräfte F_D gemäss Gl. (2.63) in Funktion der Amplitude z für verschiedene Exponenten m eingezeichnet.

Bild 27: Dämpfungskraft F_D in Funktion der Amplitude z für verschiedene Werte des Exponenten m

Die pro Schwingungsperiode T durch die Dämpfungskraft F_D dissipierte Schwingungsenergie D_0 entspricht dem Flächeninhalt der durch die entsprechende Kurve gebildeten Hysterese

$$D_0 = \int_0^T F_D \cdot dz = \int_0^T F_D \cdot \dot{z} \cdot dt$$

$$= 4 \cdot c_m \cdot \omega^{m+1} \cdot z_0^{m+1} \cdot \int_0^{\pi/2 \cdot \omega} \cos^{m+1}(\omega t) \cdot dt \quad (2.64)$$

Aus Gl. (2.23) erhält man für das äquivalente viskose Dämpfungsmass ξ

$$\xi = \frac{4 \cdot c_m \cdot \omega^{m+1} \cdot z_0^{m+1} \cdot \int_0^{\pi/2 \cdot \omega} \cos^{m+1}(\omega t) \cdot dt}{4 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot k \cdot z_0^2} \quad (2.64)$$

$$\xi = \frac{2 \cdot c_m \cdot \omega^{m+1} \cdot z_0^{m-1} \cdot \int_0^{\pi/2 \cdot \omega} \cos^{m+1}(\omega t) \cdot dt}{\pi \cdot k} \quad (2.65)$$

Für einen Schwinger mit kombinierter Dämpfung, dessen Dämpfungskraft F_D entsprechend Gl. (2.62) durch den Ausdruck

$$F_D = -c_{m_1} \cdot |\dot{z}|^{m_1} \cdot \operatorname{sgn} \dot{z} - c_{m_2} \cdot |\dot{z}|^{m_2} \cdot \operatorname{sgn} \dot{z} - \dots \quad (2.66)$$

dargestellt werden kann, wird in [2.7] für das Dämpfungsmass ξ ein zu Gl. (2.65) analog aufgebauter Ausdruck angegeben:

$$\xi = \frac{2 \cdot c_{m_1} \cdot \omega^{m_1+1} \cdot z_0^{m_1-1} \cdot \int_0^{\pi/2 \cdot \omega} \cos^{m_1+1}(\omega t) \cdot dt}{\pi \cdot k} +$$

$$\frac{2 \cdot c_{m_2} \cdot \omega^{m_2+1} \cdot z_0^{m_2-1} \cdot \int_0^{\pi/2 \cdot \omega} \cos^{m_2+1}(\omega t) \cdot dt}{\pi \cdot k} \quad (2.67)$$

a) Viskose Dämpfung

Bei viskoser Dämpfung muss $m = 1$ gesetzt werden, womit die Dämpfungskraft F_{VD} aus Gl. (2.63) zu

$$F_{VD} = -c_1 \cdot |\dot{z}| \cdot \operatorname{sgn} \dot{z} = -c_1 \cdot \dot{z}$$

berechnet werden kann.

Aus Gl. (2.65) erhält man für das Dämpfungsmass ξ_{VD}

$$\xi_{VD} = \frac{2 \cdot c_1 \cdot \omega^2 \cdot \int_0^{\pi/2 \cdot \omega} \cos^2(\omega t) \cdot dt}{\pi \cdot k} = \frac{2 \cdot c_1 \cdot \omega^2}{\pi \cdot k} \cdot \frac{1}{2 \cdot \omega} \cdot (\sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) + \omega t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega}}$$

$$\xi_{VD} = \frac{c_1 \cdot \omega}{\pi \cdot k} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{c_1 \cdot \sqrt{k}}{2 \cdot k \cdot \sqrt{m}} = \frac{c_1}{c_{1,kr}} \quad .$$

Erwartungsgemäss entspricht dies der exakten Lösung.

b) Coulomb-Dämpfung

Bei Coulomb-Dämpfung ($N = \text{konstant}$, $\bar{\mu} = \text{konstant}$) muss $m = 0$ gesetzt werden, womit die Dämpfungskraft F_{CD} aus Gl. (2.63) zu

$$F_{CD} = -c_0 \cdot \operatorname{sgn} \dot{z} \quad ; \quad |F_{CD}| = \text{konstant}$$

berechnet werden kann.

Aus Gl. (2.65) erhält man in Uebereinstimmung mit Gl. (2.59) für das Dämpfungsmass ξ_{CD}

$$\xi_{CD} = \frac{2 \cdot c_0 \cdot \omega \cdot z_0^{-1} \cdot \int_0^{\pi/2 \cdot \omega} \cos(\omega t) \cdot dt}{\pi \cdot k} = \frac{2 \cdot c_0 \cdot \omega}{\pi \cdot k \cdot z_0} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \sin(\omega t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega}}$$

$$\xi_{CD} = \frac{2 \cdot c_0}{\pi \cdot k \cdot z_0} = \frac{2 \cdot F_{CD}}{\pi \cdot k \cdot z_0} \quad .$$

c) Turbulenz-Dämpfung

Mit Turbulenz-Dämpfung werden die Dämpfungserscheinungen bezeichnet, welche bei rascher Bewegung von Körpern in Flüssigkeiten oder Gasen entstehen. Die Dämpfungskräfte F_{TD} sind näherungsweise dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional, d.h. $m = 2$ bzw.

$$F_{TD} = -c_2 \cdot \dot{z}^2 \cdot \operatorname{sgn} \dot{z}.$$

Aus Gl. (2.65) erhält man

$$\begin{aligned} \xi_{TD} &= \frac{2 \cdot c_2 \cdot \omega^3 \cdot z_0 \cdot \int_0^{\pi/2 \cdot \omega} \cos^3(\omega t) \cdot dt}{\pi \cdot k} = \\ &= \frac{2 \cdot c_2 \cdot \omega^2 \cdot z_0}{\pi \cdot k} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) \right) \Bigg|_0^{\pi/2 \cdot \omega} + \frac{2}{3} \cdot \int_0^{\pi/2 \cdot \omega} \cos(\omega t) \cdot dt \\ \xi_{TD} &= \frac{2 \cdot c_2 \cdot \omega^2 \cdot z_0}{\pi \cdot k} \cdot \frac{2}{3 \cdot \omega} \cdot \sin(\omega t) \Bigg|_0^{\pi/2 \cdot \omega} = \frac{4 \cdot c_2 \cdot \omega \cdot z_0}{3 \cdot \pi \cdot k}. \end{aligned}$$

d) Kombinierte Dämpfung (Viskose Dämpfung, Coulomb Dämpfung)

Bei kombinierter Dämpfung durch viskose Dämpfung und Coulomb-Dämpfung mit $N = \text{konstant}$ und $\bar{\mu} = \text{konstant}$ (Parallelschaltung des Voigt-Modells (vgl. Bild 7) mit einem Reibungselement (vgl. Bild 8) müssen in Gl. (2.66) $m_1 = 0$ und $m_2 = 1$ gesetzt werden. Mit der Dämpfungskraft F_D

$$F_D = -c_0 \cdot \operatorname{sgn} \dot{z} - c_1 \cdot \dot{z} \cdot \operatorname{sgn} \dot{z}$$

erhält man die Schwingungsdifferentialgleichung

$$m \cdot \ddot{z} + c_0 \cdot \operatorname{sgn} \dot{z} + c_1 \cdot \dot{z} + k \cdot z = P(t)$$

bzw.

(2.68)

$$\ddot{z} + F_{CD} \cdot \frac{\dot{z}}{|\dot{z}|} \cdot \frac{1}{m} + 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \dot{z} + \omega^2 \cdot z = P(t) \cdot \frac{1}{m}.$$

Aus Gl. (2.67) erhält man

$$\xi = \frac{2 \cdot c_0}{\pi \cdot k \cdot z_0} + \frac{c_1 \cdot \omega}{2 \cdot k}. \quad (2.69)$$

Das Dämpfungsmass ξ setzt sich in diesem Fall aus der Summe der unter a) und b) hergeleiteten Ausdrücke für ξ zusammen.

In Bild 28 ist das Dämpfungsmass ξ gemäss Gl. (2.69) in Funktion der Amplitude z aufgetragen. Wegen der Coulomb-Dämpfung ist eine starke Amplitudenabhängigkeit des Dämpfungsmasses festzustellen. Bei kleinen Amplituden z ist ξ sehr gross, bei grossen Amplituden z strebt ξ asymptotisch dem konstanten, amplitudenunabhängigen Wert für die reine viskose Dämpfung zu.

Bild 28 : Dämpfungsmass ξ eines Einmassenschwingers mit viskoser Dämpfung und Coulomb-Dämpfung ($F_{CD} = \text{konstant}$)

2.5.6 "Structural Damping" (Dynamische Hysterese)

Mit dem Modell "Structural Damping" ([1.4], [1.5]) wird versucht, die flüssige Reibung innerhalb des Materials oder an den Kontaktstellen von verschiedenen Elementen eines Systems zu erfassen. Dabei werden aber - im Unterschied zur viskosen Dämpfung (vgl. Abschnitt 2.5.1) - die Dämpfungskräfte als Funktion der Dehnungen bzw. Verformungen des Systems angesetzt.

Bei einem Einmassenschwinger mit linearem Federgesetz und "Structural Damping" wird die Dämpfungskraft F_{SD} in ihrem Betrag proportional zur Federkraft F_F und mit ihrer Richtung der Geschwindigkeit $\dot{z}$ entgegengesetzt wirkend angesetzt. Die Phasenverschiebung zwischen der Verschiebung z und der Geschwindigkeit $\dot{z}$ wird gleich 90° gesetzt, auch wenn dies im allgemeinen nicht zutrifft. Man bedient sich dabei der komplexen Schreibweise und erhält für die Dämpfungskraft F_{SD}

$$F_{SD} = i \cdot \eta \cdot F_F \quad (2.70)$$

wobei: i = imaginäre Einheit, welche die Phasenverschiebung von 90° erzeugt,

η = Verlustfaktor .

In Bild 29 sind die Kräfte F_{SD} und F_F als Vektoren aufgetragen.

Bild 29 : Vektordiagramm

Mit Gl. (2.70) erhält man die Schwingungsdifferentialgleichung

$$m \cdot \ddot{z} + i \cdot \eta \cdot k \cdot z + k \cdot z = P(t)$$

bzw.

$$m \cdot \ddot{z} + (1 + i \cdot \eta) \cdot k \cdot z = P(t) \quad . \quad (2.71)$$

Gegenüber dem ungedämpften Einmassenschwinger weist der durch "Structural Damping" gedämpfte Schwinger eine komplexe Steifigkeit $(1+i \cdot \eta) \cdot k$ auf.

Bei einer freien Schwingung ($P(t) = 0$, z.B. Ausschlagen) erhält man als Lösung von Gl. (2.71)

$$z(t) = A \cdot e^{\lambda \cdot t} \quad (2.72)$$

mit

$$\lambda^2 = - \frac{k}{m} \cdot (1+i \cdot \eta) = -\omega_0^2 \cdot (1+i \cdot \eta) \quad .$$

Die Wurzeln von λ^2 können aus Bild 30 bestimmt werden.

Bild 30 : Wurzeln von λ^2

Damit erhält man für Gl. (2.72)

$$z(t) = A_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$$

$$z(t) = A_1 \cdot e^{(-a+i \cdot b) \cdot t} + A_2 \cdot e^{(a-i \cdot b) \cdot t}$$

$$z(t) = A_1 \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{i \cdot b \cdot t} + A_2 \cdot e^{a \cdot t} \cdot e^{-i \cdot b \cdot t} \quad (2.73)$$

Da der Term $e^{a \cdot t}$ nach unendlich langer Zeit gegen unendlich geht, während der Ausdruck $e^{-i \cdot b \cdot t}$ gegen null strebt, ist die Lösung der Differentialgleichung (2.71) sehr schwierig.

Bei einer erzwungenen harmonischen Schwingung mit

$$P(t) = P_0 \cdot e^{i \cdot \Omega \cdot t}$$

erhält man als stationäre Lösung der Differentialgleichung (2.71)

$$z(t)_{\text{stationär}} = \frac{P_0}{k} \cdot [(1-\beta^2)^2 + \eta^2]^{-1/2} \cdot e^{i \cdot (\Omega t - \theta)} \quad (2.74)$$

mit

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\eta}{1-\beta^2} \right)$$

und für die maximale stationäre Amplitude z_0

$$z_0 = \frac{P_0}{k} \cdot [(1-\beta^2)^2 + \eta^2]^{-1/2} \quad (2.75)$$

Bei der Lösung der Schwingungsdifferentialgleichung (2.71) gilt es jedoch zu beachten, dass nur bei einer harmonischen Schwingung und im stationären Zustand die Phasenverschiebung zwischen der Verschiebung z und der Geschwindigkeit $\dot{z}$ 90° beträgt. Während des Einschwingvorgangs und bei beliebiger Be-

lastung weicht die Phasenverschiebung von 90° ab, so dass die Dämpfungskraft F_{SD} nicht mehr durch den Ansatz (2.70) ausgedrückt werden darf.

In Bild 31 sind die Dämpfungskräfte F_{VD} und F_{SD} eines linearen Schwingers bei einer erzwungenen harmonischen Schwingung und viskoser Dämpfung und "Structural Damping" in Funktion der Kreisfrequenz ω aufgetragen.

Bild 31 : Dämpfungskräfte in Funktion der Kreisfrequenz bei einer erzwungenen Schwingung

Bei viskoser Dämpfung nimmt die Dämpfungskraft F_{VD} linear mit ω zu (vgl. Gl. (2.38)), während sie bei "Structural Damping" von ω unabhängig ist. Wenn die Kreisfrequenz ω_0 im Schnittpunkt der beiden Geraden gleich der Eigenkreisfrequenz ω gesetzt wird, kann aus

$$F_{VD,max} = c \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot z_{max}$$

$$F_{SD,max} = \eta \cdot k \cdot z_{max}$$

und

$$F_{VD} = F_{SD}$$

für einen Schwinger mit "Structural Damping" ein äquivalenter viskoser Dämpfungskoeffizient c

$$c = \eta \cdot \sqrt{k \cdot m} = \eta \cdot \frac{c_{kr}}{2} \quad (2.76)$$

gefunden werden.

Zu demselben Resultat gelangt man, wenn man die beiden Gleichungen (2.33) und (2.75) vergleicht. Bei Resonanz, d.h. bei $\Omega = \omega$ bzw. $\beta = 1$, stimmen die beiden Ausdrücke für z_{max} überein, wenn

$$2 \cdot \xi = 2 \cdot \frac{c}{c_{kr}} = \eta$$

gesetzt wird.

Die pro Schwingungszyklus dissipierte Energie D_0 kann mit Hilfe von Bild 32, in welchem die resultierende bewegungshemmende Kraft R

$$R = (1+i\eta) \cdot k \cdot z$$

in Funktion der Amplitude z dargestellt ist, berechnet werden.

**Bild 32 : Energiedissipation durch
"Structural Damping"**

Infolge des Verlustfaktors η bzw. der Phasenverschiebung θ der bewegungshemmenden Kraft R gegenüber der Federkraft F_F entsteht eine Hysterese mit elliptischer Gestalt. Die Breite der Hysterese wird durch die Grösse des Verlustfaktors η bestimmt. Die Fläche der Hysterese beträgt

$$D_0 = \pi \cdot \eta \cdot k \cdot z_0^2 \quad . \quad (2.77)$$

Aus dem Vergleich dieses Ausdruckes mit dem entsprechenden Ausdruck für die viskose Dämpfung (Gl. (2.38)) erhält man wiederum bei Resonanz mit $\Omega = \omega$

$$c \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} = \eta \cdot k$$

bzw.

$$2 \cdot \frac{c}{c_{kr}} = 2 \cdot \xi = \eta \quad .$$

Periodische, nicht harmonische Belastungen müssen durch eine Fourier-Analyse in ihre harmonischen Komponenten aufgeteilt werden, damit die Antwort des Systems durch Superposition der einzelnen harmonischen Anteile gewonnen werden kann.

In [1.4] wird gezeigt, dass bei nicht periodischen Belastungen, wie z.B. Stossbelastungen oder stochastischer Erregung, das Modell "Structural Damping" ein physikalisch nicht vertretbares Modell darstellt.

Das Modell "Structural Damping" hat gegenüber dem Modell der viskosen Dämpfung den Vorteil, dass die Dämpfungskraft bzw. die Dämpfungsenergie nicht von der Frequenz abhängt, was mit den Versuchsergebnissen besser übereinzustimmen scheint. Bei freien und nicht harmonischen Schwingungen entstehen jedoch bei der analytischen Behandlung Probleme, so dass es auf keinen Fall so universell verwendet werden kann wie das Modell der viskosen Dämpfung.

3. Die Dämpfungseigenschaften von Beton und Stahl

Während die Dämpfungseigenschaften metallischer Baustoffe dank zahlreicher Versuche und theoretischer Untersuchungen schon recht gut bekannt sind, bestehen beim Beton diesbezüglich noch viele unbeantwortete Fragen. Beim Beton ist es wegen der recht grossen Streuung der zahlreichen Versuchsergebnisse und der gegenüber Stahl grösseren Anzahl von massgebenden Einflussfaktoren wesentlich schwieriger, die Abhängigkeit seiner Dämpfungseigenschaften von einzelnen Einflussfaktoren in den Griff zu bekommen.

Die Bedeutung der in bezug auf die Dämpfungseigenschaften als massgebend betrachteten Einflussfaktoren

- Frequenz
- Höhe der Beanspruchung
- Wassergehalt des Mörtels bzw. Betons
- Alter des Mörtels bzw. Betons
- Zementgehalt des Betons

dieser beiden im Stahlbetonbau verwendeten Materialien soll anhand einer Literaturschau dargestellt werden. Die Kenntnis dieser Materialeigenschaften stellt eine wichtige Voraussetzung dar zur Bestimmung der Dämpfungseigenschaften von Bauteilen oder Konstruktionen aus Beton oder Stahlbeton. Bei der Ermittlung der Dämpfungseigenschaften einer Stahlbetonkonstruktion dürfen jedoch die Dämpfungseigenschaften von Beton und Stahl nicht einfach superponiert werden. Die Dämpfung von Verbundkonstruktionen kann zusätzlich durch Vorgänge an den Grenzflächen zwischen den verschiedenen Materialien beeinflusst werden.

3.1 Beton

Zuerst werden die Dämpfungseigenschaften von Zementmörtelproben und anschliessend diejenigen von unbewehrten Betonprüfkörpern beschrieben.

a) Zementmörtel

Untersuchungen der Dämpfungseigenschaften von Zementmörtel wurden z.B. von Baker/Kesler [3.4], Cole/Spooner [3.5], Kesler/Chang [3.6], Obert/Duvall [3.7], Richards/Radjy [3.8], Thomson [3.9], Swamy [3.10] und Girgrah/Kesler [3.11] durchgeführt.

Deren Resultate lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Die Frequenzabhängigkeit der Dämpfung wurde z.B. in [3.4], [3.5] und [3.6] untersucht. Die erwähnten Arbeiten lassen den Schluss zu, dass die Dämpfung von Zementmörtel praktisch frequenzunabhängig ist. Einzig bei sehr tiefen

Frequenzen ($f < 2.5 \text{ Hz}$) wurde gemäss [3.5] ein gewisser Anstieg (!) der Dämpfung beobachtet.

- Die Abhängigkeit der Dämpfung von der Beanspruchungshöhe wurde z.B. von Cole/Spooner [3.5] untersucht. Bei zunehmender Spannung wurde ein nur geringer Anstieg der Dämpfung des Mörtels beobachtet, so dass die Dämpfung im untersuchten elastischen Beanspruchungsbereich näherungsweise als konstant betrachtet werden darf.
- Einen grossen Einfluss auf die Dämpfung hat der Wassergehalt der geprüften Zementmörtelproben. In [3.7], [3.8] und [3.9] z.B. wird übereinstimmend festgestellt, dass die Dämpfung der Zementmörtelproben mit zunehmendem Wassergehalt zunimmt. Nur bei relativ kleinem Wassergehalt scheint dessen Einfluss gering zu sein. In [3.8] wird für das Dämpfungsmass von wassergesättigten Proben $\xi = 0.6$ bis 2.0% , von teilweise gesättigten Proben $\xi = 0.9$ bis 1.8% und bei trockenen Proben $\xi = 0.2$ bis 0.4% angegeben.
- Mit zunehmendem Alter des Mörtels, wahrscheinlich als Folge der zunehmenden Austrocknung, nimmt die Dämpfung anfänglich im allgemeinen stark ab. Nach drei bis vier Wochen Erhärtungszeit ist der Einfluss des Alters jedoch nicht mehr bedeutend [3.10].
- In [3.4], [3.10] sowie [3.11] können Hinweise über die Natur des Dämpfungsgesetzes bzw. über das günstigste Dämpfungsmodell gefunden werden. Danach ergibt die Anwendung des Modells der viskosen Dämpfung für den untersuchten Beanspruchungs- und Frequenzbereich sowie den in der üblichen Grössenordnung liegenden Wassergehalt eine recht gute Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen. Da das Modell mit $c = \text{konstant}$ zu einer Frequenzabhängigkeit der Dämpfung führt (vgl. Gl. (2.38)), ist anzunehmen, dass die betreffenden Autoren $\xi = c/c_{kr} = \text{konstant}$ voraussetzten (vgl. Abschnitt 2.5.1).

b) Unbewehrter Beton

Untersuchungen der Dämpfungseigenschaften von unbewehrtem Beton wurden z.B. von Swamy [3.10], Girgrah/Kesler [3.11], R. Jones [3.12], Ehlers [3.13] und Kesler/Higuchi [3.14] durchgeführt.

Aus vergleichenden Versuchen von [3.12] resultiert, dass die Dämpfung von Betonprüfkörpern geringer ist als diejenige von entsprechenden Zementmörtelprüfkörpern. Die Dämpfung infolge der Interaktion zwischen den Zuschlagstoffen und dem Mörtel scheint weniger bedeutend zu sein als die Dämpfung im Mörtel selbst. Wenn dem Mörtel die Zuschlagstoffe beigegeben werden, wird ein gewisser Volumenanteil des Mörtels durch grössere Partikel ersetzt, so dass pro Volumeneinheit der Anteil der wassergefüllten Poren zurückgeht. Wegen des oben beschriebenen Einflusses des Wassergehaltes ist es verständ-

lich, dass damit die Dämpfung reduziert wird.

Im wesentlichen können die beim Zementmörtel gemachten Feststellungen hier wiederholt werden:

- Eine Frequenzabhängigkeit der Dämpfung konnte von keinem Autor festgestellt werden.
- Versuche zur Untersuchung des Einflusses der Beanspruchungshöhe auf die Dämpfung wurden z.B. von Ehlers [3.13] durchgeführt. Im ganzen untersuchten Beanspruchungsbereich war das ermittelte Dämpfungsmass nahezu konstant.
- In [3.12] und [3.14] werden in bezug auf den Einfluss des Wassergehaltes auf die Dämpfung von unbewehrtem Beton dieselben Feststellungen gemacht wie sie beim Zementmörtel aufgeführt wurden. Somit nimmt die Dämpfung mit abnehmendem Wassergehalt und zunehmendem Alter der Prüfkörper ab. Da Beton mit niedriger Festigkeit häufig einen höheren Wasser-Zement-Faktor aufweist, haben Prüfkörper mit geringeren Betonfestigkeiten oft eine grössere Dämpfung als solche mit höheren Betonfestigkeiten [3.10].
- Ueber den Einfluss des Zementgehaltes auf die Dämpfung von unbewehrtem Beton liegen keine schlüssigen Ergebnisse vor. Es scheint jedoch, dass dem Zementgehalt gegenüber dem Wassergehalt des Betons nur eine relativ geringe Bedeutung zukommt.

Stellvertretend für die zahlreichen zitierten Versuche sollen hier nur ein paar wesentliche Resultate der Untersuchungen von Swamy [3.10] wiedergegeben werden. Bild 33 zeigt für verschiedene Wasser-Zement-Faktoren das an Beton- und Mörtelprüfkörpern ermittelte Dämpfungsmass ξ in Funktion der Zeit nach dem Betonieren und ihres Trocknungszustandes.

Von mehreren Autoren (z.B. [3.2] und [3.6]) wird angenommen, dass eine gegenseitige Abhängigkeit zwischen den Dämpfungseigenschaften und den Kriech-eigenschaften von Beton besteht.

Sowohl die Kriech- als auch die Dämpfungsphänomene stellen Abweichungen vom ideal-elastischen Verhalten dar. Mehrere Parameter, welche die Dämpfungseigenschaften beeinflussen, haben auch einen Einfluss auf das Kriechen. Die meisten Hypothesen ordnen den beiden Parametern dieselben internen Strukturvorgänge und Mechanismen zu. Es ist somit verständlich, dass bei der Modellwahl zur Darstellung des Dämpfungs- und Kriechverhaltens oft auf dasselbe Modell, z.B. den Kelvin-Körper (bzw. Voigt-Modell) von Bild 1 gegriffen wird. Sofern sich der Beton tatsächlich wie ein lineares viskoelastisches Material verhält, kann auf mathematischem Weg ein Zusammenhang zwischen dem Verlustfaktor η und der Kriechfunktion bzw. Relaxationsfunktion gefunden werden. Für die Herleitung dieser Beziehungen sei z.B. auf [3.2] verwiesen.

Bild 33 : Dämpfungsmass ξ von Mörtel- und Betonproben mit unterschiedlichen Wasser-Zement-Faktoren in Funktion ihres Alters und Trocknungszustandes nach den Versuchen [3.10]

Der Zusammenhang zwischen dem Kriechen und der Dämpfung von Beton ist bis heute nur ungenügend erforscht und stellt somit vorläufig eine nur schlecht gesicherte Hypothese dar.

3.2 Stahl

Die Dämpfungseigenschaften von Stahl, Stahllegierungen und anderen Metallen sind wesentlich besser erforscht als diejenigen von Beton.

Einerseits sind die Untersuchungen beim Stahl bedeutend einfacher durchzuführen, da das Material homogen ist, im allgemeinen sich keine Risse bilden können und die Zusammensetzung nicht von Fall zu Fall ändert, andererseits wurden auch von der metallverarbeitenden Industrie schon früher höhere Anforderungen an die Eigenschaften des Materials gestellt, so dass die Dämpfungseigenschaften schon früh untersucht werden mussten.

Die Dämpfungseigenschaften von Stahl werden sehr ausführlich z.B. in [2.3] beschrieben und können mit den folgenden Feststellungen charakterisiert werden:

- Eine Frequenzabhängigkeit der Dämpfung von Stahl wurde experimentell nicht nachgewiesen.
- Die Beanspruchungshöhe ist der wichtigste Einflussfaktor für die Dämpfung des Stahles. Bild 34 zeigt den in [3.15] ermittelten Verlauf des äquivalenten viskosen Dämpfungsmasses ξ in Funktion der auf die Fließspannung σ_F bezogenen Normalspannung σ_e .

Bild 34: Äquivalentes viskoses Dämpfungsmass von Stahl in Funktion der maximalen Stahlspannung nach den Versuchen [3.15]

Bis zu etwa $0.7 \cdot \sigma_F$ steigt das Dämpfungsmass nur leicht an. Bei einer Spannung über diesem Wert nimmt das Dämpfungsmass sehr stark zu, da mit grösser werdender Spannung der Anteil der Hysterese-Dämpfung an der gesamten Dämpfung stark überwiegt. Für Stahlspannungen im Gebrauchslastbereich und bis nahe an die Fließspannung darf das Dämpfungsmass zu

$$0.0005 \leq \xi \leq 0.005$$

angenommen werden. Das Dämpfungsmass von Stahl ist in diesem Beanspruchungsbereich somit wesentlich kleiner als dasjenige von Beton.

3.3 Stahlbeton und Spannbeton

3.3.1 Fremde Versuche

Versuche an schlaff bewehrten Stahlbetonbiegeträgern wurden z.B. von Ehlers [3.13], Morrone [3.15], Bock [3.16], Lenk [3.17] und Penzien [3.18] durchgeführt.

Untersuchungen an voll und teilweise vorgespannten Betonbiegeträgern wurden z.B. von Penzien [3.18], Denkhaus/Dück [3.19], Müller [3.20], Fritz-de-la-Orta [3.21], Brondum-Nielsen [3.22], CUR 17 [3.23] und I. Holand [3.24] vorgenommen.

Die untersuchten Träger wurden teils in Ausschwingversuchen, teils in Resonanzversuchen geprüft. Die meisten der in den erwähnten Versuchen geprüften Versuchsträger hatten relativ geringe Abmessungen und demzufolge recht hohe Eigenfrequenzen im Bereich von 25 bis 110 Hz. Einzig in den in [3.22] und [3.24] beschriebenen Versuchen wurden Frequenzen zwischen 5 und 10 Hz erzielt. Die erzielten Verschiebungen und dynamischen Beanspruchungen waren meistens sehr gering.

Aus den genannten Untersuchungen können die folgenden wichtigsten Erkenntnisse gewonnen werden:

Schlaff bewehrte Stahlbetonbiegeträger

Die festgestellten Werte für die Dämpfung streuen innerhalb eines sehr weiten Bereiches.

- Eine Frequenzabhängigkeit der Dämpfung wurde nirgends festgestellt.
- Die Dämpfung von Stahlbetonträgern wird stark von der Rissbildung beeinflusst. Gerissene Träger weisen gegenüber ihrem ungerissenen Zustand nebst geringeren Eigenfrequenzen in der Regel eine grössere Dämpfung auf.
- Die Dämpfung scheint von der Höhe der Beanspruchung sowie von der Belastungsgeschichte abhängig zu sein. In den untersuchten Beanspruchungsbereichen wurde während der Rissbildung meistens ein Ansteigen der Dämpfung beobachtet. In [3.18] und [3.25] wird hingegen festgestellt, dass bei zunehmender Beanspruchung die Dämpfung wieder geringer werden kann.

Vorgespannte Stahlbetonträger

Die festgestellten Werte für die Dämpfung streuen hier in einem viel kleineren Bereich als bei den schlaff bewehrten Stahlbetonträgern.

- Eine Frequenzabhängigkeit der Dämpfung wurde nicht festgestellt.
- Die Dämpfung von vorgespannten Biegeträgern ist sehr gering solange keine Risse auftreten.

- Träger, welche infolge der Vorspannung (exzentrische Vorspannung) oder dynamischer Beanspruchung gerissen sind, weisen gegenüber ihrem ungerissenen Zustand häufiger eine grosse Dämpfung auf.
- Mit zunehmender zentrischer Druckspannung infolge Vorspannung ändert sich die Dämpfung nur wenig. In [3.17], [3.19], [3.21], [3.22] und [3.24] wird sogar eine leichte Abnahme der Dämpfung mit zunehmender Spannung infolge Vorspannung festgestellt. Erst bei sehr hohen zentrischen Spannungen infolge Vorspannung wird wieder ein Ansteigen der Dämpfung beobachtet.

3.3.2 Eigene Versuche

Im Jahre 1977 wurden am Institut für Baustatik und Konstruktion der ETH Zürich dynamische Versuche an sieben schlaff bewehrten Beton- und Leichtbetonträgern durchgeführt. Alle Träger hatten dieselben Abmessungen (Länge $L = 8.40$ m, Breite $B = 0.40$ m, Höhe $H = 0.24$ m) und unterschieden sich nebst der verwendeten Betonart nur in der Grösse der Längsbewehrung. Die erzielten Eigenfrequenzen lagen im Bereich von 2 bis 7 Hz. Die Versuchsergebnisse sind in einem detaillierten Bericht [3.1] sowie einem zusammenfassenden Zeitschriftenartikel [3.26] dargestellt.

Es werden hier nur diejenigen Resultate gekürzt wiedergegeben, welche für den Aufbau und das Verständnis der folgenden Kapitel notwendig sind.

In Bild 35 ist der Verlauf des Dämpfungsmasses ξ in Funktion der in den Ausschwingversuchen erzielten Stahlspannung $\sigma_{e,rel}$ in Trägermitte angegeben. Durch den Index "rel" (= relativ) wird verdeutlicht, dass sich die Spannung auf die Differenz zwischen den während des Ausschwingversuchs und den in der Ruhelage gemessenen Werten bezieht (vgl. auch Abschnitt 5.1).

Während die Darstellung in der linken Figur von Bild 35 für erstmalige Beanspruchung gilt und somit die Phase der Rissbildung miteinschliesst, sind die in der rechten Figur angegebenen Werte bei Wiederholung der Beanspruchung ermittelt worden, d.h. nachdem die Biegerisse schon fertig ausgebildet waren.

Bild 35: Dämpfungsmass ξ in Funktion der Stahlspannung $\sigma_{e,rel}$ nach den Versuchen [3.1]

In Bild 36 ist der Verlauf des Dämpfungsmasses ξ in Funktion der relativen Stahlspannung in Trägermitte schematisch dargestellt.

Die wichtigsten Resultate lassen sich wie folgt zusammenfassen (die folgende Numerierung bezieht sich auf die Numerierung von Bild 36):

Bild 36 : Dämpfungsmass ξ in Funktion der Stahlspannung $\sigma_{e,rel}$ (schematisch)

Erstmalige Beanspruchung mit Phase der Rissbildung

(1. Prüfphase, linke Figur von Bild 35)

1. Bei allen Trägern nahm während der Rissbildung (Anreissen und Ausbreitung) die Dämpfung mit zunehmender Stahlspannung zuerst zu.
2. Sobald sich annähernd alle Biegerisse gebildet hatten, wurde ein Zustand erreicht, bei welchem die Dämpfung nicht mehr weiter anstieg.
3. Bei der weiteren Steigerung der Beanspruchung nahm die Dämpfung mit steigender Stahlspannung wieder ab. Bei grossen Stahlspannungen nahe bei der Fließgrenze wurden insbesondere an den stärker bewehrten Trägern sehr kleine Dämpfungswerte gemessen.

Nach Abschluss der Rissbildung und bei Wiederholung der Beanspruchung

(2. Prüfphase, rechte Figur von Bild 35)

Bei der nochmaligen Durchführung des gesamten Prüfprogrammes an denselben Versuchsträgern ergaben sich bei allen Trägern folgende Ergebnisse:

4. Bei kleinen Stahlspannungen wurde eine im Vergleich zu den bei Versuchsbeginn (vgl. linke Figur von Bild 35) gemessenen Werten sehr hohe Dämpfung festgestellt. Mit zunehmender Stahlspannung nahm dann aber die Dämpfung wieder stark ab.
5. Bei grossen Stahlspannungen wurden für die Dämpfung noch etwas kleinere Werte gemessen als in der 1. Prüfphase.
6. Mit zunehmendem Bewehrungsgehalt wurde eine kleinere Dämpfung ermittelt.
7. Die Leichtbetonträger wiesen im ganzen Beanspruchungsbereich ein etwas geringeres Dämpfungsvermögen auf als die entsprechenden Betonträger.

4. Grundlagen des Verbundes zwischen Beton und Stahl

Bei der in Kapitel 5 folgenden Herleitung des Dämpfungsmodells kommt dem Verbund zwischen dem Bewehrungsstahl und dem Beton grosse Bedeutung zu. In diesem Kapitel sollen deshalb die Grundlagen für das Verständnis des Verbundverhaltens von profilierten Bewehrungsstählen dargestellt werden. Es wird hier vor allem auf die Untersuchungen und Resultate von Rehm [4.1], Martin [4.2] und Goto [4.3] Bezug genommen.

4.1 Die Differentialgleichung des verschieblichen Verbundes

In [4.1] wurden die Verbundeigenschaften von verschiedenen profilierten Bewehrungsstählen unter statischer Kurzzeitbeanspruchung experimentell und theoretisch untersucht.

Aus dem am Bewehrungsstabelement dx experimentell gefundenen Zusammenhang zwischen der Verbundspannung τ_v und der zugehörigen Relativverschiebung v zwischen dem Stahl und dem Beton (Grundgesetz, vgl. Abschnitt 4.2) lassen sich mit den im folgenden formulierten Beziehungen die Verteilung der Verbundspannungen $\tau_v(x)$, der Relativverschiebung $v(x)$ zwischen dem Bewehrungsstahl und dem Beton und der Stahlspannung $\sigma_e(x)$ längs der Bewehrungsstabachse berechnen.

In Bild 37 sind die am Bewehrungsstab der Länge dx angreifenden Kräfte bzw. Spannungen eingezeichnet.

Bild 37: Spannungen und Verformungen am Bewehrungsstabelement

Die Verbundspannung τ_v ist eine Modellgrösse, mit welcher die effektiv vorhandenen Normalkräfte zwischen den Bewehrungsstahlrippen und dem Beton sowie die Reibungskräfte zwischen der Stahl- und Betonoberfläche vereinfachend erfasst werden. Sehr häufig begnügt man sich, die vom Stahl auf den Beton übertragenen Kräfte durch eine über eine gewisse Länge gemittelte mittlere oder nominelle Verbundspannung $\tau_{v,m}$ auszudrücken (vgl. Abschnitt 4.3). Diese wird aus dem Quotienten, gebildet aus allen an der Bewehrungsstaboberfläche angreifenden Haftreibungs- und Rippennormalkräften und der entsprechenden Bewehrungsstaboberfläche, berechnet. Sie ist somit ebenfalls eine Modellgrösse oder ein Vergleichswert und hat keinen direkten physikalischen Bezug.

Die Änderung der Stahlspannung $d\sigma_e$ entspricht der durch die Verbundspannung τ_v eingeleiteten und auf den Stabquerschnitt bezogenen Kraft

$$d\sigma_e = \tau_v \cdot U \cdot dx \cdot \frac{1}{F_e}$$

bzw.

$$\frac{d\sigma_e}{dx} = \frac{\tau_v \cdot U}{F_e} = \tau_v \cdot \frac{4}{\emptyset} \quad (\emptyset = \text{Durchmesser des Bewehrungsstabes}) \quad (4.1)$$

Die Änderung der Relativverschiebung dv auf der Strecke dx entspricht der Differenz der Stahl- und Betonverformung auf dieser Strecke

$$dv = (\epsilon_e - \epsilon_b) \cdot dx = \left(\frac{\sigma_e}{E_e} - \frac{\sigma_b}{E_b} \right) \cdot dx$$

bzw.

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\sigma_e}{E_e} - \frac{\sigma_b}{E_b} \quad (4.2)$$

Aus Gleichgewichtsgründen ergibt sich mit den als bekannt vorausgesetzten Anfangswerten $\sigma_{e,0}$ und $\sigma_{b,0}$

$$\sigma_b = \sigma_{b,0} - \frac{\sigma_e - \sigma_{e,0}}{F_b} \cdot F_e \quad ,$$

womit man

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\sigma_e}{E_e} - \frac{\sigma_{b,0}}{E_b} + \frac{\sigma_e - \sigma_{e,0}}{F_b \cdot E_b} \cdot F_e$$

erhält. Nach nochmaligem Differenzieren und Einsetzen von Gl. (4.1) erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d^2v}{dx^2} &= \tau_v \cdot \frac{4}{\emptyset} \cdot \frac{1}{E_e} + \tau_v \cdot \frac{4}{\emptyset} \cdot \frac{F_e}{F_b \cdot E_b} \\ \frac{d^2v}{dx^2} &= \tau_v \cdot \frac{4}{\emptyset} \cdot \left(\frac{1}{E_e} + \frac{F_e}{F_b \cdot E_b} \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Mit dem experimentell zu ermittelnden Grundgesetz $\tau_v(v)$ ergibt sich die Differentialgleichung des verschieblichen Verbundes zu

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \tau_v(v) \cdot \frac{4}{\emptyset} \cdot \left(\frac{1}{E_e} + \frac{F_e}{F_b \cdot E_b} \right) \quad (4.4)$$

4.2 Grundgesetz des Verbundes

In [4.1] sind die experimentell ermittelten Grundgesetze $\tau_v(v)$ von verschiedenen profilierten Bewehrungsstäben angegeben. In Bild 38 ist das Grundgesetz für Riegel-Torstahl wiedergegeben.

Bild 38. Grundgesetz für Riegel – TOR – Stahl nach [4.1]

Für Rippenstähle ist die Höhe der Verbundspannung vor allem von

- der Profilierung (Rippenhöhe, Form der Rippen, Rippenabstand)
- der Lage des Bewehrungsstabes im Querschnitt
- der Betonqualität

abhängig.

Es lassen sich die folgenden Feststellungen machen:

- Die Grundgesetze stellen den Zusammenhang zwischen der Verbundspannung τ_v und der zugehörigen Relativverschiebung v zwischen dem Bewehrungsstahl und dem Beton dar.
- Bei kleinen Scherspannungen in den Betonkonsolen zwischen zwei Bewehrungsstahlrippen resultieren die gemessenen Relativverschiebungen aus der Zusammendrückung des Mörtels unter den Rippen.
- Die örtliche Last einer Rippe erzeugt Querpressungen im Beton. Bei geringen Betonüberdeckungen besteht die Gefahr, dass der Beton vor Erreichen

des Scherwiderstandes der Konsolen abgesprengt wird und damit der Verbund zerstört wird.

- Bei ausreichender Querbehinderung (genügende Betonüberdeckung) können die Betonkonsolen vollständig abgeschert werden. Je nach dem Rippenabstand brechen die Konsolen über ihre ganze Höhe oder nur über einen Teil davon.
- Liegend betonierte Bewehrungsstäbe weisen gegenüber stehend einbetonierten Stäben im allgemeinen kleinere maximale Verbundspannungen bei grösseren zugehörigen Relativverschiebungen auf.
- Die Verbundspannungen nehmen bei gleichen Verschiebungen praktisch linear mit der Betondruckfestigkeit zu.

Ein weiterer, bis jetzt jedoch wenig untersuchter Einflussfaktor ist die Anzahl der Lastwechsel bei wiederholter Belastung. Es ist zu vermuten, dass eine Wechselbeanspruchung zu einer Verminderung der Verbundspannungen und/oder zu einer Erhöhung der Relativverschiebungen führt. Bei Rippenstählen, bei welchen die Verbundspannungen im wesentlichen durch Normalspannungen zwischen den Rippen und den Betonkonsolen übertragen werden, dürfte jedoch der Einfluss der Lastwechselzahl bedeutend geringer sein als bei profillosen Rundstählen, bei welchen der Verbund vor allem auf einer mikroskopischen Verzahnung und Haftung beruht.

In [4.1] sind einige Versuche beschrieben, in welchen das Verbundverhalten von Rippenstählen bei wiederholter Be- und Entlastung beschrieben ist. Es zeigt sich, dass bei wiederholter Belastung eine Tendenz zu grösseren Relativverschiebungen vorhanden ist. Die angeführten Versuchsergebnisse geben jedoch keine Hinweise über die Grösse der auftretenden Verbundspannungen und genügen somit nicht, um das Verbundverhalten bei Wechselbeanspruchung zu beschreiben.

4.3 Ermittlung der Verteilungsfunktionen für die Stahlspannungen, Verbundspannungen und Relativverschiebungen in einem gerissenen Biegeelement

In diesem Abschnitt wird erläutert, wie die Verteilung der Stahlspannungen, Verbundspannungen und Relativverschiebungen innerhalb eines gerissenen Biegeelementes ermittelt werden können. Unter einem Biegeelement wird im folgenden ein Ausschnitt aus einem Biegeträger verstanden. Seine Länge entspricht dem mittleren Abstand zwischen zwei Biegerissen, während sein Querschnitt mit dem Querschnitt des Biegeträgers übereinstimmt (vgl. z.B. Bild 41).

Sofern es gelingt, das experimentell gefundene Grundgesetz (vgl. Bild 38) durch eine mathematische Funktion darzustellen, kann in einigen Fällen für die in Abschnitt 4.1 abgeleitete Verbunddifferentialgleichung eine exakte analytische Lösung angegeben werden. Die Verbunddifferentialgleichung (4.4)

kann aber auch für jede Form des Grundgesetzes auf einfache Art und Weise durch schrittweises Vorgehen numerisch gelöst werden. Ausgehend von gegebenen Anfangswerten für die Stahlspannung $\sigma_{e,0}$ und die Relativverschiebung v können für den nächsten Querschnitt, welcher um die Schrittweite Δx vom anfänglichen Querschnitt entfernt ist, mit Hilfe eines Rechenprogrammes die Werte für die Stahlspannungen, Verbundspannungen und Relativverschiebungen berechnet werden. Durch sukzessives Fortschreiten um weitere Schrittweiten Δx können die Verteilungsfunktionen der drei oben angegebenen Größen ermittelt werden. In Bild 39 sind die so ermittelten Stahlspannungen, Verbundspannungen und Relativverschiebungen auf der einen Hälfte eines gerissenen Biegeelementes für das in Bild 38 angegebene Grundgesetz für Riegelstahl angegeben.

Bild 39: Stahlspannungen, Verbundspannungen und Relativverschiebungen im gerissenen Biegeelement

Bei der Berechnung wurde folgendermassen vorgegangen:

- Mit der bekannten Stahlspannung im Riss $\sigma_{e,max}$ und einer beliebigen maximalen Relativverschiebung v_{max} im Riss (vgl. Bild 39) wurden auf die oben beschriebene Art und Weise die gesuchten Verteilungsfunktionen ermittelt.
- In der Mitte zwischen zwei Biegeelementen sollte die Relativverschiebung zwischen dem Stahl und dem Beton gleich null sein. Im allgemeinen war dies nach der ersten Berechnung noch nicht der Fall. Deshalb wurde bei der weiteren Berechnung die Relativverschiebung v_{max} so lange variiert, bis die aus der Berechnung resultierende Verschiebung in der Mitte zwischen zwei Biegeelementen bzw. Rissen genügend nahe bei null war.
- Sobald dies zutraf, waren die gesuchten Verteilungsfunktionen ermittelt.

Mit Hilfe des Rechenprogrammes wurden auch die Werte für die mittlere Stahlspannung $\sigma_{e,m}$, die mittlere Verbundspannung $\tau_{v,m}$ und die mittlere Relativverschiebung v_m aus den Gleichungen

$$\sigma_{e,m} = \frac{2}{s} \cdot \int_0^{s/2} \sigma_e(x) \cdot dx \quad (4.5)$$

$$\tau_{v,m} = \frac{2}{s} \cdot \int_0^{s/2} \tau_v(x) \cdot dx \quad (4.6)$$

$$v_m = \frac{2}{3} \cdot \int_0^{s/2} v(x) \cdot dx \quad (4.7)$$

berechnet. Diese mittleren Werte sind in Bild 39 ebenfalls eingetragen.

In Bild 40 sind die berechneten mittleren Stahlspannungen $\sigma_{e,m}$, Verbundspannungen $\tau_{v,m}$ und Relativverschiebungen v_m in Funktion der maximalen Stahlspannung $\sigma_{e,max}$ im Riss aufgetragen.

Die mittlere Stahlspannung ist bei kleinen maximalen Stahlspannungen im Riss wesentlich kleiner als diese maximale Stahlspannung. Mit grösser werdender Stahlspannung wird die mittlere Stahlspannung jedoch schnell grösser und ist bei der Streckgrenze des Stahles fast gleich gross wie die maximale Stahlspannung im Riss.

Die mittlere Verbundspannung nimmt schon bei relativ kleinen maximalen Stahlspannungen im Riss relativ grosse Werte an. Bei zunehmender maximaler Stahlspannung im Riss steigt sie jedoch nur noch sehr langsam an und strebt, entsprechend dem Grundgesetz, einem oberen Grenzwert zu. Da bei Rippenstahl die Verbundspannungen praktisch vollständig durch Normalspannungen zwischen den Rippen und den Betonkonsolen übertragen werden, können aus der Gleichung

$$P_R = \tau \cdot \emptyset \cdot \int_0^a \tau_v(x) \cdot dx \quad (4.8)$$

Bild 40: Mittlere Stahlspannung $\sigma_{e,m}$, Verbundspannung $\tau_{v,m}$ und Relativverschiebung v_m in Funktion der maximalen Stahlspannung $\sigma_{e,max}$

die auf die einzelnen Betonkonsolen wirkenden Kräfte P_R berechnet werden. Diese Kräfte werden somit mit grösser werdendem Stabdurchmesser ϕ , Rippenabstand a und steigender Verbundspannung τ_v grösser.

Die mittlere Relativverschiebung nimmt im Bereich des überproportionalen Anstiegs der mittleren Stahlspannung ebenfalls überproportional zu. Mit grösser werdender maximaler Stahlspannung im Riss nimmt die mittlere Relativverschiebung schliesslich nur noch linear zu.

Mit Hilfe der gefundenen Verteilungsfunktionen innerhalb eines gerissenen Biegeelementes lassen sich durch Aneinanderreihen von Biegeelementen die Verteilungsfunktionen für die Stahlspannungen, Verbundspannungen und Relativverschiebungen eines Biegeträgers ermitteln.

In Bild 41 ist der Verlauf der maximalen Stahlspannung im Riss, der mittleren Verbundspannung und der mittleren Relativverschiebung längs der Balkenachse eines in [3.1] beschriebenen Biegeträgers angegeben. Es zeigt sich, dass die mittlere Verbundspannung über eine grosse Strecke im mittleren Trägerbereich nahezu konstant ist. Erst gegen die Auflager hin nehmen die mittleren Verbundspannungen ab.

Bild 41: Mittlere Verbundspannung $\tau_{v, m}$ und Relativverschiebung v_m längs Balkenachse

4.4 Beanspruchung des Betons durch die Verbundspannung

Während in [4.1] vor allem die Grösse und Verteilung der Verbundspannungen für verschieden profilierte Bewehrungsstähle ermittelt wurden, ist in [4.2] und [4.3] die Beanspruchung des Betons durch diese Verbundspannungen genauer untersucht worden, um daraus Regeln für die zweckmässigste Profilierung von Bewehrungsstählen zu finden.

4.4.1 Ringzugspannungen und Radialspannungen

Aus Versuchen an Biegebalken und an Ausziehkörpern (vgl. Bild 42) ist bekannt, dass bei Rippenstählen im umgebenden Beton Längsrisse entstehen können, die auf das Ueberschreiten der Zugfestigkeit des Betons durch die in der unmittelbaren Umgebung des Bewehrungsstabes entstehenden Ringzugspannungen zurückzuführen sind. Diese Längsrisse können zu einer erheblichen Verminderung des Verbundes, in vielen Fällen sogar zu einem völligen Versagen des Verbundes durch Sprengwirkung führen.

Bild 42: Schnitt durch einen zylindrischen Betonkörper mit zentrischem Bewehrungsstab (Ausziehkörper), Ringzugspannungen σ_{rz} und Radialspannungen σ_r als Folge der Beanspruchung des Betons durch die Verbundspannungen τ_v

Infolge der bei den Rippen eines profilierten Bewehrungsstahles angreifenden Kraft P_R (vgl. Gl. (4.8)), werden auf die Betonkonsolen zwischen den Rippen im Verhältnis zur Betondruckfestigkeit sehr hohe Betondruckspannungen ausgeübt. Gleichzeitig werden durch den starren Bewehrungsstahl radiale Verschiebungen des Betons in Richtung der Staboberfläche verhindert. Infolge der Plastifizierung des Betons unter den Rippen kann man sich die Wirkung des Bewehrungsstahles auf den Beton durch einen ungleichmässig über die Höhe der Betonkonsole verteilten Innendruck bzw. durch die Radialspannung σ_r ersetzt denken (vgl. Bild 42). Dieser örtlich sehr hohe Innendruck führt zu Ringzugspannungen σ_{rz} im Beton, die ringförmig um den Bewehrungsstahl verlaufen und beim Ueberschreiten der Zugfestigkeit des Betons zu den oben erwähnten Längsrissen führen können. Diese Sprengwirkung hängt vor allem von der Oberflächenprofilierung des Bewehrungsstahles und der zur Verfügung stehenden Betonzugfläche (Betonüberdeckung) ab.

In [4.2] wird die Grösse dieser Ringzugspannung σ_{rz} für verschieden profilierte Bewehrungsstäbe mit einer und mehreren Rippen und unterschiedlichen Betonüberdeckungen sowohl theoretisch mit Hilfe von analytischen Lösungen und Finite-Element-Programmen als auch durch Versuche unter Anwendung der Spannungsoptik bestimmt. Aufgrund dieser Arbeit und anderen Untersuchungen kann geschlossen werden, dass die Berechnung der Sprengwirkung von Rippenstählen unter der Zugrundelegung der Elastizitätstheorie erfolgen kann. Dies bedeutet, dass ein linearer Zusammenhang zwischen der Verbundspannung τ_v bzw. der Rippenbelastung P_R und dem Innendruck bzw. der Radialspannung σ_r sowie der Ringzugspannung σ_{rz} besteht.

Die Sprengwirkung, d.h. die Radial- und Ringzugspannung, hängt von verschiedenen Parametern ab:

- Das Verhältnis der Radialspannungen σ_r zur Rippenbelastung P_R wird vor allem durch die Ausbildung der Rippen beeinflusst. Mit grösser werdender bezogener Rippenfläche (Definition in [4.1]) nehmen bei gleicher Belastung P_R auch die Radialspannungen zu.
- Das Verhältnis der Ringzugspannung σ_{rz} zur Rippenbelastung P_R wird vor allem durch die Betonüberdeckung bestimmt.

4.4.2 Neuere Modellvorstellungen

In [4.3] werden neuere Versuche beschrieben, in welchen die Rissbildung im Beton rund um Bewehrungsstähle mit unterschiedlicher Profilierung sowie das Verbundverhalten dieser Stähle mit neuen Methoden untersucht wurde. Durch Injektion eines Farbstoffes und nachträgliches Aufschneiden der Versuchskörper konnten die während des durchgeführten Ausziehversuchs entstandenen Risse sehr schön sichtbar gemacht werden und daraus eine neue Modellvorstellung für das Verbundverhalten von profilierten Bewehrungsstählen abgeleitet werden.

In Bild 43 ist das Rissbild angegeben, das sich bei einem in einem Ausziehversuch geprüften Bewehrungsstahl ergibt.

Längsschnitt :

Querschnitt :

Bild 43; Rissbild beim Ausziehversuch mit einem profilierten Bewehrungsstab

Nebst den üblichen an der Betonoberfläche sichtbaren Rissen (primäre Risse) ist das Auftreten von inneren Rissen (sekundäre Risse) bemerkenswert. Während die primären Risse senkrecht zur Bewehrungsstabachse verlaufen, sind die sekundären Risse um einen gewissen Winkel in Richtung der zunehmenden Stahlzugkraft gegenüber dem Bewehrungsstab geneigt. Die sekundären Risse haben gewöhnlich ihren Ursprung bei einer Rippe des Bewehrungsstahles und verlaufen bis zur in Bild 43 angegebenen ungerissenen Betonzugzone, welche

den Bewehrungsstahl in einem gewissen Abstand umgibt. Aus weiteren Untersuchungen an Biegeträgern wird in [4.3] geschlossen, dass die Rissbildung in einem auf Biegung beanspruchten, als einfacher Balken gelagerten Betonträger praktisch auf dieselbe Art und Weise erfolgt wie bei einem in einem Ausziehversuch geprüften Betonkörper.

Die Uebertragung der Verbundspannung τ_v auf den Beton kann mit dem in Bild 44 angegebenen Modell und den eingezeichneten Kräften erklärt werden.

Bild 44: Übertragung der Verbundspannungen

Der Beton zwischen den sekundären Rissen bildet ein Gewölbe, welches durch die Rippenkraft P_R (vgl. Gl. 4.8)) belastet und durch einen Zugring, gebildet durch den Beton in der ungerissenen Zone, gehalten wird. Die Richtung der den Beton belastenden Kraft D entspricht der Neigung der sekundären Risse, deren Komponente senkrecht zur Bewehrungsstabachse entspricht der Normal-(Druck)-Kraft zwischen dem Bewehrungsstahl und dem Beton und damit der Radialspannung σ_r . Infolge der Belastung des Gewölbefusses bzw. des Zugrings durch die Druckkräfte D entstehen in diesem Zugring die schon weiter oben erwähnten Ringzugspannungen σ_{rz} .

Die auftretenden Ringzugdehnungen wurden in den in [4.3] beschriebenen Versuchen an zylindrischen Betonprüfkörpern mit zentrisch eingebetteten Bewehrungsstäben $\varnothing 32$ mm mit unterschiedlichen Profilierungen gemessen. Demzufolge können die Ringzugspannungen schon bei relativ geringen Stahlspannungen

Werte annehmen, die in der Grössenordnung der Betonzugfestigkeit liegen. Steile und hohe Rippen ergeben dabei im allgemeinen besonders grosse Ringzugspannungen.

Die Grösse der Ringzugspannungen im Vergleich zur Rippenbelastung wird vor allem durch die Betonüberdeckung bzw. durch die Grösse der ungerissenen Zone bestimmt. Zwischen der Rippenbelastung P_R bzw. der Verbundspannung τ_v und den auftretenden Radialspannungen σ_r und Ringzugspannungen σ_{rz} dürfte auch hier ein linearer Zusammenhang sein.

Aufgrund dieser neueren Erkenntnisse bezüglich der Uebertragung der Verbundspannungen vom Bewehrungsstahl auf den Beton können auch die Versuchsergebnisse und die theoretische Arbeit von [4.1] physikalisch besser erklärt werden. In Bild 45 sind die Relativverschiebungen des Stahles und des ihn umhüllenden Betons gegenüber dem durch den Verbund nicht direkt beeinflussten Beton angegeben.

Bild 45: Relativverschiebung Stahl-Beton

Die scheinbare Relativverschiebung v zwischen dem Bewehrungsstahl und dem Beton entspricht der Relativverschiebung wie sie z.B. in den in [4.1] beschriebenen Versuchen gemessen und in Abschnitt 4.3 theoretisch berechnet wurde. Sie setzt sich aus zwei verschiedenen Anteilen zusammen. Die effektive Relativverschiebung entspricht dem effektiven Ausziehweg des Stahles aus dem Beton. Der zweite Anteil ergibt sich aus der Verformung des durch die sekundären Risse geschwächten Betons. Mit den im Grundgesetz von Bild 38 angegebenen und den durch Lösen der Differentialgleichung des verschieblichen Verbundes (Gl. (4.4)) berechneten Relativverschiebungen werden somit die scheinbaren Relativverschiebungen zwischen dem Stahl und dem Beton erfasst. Quantitative Angaben über die Grösse der effektiven Relativverschiebung sind leider bis jetzt nicht möglich.

Die folgenden Kapitel werden sich trotz der neueren Erkenntnisse auf die Differentialgleichung des verschieblichen Verbundes (Gl. (4.4)) stützen. Einerseits ist damit eine recht einfache numerische Berechnung der Stahlspannungen, Verbundspannungen und Relativverschiebungen möglich, andererseits interessieren vor allem qualitative Angaben, die damit sehr gut erklärt werden können.

4.5 Wichtige Feststellungen

Zum Schluss dieses Kapitels werden die für das weitere Verständnis wichtigsten Feststellungen bezüglich des Verbundverhaltens von profilierten Bewehrungsstählen zusammengefasst:

- Die Verteilung der Stahlspannungen, Verbundspannungen und Relativverschiebungen lässt sich bei bekanntem Grundgesetz des verwendeten Bewehrungsstahles durch Lösen der Verbunddifferentialgleichung ermitteln.
- In einem Stahlbetonbiegeträger sind die Verbundspannungen bei höheren Stahlspannungen längs der Stabachse nahezu konstant.
- Die Relativverschiebungen ändern sich bei grösseren Stahlspannungen im Riss nahezu linear mit dieser Stahlspannung.
- Die Radialspannung σ_r bzw. der Querdruck der Bewehrungsstähle auf den Beton ist proportional zur Verbundspannung τ_v und ist somit bei grösseren Stahlspannungen im Riss ebenfalls nahezu gleichmässig längs der Stabachse verteilt.
- Die Grösse der zwischen dem Stahl und dem Beton wirkenden Kräfte hängt sehr stark von der Betongüte, der Profilierung der Bewehrung und dem Stabdurchmesser ab. Unsicher ist der Einfluss der Lastwechselzahl bei schwingender Beanspruchung. Die absolute Grösse dieser Kräfte ist wesentlich schwieriger zu ermitteln als ihre Verteilung längs der Stabachse.

5. Dämpfungsmodelle für ein gerissenes und ungerissenes Biegeelement

In diesem Kapitel wird je ein Modell zur Darstellung der Dämpfungseigenschaften eines gerissenen bzw. ungerissenen Biegeelementes im elastischen Beanspruchungsbereich beschrieben und erklärt. Diese Dämpfungsmodelle bilden die Grundlage für das in Kapitel 6 beschriebene Dämpfungsmodell für einen Biegeträger. Der Einfluss wichtiger Parameter wie z.B. des Bewehrungsgehaltes und des Rissabstandes sowie eines Vorzeichenwechsels des Biegemomentes während der dynamischen Belastung wird eingehend untersucht.

5.1 Allgemeines

Die Berechnung der Spannungen und Dehnungen eines Stahlbetonbiegeträgers infolge der statischen Belastung erfolgt üblicherweise an einem gerissenen Biegeelement, auch Biegerisselement genannt [4.5]. Es werden im allgemeinen nur über die Länge des Elementes gemittelte Grössen, z.B. Dehnungen, Biegesteifigkeit, etc., oder nur im Rissquerschnitt gültige Grössen, z.B. Beton- und Stahlspannungen, betrachtet, ohne dass deren Variation längs der Elementachse genauer untersucht wird. Für die Definition der Dämpfungseigenschaften eines gerissenen oder ungerissenen Biegeträgers wurde es als zweckmässig erachtet, wie bei der statischen Berechnung vom gerissenen oder ungerissenen Element bzw. Biegeelement auszugehen.

Durch Aneinanderreihen von gerissenen oder ungerissenen Biegeelementen können Biegeträger beliebiger Dimensionen gebildet werden (vgl. Bild 41).

Dank der Formulierung eines Dämpfungsmodells für ein gerissenes bzw. ungerissenes Biegeelement und Aneinanderreihen solcher Biegeelemente zu einem ganzen Träger

- kann der Einfluss der unterschiedlichen Beanspruchung der einzelnen Elemente berücksichtigt werden,
- können die für die Dämpfung wichtigen Verbundeigenschaften richtig erfasst werden,
- ist es möglich, durch Berechnung der Dämpfungsenergien der einzelnen Biegeelemente die Dämpfungsenergie des gesamten, vorwiegend auf Biegung beanspruchten Tragwerks zu erhalten,
- können die Dämpfungseigenschaften eines nur teilweise gerissenen Tragwerks ermittelt werden.

Wenn die dynamischen Eigenschaften der einzelnen gerissenen oder ungerissenen

Biegeelemente, nämlich ihre

- Masse $m(x)$ bzw. m_i
- Steifigkeit $EI(x)$ bzw. k_i
- Dämpfung $c(x)$ bzw. c_i ,

vgl. Bild 2, bekannt sind, lassen sich z.B. durch Anwendung der in den Gleichungen (2.3), (2.5), (2.6) und (2.7) formulierten Berechnungsverfahren die dynamischen Eigenschaften des gesamten Tragwerks ermitteln.

Die Masse $m_i(x)$ bzw. $m_i = \int_0^s m_i(x) \cdot dx$ des i -ten Biegeelementes kann mit den bekannten Rohdichten der verwendeten Materialien auf einfache Art und Weise bestimmt werden.

Die Biegesteifigkeit $EI_i(x)$ des i -ten Biegeelementes ist eine querschnittsabhängige Grösse, welche am einfachsten mit Hilfe eines Momenten-Krümmungs-Diagramms ($M-\phi$) bestimmt wird. Dieses Diagramm lässt sich nach den üblichen Methoden des Stahlbetonbaus berechnen und nimmt für einen unterbewehrten, auf Biegung beanspruchten Querschnitt die in Bild 46 angegebene Gestalt an.

Bild 46: Momenten - Krümmungs - Diagramm

Die Neigung der Verbindungsgeraden eines Punktes des Momenten-Krümmungs-Diagramms mit dem Nullpunkt ergibt die Sekanten-Steifigkeit

$$EI = \frac{M}{\phi} \quad . \quad (5.1)$$

Nach Abschluss der Rissbildung bis nahe an die Streckgrenze des Stahles ist die Biegesteifigkeit (Sekanten-Steifigkeit) EI praktisch konstant. Erst wenn die Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Stahles bzw. des Betons vom linearen Verlauf abweicht, nimmt die Biegesteifigkeit EI ab (nichtlineares Verhalten).

Von diesem nichtlinearen Verhalten bei hohen Biegebeanspruchungen ist die Änderung der Biegesteifigkeit infolge der Rissbildung strikte zu trennen. Bei fortschreitender Rissbildung wird der aufsteigende Ast des Momenten-Krümmungs-Diagramms gegenüber dem ungerissenen Zustand immer flacher verlaufen, da während der Rissbildung die Krümmung bei gleichbleibendem Moment zunimmt. Bei einer allfälligen Entlastung und Wiederbelastung bleibt die

Biegesteifigkeit konstant, allerdings auf einem gegenüber dem ungerissenen Zustand tieferen Niveau (lineares Verhalten mit geringerem EI).

Nebst der Rissbildung kann auch ein Vorzeichenwechsel des Biegemomentes einen Einfluss auf die Biegesteifigkeit EI haben. Zur Klärung des Begriffs "Vorzeichenwechsel des Biegemomentes" werden die folgenden Begriffe definiert:

- Das in der Ruhelage vorhandene Biegemoment wird mit M_o (o = Ruhelage) bezeichnet.
- Mit dem Biegemoment M_{rel} (rel = relativ) wird die Differenz zwischen dem bei der dynamischen Beanspruchung und dem in Ruhelage vorhandenen Biegemoment bezeichnet.
- Das Biegemoment M_{abs} (abs = absolut) gibt an, dass sich das angegebene Biegemoment auf das bei der dynamischen Beanspruchung inkl. dem in der Ruhelage vorhandenen Biegemoment bezieht ($M_{abs} = M_o + M_{rel}$).

Ein Vorzeichenwechsel des Biegemomentes (vgl. Bild 47) liegt vor, wenn das Moment M_{rel} grösser wird als das in der Ruhelage vorhandene Moment M_o , so dass zeitweilig am Zugrand (unterer Rand) Druckspannungen und am Druckrand (oberer Rand) Zugspannungen entstehen können.

Bild 47: Definition "Vorzeichenwechsel des Biegemomentes M_{abs} "

Bei Biegeträgern, welche bei der dynamischen Belastung einem solchen Vorzeichenwechsel des Biegemomentes unterworfen werden, kann im allgemeinen mit zunehmender Beanspruchungshöhe ein gewisser Anstieg der Biegesteifigkeit EI beobachtet werden ($EI_{II} > EI_I$, vgl. Bild 48).

Die Dämpfung eines Tragwerks ist in Bild 2 vorerst mit dem Dämpfungskoeffizienten pro Längeneinheit $c(x)$ eingeführt worden. Es wurde jedoch schon in Kapitel 2 darauf hingewiesen, dass es in der Praxis nicht möglich ist, den Dämpfungskoeffizienten $c(x)$ in Versuchen zu ermitteln. Zudem hat die Annahme eines konstanten Dämpfungskoeffizienten zur Folge, dass die Dämpfung frequenzabhängig wird (vgl. Gl. (2.38)), was mit den vorgenommenen Versuchen (vgl. Kapitel 3) nicht bestätigt werden kann. Es ist deshalb zweckmässig, wenn anstelle des Dämpfungskoeffizienten c bzw. $c(x)$ vom Dämpfungsmass ξ oder anderen auf einfache Art daraus berechenbaren dimensionslosen Dämpfungskenngrössen ausgegangen wird. Dies bringt folgende Vorteile:

- Das Dämpfungsmass kann aus einfach durchzuführenden Versuchen bestimmt werden.
- Mit der Verwendung des Dämpfungsmasses wird die Dämpfung grundsätzlich frequenzunabhängig. Eine allfällige grössere Dämpfung der höheren Eigenschwungsformen von Mehrmassenschwingern kann durch ein entsprechend grösseres Dämpfungsmass berücksichtigt werden (vgl. Abschnitt 2.2).
- Das Dämpfungsmass kann auf einfache Art und Weise aus Gl. (2.23) berechnet werden. Indem es bis auf den Faktor $4 \cdot \pi$ den prozentualen Betrag der Formänderungsenergie W_0 angibt, welcher dem Schwingssystem pro Schwingungszyklus durch die Dämpfung verloren geht, ist es eine sehr anschauliche und physikalisch leicht verständliche Grösse.
- Die mathematische Behandlung eines gedämpften Schwingers, dessen Dämpfung durch das Dämpfungsmass ausgedrückt wird, ist besonders einfach.

Aus den oben genannten Gründen wird im folgenden vom Dämpfungsmass ξ (bzw. logarithmischen Dekrement δ oder Verlustfaktor η) und nicht vom Dämpfungskoeffizienten $c(x)$ ausgegangen.

5.2 Dämpfungsmodell

Mit dem gesuchten Dämpfungsmodell für ein auf Biegung beanspruchtes Tragwerk müssen die in den Versuchen (vgl. Abschnitt 3.3.1), insbesondere die in [3.1] ermittelten Resultate erklärt werden können. Als Grundlage für das Dämpfungsmodell eines ganzen Tragwerks muss das Modell eines Biegeelementes somit im Stande sein, die Ursachen des Einflusses

- der Rissbildung
- der Amplitude bzw. Beanspruchungshöhe
- des Bewehrungsgehaltes

(vgl. Bild 35) auf die Dämpfung von schlaff bewehrten und voll vorgespannten Beton- und Leichtbetonträgern aufzuzeigen. Dies bedeutet, dass sich die pro Schwingungszyklus durch das Dämpfungsmodell für ein gerissenes oder unge-

rissenes Biegeelement dissipierte Energie D_0^{el} in Funktion der oben genannten Einflussgrößen so verändern muss, dass nach der Superposition der einzelnen Biegeelemente zu einem ganzen Tragwerk die durch das Dämpfungsmodell für ein ganzes Tragwerk dissipierte Energie D_0 der in den Versuchen dissipierten Energie entspricht.

a) Dämpfungsmodell für ein gerissenes Biegeelement

In Bild 49 ist das Dämpfungsmodell für ein gerissenes Biegeelement dargestellt.

Bild 49: Dämpfungsmodell für ein gerissenes Biegeelement

Es beruht auf einem kombinierten Dämpfungsmechanismus mit zwei zum Federelement parallel geschalteten Dämpfungselementen. Mit dem ersten Dämpfungselement mit linearer viskoser Dämpfung kann der in allen Versuchen unabhängig von der Höhe der Beanspruchung festgestellte Dämpfungsanteil (vgl. Bild 28) erhalten werden. Das zweite Dämpfungselement mit Coulomb-Dämpfung soll der in den Versuchen festgestellten Abhängigkeit von der Höhe der Amplitude bzw. der Beanspruchung und vom Bewehrungsgehalt Rechnung tragen. Aus der in Abschnitt 2.5 gegebenen Uebersicht über die geläufigen Modelle zur Berücksichtigung der Dämpfung ist ersichtlich, dass von diesen Modellen einzig das Modell der Coulomb-Dämpfung fähig ist, eine Abnahme des Dämpfungsmasses bei grösser werdender Amplitude bzw. Beanspruchung zu erklären.

b) Dämpfungsmodell für ein ungerissenes Biegeelement

In Bild 50 ist das Dämpfungsmodell für ein ungerissenes Biegeelement dargestellt. Es stellt einen Spezialfall des Modells für das gerissene Biegeelement dar. Es besteht nur aus einem Dämpfungselement mit linearer viskoser Dämpfung.

Ungerissenes Biegeelement

Bild 50; Dämpfungsmodell für ein ungerissenes Biegeelement

Auf die Anordnung eines zusätzlichen Dämpfungselementes mit Coulomb-Dämpfung konnte hier verzichtet werden, da die Dämpfung ungerissener Biegeträger von der Höhe der Amplitude bzw. der Beanspruchung praktisch unabhängig ist. Durch Aufbringen von künstlichen Normalkräften (Druckkräfte, Vorspannung) kann erreicht werden, dass das Biegeelement bis zu einem höheren Beanspruchungsniveau ungerissen bleibt. Dieses Dämpfungsmodell soll deshalb auch für vorgespannte Biegeelemente, solange diese noch ungerissen sind, Gültigkeit haben.

5.2.1 Viskose Dämpfung

Die Versuche an Prüfkörpern aus Mörtel und unbewehrtem Beton haben ergeben, dass deren Dämpfungsmass im elastischen Beanspruchungsbereich praktisch von der Höhe der Beanspruchung unabhängig ist, und dass sich somit deren Dämpfungseigenschaften recht gut mit dem Modell der viskosen Dämpfung erklären lassen (vgl. Abschnitt 3.1). Die Ergebnisse dieser Untersuchungen können dazu verwendet werden, die Energiedissipationseigenschaften des Betons eines Biegeelementes zu beschreiben.

Beim gerissenen Biegeelement (vgl. Bild 49) soll nur die Biegedruckzone Energie gemäss dem Modell der viskosen Dämpfung dissipieren. Die in der Biegezugzone durch viskose Dämpfung dissipierte Energie soll vernachlässigt werden. Diese Vereinfachung kann wie folgt begründet werden:

- In der klassischen Stahlbetonbiegelehre wird die Betonzugzone eines gerissenen Biegeelementes, d.h. in Bild 49 der Beton unterhalb der neutralen Achse, als spannungsfrei betrachtet [4.5]. In spannungsfreien Körpern ist jedoch die spezifische Dämpfungsenergie gleich null (vgl. Gl. (2.16)) und

somit verschwindet deren Beitrag an die Dämpfungsenergie.

- In Wirklichkeit ist der Beton unterhalb der neutralen Achse nicht ganz spannungsfrei. Die Zugfestigkeit des Betons und die Verbundspannungen zwischen dem Bewehrungsstahl und dem Beton bewirken, dass im Beton unterhalb der neutralen Achse Zugspannungen auftreten können. Diese sind jedoch um eine Grössenordnung kleiner als die Druckspannungen oberhalb der neutralen Achse. Zur Berechnung der Dämpfungsenergie muss gemäss Gl. (2.16) das Quadrat der vorhandenen Spannung eingesetzt werden, so dass der Anteil der Biegezugzone an der Dämpfungsenergie $D_{o,VD}^{el}$ infolge viskoser Dämpfung gegenüber demjenigen der Biegedruckzone sehr gering ist. Zudem treten die Zugspannungen nur lokal und nicht im ganzen Biegezugbereich auf, während der Beton oberhalb der neutralen Achse überall gedrückt wird. Dadurch wird die Dämpfungsenergie der Zugzone weiter reduziert (vgl. Gl. (2.18)).

Der Anteil des Bewehrungsstahles an der viskosen Dämpfung soll vernachlässigt werden. Diese Vereinfachung ist im elastischen Beanspruchungsbereich sicher zulässig, da einerseits das Dämpfungsmass des Stahles im elastischen Bereich sehr klein ist (vgl. Bild 34) und andererseits das Volumen des Bewehrungsstahles gegenüber demjenigen des Betons viel geringer ist, so dass die durch viskose Dämpfung innerhalb des Bewehrungsstahles dissipierte Energie gegenüber der in der Betondruckzone dissipierten Energie praktisch verschwindet.

Beim ungerissenen Biegeelement (vgl. Bild 50) soll im ganzen Element, d.h. sowohl in der Biegedruckzone als auch in der Biegezugzone Energie gemäss dem Modell der viskosen Dämpfung dissipiert werden. Im Gegensatz zum gerissenen Biegeelement liegen hier die Beanspruchungen der Biegedruckzone und der Biegezugzone in derselben Grössenordnung. Es wäre somit verfehlt, die Energiedissipationseigenschaften nur einem Teil des Querschnittes zuzuordnen. Obwohl dem Verfasser keine Versuche bekannt geworden sind, in welchen die Dämpfung von Betonprüfkörpern unter reiner Zugbeanspruchung untersucht wurde, wird hier angenommen, dass die Dämpfungsenergie nicht von der Richtung der Normalspannung abhängt und somit bei gleich grosser Zug- und Druckbeanspruchung gleich viel Energie dissipiert wird.

5.2.1.1 Energiedissipation durch viskose Dämpfung

a) gerissenes Biegeelement

Mit den in Abschnitt 5.2.1 angeführten Annahmen und Vereinfachungen kann die Dämpfungsenergie $D_{o,VD}^{el}$ infolge viskoser Dämpfung des in Bild 49 dargestellten gerissenen Biegeelementes zu

$$D_{o,VD}^{el} = \frac{1}{3} \cdot d \cdot B \cdot x_{Na} \cdot s \cdot \frac{\sigma_b^2}{\beta_p^2} \quad (5.2)$$

berechnet werden. Die Formänderungsenergie w_o^{el} beträgt

$$W_o^{el} = \frac{1}{6 \cdot E_b} \cdot C_1 \cdot B \cdot x_{Na} \cdot s \cdot \sigma_b^2$$

mit

(5.3)

$$C_1 = 1 + 3 \cdot n \cdot \mu \cdot h \cdot \frac{(h - x_{Na})^2}{x_{Na}^3} + 3 \cdot n \cdot \mu' \cdot h \cdot \frac{(x_{Na} - h')^2}{x_{Na}^3} .$$

Die ausführliche Berechnung ist im Anhang A1 angeführt. Das Dämpfungsmass ξ_{VD}^{el} infolge viskoser Dämpfung ergibt sich daraus zu

$$\xi_{VD}^{el} = \frac{6 \cdot E_b}{3 \cdot 4 \cdot \pi} \cdot \frac{d \cdot B \cdot x_{Na} \cdot s \cdot \sigma_b^2}{C_1 \cdot B \cdot x_{Na} \cdot s \cdot \sigma_b^2 \cdot \beta_p^2} = \frac{d \cdot E_b}{2 \cdot \pi \cdot C_1 \cdot \beta_p^2} . \quad (5.4)$$

b) ungerissenes Biegeelement

Die Dämpfungsenergie $D_{o,VD}^{el}$ infolge viskoser Dämpfung und die Formänderungsenergie W_o^{el} des in Bild 50 abgebildeten ungerissenen Biegeelementes betragen

$$D_{o,VD}^{el} = \frac{1}{3} \cdot d \cdot B \cdot H \cdot s \cdot \frac{\sigma_b^2}{\beta_p^2} \quad (5.5)$$

$$W_o^{el} = \frac{1}{6 \cdot E_b} \cdot C_o \cdot B \cdot H \cdot s \cdot \sigma_b^2 \quad (5.6)$$

mit

$$C_o = 1 + 3 \cdot n \cdot \frac{h}{H} \cdot (\mu + \mu') \cdot \left(\frac{\frac{H}{2} - h'}{\frac{H}{2}} \right)^2 .$$

Die ausführliche Berechnung ist ebenfalls im Anhang A1 angeführt. Das Dämpfungsmass ξ_{VD}^{el} infolge viskoser Dämpfung ergibt sich daraus zu

$$\xi_{VD}^{el} = \frac{6 \cdot E_b}{3 \cdot 4 \cdot \pi} \cdot \frac{d \cdot B \cdot H \cdot s \cdot \sigma_b^2}{C_o \cdot B \cdot H \cdot s \cdot \sigma_b^2 \cdot \beta_p^2} = \frac{d \cdot E_b}{2 \cdot \pi \cdot C_o \cdot \beta_p^2} . \quad (5.7)$$

c) Vergleich gerissenes - ungerissenes Biegeelement

Der Vergleich der beiden Gleichungen (5.4) und (5.7) zeigt, dass sich die beiden Ausdrücke für das Dämpfungsmass nur in der Grösse von C_1 und C_o unterscheiden. In Tabelle 1 sind die Werte von C_1 und C_o für die in [3.1] beschriebenen Versuchsbalken angegeben. Der Unterschied zwischen C_1 bzw. C_2 und C_o ergibt sich aus dem gegenüber einem ungerissenen Biegeelement recht hohen Anteil des Bewehrungsgehaltes an der Formänderungsenergie eines gerissenen Biegeelementes. Bei einem gleich grossen spezifischen Dämpfungskoeffizienten d und E-Modul E_b weist das gerissene Biegeelement demzufolge ein erheblich geringeres Dämpfungsmass ξ_{VD}^{el} auf als das ungerissene Biegeelement. Die viskose Dämpfung wird somit in dem Sinn von der Höhe der Amplitude bzw. Beanspruchung abhängig als sich während der Rissbildung das Dämpfungsmass ξ_{VD}^{el} vom relativ hohen Wert des ungerissenen Biegeelementes auf den nied-

Träger	H [mm]	h [mm]	h' [mm]	$\mu=\mu'$ [%]	n = E_e/E_b	x_{No} [mm]	C_0	C_1	C_2	C_0/C_1
B 1	240	206	34	0.57	10	53.2	1.15	6.57	0.205	0.175
B 2	240	204	36	1.01	10	63.4	1.25	5.97	0.378	0.210
B 3	240	202	38	1.57	10	71.1	1.37	5.83	0.605	0.235
LB 1	240	206	34	0.57	19	67.3	1.29	5.47	0.421	0.235
LB 2	240	204	36	1.01	19	79.1	1.48	5.15	0.800	0.287
LB 3	240	202	38	1.57	19	87.8	1.74	5.15	1.322	0.337
LB 4	240	204	36	1.01	24	83.7	1.61	5.24	1.040	0.307

Tabelle 1: Versuchsträger nach [3.1] : Werte für C_0 , C_1 und C_2

rigeren Wert des gerissenen Biegeelementes verringert. Vor und nach erfolgter Rissbildung ist das Dämpfungsmass ξ_{VD}^{el} infolge viskoser Dämpfung von der Höhe der Amplitude bzw. Beanspruchung wieder unabhängig.

Die obigen Feststellungen treffen nur unter der Annahme eines konstanten spezifischen Dämpfungskoeffizienten d zu. Die relativ grossen Unterschiede zwischen den Dämpfungsmassen ξ_{VD}^{el} eines gerissenen und ungerissenen Biegeelementes scheinen aber durch die zahlreichen Versuche nicht so deutlich bestätigt zu werden. Aufgrund der Versuchsergebnisse wäre eher zu erwarten, dass nur ein sehr geringer Unterschied besteht. Es ist deshalb möglich, dass sich der spezifische Dämpfungskoeffizient d während der Rissbildung ändert, oder dass die Zug- und Druckzone des ungerissenen Biegeelementes nicht denselben Beitrag zur Dämpfungsenergie $D_{o,VD}^{el}$ liefern (Zugzone überschätzt). Wenn das Dämpfungsmass ξ_{VD}^{el} nur mit der im Beton gespeicherten Formänderungsenergie berechnet würde ($C_1 = C_0 = 1$), müsste das Dämpfungsmass eines gerissenen und ungerissenen Biegeelementes gleich gross sein.

5.2.1.2 Einfluss eines Vorzeichenwechsels des Biegemomentes

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, inwieweit ein Vorzeichenwechsel des absoluten Biegemomentes M_{abs} (vgl. Bild 47) einen Einfluss auf die innerhalb eines gerissenen Biegeelementes durch viskose Dämpfung dissipierte Energie $D_{o,VD}^{el}$ und das Dämpfungsmass ξ_{VD}^{el} hat. Im folgenden wird davon ausgegangen, dass

- die Ober- und Unterseite des Biegeelementes gleich stark bewehrt sind ($\mu' = \mu$),
- ein allfälliger Biegeriss sich schon sowohl von der Ober- als auch von der Unterseite des Biegeelementes ausgebildet hat,
- das Biegeelement somit für positive und negative absolute Biegemomente dieselbe Steifigkeit aufweist.

a) Dämpfungsenergie

Bild 51 zeigt den Verlauf der Betonrandspannungen in Funktion der Zeit am unteren und oberen Rand eines Biegeelementes unter einer harmonischen Belastung mit und ohne Vorzeichenwechsel des Biegemomentes M_{abs} .

Bild 51: Betonrandspannungen bei einem Vorzeichenwechsel des Biegemomentes

Unter den oben getroffenen Annahmen bleibt die Grösse der Betonspannungen ($\sigma_{b,II}$) und deren Angriffsfläche bei einem Vorzeichenwechsel des Biegemomentes gleich wie bei einer gleich grossen relativen Belastung, bei welcher kein Vorzeichenwechsel des Biegemomentes erfolgt. Einzig der Angriffspunkt der Betonspannungen bzw. Betondruckkräfte verlagert sich zeitweilig vom oberen zum unteren Rand des Biegeelementes. Da die Höhe der Betonspannung und die Grösse des durch die Betondruckspannung betroffenen Volumens sowohl mit und ohne Vorzeichenwechsel des Biegemomentes zu jedem Zeitpunkt gleich bleiben, wird die Dämpfungsenergie $D_{o,VD}^{el}$ ebenfalls nicht verändert (vgl. z.B. Gl. (2.18)). Für die Höhe der Dämpfungsenergie ist somit in beiden Fällen nur die Grösse der relativen Betonspannung am Druckrand massgebend.

Bei unterschiedlicher Zug- und Druckbewehrung sowie ungleicher Rissausbildung an der Ober- und Unterseite des Biegeelementes kann der Verlauf der Betonspannungen nach einem Vorzeichenwechsel des Biegemomentes erheblich vom in Bild 51 angegebenen Verlauf abweichen. Zusätzlich wird auch der Abstand der neutralen Achse vom oberen bzw. unteren Rand des Biegeelementes nicht mehr gleich gross sein, so dass die Dämpfungsenergie $D_{o,VD}^{el}$ bei einem Vorzeichenwechsel des Biegemomentes nicht mehr gleich gross sein wird wie bei einer gleich grossen Belastung ohne Vorzeichenwechsel des Biegemomentes.

b) Dämpfungsmass

Sofern das Biegeelement für positive und negative absolute Biegemomente dieselbe Biegesteifigkeit aufweist, ändert sich die im Biegeelement gespeicherte Formänderungsenergie W_o^{el} nicht. Ein Vorzeichenwechsel des Biegemomentes hat damit keinen Einfluss auf das Dämpfungsmass ξ_{VD}^{el} .

5.2.2 Coulomb-Dämpfung

In den in Kapitel 3 beschriebenen Versuchen wurde festgestellt, dass im elastischen Beanspruchungsbereich innerhalb der beiden Baustoffe Beton und Bewehrungsstahl praktisch keine Coulomb-Dämpfung auftritt. Wenn in einem Biegeelement Energie gemäss dem Modell der Coulomb-Dämpfung dissipiert werden soll, müssen die dafür notwendigen Reibungskräfte an den Grenzflächen der beiden Materialien entstehen.

Beim gerissenen Biegeelement (vgl. Bild 49) soll die Coulomb-Dämpfung an der Verbund- bzw. Kontaktfläche zwischen dem Beton der Zugzone und der Zugbewehrung entstehen. In der Literatur wird das Auftreten von Coulomb-Dämpfung sehr häufig durch eine Reibung zwischen den Rissufern erklärt. Diese Aussage ist jedoch zu oberflächlich. Der Biegeriss ist nämlich auch bei verzahnter Rissoberfläche spannungsfrei. Solange die Bewegung der Rissufer nur senkrecht zum Riss erfolgt (Öffnen und Schliessen der Risse), können im Riss keine Normalkräfte entstehen, die ihrerseits Reibungskräfte zur Folge hätten. Die Risse haben nur indirekt einen Einfluss auf die Coulomb-Dämpfung, indem sie in engem Zusammenhang mit dem Verbundverhalten der Bewehrungsstähle stehen.

In [4.4] werden Versuche zur Bestimmung der Dauerschwingfestigkeit von einbetonierten Bewehrungsstählen beschrieben. Durch Temperaturmessungen in der Verbundzone konnte nachgewiesen werden, dass zwischen dem Bewehrungsstahl und dem Beton Reibung entsteht, wodurch beträchtlich mechanische Energie in Wärme umgewandelt wurde.

Bild 52 zeigt den Verlauf der Stahlspannung im Rissquerschnitt eines gezogenen Stahlbetonbauteils in Funktion der Beanspruchung.

Bild 52: Stahlspannung vor und nach Rissbildung

Bis zum Entstehen des Risses ist die Beanspruchung des Bewehrungsstahles noch sehr gering und kann den Wert von

$$\begin{aligned}\sigma_e &= n \cdot \beta_{bz} = (6 \div 10) \cdot (0.8 \div 0.95) \cdot \sqrt{\beta_w} \\ &= 30 \div 60 \text{ N/mm}^2 \quad \text{für } \beta_w = 40 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

nicht übersteigen. Sobald sich ein Riss ausbildet, nimmt die Stahlspannung σ_e praktisch sprunghaft um den Betrag $\Delta \sigma_e$ zu, da die bis dahin im Rissquerschnitt vorhandene Betonzugkraft vom Bewehrungsstahl übernommen werden muss.

Aus Kapitel 4 folgt, dass bei schwingenden gerissenen Stahlbetonbiegeträgern an der Verbundfläche zwischen Bewehrungsstahl und Beton von der Verbundspannung $\tau_v(x,t)$ abhängige Normalkräfte $N(x,t)$ bzw. Normalspannungen $\sigma_r(x,t)$ (Radialspannungen) senkrecht zur Bewehrungsstabachse entstehen, und dass der Bewehrungsstahl eine vom Verbundverhalten abhängige Relativverschiebung $v(x,t)$ gegenüber dem Beton erfährt. Da der Reibungskoeffizient $\bar{\mu}$ mit Sicherheit $\neq 0$ ist und Radialspannungen bzw. Normalkräfte wegen der im gerissenen Zustand schon recht grossen Stahlspannung ebenfalls entstehen können, sind damit die Voraussetzungen für das Entstehen der Coulomb-Dämpfung erfüllt. In der Verbundzone der Druckbewehrung soll hingegen keine Energie dissipiert werden (Begründung beim ungerissenen Biegeelement).

Beim ungerissenen Biegeelement (vgl. Bild 50) soll weder bei der Zug- noch bei der Druckbewehrung Energie gemäss dem Modell der Coulomb-Dämpfung dissipiert werden. Bei einer Beanspruchung des Bewehrungsstahles auf Druck beträgt die Stahlspannung

$$\sigma_e = n \cdot \sigma_b$$

Bei nicht sehr hoher Betondruckspannung wird auch hier σ_e noch relativ gering bleiben (vgl. Bild 52). Bei diesen geringen Stahlspannungen innerhalb eines ungerissenen Biegeelementes ist die Haftung zwischen dem Bewehrungsstahl und dem Beton sowohl in der Biegezug- als auch in der Biegedruckzone

noch intakt, so dass die Dehnungsverteilung in jedem Querschnitt noch linear ist und keine Relativverschiebung zwischen dem Stahl und dem Beton stattfinden kann. Auch wenn eine Normalkraft bzw. Normalspannung zwischen dem Beton und dem Bewehrungsstahl wirkt, kann somit keine Energie durch Coulomb-Dämpfung dissipiert werden.

5.2.2.1 Energiedissipation durch Coulomb-Dämpfung

Die Reibungskraft $F_{CD}(x,t)$ zwischen dem Bewehrungsstahl und dem Beton in der gerissenen Zugzone

$$F_{CD}(x,t) = \bar{\mu}(x,t) \cdot |N(x,t)| \quad (5.8)$$

entsteht infolge der Normalkraft $N(x,t)$ und des Gleitreibungskoeffizienten $\bar{\mu}(x,t)$. Bei der Relativverschiebung $v(x,t)$ des Bewehrungsstahles gegenüber dem Beton wird pro Schwingungszyklus die Dämpfungsenergie $D_{o,CD}$

$$D_{o,CD} = \int F_{CD}(x,t) \cdot dv = \int_0^T F_{CD}(x,t) \cdot \dot{v}(x,t) \cdot dt \quad (5.9)$$

dissipiert. Damit diese Energie $D_{o,CD}$ berechnet werden kann, müssen zu jedem Zeitpunkt und an jedem Ort zwischen dem Beton und dem Bewehrungsstahl

- der Gleitreibungskoeffizient $\bar{\mu}(x,t)$
- die Normalkraft $N(x,t)$
- die Relativverschiebung $v(x,t)$

bekannt sein.

Der Gleitreibungskoeffizient $\bar{\mu}(x,t)$ hängt vor allem von der Beschaffenheit der Kontaktfläche ab und dürfte im allgemeinen weder zeitlich noch örtlich konstant sein. Insbesondere bei wiederholter Be- und Entlastung wird sich der Gleitreibungskoeffizient mit grosser Wahrscheinlichkeit verändern (vgl. Kapitel 7). Da diese Einflüsse analytisch kaum zu erfassen sind, wird im folgenden mit einem konstanten Gleitreibungskoeffizienten $\bar{\mu}$ gerechnet.

Die Normalkraft $N(x,t)$ bzw. die Normalspannung $\sigma_r(x,t)$ kann mit Hilfe der Ergebnisse von Kapitel 4 ermittelt werden. Zwischen der Verbundspannung $\tau_v(x,t)$ und der Normalspannung $\sigma_r(x,t)$ kann mit guter Näherung ein linearer Zusammenhang angenommen werden, so dass

$$\sigma_r(x,t) = A \cdot \tau_v(x,t) \quad (5.10)$$

geschrieben werden kann. Der Proportionalitätskoeffizient A hängt vor allem von der Profilierung des Bewehrungsstahles ab und müsste in Versuchen ermittelt werden. Die Berechnung der Grösse und Verteilung der Verbundspannung $\tau_v(x,t)$ kann gemäss Kapitel 4 durch Lösen der Verbunddifferentialgleichung (4.4) erfolgen.

Die Relativverschiebung $v(x,t)$ kann ebenfalls durch Lösen der Verbunddifferentialgleichung (4.4) berechnet werden.

Bei der Berechnung der Verbundspannung τ_v bzw. der Normalspannung σ_r und der Relativverschiebung v muss man sich bewusst sein, dass die wirklichen Verhältnisse nur näherungsweise erfasst werden. In Kapitel 4 wurde gezeigt, dass die Modellvorstellung, welche der Differentialgleichung des verschieblichen Verbundes zugrunde liegt, zur wirklichkeitsgetreuen Erfassung der Verbundverhältnisse verfeinert werden muss. Zusätzlich erfolgt die Berechnung der Verbundspannungen und Relativverschiebungen mit Hilfe des in statischen Versuchen bei einmaliger Belastung ermittelten Grundgesetzes. Es ist bekannt, dass bei wiederholter Belastung eine gewisse Tendenz zu grösseren Relativverschiebungen besteht. Immerhin sollte es mit der Anwendung der Differentialgleichung des verschieblichen Verbundes (Gl. (4.4)) möglich sein, die Dämpfungsenergie infolge Coulomb-Dämpfung und deren Abhängigkeit von verschiedenen Einflussparametern qualitativ gut zu erfassen sowie auch ungefähre quantitative Aussagen zu machen.

Bessere und zuverlässigere quantitative Angaben über die Reibungskraft F_{CD} und die Relativverschiebung v könnten nur gemacht werden, wenn systematische Versuche zur Untersuchung des dynamischen Verbundverhaltens (Einfluss der Belastungsgeschwindigkeit, zyklische Beanspruchung, etc.) durchgeführt würden.

Berechnung der Dämpfungsenergie $D_{o,CD}^{el}$

Mit den Gleichungen (5.8) und (5.10) kann die am Bewehrungsstabelement der Länge dx angreifende Reibungskraft $F_{CD}(x,t)$ zu

$$F_{CD}(x,t) = \pi \cdot \bar{\mu} \cdot A \cdot j \cdot \emptyset \cdot \tau_v(x,t) \cdot dx \quad (5.11)$$

berechnet werden. Darin bedeuten:

$\emptyset$: Durchmesser des Bewehrungsstabes

j : Anzahl Bewehrungsstäbe der Zugzone.

Aus den Gleichungen (5.9) und (5.11) erhält man für die gesamte im gerissenen Biegeelement der Länge (vgl. Bild 49) pro Schwingungszyklus durch Coulomb-Dämpfung dissipierte Energie $D_{o,CD}^{el}$

$$D_{o,CD}^{el} = 2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \bar{\mu} \cdot A \cdot j \cdot \emptyset \cdot \int_0^{s/2} dx \cdot \int_0^{T/4} \tau_v(x,t) \cdot \dot{v}(x,t) \cdot dt \quad (5.12)$$

Die Berechnung der Integrale von Gl. (5.12) bereitet gewisse Schwierigkeiten, da im allgemeinen ein nichtlinearer Zusammenhang zwischen der Verbundspannung τ_v , der Relativverschiebung v und der Stahlspannung σ_s besteht (vgl. Bild 40). Der exakte Wert des Integrals I

$$I = \int_0^{s/2} dx \cdot \int_0^{T/4} \tau_v(x,t) \cdot \dot{v}(x,t) \cdot dt \quad (5.13)$$

kann deshalb nur durch numerische Integration ermittelt werden.

Im folgenden wird der Ausdruck von Gl. (5.12) für ein Biegeelement eines harmonisch schwingenden Balkens berechnet. Diverse Näherungen zur Vereinfachung der numerischen Berechnung werden aufgezeigt.

Für einen harmonisch schwingenden Biegebalken kann für die Stahlspannung $\sigma_{e,max}(t)$ im Riss (kein Vorzeichenwechsel des Biegemomentes M_{abs})

$$\sigma_{e,max}(t) = \bar{\sigma}_{e,max} \cdot \sin(\omega t) \quad (5.14)$$

geschrieben werden.

Für jeden Zeitpunkt t_0 kann mit Hilfe der in Kapitel 4 dargestellten Berechnungsmethoden für die zugehörige Stahlspannung $\bar{\sigma}_{e,max} \cdot \sin(\omega t_0)$ die Verteilung der Verbundspannungen $\tau_v(x, t_0)$ und der Relativverschiebungen $v(x, t_0)$ berechnet werden. Durch numerische Differentiation kann $\dot{v}(x, t_0)$ bestimmt werden.

In Bild 53 ist der durch ein Computerprogramm numerisch integrierte Wert des Integrals (5.13) in Funktion der maximalen Stahlspannung $\bar{\sigma}_{e,max}$ im Riss für verschiedene Bewehrungsstabdurchmesser $\emptyset$ und Bewehrungsgehalte μ durch ausgezogene Linien dargestellt.

Bild 53: Numerisch berechneter Wert des Integrals (5.13)

Bei sehr geringen Stahlspannungen steigen die Verbundspannungen τ_v und die Relativverschiebungen v bzw. Relativgeschwindigkeiten $\dot{v}$ praktisch linear mit der Stahlspannung an (vgl. Bild 40). Der Wert des Integrals (5.13) und damit die durch Coulomb-Dämpfung innerhalb des Biegeelementes dissipierte Energie $D_{o,CD}^{el}$ (Gl. 5.12)) nimmt somit ueberlinear (quadratisch) zu. Schon

bei nur wenig grösseren Stahlspannungen bleibt die Verbundspannung τ_v hingegen nahezu konstant, während die Relativverschiebung v weiterhin linear mit wachsender Stahlspannung zunimmt. Damit nimmt der Wert des Integrals (5.13) bei grösseren Stahlspannungen nur noch linear mit der Stahlspannung zu.

Eine sehr gute Uebereinstimmung mit dem in Bild 53 dargestellten exakten Wert des Integrals (5.13) erhält man, wenn der zeitunabhängige Ausdruck

$$I = \int_0^{s/2} \tau_v(x) \cdot v(x) \cdot dx \quad (5.15)$$

berechnet wird. Für verschiedene maximale Stahlspannungen $\bar{\sigma}_{e,max}$ wurde die Verteilung der Verbundspannungen $\tau_v(x)$ und der Relativverschiebungen $v(x)$ berechnet, das Integral (5.13) numerisch berechnet und die erhaltenen Werte in Bild 53 gestrichelt eingetragen (für $\mu = 1.01\%$). Die gute Uebereinstimmung zwischen den Resultaten der Gleichungen (5.13) und (5.15) ist nicht überraschend, da die Dämpfungsenergie bei der Coulomb-Dämpfung allein durch die jeweilige Grösse der Reibungskraft und der Relativverschiebung bestimmt wird (vgl. Bild 21), während der zeitliche Verlauf der Reibungskraft und der Relativverschiebung keine Rolle spielt.

Eine sehr einfache und gute Näherung für den Wert des Integrals (5.13) kann mit den folgenden Annahmen gefunden werden:

$$v_{\max}(t) = v_{\max}(\bar{\sigma}_{e,max}) \cdot \frac{\sigma_{e,max}(t)}{\bar{\sigma}_{e,max}} \quad (5.16)$$

$$\tau_v(x,t) = \tau_v(\bar{\sigma}_e) .$$

Die erste Annahme entspricht einem linearen Zusammenhang zwischen der Relativverschiebung $v_{\max}(t)$ im Riss und der Stahlspannung $\bar{\sigma}_{e,max}(t)$ im Riss. $v_{\max}(t)$ steht für die maximale Relativverschiebung im Element bei der Stahlspannung $\sigma_{e,max}(t)$. Die zweite Annahme legt fest, dass die Verbundspannung τ_v bzw. die Radialspannung σ_r und die Reibungskraft F_{CD} von der Höhe der Stahlspannung bzw. der Beanspruchung unabhängig sein sollen. Bild 40 zeigt, dass diese Annahmen vor allem bei grösseren Beanspruchungen sehr gut zutreffen. Die Stahlspannung $\bar{\sigma}_e$ muss mit einem geeigneten Wert festgelegt werden. Da über die Höhe des Gleitreibungskoeffizienten $\bar{\mu}$ und den Proportionalitätskoeffizienten A grössere Unsicherheiten bestehen, sind die Annahmen (5.16) durchaus vertretbar.

Aus den Gleichungen (5.14) und (5.16) erhält man für $v_{\max}(t)$

$$v_{\max}(t) = v_{\max}(\bar{\sigma}_{e,max}) \cdot \sin(\omega t) .$$

Der Verlauf der Relativverschiebung $v(x,t)$ längs des Biegeelementes kann mit der Verteilungsfunktion $f(x,t)$ mit

$$v(x,t) = v_{\max}(t) \cdot f(x)$$

angegeben werden. Da die Verteilungsfunktion $f(x,t)$ sich im Verlauf der Zeit nur unbedeutend verändert, kann die Relativverschiebung $v(x,t)$ bzw. deren zeitliche Ableitung $\dot{v}(x,t)$ durch

$$v(x,t) = v_{\max}(\bar{\sigma}_{e,\max}) \cdot f(x) \cdot \sin(\omega t)$$

bzw.,

$$\dot{v}(x,t) = v_{\max}(\bar{\sigma}_{e,\max}) \cdot f(x) \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) \quad (5.17)$$

ausgedrückt werden.

Mit den Gleichungen (5.16) und (5.17) ergibt sich aus Gl. (5.13)

$$I = \tau_v(\bar{\sigma}_e) \cdot v_{\max}(\bar{\sigma}_{e,\max}) \cdot \int_0^{s/2} f(x) \cdot dx \cdot \int_0^{T/4} \omega \cdot \cos(\omega t) \cdot dt \quad (5.18)$$

$$I = \tau_v(\bar{\sigma}_e) \cdot v_{\max}(\bar{\sigma}_{e,\max}) \cdot \int_0^{s/2} f(x) \cdot dx$$

Aus Bild 39 ist ersichtlich, dass die Verteilungsfunktion $f(x)$ sehr gut durch eine Gerade dargestellt werden kann und das Integral (5.18) somit durch

$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{2} \cdot \tau_v(\bar{\sigma}_e) \cdot v_{\max}(\bar{\sigma}_{e,\max}) = \frac{s}{2} \cdot \tau_v(\bar{\sigma}_e) \cdot v_m(\bar{\sigma}_{e,\max}) \quad (5.19)$$

angenähert werden kann. Dabei bedeuten:

$v_{\max}(\bar{\sigma}_{e,\max})$: Maximale Relativverschiebung im Riss bei der Stahlspannung $\bar{\sigma}_{e,\max}$,

$v_m(\bar{\sigma}_{e,\max})$: Ueber die Länge des Biegeelementes gemittelte Relativverschiebung bei der Stahlspannung $\bar{\sigma}_{e,\max}$.

Bild 54 zeigt den Unterschied der genauen Berechnung nach Gl. (5.13) und der Näherung nach Gl. (5.19). Bei der Näherungsberechnung nach Gl. (5.19) nimmt der Wert des Integrals wegen der Annahmen (5.16) linear mit der Stahlspannung $\bar{\sigma}_{e,\max}$ zu. Erwartungsgemäss weicht die Näherungslösung bei geringen Stahlspannungen um einen prozentual recht hohen Betrag von der genauen Lösung ab.

Bild 54 : Wert des Integrals nach Gl. (5.13) bzw. (5.19)

Bei grösseren Stahlspannungen ist der prozentuale Fehler jedoch recht gering.

Mit den Gleichungen (5.12) und (5.19) erhält man für die im gerissenen Biegeelement durch Coulomb-Dämpfung dissipierte Energie $D_{o,CD}^{el}$

$$D_{o,CD}^{el} = 4 \cdot \pi \cdot \bar{\mu} \cdot A \cdot j \cdot \emptyset \cdot s \cdot \tau_v(\bar{\sigma}_e) \cdot v_m(\bar{\sigma}_{e,max})$$
$$D_{o,CD}^{el} = 4 \cdot F_{CD}^{el} \cdot v_m \quad (5.20)$$

Der zusammengefasste Ausdruck entspricht der totalen im gerissenen Biegeelement wirkenden und entsprechend der Annahmen (5.16) konstanten Reibungskraft F_{CD} . Erwartungsgemäss wird der Ausdruck von Gl. (5.20) durch die Gl. (2.58) bestätigt.

Berechnung des Dämpfungsmasses

Aus den Gleichungen (5.12) und

$$w_o^{el} = \frac{s \cdot B \cdot h}{6 \cdot E_b \cdot n^2} \cdot C_2 \cdot \bar{\sigma}_{e,max}^2 \quad (5.21)$$

mit

$$C_2 = \frac{x_{Na}^3}{3 \cdot h \cdot (h - x_{Na})^2} + n \cdot \mu + n \cdot \mu' \cdot \frac{(x_{Na} - h')^2}{(h - x_{Na})^2}$$

(vgl. Anhang A1 und Tabelle 1) erhält man für das Dämpfungsmass ξ_{CD}^{el}

$$\xi_{CD}^{el} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \bar{\mu} \cdot A \cdot j \cdot \emptyset \cdot \int_0^{s/2} dx \cdot \int_0^{T/4} \tau_v(x,t) \cdot \dot{v}(x,t) \cdot dt}{4 \cdot \pi \cdot C_2 \cdot B \cdot s \cdot h \cdot \bar{\sigma}_{e,max}^2} \cdot 6 \cdot n^2 \cdot E_b \quad (5.22)$$

$$\xi_{CD}^{el} = \text{konstant} \cdot \frac{\int_0^{s/2} dx \cdot \int_0^{T/4} \tau_v(x,t) \cdot \dot{v}(x,t) \cdot dt}{\bar{\sigma}_{e,max}^2}$$

Es können die folgenden Feststellungen gemacht werden:

- Bei geringen Stahlspannungen nimmt der Zähler von Gl. (5.22) quadratisch mit grösser werdender Stahlspannung zu (vgl. Bild 54). In diesem Beanspruchungsbereich ist das Dämpfungsmass ξ_{CD}^{el} somit konstant.
- Bei grösseren Stahlspannungen steigt der Zähler von Gl. (5.22) nur noch linear mit der Stahlspannung an, so dass das Dämpfungsmass ξ_{CD}^{el} umgekehrt proportional zur Stahlspannung ist.

Aus den Gleichungen (5.21) und (5.19) erhält man für das Dämpfungsmass ξ_{CD}^{el}

$$\xi_{CD}^{el} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \bar{\mu} \cdot A \cdot j \cdot \emptyset \cdot \frac{s}{2} \cdot \tau_v(\bar{\sigma}_e) \cdot v_m(\bar{\sigma}_{e,max})}{4 \cdot \pi \cdot C_2 \cdot B \cdot h \cdot s \cdot \bar{\sigma}_{e,max}^2} \cdot 6 \cdot n^2 \cdot E_b \quad (5.23)$$

$$\xi_{CD}^{el} = \text{konstant} \cdot \frac{v_m(\bar{\sigma}_{e,max})}{\bar{\sigma}_{e,max}^2}$$

Da die mittlere Relativverschiebung v_m entsprechend der Annahmen (5.16) linear mit der Stahlspannung zunimmt, ist das Dämpfungsmass ξ_{CD}^{el} in Uebereinstimmung mit Gl. (2.59) und Bild 23 umgekehrt proportional zur Stahlspannung.

5.2.2.2 Einfluss des Rissabstandes

Der Einfluss des Rissabstandes s auf die Dämpfungsenergie $D_{o,CD}^{el}$ bzw. das Dämpfungsmass ξ_{CD}^{el} soll anhand der mit den Annahmen (5.16) berechneten Gl. (5.20) diskutiert werden.

In Bild 55 ist die durch Lösen der Differentialgleichung des verschieblichen Verbundes berechnete mittlere Relativverschiebung v_m für verschiedene Bewehrungsgehalte μ und Stahlspannungen $\sigma_{e,max}$ in Funktion des Rissabstandes s angegeben.

Im Bereich von geringen Stahlspannungen $\sigma_{e,max}$ ($< 100 \div 200 \text{ N/mm}^2$), bei welchen das Dämpfungsmass ξ_{CD}^{el} infolge Coulomb-Dämpfung sehr gross (vgl. Gl. (5.22)) und demzufolge der Beitrag der Coulomb-Dämpfung an der gesamten Dämpfung er-

Bild 55: Mittlere Relativverschiebung v_m in Funktion des Rissabstandes s

heblich sein kann (vgl. Bild 28), sind die mittlere Relativverschiebung und damit nach Gl. (5.20) auch die Dämpfungsenergie $D_{o,CD}^{el}$ und das Dämpfungsmass ξ_{CD}^{el} praktisch unabhängig von der Grösse des Rissabstandes.

Bei höheren Stahlspannungen hingegen, bei welchen das Dämpfungsmass infolge Coulomb-Dämpfung im allgemeinen recht klein (vgl. Gl. (5.22)) und somit der Beitrag der Coulomb-Dämpfung an der gesamten Dämpfung nicht sehr bedeutend ist (vgl. Bild 28), nehmen die mittlere Relativverschiebung und damit auch die Dämpfungsenergie und das Dämpfungsmass sehr stark mit grösser werdendem Rissabstand zu. Gesamthaft betrachtet ist somit der Einfluss des Rissabstandes auf das Dämpfungsmass ξ_{CD}^{el} infolge Coulomb-Dämpfung unbedeutend.

5.2.2.3 Einfluss des Bewehrungsgehaltes

Der Einfluss des Bewehrungsgehaltes μ bzw. des Bewehrungsstabdurchmessers $\varnothing$ und der Anzahl Bewehrungsstäbe j auf die Dämpfungsenergie $D_{o,CD}^{el}$ und das Dämpfungsmass ξ_{CD}^{el} soll anhand der mit den Annahmen (5.16) hergeleiteten Gl. (5.20) diskutiert werden.

Die Dämpfungsenergie $D_{o,CD}^{el}$ kann mit

$$F_e = \mu \cdot B \cdot h = j \cdot \frac{\pi \cdot \varnothing^2}{4}$$

und Gl. (5.13) aus der Gleichung

$$D_{0,CD}^{el} = 32 \cdot \bar{\mu} \cdot A \cdot B \cdot h \cdot I \cdot \frac{\mu}{\emptyset} \quad (5.24)$$

ermittelt werden. Aus Bild 53 geht hervor, dass die berechneten Werte für das Integral I nahezu unabhängig vom Bewehrungsgehalt μ bzw. vom Bewehrungsstabdurchmesser $\emptyset$ sind. Wenn vorausgesetzt werden kann, dass der Gleitreibungskoeffizient A ebenfalls unabhängig vom Bewehrungsgehalt μ und vom Bewehrungsstabdurchmesser $\emptyset$ sind, folgt aus Gl. (5.24), dass die Dämpfungsenergie $D_{0,CD}^{el}$ im wesentlichen vom Verhältnis $\mu/\emptyset$ abhängt. Demzufolge werden stark bewehrte gerissene Biegeelemente bei gleichem Bewehrungsstabdurchmesser mehr Energie durch Coulomb-Dämpfung dissipieren als schwach bewehrte Biegeelemente. Bei gleich grossem Bewehrungsgehalt werden Biegeelemente mit wenigen dicken Bewehrungsstäben weniger Energie durch Coulomb-Dämpfung dissipieren als Biegeelemente mit entsprechend zahlreicheren dünneren Bewehrungsstäben.

Diese Zusammenhänge sind physikalisch sehr gut verständlich, da mit grösser werdendem Bewehrungsgehalt und abnehmendem Bewehrungsstabdurchmesser eine grössere Reibungsfläche bei nahezu gleichbleibender Normalspannung entsteht. Die gemachten Feststellungen und Vergleiche gelten bei jeweils gleich grosser Stahlspannung $\sigma_{e,max}$. Bei einer Vergrösserung des Bewehrungsgehaltes nimmt die Stahlspannung bei gleichbleibender äusserer Belastung jedoch ab, so dass das Integral I gemäss Bild 53 ebenfalls reduziert wird. Bei gleich grosser äusserer Belastung ist es somit möglich, dass in einem stark bewehrten Biegeelement die durch Coulomb-Dämpfung dissipierte Energie geringer ist als in einem schwach bewehrten Biegeelement.

Das Dämpfungsmass ξ_{CD}^{el} kann mit den Gleichungen (5.21) und (5.24) zu

$$\xi_{CD}^{el} = \frac{32 \cdot \bar{\mu} \cdot A \cdot B \cdot h \cdot I \cdot \mu}{4 \cdot \pi \cdot C_2 \cdot B \cdot h \cdot s \cdot \sigma_{e,max}^2} \cdot 6 \cdot n^2 \cdot E_b \quad (5.25)$$

$$\xi_{CD}^{el} = \text{konstant} \cdot \frac{\mu}{\emptyset \cdot C_2} \quad (\text{für } \sigma_e = \text{konstant})$$

bestimmt werden. In Bild 56 sind der Koeffizient C_2 und der Quotient $\frac{\mu}{\emptyset \cdot C_2}$ in Funktion des Bewehrungsgehaltes μ aufgetragen. C_2 nimmt praktisch linear mit dem Bewehrungsgehalt μ zu. Deshalb ist der Quotient $\mu/\emptyset \cdot C_2$ nahezu unabhängig von μ . Je grösser der Bewehrungsstabdurchmesser $\emptyset$ ist, desto geringer wird der Quotient $\mu/\emptyset \cdot C_2$ und damit auch das Dämpfungsmass. Stark bewehrte Biegeelemente weisen gegenüber schwach bewehrten Biegeelementen meistens Bewehrungsstäbe mit grösserem Durchmesser auf. Aus Bild 56 geht hervor, dass solche Biegeelemente unter gleich grosser Stahlspannung in der Regel ein geringeres Dämpfungsmass ξ_{CD}^{el} aufweisen als schwach bewehrte Biegeelemente.

Bild 56: Einfluss des Bewehrungsgebietes μ

5.2.2.4 Einfluss eines Vorzeichenwechsels des Biegemomentes

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, inwieweit ein Vorzeichenwechsel des Biegemomentes M_{abs} (vgl. Bild 47) einen Einfluss auf die durch Coulomb-Dämpfung dissipierte Energie $D_{o,CD}^{el}$ und das Dämpfungsmass ξ_{CD}^{el} hat.

Nebst den schon in Abschnitt 5.2.2.3 angeführten Annahmen sollen im folgenden die Annahmen der Gleichungen (5.16) ebenfalls Gültigkeit haben.

a) Dämpfungsenergie

Bild 57 zeigt den Verlauf der Reibungskraft F_{CD} zwischen der unteren bzw. oberen Längsbewehrung und dem Beton in Funktion der zugehörigen Relativverschiebung v während eines Schwingungszyklus für eine harmonische Belastung mit und ohne Vorzeichenwechsel des Biegemomentes.

Bei einem Vorzeichenwechsel des Biegemomentes erfährt der untere Rand des Biegeelementes und damit auch die untere Längsbewehrung zeitweilig eine Druckspannung. Während dieser Phase kann längs der unteren Bewehrung keine Energie dissipiert werden, da die Relativverschiebung gleich null ist (vgl. Abschnitt 5.2.2). Dafür tritt längs der oberen Bewehrung eine wegen der als konstant vorausgesetzten Verbundspannung gleich grosse Reibungskraft auf, durch welche Energie dissipiert werden kann, da hier die Relativverschiebung ungleich null ist. Die durch die Coulomb-Dämpfung dissipierte Energie $D_{o,CD}^{el}$ (schraffierte Fläche in Bild 57) ist somit bei einem Vorzeichenwechsel des Biegemomentes gleich gross wie bei einer gleich starken Belastung, bei welcher kein Vorzeichenwechsel des Biegemomentes auftritt. Wenn die zu Beginn dieses Abschnittes getroffenen Annahmen fallengelassen werden, wird die Dämpfungsenergie $D_{o,CD}^{el}$ mit und ohne Vorzeichenwechsel des Biegemomentes nicht mehr gleich gross sein.

Bild 57: Reibungskräfte F_{CD} bei einem Vorzeichenwechsel des Biegemomentes

b) Dämpfungsmass

Aus den schon früher in Abschnitt 5.2.1.2 gemachten Feststellungen sowie den obigen Herleitungen geht hervor, dass ein Vorzeichenwechsel des Biegemomentes keinen Einfluss auf das Dämpfungsmass ξ_{CD}^{el} hat.

5.2.3 Viskose Dämpfung kombiniert mit Coulomb-Dämpfung

Die totale im gerissenen Biegeelement von Bild 49 dissipierte Dämpfungsenergie D_o^{el} setzt sich aus der durch viskose Dämpfung dissipierten Energie $D_{o,VD}^{el}$ (vgl. Abschnitt 5.2.1) und der durch Coulomb-Dämpfung dissipierten Energie $D_{o,CD}^{el}$ (vgl. Abschnitt 5.2.2) zusammen. Mit den Gleichungen (5.2) und (5.20) beträgt die Dämpfungsenergie D_o^{el}

$$D_o^{el} = \frac{1}{3} \cdot d \cdot B \cdot x_{Na} \cdot s \cdot \frac{\sigma_b^2}{\beta_p^2} + 4 \cdot \pi \cdot \bar{\mu} \cdot A \cdot j \cdot \emptyset \cdot s \cdot \tau_v(\bar{\sigma}_e) \cdot v_m(\bar{\sigma}_{e,max}) \quad (5.26)$$

Das Dämpfungsmass ξ^{el} des gerissenen Biegeelementes kann aus den Gleichungen (5.3) und (5.26) bzw. (5.7) und (5.23) zu

$$\xi^{el} = \xi_{VD}^{el} + \xi_{CD}^{el}$$

$$\xi^{el} = \frac{d \cdot E_b}{2 \cdot \pi \cdot C_1 \cdot \beta_p^2} + \frac{6 \cdot n^2 \cdot E_b \cdot \bar{\mu} \cdot A \cdot j \cdot \emptyset \cdot v_m(\bar{\sigma}_{e,max})}{C_2 \cdot B \cdot h \cdot \bar{\sigma}_{e,max}^2} \cdot \tau_v(\bar{\sigma}_e) \quad (5.27)$$

berechnet werden. Der erste Summand (Dämpfungsmass ξ_{VD}^{el} infolge viskoser Dämpfung) ist von der Höhe der Stahlspannung bzw. der Beanspruchung unabhängig. Der zweite Summand (Dämpfungsmass ξ_{CD}^{el} infolge Coulomb-Dämpfung) verhält sich umgekehrt proportional zur Stahlspannung bzw. Beanspruchung und ist somit sehr stark von dieser abhängig (vgl. Bilder 28 und 59).

6. Dämpfungsmodell eines Biegeträgers

In diesem Kapitel soll mit Hilfe der im vorhergehenden Kapitel entwickelten Dämpfungsmodelle für ein gerissenes und ungerissenes Biegeelement das Dämpfungsmodell für einen ganzen Biegeträger hergeleitet werden.

In Bild 58 ist ein teilweise gerissener, als einfacher Balken gelagerter Stahlbetonbiegeträger abgebildet.

Bild 58: Teilweise gerissener Stahlbetonbiegeträger

Unter dem dargestellten Biegemomentenverlauf werden die Biegerisse zuerst im mittleren Trägerbereich auftreten. Je nach dem Risszustand des Trägers kann man sich diesen als aus einer entsprechenden Anzahl gerissener und ungerissener Biegeelemente vorstellen. Die Dämpfungseigenschaften der einzelnen Biegeelemente können mit Hilfe der Ausführungen in Kapitel 5 bestimmt werden. Das Dämpfungsmodell für einen ganzen Biegeträger erhält man durch geeignetes Aufsummieren der Dämpfungseigenschaften der einzelnen gerissenen oder ungerissenen Biegeelemente.

Im folgenden werden die Methoden, mit welchen die Dämpfungseigenschaften eines ganzen Biegeträgers aus denjenigen der einzelnen Biegeelemente bestimmt werden können, genauer beschrieben.

Zur Berechnung der Dämpfungsenergie D_0 und der Formänderungsenergie W_0 muss die Spannungsverteilung infolge der dynamischen Belastung im ganzen Träger bzw. in allen Biegeelementen bekannt sein.

Die folgenden Ausführungen orientieren sich am Beispiel des einfachen Balkens (vgl. Bild 58). Damit ist eine besonders einfache analytische Behandlung möglich, ohne dass eine starke Einschränkung der Aussagekraft in Kauf genommen werden müsste. Etwas kompliziertere statische Systeme werden in Kapitel 8 untersucht werden.

Die Beanspruchung eines mit der Kreisfrequenz ω harmonisch schwingenden Balkens mit der Stützweite l und der gleichmässig verteilten Masse $m(x)$ kann z.B. mit Hilfe des Prinzips von d'Alembert ermittelt werden. Mit der Belastung $p(x)$

$$p(x,t) = m(x) \cdot z_0 \cdot \omega^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \cdot \sin(\omega t) \quad (6.1)$$

und

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} = -p$$

erhält man für das Biegemoment $M(x,t)$

$$M(x,t) = m(x) \cdot z_0 \cdot \omega^2 \cdot \frac{l^2}{\pi^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \cdot \sin(\omega t) \quad (6.2)$$

Das maximale Biegemoment in Trägermitte beträgt somit

$$M_0 = m(x) \cdot z_0 \cdot \omega^2 \cdot \frac{l^2}{\pi^2} \quad (6.3)$$

Im folgenden wird angenommen, dass der Biegeträger bei der dynamischen Berechnung als Einmassenschwinger betrachtet werden kann. Auf die Schwierigkeiten, welche anlässlich der Behandlung eines Tragwerks als Mehrmassenschwinger bei der Ermittlung der Dämpfung auftreten, wird in Kapitel 8 eingetreten.

6.1 Methoden zur Berechnung der Dämpfungseigenschaften

Die Dämpfungseigenschaften des Einmassenschwingers, welcher hier für die Darstellung des dynamischen Verhaltens eines Betonbiegeträgers verwendet werden soll, können im allgemeinen durch die drei folgenden Methoden aus den Dämpfungseigenschaften der einzelnen Biegeelemente bestimmt werden:

a) Direkte Berechnung der Dämpfungsenergie D_0 und des Dämpfungsmasses ξ

Mit als bekannt vorausgesetzter Spannungsverteilung können die Dämpfungsenergie D_0 und die Formänderungsenergie W_0 aller Biegeelemente direkt berechnet werden (vgl. Anhang A1). Durch Addition dieser Dämpfungsenergien und

Formänderungsenergien aller dieser Elemente können die entsprechenden Energien des ganzen Trägers ermittelt werden. Das Dämpfungsmass ξ kann damit aus Gl. (2.23) bestimmt werden.

b) Berechnung des Dämpfungsmasses ξ aus den Koeffizienten α und β

Die beiden Koeffizienten α und β können aus den Gleichungen (2.18) bzw. (2.20) berechnet werden, sofern der Dämpfungsexponent n und die Spannungsverteilung infolge der dynamischen Belastung bekannt sind. Damit das Dämpfungsmass ξ des ganzen Trägers aus Gl. (2.24) erhalten werden kann, muss zusätzlich das Dämpfungsmass ξ^{el} desjenigen Volumenelementes bestimmt werden, für welches die Bezugsspannung σ_d (vgl. Abschnitt 2.3.1) definiert wurde.

c) Berechnung der Dämpfungskraft mit Hilfe des Hamiltonschen Prinzips

Das Hamiltonsche Prinzip eignet sich sehr gut, den Dämpfungskoeffizienten c eines viskos gedämpften Tragwerks (vgl. Gl. (2.3)) oder die Reibungskraft F_{CD} eines mit Coulomb-Dämpfung versehenen Schwingers zu berechnen. Hingegen können damit die Dämpfungsenergie D_0 bzw. das Dämpfungsmass ξ nicht direkt bestimmt werden.

Bei längs der Achse des Biegeträgers von Bild 2 verteilt und diskret angeordneten Reibungselementen $F_{CD}(x)$ bzw. $F_{CD,i}$ kann die Reibungskraft F_{CD} des Einmassenschwingers in zu Gl. (2.3) analoger Art aus

$$F_{CD} = \int_0^1 F_{CD}(x) \cdot \Psi(x) \cdot dx + \sum F_{CD,i} \cdot \Psi_i \quad (6.4)$$

berechnet werden.

Im Fall der Coulomb-Dämpfung zwischen dem Beton und dem Bewehrungsstahl eines Biegeelementes ist die Relativverschiebung v des Bewehrungsstahles gegenüber dem Beton und nicht die Verschiebung z des Balkens für die Energiedissipation verantwortlich. Diese Relativverschiebung v ist nach Kapitel 4 ihrerseits von der Höhe der Stahlspannung σ_s und damit von der Biegebeanspruchung $M(x,t)$ bzw. von z abhängig.

Mit den Annahmen von Gl. (5.16) kann deshalb die Reibungskraft F_{CD} aus

$$F_{CD} = \int_0^1 F_{CD}(x) \cdot \frac{v(x)}{v_0(x)} \cdot dx = \int_0^1 F_{CD}(x) \cdot \frac{\Psi''(x)}{\Psi_0''(x)} \cdot dx \quad (6.5)$$

berechnet werden. Mit Gl. (6.5) wird erreicht, dass durch den Einmassenschwinger mit der Reibungskraft F_{CD} bei der Schwingung mit der Amplitude $z(t)$ bzw. $v(t)$ dieselbe Energie dissipiert wird, wie durch den ganzen Biegeträger mit der Amplitude $z(x,t)$ bzw. $v(x,t)$ und der verteilten Reibungskraft $F_{CD}(x)$.

6.2 Energiedissipation eines vollkommen gerissenen Biegeträgers

In diesem Abschnitt wird davon ausgegangen, dass die Biegerisse über die ganze Länge des Trägers vollkommen ausgebildet sind, und dass sich der Biegeträger ausschliesslich aus p gerissenen Elementen (vgl. Bilder 49 und 58) mit denselben dynamischen Eigenschaften zusammensetzt. Nach Möglichkeit wird zu zeigen versucht, dass die in Abschnitt 6.1 erwähnten Berechnungsmethoden zu denselben Resultaten führen.

6.2.1 Viskose Dämpfung

a) Direkte Berechnung der Dämpfungsenergie $D_{o,VD}$ und des Dämpfungsmasses ξ_{VD}

Die gesamte durch viskose Dämpfung dissipierte Dämpfungsenergie $D_{o,VD}$ erhält man aus

$$D_{o,VD} = \sum_p D_{o,VD}^{el} \quad (6.6)$$

Mit

$$D_{o,VD}^{el} = \frac{1}{3} \cdot d \cdot B \cdot x_{Na} \cdot s \cdot \frac{\sigma_b^2(x)}{\beta_p^2} \quad (\text{vgl. Gl. (5.2)})$$

und

$$\sigma_b(x) = \sigma_{b,d} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \quad (6.7)$$

beträgt $D_{o,VD}$

$$D_{o,VD} = \frac{1}{3} \cdot d \cdot B \cdot x_{Na} \cdot s \cdot \frac{\sigma_{b,d}^2}{\beta_p^2} \cdot \sum_p \sin^2\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right)$$

$$D_{o,VD} = \frac{1}{3} \cdot d \cdot B \cdot x_{Na} \cdot \frac{\sigma_{b,d}^2}{\beta_p^2} \cdot s \cdot \frac{1}{s} \cdot \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \cdot dx$$

$$D_{o,VD} = \frac{1}{6} \cdot d \cdot V_o \cdot \frac{\sigma_{b,d}^2}{\beta_p^2} \quad (6.8)$$

Dabei entspricht $\sigma_{b,d}$ der Betonrandspannung infolge M_o .

Erwartungsgemäss kann das Resultat von Gl. (6.8) bestätigt werden, wenn von den Gleichungen (2.15), (2.16) und (6.7) ausgegangen wird und direkt über die ganze Balkenlänge integriert wird.

Die gesamte innerhalb des Biegeträgers gespeicherte Formänderungsenergie W_o erhält man aus

$$W_o = \sum_p W_o^{el} \quad . \quad (6.9)$$

Mit

$$W_o^{el} = \frac{1}{6 \cdot E_b} \cdot C_1 \cdot B \cdot x_{Na} \cdot s \cdot \sigma_b^2 \quad (\text{vgl. Gl. (5.3)})$$

und Gl. (6.7) ergibt sich aus Gl. (6.9)

$$W_o = \frac{1}{6 \cdot E_b} \cdot C_1 \cdot B \cdot x_{Na} \cdot s \cdot \sigma_{b,d}^2 \cdot \sum_p \sin^2\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right)$$

$$W_o = \frac{1}{12 \cdot E_b} \cdot C_1 \cdot B \cdot x_{Na} \cdot l \cdot \sigma_{b,d}^2$$

$$W_o = \frac{1}{12 \cdot E_b} \cdot C_1 \cdot V_o \cdot \sigma_{b,d}^2 \quad . \quad (6.10)$$

Das Dämpfungsmass ξ_{VD} des ganzen Biegeträgers erhält man aus Gl. (2.23).
Es beträgt somit

$$\xi_{VD} = \frac{d \cdot V_o \cdot \sigma_{b,d}^2 \cdot 12 \cdot E_b}{4 \cdot \pi \cdot 6 \cdot C_1 \cdot V_o \cdot \sigma_{b,d}^2 \cdot \beta_p^2} = \frac{d \cdot E_b}{2 \cdot \pi \cdot C_1 \cdot \beta_p^2} \quad . \quad (6.11)$$

Der Vergleich von Gl. (6.11) mit Gl. (2.24) ergibt wie erwartet

$$\xi_{VD} = \xi_{VD}^{el} \quad , \quad (6.12)$$

d.h., das Dämpfungsmass des Biegeträgers ist gleich gross wie das Dämpfungsmass der einzelnen Biegeelemente.

b) Berechnung des Dämpfungsmasses ξ_{VD} aus den Koeffizienten α und β

Durch Berechnung der Integrale der Gleichungen (2.18) bzw. (2.20) oder noch einfacher durch Vergleich der Gleichungen (2.18) und (2.20) mit den Gleichungen (6.8) und (6.10) ergeben sich α und β zu

$$\alpha = \frac{1}{6} \quad ; \quad \beta = \frac{1}{6} \quad . \quad (6.13)$$

Damit ist der Quotient

$$\frac{\alpha}{\beta} = 1$$

und die Gl. (6.12) bestätigt.

6.2.2 Coulomb-Dämpfung

Die gesamte durch Coulomb-Dämpfung innerhalb des Biegeträgers dissipierte Energie $D_{o,CD}$ kann aus der zu Gl. (5.12) analog aufgebauten Gleichung

$$D_{o,CD} = 8 \cdot \pi \cdot \bar{\mu} \cdot A \cdot j \cdot \emptyset \cdot \int_0^{1/2} dx \cdot \int_0^{T/4} \tau_v(x,t) \cdot \dot{v}(x,t) \cdot dt \quad (6.14)$$

durch numerische Integration genau berechnet werden. Zur Berechnung des Integrals (6.14) müssen die Verbundspannungen $\tau_v(x,t)$ und die Relativverschiebungen $v(x,t)$ bzw. deren Ableitungen $\dot{v}(x,t)$ längs der ganzen Balkenachse bzw. in jedem Biegeelement bekannt sein. Das Vorgehen ist jedoch sehr aufwendig und zeitraubend. Die Berechnung kann ohne grossen Verlust an Genauigkeit wesentlich vereinfacht werden, wenn anstelle des Integrals (6.14) der Ausdruck

$$D_{o,CD} = 8 \cdot \pi \cdot \bar{\mu} \cdot A \cdot j \cdot \emptyset \cdot \int_0^{1/2} dx \cdot \int_0^{T/4} \tau_{v,m}(x,t) \cdot \dot{v}_m(x,t) \cdot dt \quad (6.15)$$

mit den über die Länge der Biegeelemente gemittelten Verbundspannungen $\tau_{v,m}(x,t)$ und Relativverschiebungen $v_m(x,t)$ bzw. deren Ableitungen $\dot{v}_m(x,t)$ berechnet wird.

In Bild 41 ist der durch Lösung der Differentialgleichung des verschieblichen Verbundes an einem einfachen Balken mit der Biegebeanspruchung gemäss Gl. (6.2) ermittelte Verlauf der mittleren Verbundspannung $\tau_{v,m}(x)$ und Relativverschiebung $v_m(x)$ längs der Balkenachse angegeben. Im allgemeinen kann der Verlauf dieser Grössen nicht durch einfache stetige Funktionen dargestellt werden. Anstelle einer analytischen Berechnung des Integrals (6.15) wäre auch hier eine numerische Berechnung vorteilhafter. Eine einfache analytische Lösung wird, ohne starke Beeinträchtigung der Genauigkeit, mit den folgenden, zur Gl. (5.16) ähnlichen, Annahmen ermöglicht:

$$v_m(x,t) = v_m(\sigma_{e,d}) \cdot \frac{\sigma_e(x,t)}{\sigma_{e,d}} \quad (6.16)$$

$$\tau_{v,m}(x,t) = \tau_{v,m}(\bar{\sigma}_e) = \text{konstant} \quad .$$

Dabei entspricht $\sigma_{e,d}$ der Stahlspannung infolge M_0 .

Die erste Annahme entspricht einem affinen Verlauf der mittleren Relativverschiebung $v_m(x,t)$ und der Stahlspannung $\sigma_e(x,t)$ längs der Balkenachse und in Funktion der Zeit. Aus Bild 41 ist ersichtlich, dass diese Annahme recht gut zutrifft.

Die zweite Annahme legt wiederum fest, dass die Verbundspannung τ_v bzw. die Radialspannung σ_r und die Reibungskraft F_{CD} von der Höhe der Beanspruchung bzw. der Stahlspannung unabhängig und somit längs der Balkenachse und wäh-

rend der ganzen Schwingungsdauer konstant ist.

Bild 36 zeigt, dass diese Annahmen schon bei einer mittleren Beanspruchungshöhe recht gut zutreffen.

Im folgenden wird von diesen Annahmen (6.16) Gebrauch gemacht.

a) Direkte Berechnung der Dämpfungsenergie $D_{o,CD}$ und des Dämpfungsmasses ξ_{CD}

Aus Gl. (6.2) ergibt sich für $\sigma_e(x,t)$

$$\sigma_e(x,t) = \sigma_{e,d} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \cdot \sin(\omega t) \quad (6.17)$$

und daraus zusammen mit Gl. (6.16)

$$v_m(x,t) = v_m(\sigma_{e,d}) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \cdot \sin(\omega t) \quad (6.18)$$

$$\dot{v}_m(x,t) = v_m(\sigma_{e,d}) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) \quad .$$

Die Dämpfungsenergie $D_{o,CD}$ erhält man durch Einsetzen von Gl. (6.16) und Gl. (6.18) in Gl. (6.15) zu

$$\begin{aligned} D_{o,CD} &= 8 \cdot \pi \cdot \bar{\mu} \cdot A \cdot j \cdot \emptyset \cdot \tau_{v,m}(\bar{\sigma}_e) \cdot v_m(\sigma_{e,d}) \cdot \int_0^{1/2} \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \cdot dx \cdot \int_0^{T/4} \omega \cdot \cos(\omega t) \cdot dt \\ D_{o,CD} &= 8 \cdot \pi \cdot \bar{\mu} \cdot A \cdot j \cdot \emptyset \cdot \tau_{v,m}(\bar{\sigma}_e) \cdot v_m(\sigma_{e,d}) \cdot \frac{1}{\pi} \quad . \end{aligned} \quad (6.19)$$

Aus dem Vergleich der Gl. (6.19) mit der Gl. (2.58) kann die fuer den Einmassenschwinger massgebende Reibungskraft F_{CD} zu

$$F_{CD} = \frac{2 \cdot 1}{\pi} \cdot \pi \cdot \bar{\mu} \cdot A \cdot j \cdot \emptyset \cdot \tau_{v,m}(\bar{\sigma}_e) \quad (6.20)$$

bestimmt werden.

Das Dämpfungsmass ξ_{CD} beträgt mit Gl. (6.19) und

$$W_o = \frac{h \cdot l \cdot B \cdot C_2}{12 \cdot E_b \cdot n^2} \cdot \sigma_{e,d}^2 \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} \xi_{CD} &= \frac{8 \cdot \bar{\mu} \cdot A \cdot j \cdot \emptyset \cdot l \cdot \tau_{v,m}(\bar{\sigma}_e) \cdot v_m(\sigma_{e,d})}{4 \cdot \pi \cdot h \cdot l \cdot B \cdot C_2 \cdot \sigma_{e,d}^2} \cdot 12 \cdot E_b \cdot n^2 \\ \xi_{CD} &= \frac{24 \cdot n^2 \cdot \bar{\mu} \cdot A \cdot j \cdot \emptyset \cdot E_b \cdot \tau_{v,m}(\bar{\sigma}_e) \cdot v_m(\sigma_{e,d})}{\pi \cdot h \cdot B \cdot C_2 \cdot \sigma_{e,d}^2} \quad (6.22) \end{aligned}$$

$$\xi_{CD} = \text{konstant} \cdot \frac{v_m(\sigma_{e,d})}{\sigma_{e,d}^2} \quad .$$

b) Berechnung des Dämpfungsmasses ξ_{CD} aus den Koeffizienten α und β

Mit $n = 1$ und

$$\sigma_e(x) = \sigma_{e,d} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{1}\right)$$

erhält man für α aus dem Integral der Gl. (2.18)

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \quad . \quad (6.23)$$

Denselben Wert erhält man durch den Vergleich der Gleichungen (2.18) und (6.19).

Mit $\beta = 1/6$ (vgl. Gl. (6.13)) beträgt das Verhältnis α/β

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{12}{\pi} \quad . \quad (6.24)$$

Das Dämpfungsmass ξ_{CD} berechnet sich mit den Gleichungen (2.24) und (5.23) in Uebereinstimmung mit Gl. (6.22) zu

$$\xi_{CD} = \frac{12}{\pi} \cdot \xi_{CD}^{el} = \frac{12 \cdot 2 \cdot n^2 \cdot \bar{\mu} \cdot A \cdot j \cdot \emptyset \cdot \tau_{v,m}(\bar{\sigma}_e) \cdot E_b \cdot v_m(\sigma_{e,d})}{\pi \cdot C_2 \cdot B \cdot h \cdot \sigma_{e,d}^2} \quad .$$

c) Berechnung der Dämpfungskraft mit Hilfe des Hamiltonschen Prinzips

Bei einer Beanspruchung gemäss Gl. (6.2) kann die zweite Ableitung der Schwingungsform $\Psi(x)$ durch

$$\Psi''(x) = \Psi''_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{1}\right) \quad (6.25)$$

ausgedrückt werden. Mit

$$F_{CD}(x) = \pi \cdot \bar{\mu} \cdot A \cdot j \cdot \emptyset \cdot \tau_{v,m}(\bar{\sigma}_e) \cdot dx \quad (\text{vgl. Gl. (5.20)}) \quad (6.26)$$

erhält man aus Gl. (6.5), in Uebereinstimmung mit Gl. (6.20), die für den Einmassenschwinger massgebende Reibungskraft F_{CD}

$$F_{CD} = \pi \cdot \bar{\mu} \cdot A \cdot j \cdot \emptyset \cdot \tau_{v,m} \cdot \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{1}\right) \cdot dx$$

$$F_{CD} = \pi \cdot \bar{\mu} \cdot A \cdot j \cdot \emptyset \cdot \tau_{v,m} \cdot \frac{2 \cdot 1}{\pi} \quad .$$

6.2.3 Viskose Dämpfung kombiniert mit Coulomb-Dämpfung

Die totale im vollkommen gerissenen Biegeträger ($q = 0$, vgl. Bild 58) dissipierte Dämpfungsenergie D_o setzt sich aus der durch viskose Dämpfung dissipierten Energie $D_{o,VD}$ (vgl. Abschnitt 6.2.1) und der durch Coulomb-Dämpfung dissipierten Energie $D_{o,CD}$ (vgl. Abschnitt 6.2.2) zusammen. Mit den Gleichungen (6.8) und (6.19) beträgt die Dämpfungsenergie D_o

$$D_o = \frac{1}{6} \cdot d \cdot V_o \cdot \frac{\sigma_{b,d}^2}{\beta_p^2} + 8 \cdot \bar{\mu} \cdot A \cdot j \cdot \emptyset \cdot l \cdot \tau_{v,m}(\bar{\sigma}_e) \cdot v_m(\sigma_{e,d}) \quad (6.27)$$

Das Dämpfungsmass ξ des vollkommen gerissenen Stahlbetonbiegeträgers kann aus den Gleichungen (6.11) und (6.22) zu

$$\xi = \xi_{VD} + \xi_{CD}$$

$$\xi = \frac{d \cdot E_b}{2 \cdot \pi \cdot C_1 \cdot \beta_p^2} + \frac{24 \cdot n^2 \cdot \bar{\mu} \cdot A \cdot j \cdot \emptyset \cdot E_b \cdot \tau_{v,m}(\bar{\sigma}_e) \cdot v_m(\sigma_{e,d})}{\pi \cdot h \cdot B \cdot C_2 \cdot \sigma_{e,d}^2} \quad (6.28)$$

berechnet werden. In Bild 59 ist das Dämpfungsmass ξ in Funktion der Amplitude z bzw. der Stahlspannung $\sigma_{e,d}$ aufgetragen.

Bild 59: Dämpfungsmass ξ in Funktion der Beanspruchung für einen vollkommen gerissenen Stahlbetonträger

Der erste Summand (Dämpfungsmass ξ_{VD} infolge viskoser Dämpfung) ist von der Höhe der Stahlspannung bzw. Beanspruchung unabhängig. Der zweite Summand (Dämpfungsmass ξ_{CD} infolge Coulomb-Dämpfung) verhält sich wegen des linearen Zusammenhangs zwischen der Relativverschiebung v und der Stahlspannung σ_e umgekehrt proportional zu dieser Stahlspannung. Bei geringen dynamischen Amplituden bzw. Beanspruchungen wird das Dämpfungsmass relativ gross sein. Bei grösser werdenden Amplituden bzw. Beanspruchungen wird sich das Dämpf-

fungsmass ξ immer mehr dem Dämpfungsmass ξ_{VD} infolge viskoser Dämpfung annähern.

6.3 Energiedissipation eines vollkommen ungerissenen Biegeträgers

In diesem Abschnitt sollen die Dämpfungseigenschaften eines vollkommen ungerissenen Biegeträgers ermittelt werden. Der rissfreie Zustand kann dabei entweder durch eine Vorspannung oder durch eine niedrige Biegebeanspruchung, bei welcher das Rissmoment des Trägers noch an keinem Ort überschritten wurde, bedingt sein. Der Biegeträger soll sich aus q ungerissenen Biegeelementen (vgl. Bild 50 und 58) zusammensetzen, welche dieselben dynamischen Eigenschaften aufweisen sollen.

Entsprechend dem einfachen Dämpfungsmodell, durch welches einem ungerissenen Biegeelement nur eine viskose Dämpfung zugeordnet wird, können die Ausführungen in diesem Abschnitt sehr kurz gehalten werden.

Die Dämpfungsenergie D_o kann mit den Gleichungen (5.5) und (6.7) aus der Gleichung

$$\begin{aligned}
 D_o &= D_{o,VD} = \sum_p D_{o,VD}^{el} = \sum_p \frac{1}{3} \cdot d \cdot B \cdot H \cdot s \cdot \frac{\sigma_b^2}{\beta_p^2} \\
 D_o &= \frac{1}{3} \cdot d \cdot B \cdot H \cdot \frac{\sigma_{b,d}^2}{\beta_p^2} \cdot \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi \cdot x}{1}\right) \cdot dx \\
 D_o &= \frac{1}{6} \cdot d \cdot B \cdot H \cdot 1 \cdot \frac{\sigma_{b,d}^2}{\beta_p^2} \quad (6.29)
 \end{aligned}$$

berechnet werden.

Die Formänderungsenergie W_o beträgt mit den Gleichungen (5.6) und (6.7)

$$\begin{aligned}
 W_o &= \sum_p W_o^{el} = \sum_p \frac{1}{6 \cdot E_b} \cdot C_o \cdot B \cdot H \cdot s \cdot \sigma_b^2 \\
 W_o &= \frac{1}{6 \cdot E_b} \cdot C_o \cdot B \cdot H \cdot \sigma_{b,d}^2 \cdot \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi \cdot x}{1}\right) \cdot dx \\
 W_o &= \frac{1}{12 \cdot E_b} \cdot C_o \cdot B \cdot H \cdot 1 \cdot \sigma_{b,d}^2 \quad (6.30)
 \end{aligned}$$

Mit den Gleichungen (6.29) und (6.3) erhält man für das Dämpfungsmass ξ wie erwartet in Uebereinstimmung zu Gl. (5.7)

$$\xi = \frac{d \cdot B \cdot H \cdot 1 \cdot \sigma_{b,d}^2 \cdot 12 \cdot E_b}{4 \cdot \pi \cdot 6 \cdot C_o \cdot B \cdot H \cdot 1 \cdot \sigma_{b,d}^2 \cdot \beta_p^2} = \frac{d \cdot E_b}{2 \cdot \pi \cdot C_o \cdot \beta_p^2} = \xi^{el} \quad (6.31)$$

6.4 Energiedissipation eines teilweise gerissenen Biegeträgers

In diesem Abschnitt sollen die Dämpfungseigenschaften eines nur teilweise gerissenen Stahlbetonbiegeträgers (vgl. Bild 58), der sich aus p gerissenen und q ungerissenen Biegeelementen zusammensetzen soll, berechnet werden. Ein Biegeträger ist dann teilweise gerissen, wenn seine Biegebeanspruchung das Rissmoment an gewissen Stellen überschritten hat aber noch nicht genügend gross ist, um über die ganze Trägerlänge Biegerisse ausbilden zu können. Bei einer Erhöhung der Biegebeanspruchung wird sich die Zahl der gerissenen Elemente auf Kosten der ungerissenen Elemente erhöhen. Als Folge davon ändern sich einerseits die Steifigkeit und damit die Eigenfrequenz des Trägers und andererseits die Dämpfungseigenschaften. Mit jeder Erhöhung der Zahl der gerissenen Elemente treten zusätzliche Elemente mit Coulomb-Dämpfung auf.

Im folgenden soll der Einfluss der Ausbreitung der Risse längs der Balkenachse auf die Dämpfungseigenschaften näher untersucht werden. Dabei wird angenommen, dass zwischen den schon vorhandenen Rissen keine neuen Risse mehr entstehen, und dass die Rissabstände s längs des ganzen gerissenen Balkenbereichs konstant sind.

Bei der Entstehung von neuen Rissen zwischen schon bestehenden Rissen verändern sich die Rissabstände. Der Einfluss der Rissabstände auf die Dämpfung wurde im Abschnitt 5.2.2.2 anhand eines Biegeelementes behandelt. Diese Resultate können sinngemäss auf den ganzen Balken übertragen werden.

Die ausführlichen Berechnungen der Dämpfungsenergien $D_{o,VD}$ infolge viskoser Dämpfung und $D_{o,CD}$ infolge Coulomb-Dämpfung sowie der Formänderungsenergie W_o sind für den in Bild 58 dargestellten Biegeträger im Anhang A2 festgehalten.

6.4.1 Viskose Dämpfung

Aus den im Anhang A2 für die Dämpfungsenergie $D_{o,VD}$ infolge viskoser Dämpfung und die Formänderungsenergie W_o berechneten Ausdrücken kann das Dämpfungsmass ξ_{VD} des teilweise gerissenen Biegeträgers zu

$$\xi_{VD} = \frac{d \cdot E_b \cdot [H \cdot \sigma_{b,d}^2 \cdot \int_0^r \sin^2(\frac{\pi \cdot x}{l}) \cdot dx + x_{Na} \cdot \sigma_{b,d}^2 \cdot \int_r^{l/2} \sin^2(\frac{\pi \cdot x}{l}) \cdot dx]}{2 \cdot \pi \cdot \beta_p^2 \cdot [H \cdot C_o \cdot \sigma_{b,d}^2 \cdot \int_0^r \sin^2(\frac{\pi \cdot x}{l}) \cdot dx + x_{Na} \cdot C_1 \cdot \sigma_{b,d}^2 \cdot \int_r^{l/2} \sin^2(\frac{\pi \cdot x}{l}) \cdot dx]} \quad (6.32)$$

berechnet werden.

Bild 60 zeigt für den in [3.1] beschriebenen Balken B3 den aus Gl. (6.32) berechneten Verlauf des Dämpfungsmasses ξ_{VD} bzw. den dazu proportionalen Wert $\xi_{VD} \cdot 2 \cdot \pi / d \cdot E_b$ in Funktion des Quotienten r/l , d.h. in Funktion der zunehmenden Rissausbreitung in Trägerlängsrichtung und, damit gekoppelt, in Funktion der

Bild 60: Dämpfungsmass ξ_{VD} infolge viskoser Dämpfung eines ganzen Stahlbetonträgers bei fortschreitender Rissausbreitung

maximalen Stahlspannung. Mit zunehmender Rissausbreitung, d.h. mit grösser werdendem Abstand r , nimmt das Dämpfungsmass ξ_{VD} ab (vgl. Abschnitt 5.2.1.1). Wenn sich während der dynamischen Beanspruchung keine neuen Risse mehr ausbilden ($r = \text{konstant}$), ändert sich das Dämpfungsmass ξ_{VD} während der ganzen Schwingzeit nicht mehr.

6.4.2 Coulomb-Dämpfung

Aus den im Anhang A2 für die Dämpfungsenergie $D_{o,CD}$ infolge Coulomb-Dämpfung und die Formänderungsenergie W_o berechneten Ausdrücken kann das Dämpfungsmass ξ_{CD} des teilweise gerissenen Biegeträgers zu

$$\xi_{CD} = \frac{6 \cdot \bar{\mu} \cdot A \cdot j \cdot \sigma_b \cdot \tau_{v,m}(\bar{\sigma}_e)}{B} \cdot \frac{v_m(\sigma_{e,d}) \cdot \int_0^r \sin^2\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \cdot dx}{H \cdot \sigma_{b,d}^2 \cdot C_o \cdot \int_0^r \sin^2\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \cdot dx + x_{Na} \cdot \sigma_{b,d}^2 \cdot C_1 \cdot \int_r^{l/2} \sin^2\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \cdot dx} \quad (6.33)$$

berechnet werden.

In Bild 61 ist wiederum für den in [3.1] beschriebenen Balken B3 der zweite Teil von Gl. (6.33) in Funktion der Stahlspannung $\sigma_{e,d}$ sowie des Quotienten r/l dargestellt.

Bild 61: Dämpfungsmass ξ_{CD} infolge Coulomb-Dämpfung eines ganzen Stahlbetonträgers bei fortschreitender Rissausbreitung

Im ungerissenen Zustand, entsprechend einer Stahlspannung $\sigma_{e,d} < 60 \text{ N/mm}^2$, ist $\xi_{CD} = 0$. Bei einer Erhöhung der Biegebeanspruchung über das Rissmoment M_R bzw. einer Vergrößerung der Stahlspannung über 60 N/mm^2 bilden sich in Trägermitte sehr rasch zahlreiche Risse aus. Damit wird eine Reibungskraft aufgebaut, welche die starke Zunahme des Dämpfungsmasses ξ_{CD} zur Folge hat. Mit weiter zunehmender Beanspruchung verlangsamt sich die Ausbreitung der Risse, da im Bereich der Trägerenden die Zunahme der Beanspruchung wesentlich geringer ist. Die Reibungskraft F_{CD} nimmt deshalb auch nur noch sehr langsam zu. Dazu kommt noch, dass die Biegeelemente nahe bei den Auflagern für die dynamischen Eigenschaften weniger bedeutend sind als die Elemente in Trägermitte (vgl. Gleichungen (2.3) und (6.5)). Auch wenn die Reibungskraft F_{CD} mit steigender Beanspruchung noch langsam anwächst, fällt das Dämpfungsmass ξ nach Erreichen eines maximalen Wertes mit steigender Beanspruchung bzw. Stahlspannung ab, da der Einfluss der Amplitudenabhängigkeit der Coulomb-Dämpfung nun voll zum Tragen kommt (vgl. Gl. (6.22)). Bei hoher Beanspruchung, d.h. nach Ausbildung der möglichen Biegerisse, geht die in Bild 61 dargestellte Kurve in die in Bild 59 für den vollkommen gerissenen

Träger dargestellte Kurve über.

6.4.3 Viskose Dämpfung kombiniert mit Coulomb-Dämpfung

In Bild 62 ist das aus den Gleichungen (6.32) und (6.33) berechnete Dämpfungsmass

$$\xi = \xi_{VD} + \xi_{CD}$$

eines teilweise gerissenen Stahlbetonbiegeträgers in Funktion der Stahlspannung $\sigma_{e,d}$ bzw. des Quotienten r/l dargestellt. Für d und $\bar{\mu} \cdot A$, d.h. für die Materialparameter der viskosen Dämpfung und der Coulomb-Dämpfung, wurden dabei die in der Figur angegebenen Werte angenommen. Es muss hier darauf hingewiesen werden, dass die einzelnen Punkte der dargestellten Kurve das Dämpfungsmass des ganzen Trägers bei einer bestimmten maximalen Stahlspannung in Trägermitte und der dabei maximal möglichen Anzahl Risse angeben.

Bild 62: Dämpfungsmass $\xi = \xi_{VD} + \xi_{CD}$ eines ganzen Stahlbetonträgers bei fortschreitender Rissausbreitung (unter Annahme bestimmter numerischer Werte für d und $\bar{\mu} \cdot A$)

Bei einem teilweise gerissenen Träger, welcher durch eine kleinere Belastung beansprucht wird, welche die Risse verursacht hat und bei welchem demzufolge keine neuen Risse mehr auftreten, nimmt das Dämpfungsmass wie in Bild 59 mit zunehmender Beanspruchung ab.

7. Numerische Angaben und Vergleich mit Versuchsergebnissen

In diesem Kapitel soll mit der Anwendung des im vorhergehenden Kapitel für einen Biegeträger hergeleiteten Dämpfungsmodells auf verschiedene, in Versuchen geprüfte Biegeträger abgeklärt werden, ob die wirklichen Verhältnisse damit genügend zutreffend erfasst werden können. Zuerst werden Angaben über die Grösse der bis jetzt noch nicht quantifizierten und nur in Versuchen bestimmbaren Dämpfungs- und Verbundparameter gemacht.

Die in [3.1] beschriebenen Versuchsbalken (eigene Versuche) werden in Gedanken mit den durch diese Werte und das Dämpfungsmodell festgelegten Dämpfungseigenschaften in einer dynamischen Berechnung verschiedenen Ausschwing- und Resonanzversuchen, entsprechend den effektiv vorgenommenen Versuchen, unterworfen und die resultierenden Amplituden mit den tatsächlich gemessenen Amplituden verglichen. Das Dämpfungsmodell wird, soweit möglich, zusätzlich anhand von fremden Versuchen überprüft.

Abschliessend werden die Dämpfungseigenschaften von Beton und Leichtbeton einander gegenübergestellt sowie der Einfluss einer Vorspannung auf die Dämpfungseigenschaften diskutiert.

7.1 Quantitative Angaben über die Dämpfungsparameter eines Biegeelementes

7.1.1 Viskose Dämpfung

Der spezifische Dämpfungskoeffizient d kann mit dem in den Versuchen festgestellten Wert für das Dämpfungsmass ξ_{VD}^{el} bzw. ξ_{VD} infolge viskoser Dämpfung aus den Gleichungen (2.25) bzw. (5.4) und (5.7) berechnet werden. Nach Gl. (2.25) beträgt der spezifische Dämpfungskoeffizient d eines unbewehrten Betonkörpers

$$d = \frac{2 \cdot \pi \cdot \beta^2}{E_b} \cdot \xi_{VD}^{el} \quad . \quad (7.1)$$

Nach Gl. (5.4) beträgt der spezifische Dämpfungskoeffizient d eines bewehrten und gerissenen Betonkörpers

$$d = \frac{2 \cdot \pi \cdot \beta^2}{E_b} \cdot C_1 \cdot \xi_{VD}^{el} \quad , \quad (7.2)$$

während aus Gl. (5.7) der spezifische Dämpfungskoeffizient d eines bewehrten und ungerissenen Betonkörpers aus

$$d = \frac{2 \cdot \pi \cdot \beta^2}{E_b} \cdot C_o \cdot \xi_{VD}^{el} \quad (7.3)$$

berechnet werden kann.

Sofern in den Gleichungen (7.1), (7.2) und (7.3) jeweils dasselbe Dämpfungsmass ξ_{VD}^{el} eingesetzt wird, ergeben sich für unbewehrte und bewehrte, bzw. gerissene und ungerissene Betonkörper unterschiedliche spezifische Dämpfungskoeffizienten ($C_1 \neq C_0 \neq 1$). Für d könnten in jedem Fall dieselben Werte berechnet werden, wenn jeweils nur die im Beton gespeicherte Formänderungsenergie W_0 berücksichtigt und der Energieanteil der Bewehrung vernachlässigt würde ($C_1 = C_0 = 1$, vgl. auch Abschnitt 5.2.1.1).

In den in [3.1] beschriebenen eigenen Versuchen konnte eine Veränderung des Dämpfungsmasses ξ_{VD}^{el} während der Rissbildung nicht oder nur unbedeutend festgestellt werden, da bei allen Versuchskörpern schon vor Versuchsbeginn mehrere Risse vorhanden waren. Zur Abklärung der Frage, ob sich das Dämpfungsmass ξ_{VD}^{el} während der Rissbildung ändert oder nicht, wären weitere Versuche notwendig.

Im folgenden wird angenommen, dass bei der Berechnung der Formänderungsenergie sowohl der Beton als auch der Bewehrungsstahl berücksichtigt werden müssen. Somit ergeben sich aus den Gl. (7.1) bis (7.3) bei gleichem Dämpfungsmass ξ_{VD}^{el} unterschiedliche spezifische Dämpfungskoeffizienten d bzw. bei gleichbleibenden spezifischen Dämpfungskoeffizienten d unterschiedliche Dämpfungsmass ξ_{VD}^{el} .

Eine Auswertung der zahlreichen Ergebnisse der in Kapitel 3 beschriebenen Versuche an Stahlbetonbiegeträgern und Betonproben ergab, dass das Dämpfungsmass ξ_{VD}^{el} bzw. das logarithmische Dekrement δ_{VD}^{el} und der Verlustfaktor η_{VD}^{el} des Betons und des Leichtbetons praktisch in allen Fällen wie folgt festgelegt werden kann:

	<u>Beton:</u>	<u>Leichtbeton:</u>	
Dämpfungsmass ξ_{VD}^{el}	0.006	0.005	
Logarithmisches Dekrement δ_{VD}^{el}	0.038	0.031	(7.4)
Verlustfaktor η_{VD}^{el}	0.012	0.010	

Mit diesen Angaben wird den in Kapitel 3 als wichtig beschriebenen Einflussfaktoren für das Dämpfungsverhalten von unbewehrtem Beton bzw. Leichtbeton

- dem Wassergehalt
- dem Alter

nicht Rechnung getragen. Diese Vereinfachung ist aus den folgenden Gründen statthaft:

- Im konstruktiven Ingenieurbau, welcher nahezu sämtliche Tragwerke umfasst, für welche eine dynamische Analyse durchgeführt werden muss, wird meist ein Beton bzw. Leichtbeton mit ähnlichem Wasser-Zement-Faktor (0.45 bis 0.50) verwendet.

- Das Alter des Betons bzw. Leichtbetons hat nur in den ersten drei bis vier Wochen nach dem Erhärtungsbeginn einen Einfluss auf dessen Dämpfungseigenschaften (vgl. Bild 33).

Mit den in (7.4) für das Dämpfungsmass ξ_{VD}^{el} gemachten Angaben und mit

$E_b = 30'000 \text{ N/mm}^2$
 $\beta_{p,b} = 30.0 \text{ N/mm}^2$

bzw. $E_{lb} = 17'500 \text{ N/mm}^2$
 $\beta_{p,lb} = 30.0 \text{ N/mm}^2$

erhält man aus den Gleichungen (7.1) bis (7.3) und den in Tabelle 1 für $\mu = 1.01\%$ aufgeführten Werten für C_1 und C_0 die in Tabelle 2 angegebenen spezifischen Dämpfungskoeffizienten d.

		$d_b \quad [N/mm^2]$	$d_{lb} \quad [N/mm^2]$
unbewehrter Betonkörper	Gl.(7.1)	0.00113	0.00162
bewehrter und gerissener Betonträger	Gl.(7.2)	0.00675	0.00832
bewehrter und ungerissener Betonträger	Gl.(7.3)	0.00141	0.00239

Tabelle 2: Spezifische Dämpfungskoeffizienten d

7.1.2 Coulomb-Dämpfung

Der Wert des Produktes $\bar{\mu} \cdot A$ (vgl. Gl. (5.11)) bzw. die Grösse des Gleitreibungskoeffizienten $\bar{\mu}$ und des Proportionalitätskoeffizienten A (vgl. Gl. (5.10)) kann einerseits direkt mit Hilfe von Versuchen zur Erfassung des dynamischen Verbundverhaltens und andererseits auf indirektem Weg aus dem experimentell ermittelten Dämpfungsverhalten von Stahlbetonbiegeträgern bestimmt werden.

Bis jetzt sind keine Versuche zur Erfassung des dynamischen Verbundverhaltens (z.B. Ausziehversuche bei hoher Belastungsgeschwindigkeit und oft wiederholter Belastung) bekannt geworden, aus welchen Hinweise auf die Grösse der Koeffizienten $\bar{\mu}$ und A abgeleitet werden können.

Im folgenden soll deshalb versucht werden, die Grösse des Produktes $\bar{\mu} \cdot A$ - die Koeffizienten $\bar{\mu}$ und A können hier nicht einzeln ermittelt werden - anhand der in [3.1] beschriebenen eigenen Versuche zu ermitteln.

Durch numerische Integration der Differentialgleichung (2.68) eines Schwingers mit kombinierter viskoser Dämpfung und Coulomb-Dämpfung ($F_{CD} = \text{konstant}$)

wurde der beim Ausschwingversuch zu erwartende Amplitudenverlauf der in [3.1] beschriebenen Versuchsträger für ein Dämpfungsmass ξ_{VD}^{el} von 0.006 (Beton) bzw. 0.005 (Leichtbeton) und verschiedene Parameter F_{CD}/k berechnet.

Als Beispiel sind in Bild 63 die für einen Ausschwingversuch des Balkens B3 (vgl. [3.1]) mit $\xi_{VD}^{el} = 0.006$ und mehrere Werte von F_{CD}/k berechneten Amplituden in zu Bild 9 analoger Art dargestellt.

Bild 63: Berechneter Amplitudenverlauf beim Ausschwingversuch für verschiedene Verhältnisse F_{CD}/k (F_{CD} = konstant angenommen)

Bild 64c: Versuchsträger LB3, Amplitudenverlauf verschiedener Ausschwingversuche, Versuchsergebnisse und Ergebnisse der theoretischen Berechnung (bei konstant angenommener Reibungskraft F_{CD})

In Bild 64a sind die gemessenen Amplituden der am Balken B3 durchgeführten Ausschwingversuche (vgl. Bild 35) ebenfalls in zu Bild 9 analoger Darstellung aufgetragen. Durch den Vergleich der Bilder 63 und 64a kann aus Bild 63 das im Versuch vorhandene Verhältnis F_{CD}/k bzw. die Reibungskraft F_{CD} bestimmt werden. Die Grösse dieser Reibungskraft stimmt aber noch nicht mit der effektiv in der Verbundzone wirkenden Reibungskraft F_{CD} überein. Bei einem Schwinger, der durch die Differentialgleichung (2.68) beschrieben wird, beträgt die durch Coulomb-Dämpfung dissipierte Energie $D_{o,CD}$ (vgl. Gl. (2.58))

$$D_{o,CD} = 4 \cdot F_{CD} \cdot z_o \quad . \quad (7.5)$$

Die durch die effektive Reibungskraft $F_{CD,eff}$ in der Verbundzone eines Biegeträgers dissipierte Energie $D_{o,CD}$ beträgt gemäss den Gleichungen (6.19) und (6.20)

$$D_{o,CD} = 4 \cdot F_{CD,eff} \cdot v_m(\sigma_{e,d}) \quad . \quad (7.6)$$

Damit ein Stahlbetonbiegeträger durch die Differentialgleichung (2.68) beschrieben werden kann, muss somit die für die Rechnung massgebende Reibungskraft F_{CD} aus

$$F_{CD} = F_{CD,eff} \cdot \frac{v_m(\sigma_{e,d})}{z_o} \quad (7.7)$$

berechnet werden. Umgekehrt erhält man aus Gl. (7.7) und dem mit Hilfe der Bilder 63 und 64 ermittelten Verhältnis F_{CD}/k die effektiv wirkende Reibungskraft $F_{CD,eff}$ aus

$$F_{CD,eff} = F_{CD} \cdot \frac{z_o}{v_m(\sigma_{e,d})} \quad . \quad (7.8)$$

Aus den Gleichungen (6.20) und (7.7) kann das Produkt $\bar{\mu} \cdot A$ aus

$$\bar{\mu} \cdot A = \frac{F_{CD}}{k} \cdot k \cdot \frac{z_o}{v_m(\sigma_{e,d})} \cdot \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot j \cdot \emptyset \cdot \tau_{v,m}(\bar{\sigma}_e)} = \frac{F_{CD,eff}}{2 \cdot 1 \cdot j \cdot \emptyset \cdot \tau_{v,m}(\bar{\sigma}_e)} \quad (7.9)$$

berechnet werden. In Tabelle 3 sind die aus Gl. (7.9) berechneten Werte von $\bar{\mu} \cdot A$ für alle in [3.1] beschriebenen Versuchsbalken und für verschiedene Beanspruchungsstufen bzw. verschiedene Prüfungszeitpunkte und Risszustände angegeben.

Prüfphase		Beanspruchungsstufe (Definition vgl. [3.1])	$\bar{\mu} \cdot A$						
			B 1	B 2	B 3	LB 1	LB 2	LB 3	LB 4
Versuchsablauf	1 Phase (l=7.88m)	2.5-0-1	-	0	0.027	0	0.018	0.028	0.024
		3.5-0-1	0	0.024	0.019	0	0.013	0.016	0.026
		4.5-0-1	0	0.024	0.018	0.016	0.011	0.016	0.025
	2. Phase (l=7.88m)	4.5-0-2	0.013	0.021	0.014	0.011	0.010	0.012	0.019
	3. Phase (l=4.84m)	2.5-0-3	0.020	0.030	0.017	0.012	0.024	0.025	0.023
		3.5-0-3	0.020	0.030	0.017	0.015	0.024	0.025	0.028
		4.5-0-3	0.019	0.030	0.017	0.022	0.024	0.025	0.028
	4. Phase (l=7.88m)	4.5-0-4	0.013	0.020	0.012	0.010	0.010	0.012	0.012

Tabelle 3: Versuchsbalken nach [3.1], Werte für $\bar{\mu} \cdot A$

Die Werte für die Federsteifigkeit k und die maximale Amplitude z_0 entsprechen den Versuchsergebnissen. Die Relativverschiebung $v_m(\sigma_{e,d})$ wurde durch Lösen der Differentialgleichung des verschieblichen Verbundes (Gl. (4.4)) für die Stahlspannung $\sigma_{e,d}$ (entsprechend der Amplitude z_0) und den im Versuch festgestellten mittleren Rissabstand s berechnet. Die Verbundspannung $\tau_{v,m}(\bar{\sigma}_e)$ entspricht der über die ganze Balkenlänge gemittelten Verbundspannung bei der Stahlspannung $\sigma_{e,d}$.

Die Werte für das Produkt $\bar{\mu} \cdot A$ variieren innerhalb eines recht schmalen Bereichs zwischen etwa

$$0.01 \leq \bar{\mu} \cdot A \leq 0.03 \quad ,$$

(7.10)

d.h. die Reibungskraft F_{CD} beträgt beim hier verwendeten Torstahl zwischen 1% und 3% der durch die mittlere Verbundspannung vom Stahl auf den Beton übertragenen Kraft. Es fällt auf, dass das Produkt $\bar{\mu} \cdot A$ mit zunehmender Versuchsdauer, mit Ausnahme der für die 3. Prüfphase angegebenen Werte, vom bei Versuchsbeginn etwas grösseren Wert bis zu einem etwas geringeren Wert bei der 2. bzw. 4. Prüfphase abnimmt (in der 4. Prüfphase, welche nach Abschluss des eigentlichen Versuchsprogramms durchgeführt wurde und von welcher keine Versuchsergebnisse in [3.1] enthalten sind, wurden an allen Versuchsträgern zusätzliche Ausschwingversuche vorgenommen). Es scheint, dass infolge der recht grossen Lastwechselzahlen und der hohen Wechselbeanspruchung der Gleitreibungskoeffizient $\bar{\mu}$ im Laufe der Zeit vermindert wurde. Ebenso wäre auch denkbar, dass die Kontaktfläche zwischen dem Stahl und dem Beton während

des Versuchs eine Veränderung erfuhr, und dass sich dabei nebst dem Gleitreibungskoeffizienten $\bar{\mu}$ auch der Koeffizient A veränderte.

7.2 Vergleich des theoretischen Modells mit eigenen Versuchen

Mit den in den Kapiteln 5 und 6 sowie im vorhergehenden Abschnitt 7.1 festgelegten Dämpfungseigenschaften eines Biegeelementes bzw. Biegeträgers können die an den in [3.1] beschriebenen Versuchsträgern durchgeführten Ausschwing- und Resonanzversuche nachgerechnet werden.

Die drei Betonträger und die vier Leichtbetonträger zeigten alle ein qualitativ ähnliches Dämpfungsverhalten (vgl. Bild 35). Ebenso ergaben die Beanspruchungsstufen mit den Zusatzmassen ähnliche Resultate wie diejenigen ohne Zusatzmasse.

Bei den Ausschwingversuchen werden hier deshalb nur die Versuchsergebnisse der ohne Zusatzmassen an den Betonträgern B3 und B1 und dem Leichtbetonträger LB3 durchgeführten Beanspruchungsstufen mit den am Modell erhaltenen Resultaten verglichen.

Bei den Resonanzversuchen wird die Nachrechnung nur für einige Beanspruchungsstufen des Balkens B3 durchgeführt. Die dynamische Berechnung der Versuchsträger erfolgte am Modell des Einmassenschwingers.

Der Verlauf der Amplituden in Funktion der Zeit wurde sowohl bei den Ausschwing- als auch bei den Resonanzversuchen mit Hilfe eines Computerprogramms durch schrittweise numerische Integration der Bewegungsdifferentialgleichung berechnet. Die dynamischen Eigenschaften des Einmassenschwingers wurden wie folgt bestimmt:

- Die Masse m wurde gemäss Gl. (2.3) berechnet.
- Die Steifigkeit k wurde aus den in den Versuchen ermittelten Last-Durchbiegungs-Diagrammen bestimmt. Nichtlineares Verhalten, d.h. eine variable Federsteifigkeit ($k \neq \text{konstant}$) bzw. ein nichtlineares Last-Durchbiegungs-Diagramm konnte durch das Rechenprogramm berücksichtigt werden.
- Die Dämpfung (viskose Dämpfung, Coulomb-Dämpfung) wurde gemäss den Kapiteln 5 und 6 ermittelt. Für den spezifischen Dämpfungskoeffizienten d und das Produkt $\bar{\mu} \cdot A$ wurden die im vorhergehenden Abschnitt 7.1.1 bzw. in Tabelle 3 angegebenen Werte eingesetzt. Das Rechenprogramm war ausserdem im Stande, nebst einer konstanten Reibungskraft ($F_{CD} = \text{konstant}$) auch eine amplitudenabhängige Reibungskraft ($F_{CD} \neq \text{konstant}$) zu berücksichtigen.

7.2.1 Ausschwingversuche

In den Bildern 64b und 64c sind die bei den Ausschwingversuchen an den Balken B1 und LB3 festgestellten Amplituden in zu Bild 64a bzw. Bild 9 analoger Art durch ausgezogene Linien dargestellt. Die in denselben Bildern eingetragenen gestrichelten Linien entsprechen den mit einer konstanten Reibungskraft $F_{CD} = \text{konstant}$ berechneten Amplituden.

Der Vergleich von zueinandergehörenden Linien zeigt, dass bei grösseren Amplituden die rechnerisch ermittelten Amplituden sehr gut mit den Versuchsergebnissen übereinstimmen. Dies konnte erwartet werden, da die Annahme einer konstanten, amplitudenunabhängigen Reibungskraft vor allem bei grösseren Amplituden sehr gut zutrifft. Bei kleiner werdenden Amplituden werden die Abweichungen zwischen den Versuchen und Berechnungen etwas grösser. Im allgemeinen werden hier die Schwingungen in der theoretischen Berechnung etwas zu stark gedämpft, da die Annahme einer konstanten, amplitudenunabhängigen Reibungskraft (bzw. Verbundspannung, vgl. Bild 40) bei geringeren Amplituden weniger gut zutrifft. Die Verbundspannungen nehmen bei kleinen Beanspruchungen zum Teil nahezu linear mit steigender Beanspruchung bzw. Amplitude zu, so dass die Schwingung in Wirklichkeit weniger stark gedämpft ist als aufgrund der Berechnung zu erwarten ist.

Wenn die Annahme einer konstanten, amplitudenunabhängigen Verbundspannung bzw. Reibungskraft fallengelassen wird und der theoretischen Berechnung dafür der in Bild 40 angegebene Zusammenhang zwischen der mittleren Verbundspannung bzw. Reibungskraft und der Stahlspannung bzw. Amplitude zugrunde gelegt wird, stimmen die Berechnungsergebnisse auch bei geringeren Amplituden sehr gut mit den Versuchsergebnissen überein. Die Resultate der derart für den Balken B3 berechneten Ausschwingversuche sind in Bild 65 dargestellt. Der Aufwand für eine derartige Berechnung ist jedoch wesentlich grösser als wenn mit der vereinfachenden Annahme einer konstanten, amplitudenunabhängigen Verbundspannung bzw. Reibungskraft gerechnet wird. Da eine Verbesserung der Resultate nur im Bereich von kleinen Amplituden möglich ist, wird sich dieser Mehraufwand nur in den seltensten Fällen lohnen. Immerhin kann durch diese verfeinerte Berechnung gezeigt werden, dass mit dem gewählten Modell die experimentellen Resultate sehr schön bestätigt werden können. Gleichzeitig ist damit auch der Einfluss dieser vereinfachenden Annahme auf die Rechnungsergebnisse abschätzbar.

Bild 65: Versuchsträger B3, Amplitudenverlauf verschiedener Ausschwingversuche, Versuchsergebnisse und Ergebnisse der theoretischen Berechnung (Reibungskraft $F_{CD} \neq \text{konstant}$ angenommen)

7.2.2 Resonanzversuche

In Bild 66 ist als Beispiel die während einer Beanspruchungsstufe am Balken B3 ermittelte Resonanzkurve durch eine ausgezogene Linie dargestellt.

Bild 66 : B3, Vergleich einer theoretisch berechneten Resonanzkurve (F_{CD} = konstant, angegebenes Last-Durchbiegungs-Diagramm) mit den entsprechenden Versuchsergebnissen

Das in den Versuchen ermittelte und für die nachstehend beschriebenen Berechnungen verwendete Last-Durchbiegungs-Diagramm ist ebenfalls in Bild 66 angegeben.

Bei der theoretischen Berechnung der Resonanzkurve derselben Beanspruchungsstufe des Balkens B3 wurde wiederum von der vereinfachenden Annahme einer konstanten, amplitudenunabhängigen Verbundspannung bzw. Reibungskraft Gebrauch gemacht. Die mit der im Versuch gemessenen Erregerkraft berechnete Resonanzkurve ist mit einer gestrichelten Linie eingetragen. Die Übereinstimmung von Versuch und Rechnung ist bei kleinen Amplituden ausserordentlich gut. Im Bereich des Resonanzmaximums wird die bei steigender Erregerfrequenz gemessene Amplitude wegen des nichtlinearen Verhaltens des Trägers (vgl. Abschnitt 5.1) durch die Rechnung unterschätzt. Hingegen ist anzunehmen, dass beim Versuch mit fallender Erregerfrequenz die maximal mögliche Amplitude wegen des nichtlinearen Verhaltens des Trägers nicht erreicht wur-

wurde, so dass es verständlich erscheint, dass durch die Rechnung ein grösserer Wert ermittelt wurde.

In Bild 67 sind die bei Resonanz am Balken B3 nach abgeschlossener Rissbildung erzielten maximalen Amplituden $z_{\max}$ in Funktion der aufgebrachten Erregerkraft P_0 durch sternförmige Symbole dargestellt.

Bild 67: B3, Amplituden in Funktion der Erregerkraft beim Resonanzversuch

Die theoretische Berechnung wurde für drei verschiedene Fälle durchgeführt. Mit gestrichelten Linien sind die Resultate für einen Schwinger mit konstanter Federsteifigkeit k dargestellt. Sofern nur eine viskose Dämpfung vorhanden ist, können die Amplituden $z_{\max}$ aus Gl. (2.36) berechnet werden. Bei einer kombinierten Dämpfung wird zum Erreichen einer bestimmten Amplitude $z_{\max}$ eine grössere Erregerkraft P_0 benötigt. Die numerische Berechnung bestätigt zudem den im Abschnitt 2.5.3 gemachten Hinweis, wonach für Erregerkräfte P_0

$$P_0 < \frac{4 \cdot F_{CD}}{\pi} = \frac{4 \cdot 53.6}{\pi} = 68.2 \text{ N}$$

keine Bewegung entstehen kann.

Die ausgezogene Linie in Bild 67 stellt die mit dem effektiven Steifigkeitsverhalten (vgl. Bild 66) ermittelten Resultate dar. Im Bereich von kleinen Amplituden $z_{\max}$ sind hier die Amplituden gegenüber der Berechnung mit konstanter Steifigkeit etwas grösser, da der Schwinger gesamthaft gesehen etwas "weicher" ist. In der Nähe des Resonanzmaximums können die Amplituden $z_{\max}$ wegen der starken Nichtlinearität des Last-Durchbiegungs-Diagramms nicht zuverlässig ermittelt werden, da das Rechenprogramm nicht in der Lage ist, die zwei bis drei verschiedenen möglichen stationären Amplituden zu berechnen.

Gesamthaft gesehen ist die Uebereinstimmung zwischen der theoretischen Berechnung und den Versuchsergebnissen bei den Resonanzversuchen nicht mehr ganz so gut wie bei der Nachrechnung der Ausschwingversuche (vgl. Bild 65). Die Abweichungen können wie folgt erklärt werden:

- Im Versuch bestand bei jeder noch so sorgfältigen Änderung der Erregerfrequenz nie absolute Gewissheit, ob das Resonanzmaximum auch effektiv erreicht wurde.
- Bei der numerischen Berechnung gelingt es nicht, beim Kippen der Resonanzkurve im Bereich des Resonanzmaximums (nichtlineares Verhalten) die zwei oder drei verschiedenen zur entsprechenden Erregerfrequenz gehörenden stationären Amplituden zu bestimmen (vgl. Bild 66). Somit ist es auch bei der theoretischen Berechnung möglich, dass das effektive Amplitudenmaximum nicht erreicht wird.

7.3 Kontrolle des Modells anhand fremder Versuche

In diesem Abschnitt soll mit Hilfe der von Penzien [3.18] vorgenommenen Untersuchungen zur Erfassung der Dämpfungseigenschaften von schlaff bewehrten und vorgespannten Betonträgern gezeigt werden, dass das entwickelte Dämpfungsmodell nicht nur mit den eigenen Versuchen [3.1] bestätigt werden kann. Dem Verfasser sind keine weiteren Versuche bekannt geworden, in welchen der Einfluss der Risse und der Rissbildung sowie der Beanspruchungshöhe auf die dynamischen Kenngrößen systematisch untersucht wurde.

Eine Nachrechnung der Versuche von Penzien [3.18] mit Hilfe des Dämpfungsmodells, wie sie im vorhergehenden Abschnitt 7.2 für die eigenen Versuche durchgeführt wurde, ist hier jedoch ausgeschlossen, da zahlreiche benötigte Daten entweder nicht erfasst oder in dem zur Verfügung stehenden Bericht nicht erwähnt wurden. Insbesondere fehlen die folgenden Angaben:

- Grösse der Amplitude in Funktion der Zeit bei den Ausschwingversuchen.
- Hinweise, über welche und über wieviele Perioden das bei den Ausschwingversuchen vorhandene Dämpfungsmass bzw. logarithmische Dekrement ermittelt wurde.
- Hinweise auf den Risszustand (Anzahl der Risse, Rissabstand).
- Grösse der Erregerkraft bei den Resonanzversuchen.

Aus diesen Gründen wird im folgenden nur zu zeigen versucht, dass die in [3.18] angegebenen Resultate und Feststellungen im wesentlichen mit den eigenen Versuchsergebnissen und Modellvorstellungen übereinstimmen.

Versuchs- balken	Abmessungen			Bewehrung			Resonanzversuch		Ausschwingversuch	
	L [mm] ②	B [mm] ③	H [mm] ④	Ø und Anordnung ⑤	μ [%] ⑥	μ' [%] ⑦	f _{gem} [Hz] ⑧	ξ [%] 1. 2. 3. Versuch ⑨	f _{unger} [Hz] ⑩	ξ [%] 1. 2. 3. 4. Versuch ⑪
Nr. ①										
17	2286	152	152	1 Ø 28.6	5.56	0	76	2.08 2.28 gerissen	43	6.4 6.0 5.0 3.4
18	2286	152	152	1 Ø 19.1	2.44	0	90	0.96 1.16 ~ homogen	46	6.3 5.1 2.9
19	2286	152	152	2 Ø 28.6	3.71	3.71	88	0.94 1.31 ~ homogen	43	4.2 4.7 4.4
20	2286	152	152	2 Ø 19.1	1.63	1.63	89	0.96 1.11 ~ homogen	43	4.8 5.1 4.6 3.2
22	2286	152	152	2 Ø 19.1	1.63	1.63	85,82	1.08 1.25 2.50 homogen gerissen	49	5.0 2.0 2.4
24	2286	152	152	2 Ø 19.1	1.63	1.63	105,99	1.08 1.38 2.26 homogen gerissen	50	4.4 3.7 2.1

Tabelle 4: Versuche von Penzien [3.18]

Tabelle 4 gibt eine Uebersicht über die wesentlichen Versuchsparameter und Resultate der sechs in [3.18] beschriebenen schlaff bewehrten Betonträger. In den Kolonnen 1 bis 7 sind die Abmessungen und Bewehrungen dieser Versuchskörper festgehalten. Die Träger wurden im Alter von 28 Tagen geprüft.

Zuerst wurden Resonanzversuche mit sehr geringen Amplituden durchgeführt, wobei die Träger mit der in Tabelle 4 angegebenen geringen Stützweite von 1252 mm und entsprechend grossen Kragarmen von $0.224 \cdot L = 512$ mm (Frei-Frei-Schwingung) geprüft wurden. In den Kolonnen 8 und 9 (Tabelle 4) sind die bei diesen Resonanzversuchen festgehaltenen Werte für die Eigenfrequenzen und die Dämpfung angegeben. Die an den quasi ungerissenen Versuchsträgern Nr. 18, 19 und 20 ermittelten Werte für das Dämpfungsmass ξ bzw. das logarithmische Dekrement ϑ von

$$0.94\% \leq \xi \leq 1.38\%$$

bzw.

$$0.059 \leq \vartheta \leq 0.087$$

entsprechen sehr gut den in [3.1] beschriebenen Versuchsergebnissen. Die Energiedissipation dürfte hier mit grosser Wahrscheinlichkeit vor allem durch viskose Dämpfung erfolgt sein.

Bei den teilweise gerissenen Versuchsbalken Nr. 17, 22 und 24 (vgl. die geringeren Eigenfrequenzen) konnten zwischen der Bewehrung und dem Beton Reibungskräfte entstehen, was sich in der starken Erhöhung des Dämpfungsmasses ξ bzw. logarithmischen Dekrements ϑ

$$2.08\% \leq \xi \leq 2.50\%$$

$$0.131\% \leq \vartheta \leq 0.157$$

zeigt.

Anschliessend an die Resonanzversuche wurden Ausschwingversuche durchgeführt, wobei die Versuchsbalken an den Enden aufgelagert wurden. Die hier erzielten Durchbiegungen und Spannungen waren wesentlich grösser als bei den Resonanzversuchen. Die dabei festgestellten Eigenfrequenzen (vom Verfasser berechnet) sind in Kolonne 10 (Tabelle 4), das dabei festgestellte Dämpfungsmass in Kolonne 11 angegeben. In Bild 68 ist das in den Ausschwingversuchen ermittelte Dämpfungsmass ξ in Funktion der maximalen durch die Auslenkkraft P in Balkenmitte erzielten Stahlspannung $\sigma_{e,d}$ (vom Verfasser berechnet) aufgetragen. Die erreichten Amplituden und Spannungen waren so gross, dass die Versuchsträger wahrscheinlich über ihre ganze Länge gerissen waren, so dass ein grosser Teil der Energiedissipation durch Coulomb-Dämpfung erfolgen konnte. Bei geringen Amplituden waren die für das Dämpfungsmass festgestellten

Bild 68: Versuche von Penzien [3.18], Dämpfungsmass ξ in Funktion der Stahlspannung (Versuchsbalken 17, 18, 19, 20, 22, 24)

Werte sehr gross. Mit zunehmender Beanspruchung nahm auch hier die Dämpfung stark ab. Im Gegensatz zu den in [3.1] beschriebenen Versuchen sinkt hier das Dämpfungsmass ξ bei den Ausschwingversuchen im ganzen untersuchten Beanspruchungsbereich nie unter den Wert von 2.0%. Dies dürfte die folgenden Ursachen haben:

- Die Anzahl der Lastwechsel mit grossen Amplituden war bei jedem Versuchskörper sehr gering, da keine Resonanzversuche und nur einige wenige Ausschwingversuche mit grossen Amplituden durchgeführt wurden. In Abschnitt 7.1.2 wurde gezeigt, dass die Reibungskraft F_{CD} mit grösser werdender Anzahl Lastwechsel abnimmt, so dass im hier vorliegenden Fall eine grössere Reibungskraft wahrscheinlich ist.
- Die hier verwendeten Bewehrungsstähle wiesen eine andere Profilierung auf als die bei den in [3.1] beschriebenen Versuchen verwendeten Stähle.
- Aus dem Versuchsbericht [3.18] geht nicht genau hervor, über wieviele und über welche Perioden jedes Ausschwingversuches das Dämpfungsmass ξ ermittelt wurde. Es ist somit denkbar, dass ein bei grosser Stahlspannung $\sigma_{e,d}$ aufgetragenes Dämpfungsmass effektiv bei einer kleineren Stahlspannung gemessen wurde.

- Bei einigen Versuchsträgern mit grossem Bewehrungsgehalt (z.B. Nr. 19) wurde der Beton sehr stark beansprucht, so dass dessen Dämpfung vermutlich nicht mehr allein mit dem Modell der viskosen Dämpfung erfasst werden kann (Dämpfungsexponent $n > 2$).

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die eigenen Versuche von Penzien [3.18] qualitativ sehr gut und quantitativ teilweise bestätigt werden.

7.4 Vergleich Beton - Leichtbeton

Da nebst den eigenen Versuchen keine weiteren Versuche zur Ermittlung der Dämpfungseigenschaften von Leichtbetonträgern bekannt geworden sind, kann ein Vergleich der Dämpfungseigenschaften von analogen Beton- und Leichtbetonträgern (gleiche Abmessungen, Bewehrungen und Materialfestigkeiten) nur aufgrund der eigenen Versuchsergebnisse und des Dämpfungsmodells erfolgen.

Es können die folgenden Feststellungen gemacht werden:

- Das Dämpfungsmass ξ_{VD} infolge viskoser Dämpfung ist beim Leichtbeton gemäss den in Abschnitt 7.1 gemachten Angaben (vgl. Gl. (7.4)) mit

$$\xi_{VD,lb} = 0.005 = 0.5\%$$

nur geringfügig kleiner als dasjenige von Beton mit

$$\xi_{VD,b} = 0.006 = 0.6\%$$

Mit dem Verhältnis der E-Moduli von Leichtbeton und Beton

$$\frac{E_{lb}}{E_b} \cong 0.6 \quad (7.11)$$

ergibt sich aus den Gleichungen (7.1) bis (7.3) für alle spezifischen Dämpfungskoeffizienten d_{lb} des Leichtbetons

$$d_{lb} \cong 1.4 \cdot d_b \quad (7.12)$$

In Abschnitt 3.1 wurde darauf hingewiesen, dass vor allem die Bindemittelseigenschaften und der Volumenanteil des Bindemittels die Dämpfungseigenschaften eines Betons beeinflussen. Die Zuschlagstoffe spielen diesbezüglich nur eine Rolle als sie im Beton den Volumenanteil des Zementes bzw. des Mörtels mitbestimmen. Hochwertiger Leichtbeton wird im allgemeinen mit einem höheren Volumenanteil des Bindemittels hergestellt als normaler Beton. Die in [3.1] beschriebenen Leichtbetonversuchsträger wiesen ca. 30% mehr Bindemittel (350 kg/m³ Zement, 50 kg/m³ hydraulischer Kalk) auf

als die Betonträger (300 kg/m^3 Zement) und einen Wasser-Zement-Faktor von 0.6 gegenüber 0.5 der Betonträger. Der gegenüber dem Beton höhere Volumenanteil des Bindemittels und des Anmachwassers dürfte beim Leichtbeton für die in Gl. (7.12) angegeben grösseren spezifischen Dämpfungskoeffizienten d_{1b} des Leichtbetons verantwortlich sein. Andererseits ist zu erwarten, dass der Anteil des physikalisch gebundenen Wassers in der Zementmatrix des Leichtbetons etwas geringer ist als beim Beton, da auch gut vorge-nässte Leichtzuschlagstoffe im allgemeinen dazu neigen, Anmachwasser auf-zusaugen. Diese Tatsache dürfte den Einfluss des höheren Wassergehaltes des Leichtbetons etwas reduzieren.

- Das Dämpfungsmass ξ_{CD} infolge Coulomb-Dämpfung scheint beim Leichtbeton im Vergleich zum Beton ebenfalls etwas kleiner zu sein (vgl. Bilder 35 und 36). Aus Tabelle 3 geht hervor, dass das Produkt $\bar{\mu} \cdot A$ bei analogen Beton- und Leichtbetonträgern erwartungsgemäss in derselben Grössenordnung liegt. Bei gleicher Ausbildung der Bewehrung und gleicher Druckfestigkeit des Betons wird sich im Verbundbereich zwischen dem Beton und der Bewehrung so-wohl beim Leichtbeton als auch beim Beton jeweils ein ähnliches Gewölbe (vgl. Bild 44) mit denselben Radialspannungen σ_r ausbilden. Bei gleich grossem Gleitreibungskoeffizienten $\bar{\mu}$ werden demzufolge die Reibungskräfte F_{CD} beim Leichtbeton und beim Beton etwa gleich gross sein.

Bei Biegeträgern aus Leichtbeton ist der Rissabstand s wegen der geringe-ren Betonzugfestigkeit des Leichtbetons im allgemeinen kleiner als bei analogen Betonträgern. Aus Bild 55 bzw. Abschnitt 5.2.2.2 geht hervor, dass - vor allem bei höheren Stahlspannungen - bei kleinerem Rissabstand die mittlere Relativverschiebung v_m zwischen dem Stahl und dem Beton im allgemeinen kleiner ist als bei einem grösseren Rissabstand. Es ist des-halb wahrscheinlich, dass bei einem Biegeträger aus Leichtbeton bei gleich grosser Stahlspannung die durch Coulomb-Dämpfung dissipierte Energie $D_{o,CD}$ etwas geringer ist als bei einem analogen Biegeträger aus normalem Beton.

Der kleinere Rissabstand s bzw. die vermutlich etwas geringere Relativver-schiebung v_m sowie der geringere E-Modul des Leichtbetons (vgl. Gl. (7.11)) ergeben gemäss Gl. (5.23) für den Leichtbeton ein gegenüber dem Beton ge-ringeres Dämpfungsmass ξ_{CD} , womit die eingangs gemachte Feststellung be-kräftigt wird.

Gesamthaft gesehen ist das Dämpfungsmass von Leichtbetonbiegeträgern im gan-zen Beanspruchungsbereich etwas kleiner als dasjenige von analogen Biege-trägern aus Beton. Ein qualitativer Unterschied konnte nicht festgestellt werden, die quantitativen Unterschiede sind im allgemeinen eher gering. Leichtbetontragwerke weisen deshalb gegenüber Tragwerken aus normalem Beton kein grundsätzlich anderes Dämpfungsverhalten auf.

7.5 Einfluss einer Vorspannung

In Tabelle 5 sind die wichtigsten Versuchsparameter und Ergebnisse von zahlreichen durch verschiedene Autoren durchgeführten dynamischen Versuchen an zentrisch vorgespannten Betonträgern zusammengestellt.

Autor	Bezeichnung der Versuchsbalken	Abmessungen			σ_v [N/mm ²]	Art der Vorspannung	Resonanzversuch			Ausschwingversuch	
		L [mm]	B [mm]	H [mm]			f [Hz]	ξ	1. 2. 3. Versuch	f [Hz]	ξ [%]
Penzien [3.18]	1	2286	152	152	6.9	Kabel mit Verbund	91	0.54	0.67		
	2	2286	152	152	13.8		90	0.70	0.96		
	3	2286	152	152	20.6						
	4	2286	152	152	19.0		91	0.67	0.76		
	21	2286	152	152	8.1		88	0.63	0.76		
	23	2286	152	152	18.7		103	0.83			
Müller [3.20]	I - VI	3600	300	150	7.7 ÷ 10.9	Kabel mit Verbund				41 ÷ 57	0.72
Brondum-Nielsen [3.22]		6000	240	130	var.	Spannbett				5.6	0.35 ÷ 0.55
Fritz-de-la-Orta [3.21]	Serie A I - III	2000	100	100	0	Kabel ohne Verbund				74	1.75 ÷ 2.44
	Serie B IV - VI	2000	50	50	÷ 5.6 0 ÷ 26.5					36	1.11 1.83 1.19
Denkhaus/Dück [3.19]		2000	150	100	0	Kabel ohne Verbund	28	2.6			
					0.3		34	1.1			
					7.6		41	1.0			
Holland [3.24]	3,4	4000	150	100	5.7	Kabel ohne V.				10.4	0.3 ÷ 1.0
	5,6	4000	150	100	6.0	Kabel mit V.				10.8	0.3 ÷ 0.6
	7,8	4000	150	100	6.1	Kabel mit V.				11.0	0.3 ÷ 0.6
	9,10	4000	150	100	11.1	Kabel mit V.				11.3	0.3 ÷ 0.5

Tabelle 5: Fremde Versuche an zentrisch vorgespannten Betonträgern

Aus den für die Dämpfung festgestellten Werten geht hervor, dass das Dämpfungsmass ξ von vorgespannten, injizierten sowie ungerissenen Betonträgern nur im Bereich von

$$0.003 \leq \xi \leq 0.0096 \quad (7.13)$$

variiert und somit sehr gering ist. Es können die folgenden Feststellungen gemacht werden:

- In [3.24] wird der Einfluss der Beanspruchungshöhe, d.h. der zentrischen Spannung σ_v infolge Vorspannung und der durch die dynamische Belastung erzeugten Spannung systematisch untersucht. Solange die Betonträger ungerissen bleiben, nimmt das Dämpfungsmass ξ mit zunehmender Beanspruchung nur ganz leicht zu. Auch bei anderen Autoren wird festgestellt, dass die Höhe der Vorspannung bzw. der Spannung σ_v nur einen geringen Einfluss auf das Dämpfungsmass ξ hat. Nur bei sehr kleinen Spannungen σ_v infolge Vorspannung, bei welchen während der dynamischen Belastung Zugspannungen und damit Biegerisse auftreten konnten, sowie bei sehr hohen Spannungen σ_v , bei welchen nichtlineare Effekte (Hysteresis-Dämpfung) zu erwarten waren, wurden für das Dämpfungsmass zum Teil erheblich grössere Werte und damit ein Einfluss der Beanspruchungshöhe festgestellt.
Der geringe Einfluss der Beanspruchungshöhe lässt darauf schliessen, dass bei vorgespannten, injizierten und ungerissenen Betonträgern die Schwingungsenergie vor allem durch viskose Dämpfung dissipiert wird.
- Die Unterschiede in den für das Dämpfungsmass ξ festgestellten Werten (vgl. Gl. (7.13)) können teilweise mit dem unterschiedlichen Feuchtigkeitsgehalt der einzelnen Prüfkörper erklärt werden (vgl. Abschnitt 3.1). Die Versuchskörper hatten teils voneinander stark abweichende Abmessungen und konnten deshalb unterschiedlich schnell austrocknen, teils war ihr Alter zum Zeitpunkt ihrer Prüfung sehr verschieden.

Aufgrund der gemachten Feststellungen erscheint es somit sehr gut möglich, dass die Dämpfungseigenschaften von vorgespannten, injizierten und ungerissenen Biegeträgern durch das Modell für das ungerissene Biegeelement (vgl. Bild 50) erfasst werden können.

Ohne Verbund vorgespannte Betonträger scheinen auch im ungerissenen Zustand eine gegenüber injizierten Spannbetonträgern etwas grössere Dämpfung zu haben (vgl. Versuche von [3.19], [3.21] und [3.24]). Aufgrund der zur Verfügung stehenden Versuchsangaben kann jedoch der Anteil der wahrscheinlich vorhandenen Coulomb-Dämpfung nicht bestimmt werden.

Versuche an teilweise vorgespannten, injizierten und gerissenen Spannbetonträgern wurden in bescheidenem Umfang von [3.18] durchgeführt. Die dabei festgestellte, zum Teil recht hohe Dämpfung lässt vermuten, dass solche

Träger wie Stahlbetonbiegeträger einen beträchtlichen Anteil an Coulomb-Dämpfung aufweisen. Es ist somit denkbar, dass das Dämpfungsmodell für das gerissene Biegeelement (vgl. Bild 49) auch auf teilweise vorgespannte und gerissene Spannbetonträger angewendet werden kann. Zur Abklärung dieses Sachverhaltes sind aber noch weitere Versuche notwendig.

8. Praktische Beispiele

In diesem Kapitel wird die Anwendbarkeit der beschriebenen Dämpfungsmodelle für ein gerissenes und ungerissenes Biegeelement auf praktische Beispiele untersucht. Zu Beginn wird das grundsätzliche Vorgehen beschrieben, an welches man sich bei der Ermittlung der Dämpfungseigenschaften einer Stahlbetonkonstruktion halten sollte. In einem separaten Abschnitt werden die Besonderheiten bei der Wahl des Dämpfungsmasses von Mehrmassenschwingern erläutert. Mit der Anwendung der Dämpfungsmodelle auf drei praktische Beispiele wird - in Erweiterung des in Kapitel 6 dargestellten Dämpfungsmodells für einen Biegeträger - dessen allgemeinere Verwendbarkeit untersucht. In einem weiteren Abschnitt werden der Geltungsbereich bzw. die Anwendungsgrenzen des beschriebenen Dämpfungsmodells abgesteckt.

8.1 Grundsätzliches Vorgehen

Bild 69 zeigt in der Form eines Flussdiagramms die Reihenfolge der wichtigsten Tätigkeiten, welche bei der Berechnung der durch die dynamische Belastung hervorgerufenen Amplituden eines Betontragwerks, dessen Dämpfungseigenschaften durch das in Kapitel 5 beschriebene Dämpfungsmodell charakterisiert werden können, ausgeführt werden müssen.

Die im folgenden verwendete Numerierung der einzelnen Tätigkeiten bzw. Arbeitsschritte bezieht sich auf die Numerierung in Bild 69. Die Tätigkeiten 1 bis 3 entsprechen dem üblichen Vorgehen bei einer dynamischen Analyse. Bei Schritt 4 muss vorerst die Grösse der auftretenden Amplituden bzw. Beanspruchungen abgeschätzt werden, damit in Schritt 5 eine möglichst zutreffende Schätzung bezüglich Anzahl und Lage der gerissenen und ungerissenen Biegeelemente gemacht werden kann.

Wenn die Amplituden bzw. die Beanspruchungen im ganzen Tragwerk so gering bleiben, dass keine Risse zu erwarten sind (Schritt 5a), kann aufgrund des Modells für das ungerissene Biegeelement (vgl. Bild 50) für das Dämpfungsmass der ganzen Konstruktion der im Abschnitt 7.1.1 angegebene amplitudenunabhängige Wert (nur Materialdämpfung)

$$\xi = \xi_{VD} = 0.006 \quad \text{für Beton bzw.}$$

$$\xi = \xi_{VD} = 0.005 \quad \text{für Leichtbeton}$$

eingesetzt werden. Bei Schritt 7 können damit durch Lösung des linearen Gleichungssystems (Gl. (2.9)) die Amplituden bzw. die Beanspruchungen berechnet werden. Zum Schluss (Schritt 8) muss kontrolliert werden, ob die Annahme einer ungerissenen Konstruktion (Schritt 5a) berechtigt war oder nicht.

Bild 69 : Grundsätzliches Vorgehen bei der dynamischen Berechnung eines Tragwerks aus Stahlbeton

Sollte sich dabei herausstellen, dass unter der berechneten Beanspruchung doch Risse entstehen, muss die Berechnung gemäss den Schritten 9 und 13 fortgesetzt werden.

Wenn die in Schritt 4 zu erfolgende Abschätzung der Amplituden bzw. Beanspruchungen ergibt, dass alle oder ein Teil der Biegeelemente gerissen sind (Schritte 5b und 5c), müssen bei der Ermittlung des Dämpfungsmasses ξ (Gl. (5.27) bzw. Gl. (6.28)) die Anteile ξ_{VD} (Schritt 9) und ξ_{CD} (Schritt 10) mit Hilfe der in den Abschnitten 5.2, 6.2, 6.3, 6.4 und 7.1 gemachten Angaben berechnet werden. Als Resultat von Schritt 10 erhält man einerseits die Reibungskraft F_{CD} und andererseits die Grösse des Dämpfungsmasses ξ_{CD} in Funktion der Amplitude bzw. der Beanspruchungshöhe. Die Antwort des Tragwerks kann auf zwei Arten berechnet werden:

Bei einer linearen Analyse (Gl. (2.9)), Dämpfung mit $\xi = \xi_{VD} + \xi_{CD} = \text{konst.}$ berücksichtigt) muss das amplitudenabhängige Dämpfungsmass ξ entsprechend der erwarteten Amplitude bzw. Beanspruchung zuerst geschätzt werden (Schritt 11). Nach erfolgter Berechnung der Amplituden bzw. Beanspruchungen (Schritt 12a) müssen in Schritt 13a die beiden getroffenen Annahmen, die Anzahl der gerissenen Biegeelemente (Schritt 5) und die Grösse des Dämpfungsmasses (Schritt 11) betreffend, überprüft werden. Wenn diese Annahmen bestätigt werden können, kann die Berechnung abgeschlossen werden. Sollten die Annahmen jedoch revidiert werden, muss die Berechnung ab Schritt 5 bzw. 11 wieder neu begonnen werden.

Bei einer nichtlinearen Analyse (Gl. (2.68)), Dämpfung mit $\xi = \xi_{VD}$ und F_{CD} berücksichtigt) erfolgt die Berechnung der Amplituden bzw. Beanspruchungen (Schritt 12b) aufgrund des Dämpfungsmasses ξ_{VD} und der Reibungskraft F_{CD} . Da auf diese Art die Amplitudenabhängigkeit der Dämpfung direkt berücksichtigt wird, muss in Schritt 13b nur noch die Annahme betreffend der Zahl der gerissenen Biegeelemente (Schritt 5) kontrolliert werden.

8.2 Bestimmung der Dämpfungseigenschaften von Mehrmassenschwingern

In diesem Abschnitt soll anhand von zwei Lösungsvorschlägen dargelegt werden wie die Dämpfung eines Mehrmassenschwingers, dessen Dämpfungseigenschaften durch die in Kapitel 5 beschriebenen Dämpfungsmodelle charakterisiert werden können, am geeignetsten in die dynamische Berechnung eingeführt werden soll.

a) Nichtlineares Gleichungssystem

Von Gl. (2.4) ausgehend können die Bewegungsgleichungen eines Mehrmassenschwingers mit kombinierter Dämpfung mit

$$[M] \cdot \{\ddot{z}\} + [C] \cdot \{\dot{z}\} + \{F_{CD}\} \cdot \text{sgn}\{\dot{z}\} + [K] \cdot \{z\} = \{P(t)\}$$

(8.1)

angegeben werden.

Mit der Dämpfungsmatrix $[C]$ soll ausschliesslich die Dämpfung infolge viskoser Dämpfung erfasst werden. Es wurde schon früher darauf hingewiesen, dass meist nur durch die Verwendung des Dämpfungsmasses die Dämpfung von Tragwerken wirklichkeitsnah erfasst werden kann, so dass die Dämpfungsmatrix $[C]$ anstelle von Gl. (2.7) am besten mit Hilfe von Gl. (2.14) aus den Dämpfungsmassen $\xi_{VD,i}$ der einzelnen Eigenschwingungen berechnet wird.

Wenn die dynamischen Eigenschaften des Systems in einigen ausgewählten Knoten konzentriert sein sollen (lumped), erhält man die Koeffizienten des Vektors $\{F_{CD}\}$ aus der Berechnung der Reibungskräfte in den zu den entsprechenden Knoten gehörenden Systemabschnitten. Bei verteilt angeordneten Eigenschaften (consistent) können die Koeffizienten $F_{i,CD}$ aus der Gl. (6.5) ermittelt werden. Die Lösung des Gleichungssystems (8.1) erfordert im allgemeinen einen recht hohen Aufwand. Die rechnerischen Ergebnisse sind dafür im ganzen Amplituden- und Frequenzbereich sehr genau.

b) Entkoppelte Schwingungsdifferentialgleichungen

Das Differentialgleichungssystem (8.1) kann nicht entkoppelt werden. Sofern gewisse Abweichungen vom rechnerisch exakten Resultat in Kauf genommen werden, kann dennoch von den entkoppelten Differentialgleichungen (2.9) ausgegangen werden. Die zu treffenden Vereinfachungen und die daraus resultierenden Abweichungen vom exakten Ergebnis sollen anhand eines Beispiels diskutiert werden.

In Bild 70 ist die experimentell ermittelte Resonanzkurve (Amplitude in Funktion der Erregerfrequenz) eines Mehrmassenschwingers mit n Freiheitsgraden, welcher durch eine periodisch verlaufende Erregerkraft mit variierender Erregerfrequenz Ω belastet wird, abgebildet.

Bild 70: Resonanzkurve eines Mehrmassenschwingers

Bei der Nachrechnung dieser Resonanzkurve müssen die amplitudenabhängigen Dämpfungsmasse ξ_i nun so gewählt werden, dass z.B. bei der Erregerfrequenz $\bar{\omega}$ gerade die der Amplitude $\bar{z}_0$ entsprechende Energie D_0 dissipiert wird. Da im allgemeinen mehrere Eigenschwingungsformen einen Beitrag zur Amplitude $\bar{z}_0$ liefern und somit auch mehrere Dämpfungsmasse ξ_i die Amplitude $\bar{z}_0$ beeinflussen, wird die Wahl des richtigen Dämpfungsmasses ξ_i gegenüber dem Einmassenschwinger wesentlich erschwert.

Im allgemeinen interessieren vor allem die Amplituden bei Resonanz, d.h. bei denjenigen Amplitudenmaxima, wo die Erregerfrequenz jeweils mit einer Eigenfrequenz des Systems übereinstimmt. Bei der Berechnung eines solchen Amplitudenmaximums ist der Anteil der übrigen Eigenschwingungsformen klein gegenüber dem Beitrag der bei dieser Frequenz angeregten Eigenschwingungsform. Somit kann auch das Dämpfungsmass ξ_i dieser hier einzig massgebenden Eigenschwingungsform unabhängig von den anderen Dämpfungsmassen festgelegt werden und zwar so, dass es gerade der bei dieser Frequenz erreichten Amplitude entspricht. Auf diese Weise können für alle Eigenschwingungen die zugehörigen Dämpfungsmasse berechnet werden.

Bei der Berechnung der Resonanzkurve muss demnach wie folgt vorgegangen werden:

- Lösen des Eigenwertproblems, Entkoppelung des Differentialgleichungssystems (8.1), wobei $\{F_{CD}\} = 0$ gesetzt wird.
- Berechnung der Dämpfungsmasse ξ_i der einzelnen Eigenschwingungen in Funktion der Amplitude.
- Mit den aus der Entkoppelung resultierenden Differentialgleichungen (2.9) können wie bei einem Einmassenschwinger die exakten Amplituden bei Resonanz ermittelt werden.

Ausserhalb der Resonanzbereiche, d.h. bei Erregerfrequenzen, bei welchen mehrere Eigenschwingungsformen an der Schwingung teilhaben, können mit dem angegebenen Vorgehen nicht die genauen Amplituden berechnet werden.

8.3 Einfacher Stahlbetonbiegeträger als Einmassenschwinger

In diesem Abschnitt soll für einen als einfachen Balken gelagerten Stahlbetonträger, entsprechend dem in Abschnitt 8.1 dargelegten Vorgehen, das Dämpfungsmass ξ in Funktion der Amplitude berechnet werden. Der Biegeträger soll durch eine harmonische Erregerkraft (vgl. Gl. (2.31)) belastet und als Einmassenschwinger betrachtet werden.

Bild 71 gibt eine Uebersicht über die wichtigsten Abmessungen und Daten des hier als Beispiel verwendeten Versuchsträgers B3, welcher in den in [3.1] beschriebenen Versuchen geprüft wurde.

Bild 71: Versuchsträger B3 (vgl. [3.1])

Für die Berechnung des Dämpfungsmasses wird von den folgenden Voraussetzungen ausgegangen:

- Die Annahmen der Gleichungen (5.16) und (6.16) sind gültig.
- Die Schritte 1 bis 3 (Bild 69) wurden schon erledigt.

Die folgende Numerierung bezieht sich auf die Numerierung in Bild 69.

4. Das Biegemoment des mit der Frequenz ω harmonisch schwingenden Biegeträgers kann aus Gl. (6.2) berechnet werden.
5. Es wird angenommen, dass die Erregerkraft bzw. die Biegebeanspruchung so gross ist bzw. früher einmal so gross war, dass der Träger schon auf seiner ganzen Länge vollständig gerissen ist.
Auch wenn der Träger in der Nähe seiner Auflager noch nicht vollständig gerissen wäre, hätte dies auf das Dämpfungsmass ξ_{CD} nur einen geringen Einfluss, da vor allem die gerissenen Elemente in Trägermitte für die Grösse des Dämpfungsmasses ξ_{CD} wesentlich sind (vgl. Abschnitt 6.4.2).
9. Nach Abschnitt 7.1.1 beträgt das Dämpfungsmass ξ_{VD} eines Betonkörpers
 $\xi_{VD} = 0.006$ bzw. 0.6% .
10. Mit den in Bild 71 für $\bar{\mu} \cdot A$ und $\tau_v(\bar{\sigma}_e)$ angegebenen Werten kann die Reibungskraft F_{CD} nach Gl. (6.20) zu

$$F_{CD} = 2 \cdot 7'880 \cdot 0.015 \cdot 4 \cdot 20 \cdot 5 = 94'560 \text{ N} \quad (8.2)$$

berechnet werden.

Aus Bild 55 geht hervor, dass die mittlere Relativverschiebung v_m bei einem Rissabstand $s = 100 \text{ mm}$ und einer Stahlspannung $\sigma_{e,d}$ von z.B. 240 N/mm^2

$$v_m(\sigma_{e,d} = 240) = 0.0227 \text{ mm}$$

beträgt. Mit Hilfe einer einfachen Berechnung am Stahlbetonquerschnitt und mit Hilfe von Gl. (6.2) kann die zur relativen Stahlspannung $\sigma_{e,d} = 240 \text{ N/mm}^2$ gehörige maximale Amplitude in Balkenmitte zu

$$z_o(\sigma_{e,d} = 240) = 60 \text{ mm}$$

berechnet werden. Wenn wiederum ein linearer Zusammenhang zwischen der Relativverschiebung v_m und der Stahlspannung $\sigma_{e,d}$ (vgl. Bild 40) angenommen wird, kann die Relativverschiebung durch

$$v_m(\sigma_e) = \frac{v_m(\sigma_{e,d} = 240)}{z_o(\sigma_{e,d} = 240)} \cdot z_o \quad (8.3)$$

als lineare Funktion der Amplitude z_o ausgedrückt werden. Aus Gl. (6.19) bzw. Gl. (8.2) ergibt sich damit die durch Coulomb-Dämpfung dissipierte Energie $D_{o,CD}$ zu

$$D_{o,CD} = 4 \cdot 94'560 \cdot \frac{0.0227}{60} \cdot z_o = 143 \cdot z_o \text{ Nmm} . \quad (8.4)$$

Die Formänderungsenergie W_o kann sowohl aus der Gleichung

$$W_o = \frac{1}{2} \cdot k \cdot z^2$$

als auch aus

$$W_o = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{M^2}{EI} \cdot dx$$

zu

$$W_o = \frac{1}{2} \cdot 384 \cdot z_o^2 = 199 \cdot z_o^2 \text{ Nmm} \quad (8.5)$$

berechnet werden. Mit den Gleichungen (2.23), (8.4) und (8.5) erhält man für das Dämpfungsmass ξ_{CD}

$$\xi_{CD} = \frac{143 \cdot z_o}{4 \cdot \pi \cdot 199 \cdot z_o^2} = 0.0572 \cdot \frac{1}{z_o} . \quad (8.6)$$

Der aus Gl. (8.6) resultierende Verlauf von ξ

$$\xi = \xi_{VD} + \xi_{CD}$$

ist in Bild 72 in Funktion der Amplitude z_o aufgetragen. Der Vergleich

Bild 72: Versuchsträger B3, Dämpfungsmass ξ in Funktion der Amplitude z_0

mit den ebenfalls in Bild 72 eingetragenen Versuchsergebnissen (vgl. Bild 35) zeigt, dass die Übereinstimmung zwischen Theorie und Versuch recht gut ist. Eine noch bessere Übereinstimmung könnte erzielt werden, wenn in gewisser Abweichung von den in Tabelle 3 angegebenen Werten für $\bar{\mu} \cdot A$ ein etwas höherer Wert eingesetzt würde.

11. bis 13.

Mit der nun bekannten Abhängigkeit des Dämpfungsmasses von der Amplitude können die Amplituden bzw. Beanspruchungen nach dem in Abschnitt 8.1 angegebenen Verfahren berechnet werden.

8.4 Einfacher Stahlbetonbiegeträger als Mehrmassenschwinger

In diesem Abschnitt soll der Stahlbetonbiegeträger von Bild 71 als ein Schwinger mit mehreren Freiheitsgraden betrachtet werden. Für die ersten drei Eigenschwingungen soll der Verlauf des zugehörigen Dämpfungsmasses ξ_i in Funktion der Amplitude berechnet werden. Die Annahmen (5.16) und (6.16) werden wiederum als gültig vorausgesetzt.

Die folgende Numerierung bezieht sich wiederum auf die Numerierung in Bild 69.

1. bis 3.

Die Eigenkreisfrequenzen ω_i bzw. die Eigenschwingungsformen Ψ_i können

mit

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{12} \cdot \sqrt{\frac{EI \cdot g}{q}} ; \quad \omega_2 = 4 \cdot \omega_1 ; \quad \omega_3 = 9 \cdot \omega_1 \quad (8.7)$$

$$\Psi_1 = \sin \frac{\pi \cdot x}{1} ; \quad \Psi_2 = \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{1} ; \quad \Psi_3 = \sin \frac{3 \cdot \pi \cdot x}{1}$$

angegeben werden.

4. Sofern der Träger nur in einer der drei Eigenschwingungen schwingt, betragen die dabei auftretenden Biegemomente M_i

$$\begin{aligned} M_1(x,t) &= m(x) \cdot z_{1,0} \cdot \omega_1^2 \cdot \frac{1^2}{\pi^2} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{1} \cdot \sin(\omega_1 t) \\ M_2(x,t) &= m(x) \cdot z_{2,0} \cdot \omega_2^2 \cdot \frac{1^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{1} \cdot \sin(\omega_2 t) \\ M_3(x,t) &= m(x) \cdot z_{3,0} \cdot \omega_3^2 \cdot \frac{1^2}{9 \cdot \pi^2} \cdot \sin \frac{3 \cdot \pi \cdot x}{1} \cdot \sin(\omega_3 t) \end{aligned} \quad (8.8)$$

5. Der Träger soll wiederum auf seiner ganzen Länge gerissen sein.

9. Nach Abschnitt 7.1.1 beträgt das Dämpfungsmass ξ_{VD} eines Betonkörpers

$$\xi_{VD} = 0.006$$

10. Mit den in Bild 71 für $\bar{\mu} \cdot A$ und $\tau_V(\bar{\sigma}_e)$ angegebenen Werten sowie nach Gl. (6.20) und Abschnitt 8.2 betragen die Reibungskräfte $F_{i,CD}$

$$\begin{aligned} F_{1,CD} &= \int_0^1 F_{CD}(x) \cdot \frac{\Psi_1''}{\Psi_{1,0}''} \cdot dx = \int_0^1 F_{CD}(x) \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{1} \cdot dx = F_{CD}(x) \cdot \frac{2 \cdot 1}{\pi} \\ F_{2,CD} &= \int_0^1 F_{CD}(x) \cdot \frac{\Psi_2''}{\Psi_{2,0}''} \cdot dx = \int_0^1 F_{CD}(x) \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{1} \cdot dx = F_{CD}(x) \cdot \frac{2 \cdot 1}{\pi} \\ F_{3,CD} &= \int_0^1 F_{CD}(x) \cdot \frac{\Psi_3''}{\Psi_{3,0}''} \cdot dx = \int_0^1 F_{CD}(x) \cdot \sin \frac{3 \cdot \pi \cdot x}{1} \cdot dx = F_{CD}(x) \cdot \frac{2 \cdot 1}{\pi} \end{aligned} \quad (8.9)$$

$$F_{1,CD} = F_{2,CD} = F_{3,CD} = 2 \cdot 7'880 \cdot 0.015 \cdot 4 \cdot 20 \cdot 5 = 94'560 \text{ N}$$

Die Grösse der mittleren Relativverschiebung v_m kann von Bild 55 bzw. von Abschnitt 8.3 übernommen werden. Die einer Stahlspannung von $\sigma_{e,d} = 240 \text{ N/mm}^2$ entsprechenden Amplituden $z_{i,0}$ betragen (Berechnung aus Gl. (8.8)):

$$\begin{aligned} z_{1,0} &= 60 \text{ mm} \\ z_{2,0} &= 15 \text{ mm} \\ z_{3,0} &= 6.7 \text{ mm} \end{aligned} \quad (8.10)$$

Aus Gl. (6.19) bzw. (8.9) ergeben sich damit die bei Schwingungen in den einzelnen Eigenschwingungen durch Coulomb-Dämpfung dissipierten Energien $D_{i,o,CD}$ zu

$$\begin{aligned} D_{1,o,CD} &= 4 \cdot 94'560 \cdot \frac{0.0227}{60} \cdot z_{1,o} = 143 \cdot z_{1,o} \quad \text{Nmm} \\ D_{2,o,CD} &= 4 \cdot 94'560 \cdot \frac{0.0227}{15} \cdot z_{2,o} = 572 \cdot z_{2,o} \quad \text{Nmm} \\ D_{3,o,CD} &= 4 \cdot 94'560 \cdot \frac{0.0227}{6.7} \cdot z_{3,o} = 1'288 \cdot z_{3,o} \quad \text{Nmm} \end{aligned} \quad (8.11)$$

Die zugehörigen Formänderungsenergien $W_{i,o}$ betragen

$$\begin{aligned} W_{1,o} &= 199 \cdot z_{1,o}^2 \quad \text{Nmm} \\ W_{2,o} &= 3'184 \cdot z_{2,o}^2 \quad \text{Nmm} \\ W_{3,o} &= 16'119 \cdot z_{3,o}^2 \quad \text{Nmm} \end{aligned} \quad (8.12)$$

Aus den Gleichungen (8.11) und (8.12) sowie mit Gl. (2.23) erhält man für die Dämpfungsmasse $\xi_{i,CD}$

$$\begin{aligned} \xi_{1,CD} &= \frac{143}{4 \cdot \pi \cdot 199 \cdot z_{1,o}} = 0.0572 \cdot \frac{1}{z_{1,o}} \quad \text{bzw.} \quad 0.2288 \cdot \frac{1}{\sigma_{e,1,d}} \\ \xi_{2,CD} &= \frac{572}{4 \cdot \pi \cdot 3'184 \cdot z_{2,o}} = 0.0143 \cdot \frac{1}{z_{2,o}} \quad \text{bzw.} \quad 0.2288 \cdot \frac{1}{\sigma_{e,2,d}} \\ \xi_{3,CD} &= \frac{1'288}{4 \cdot \pi \cdot 16'119 \cdot z_{3,o}} = 0.0064 \cdot \frac{1}{z_{3,o}} \quad \text{bzw.} \quad 0.2288 \cdot \frac{1}{\sigma_{e,3,d}} \end{aligned} \quad (8.13)$$

Die Dämpfungsmasse ξ_i können damit in zu Bild 72 analoger Art in Funktion der Amplitude $z_{i,o}$ bzw. $\sigma_{e,i,d}$ dargestellt werden. Die höheren Eigenschwingungen weisen demnach bei gleich grossen Amplituden $z_{i,o}$ ein geringeres Dämpfungsmass auf als die tieferen Eigenschwingungen. In Wirklichkeit treten bei den höheren Eigenschwingungen im allgemeinen wesentlich kleinere Amplituden auf, so dass die Dämpfungsmasse ξ_i der verschiedenen Eigenschwingungen gleich wie die Stahlspannungen in derselben Grössenordnung liegen können.

Zur Ergänzung soll hier noch kurz ein anderes Vorgehen zur Berechnung der Dämpfungsmasse ξ_i erwähnt werden.

Wenn der schwingende Stahlbetonbiegeträger durch das in Bild 73 dargestellte Schwingssystem mit z.B. drei Punktmassen (lumped masses) dargestellt wird, können die drei zugehörigen Eigenkreisfrequenzen ω_i und Eigenschwingungsformen Ψ_i durch Lösen des Eigenwertproblems ermittelt werden.

Bild 73: Einfacher Balken als Schwinger mit drei Freiheitsgraden

Die in den drei Trägerabschnitten wirkenden Reibungskräfte können wie deren Masse als in den einzelnen Massenpunkten wirkend gedacht werden und betragen somit

$$F_{i,CD} = F_{CD}(x) \cdot \frac{1}{3} \quad (8.14)$$

Die bei der Schwingung in der i -ten Eigenschwingung durch Coulomb-Dämpfung dissipierte Energie $D_{i,o,CD}$ kann aus

$$D_{i,o,CD} = 4 \cdot \sum_n F_{i,CD} \cdot v_{i,m} \quad (8.15)$$

berechnet werden. Dabei entspricht $v_{i,m}$ der mittleren Relativverschiebung zwischen Beton und Stahl am Ort des i -ten Massenpunktes. Die zugehörige Formänderungsenergie $W_{i,c}$ kann aus

$$W_{i,o} = \frac{1}{2} \cdot \{\psi_i\}^T \cdot [K] \cdot \{\psi_i\} \cdot z_{i,o}^2 \quad (8.16)$$

berechnet werden.

Aus den Gleichungen (8.15), (8.16) und (2.23) können die Dämpfungsmasse $\xi_{i,CD}$ berechnet werden.

8.5 Stahlbetonrahmen als Einmassenschwinger

Der in Bild 74 dargestellte Stahlbetonrahmen mit den als masselos gedachten, biegeweichen Stützen und dem als unendlich steif angenommenen, gleichmässig mit Masse belegten Riegel soll als Einmassenschwinger betrachtet werden.

Der Schwinger wird durch eine am Riegel angreifende horizontal wirkende harmonische Erregerkraft (vgl. Gl. (2.31)) belastet. Das Dämpfungsmass soll in Funktion der Amplitude berechnet werden. Die Annahmen der Gleichungen (5.16) und (6.16) werden wiederum als gültig vorausgesetzt.

Die folgende Numerierung bezieht sich ebenfalls auf die Numerierung in Bild 69.

$$\begin{aligned}
 m(x)_R &= 60 \text{ kN/m} \\
 L &= 3.0 \text{ m} \\
 EI_S &= 4.0 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2 \\
 k &= 3'556 \text{ N/mm} \\
 \omega &= 9.84 \text{ 1/sec} \\
 \bar{\mu} \cdot A &= 0.015 \\
 \tau_v(\bar{G}_e) &= 5.0 \text{ N/mm}^2 \\
 s &= 100 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Stützenquerschnitt :

Modell :

Bild 74: Stahlbetonrahmen

1. bis 3.

Die Eigenkreisfrequenz ω beträgt

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot 12 \cdot EI}{L^3 \cdot 2 \cdot L \cdot m(x)}} = 9.84 \cdot \frac{1}{\text{sec}} \quad (8.17)$$

Die Eigenschwingungsform der Stützen kann durch das Polynom

$$\psi(x) = 1 - 3 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (8.18)$$

ausgedrückt werden.

4. Das Biegemoment in den Stützen des mit der Frequenz ω harmonisch schwingenden Rahmens beträgt

$$M(x, t) = m(x) \cdot L \cdot z_0 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) \cdot \left(x - \frac{L}{2}\right) \quad (8.19)$$

5. Es wird angenommen, dass die Stützen auf ihrer ganzen Höhe gerissen sind.

9. Nach Abschnitt 7.1.1 beträgt das Dämpfungsmass ξ_{VD} eines Betonkörpers

$$\xi_{VD} = 0.006$$

10. Mit den vom Balken B3 (vgl. [3.1]) übernommenen Werten für $\bar{\mu} \cdot A$ und $\tau_v(\bar{\sigma}_e)$ (vgl. Abschnitt 8.3) sowie mit

$$F_{CD} = 2 \cdot \int_0^L F_{CD}(x) \cdot \frac{\psi''(x)}{\psi''_0(x)} \cdot dx = 4 \cdot \int_0^{L/2} F_{CD}(x) \cdot \frac{-\frac{6}{L^2} + 12 \cdot \frac{x}{L^3}}{-\frac{6}{L^2}} \cdot dx$$

$$F_{CD} = 4 \cdot F_{CD}(x) \cdot \int_0^{L/2} (1 - 2 \cdot \frac{x}{L}) \cdot dx = F_{CD}(x) \cdot L \quad (8.20)$$

(vgl. Gleichungen (6.5) und (8.18)) kann die Reibungskraft F_{CD} zu

$$F_{CD} = 18.85 \cdot 3'000 = 56'549 \text{ N}$$

berechnet werden.

Die Grösse der mittleren Relativverschiebung v_m zwischen Stahl und Beton kann wiederum aus Bild 55 bzw. Abschnitt 8.3 übernommen werden.

Die einer Stahlspannung $\sigma_{e,d} = 240 \text{ N/mm}^2$ (am Stützenfuss bzw. am Stützenkopf) entsprechende Amplitude z_0 (am Stützenkopf) beträgt

$$z_0 = 15 \text{ mm} . \quad (8.21)$$

Die durch Coulomb-Dämpfung dissipierte Energie $D_{o,CD}$ ergibt sich damit zu

$$D_{o,CD} = 4 \cdot 56'549 \cdot \frac{0.0227}{15} \cdot z_0 = 342.3 \cdot z_0 \text{ Nmm} . \quad (8.22)$$

Die Formänderungsenergie W_0 beträgt

$$W_0 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot z_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 3'556 \cdot z_0^2 = 1'778 \cdot z_0^2 \text{ Nmm} . \quad (8.23)$$

Mit den Gleichungen (2.23), (8.22) und (8.23) ergibt sich das Dämpfungs-
mass ξ_{CD} zu

$$\xi_{CD} = \frac{342.3}{4 \cdot \pi \cdot 1'778 \cdot z_0} = 0.0153 \cdot \frac{1}{z_0} . \quad (8.24)$$

8.6 Folgerungen

Aus den drei vorangegangenen Beispielen werden in diesem Abschnitt einige Folgerungen bezüglich der Verwendung der beschriebenen Dämpfungsmodelle für kompliziertere Tragwerke abgeleitet.

Bei der Bestimmung des Dämpfungsmasses ξ_{CD} ist es zumeist nicht nötig, dass die genaue Anzahl der gerissenen und ungerissenen Biegeelemente bekannt ist. Z.B. ergeben bei einem als einfacher Balken gelagerten Biegeträger (vgl. Bild 58) die gerissenen Biegeelemente in Trägermitte den grössten Beitrag zum Dämpfungsmass ξ_{CD} , da dort die Beanspruchung am grössten ist. Deshalb ist der Unterschied zwischen den Dämpfungsmassen eines nur teilweise in Trägermitte gerissenen und eines vollkommen gerissenen Trägers ziemlich gering. Damit dürfte es meistens zulässig sein, das ganze Tragwerk als ausschliesslich aus gerissenen Biegeelementen bestehend zu betrachten. Diese Ueberlegungen können zumeist auch auf kompliziertere Tragwerke übertragen werden.

Der Einfluss einer Normalkraft auf das Dämpfungsmass eines Tragwerks bzw. eines Biegeelementes ergibt sich vor allem aus deren Einfluss auf die Rissbildung, d.h. auf die Anzahl der gerissenen und ungerissenen Biegeelemente. Wenn jedoch bei einer Beanspruchung eines Querschnittes durch ein Biegemoment und eine Druckkraft erwartet werden kann, dass der Querschnitt gerissen ist, besteht zwischen den Dämpfungseigenschaften eines gerissenen Biegeelementes mit und ohne Druckkraft ein gewisser, meistens eher geringer Unterschied. Die Dämpfungsenergie $D_{o,VD}^{el}$ infolge viskoser Dämpfung und die Formänderungsenergie W_o^{el} können nur näherungsweise aus Gl. (5.2) bzw. (5.3) ermittelt werden. Bei einer Beanspruchung durch Biegung und Axialkraft ändert sich nämlich im allgemeinen während der Schwingung einerseits die Lage der neutralen Achse und andererseits geht die Proportionalität zwischen dem Biegemoment bzw. der Normalkraft und der Spannung verloren. Da sich dies jedoch bei der Dämpfungsenergie $D_{o,VD}^{el}$ als auch bei der Formänderungsenergie W_o^{el} in der gleichen Richtung auswirkt (vgl. Gleichungen (5.2) und (5.3)), hat dies auf das Dämpfungsmass ξ_{VD}^{el} keinen Einfluss. Somit kann dieses auch hier aus Gl. (5.4) berechnet werden. Auch für die Dämpfungsenergie $D_{o,CD}^{el}$ infolge Coulomb-Dämpfung ergeben sich beim Vorhandensein einer zusätzlichen Druckkraft gegenüber einer reinen Biegebeanspruchung (vgl. Gl. (5.20)) gewisse Unterschiede. Bei einer Beanspruchung durch Biegung und Axialkraft ändert sich die Relativverschiebung v_m gegenüber einer reinen Biegebeanspruchung (keine Proportionalität mehr zwischen dem Biegemoment bzw. der Axialkraft und der Stahlspannung und damit nach Gl. (5.16) auch nicht mehr mit der Relativverschiebung v_m). Da die Änderung von $D_{o,CD}^{el}$ und W_o^{el} nicht notwendigerweise in dieselbe Richtung geht, kann das Dämpfungsmass ξ_{CD}^{el} nicht mehr un-besehen aus Gl. (5.23) ermittelt werden. Es ist allerdings zu erwarten, dass der begangene Fehler nicht sehr gross ist, so dass - wie dies in Abschnitt 8.5 getan wurde - die in Kapitel 5 angegebenen Beziehungen für die Dämpfungsenergie und die Formänderungsenergie bzw. das Dämpfungsmass eines Biege-

elementes trotzdem verwendet werden können.

Bei komplizierteren Tragwerken als den in den drei vorhergehenden Abschnitten angeführten Beispielen kann die Berechnung des Dämpfungsmasses ξ_{CD} recht viel Aufwand erfordern. Sehr häufig müssen solche Tragwerke als Mehrmassenschwinger berechnet werden. Dabei können die bei den Schritten 4 und 10 (vgl. Bild 69) durchzuführenden Berechnungen recht umfangreich werden. Unter Umständen kann man sich damit begnügen, nur das Dämpfungsmass der massgebenden Eigenschwingungen nach dem in Bild 69 skizzierten Vorgehen zu berechnen und die Dämpfungsmasse der restlichen Eigenschwingungen gemäss Anhang A3 abzuschätzen.

8.7 Anwendungsgrenzen

Bei der dynamischen Analyse von Betontragwerken darf das beschriebene Dämpfungsmodell in den folgenden Fällen nicht ohne weitere Prüfung angewendet werden:

- a) Die Beanspruchung des Betons oder des Stahles ist so gross, dass die auftretenden Spannungen ausserhalb des linearen Bereichs der zugehörigen Spannungs-Dehnungs-Diagramme liegen.
- b) Das Tragwerk ist teilweise vorgespannt und gerissen.
- c) Die Dämpfung des Tragwerks wird ausser durch Materialdämpfung auch durch Systemdämpfung bewirkt (vgl. Abschnitt 2.4.1).
- d) Das Tragwerk wird nicht vorwiegend auf Biegung bzw. Biegung mit Axialkraft beansprucht.

Die Aussagen der Punkte a) bis d) werden im folgenden näher erläutert:

- a) Bei sehr hohen Beanspruchungen weichen die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen des Betons und des Stahles vom linearen oder quasi-linearen Verlauf ab, so dass der Anteil der Hysteresis-Dämpfung (vgl. Abschnitt 2.5.3) an der gesamten Dämpfung stark zunehmen und das Dämpfungsmass ein Mehrfaches des Dämpfungsmasses bei Beanspruchungen unterhalb der Proportionalitätsgrenze betragen kann (vgl. z.B. Bild 34). Beim Stahl wird dies z.B. dadurch verdeutlicht, dass nach [2.3] der Exponent n von Gl. (2.16) nach Ueberschreiten der Proportionalitätsgrenze grösser als 20 bis 30 sein kann. Ein Dämpfungsmodell, das bei sehr hohen Beanspruchungen der Hysteresis-Dämpfung nicht Rechnung trägt, ist somit in diesem Fall unbrauchbar. Besonders bei sehr stark bewehrten Betontragwerken kann die Beanspruchung des Betons im Vergleich zum Bewehrungsstahl sehr gross sein.

- b) Es wurde schon im Abschnitt 7.5 darauf hingewiesen, dass das für schlaff bewehrte Stahlbetonbiegeträger entwickelte Dämpfungsmodell vermutlich auch auf teilweise vorgespannte und gerissene Betonträger angewendet werden darf. Die experimentelle Ueberprüfung hiezu fehlt jedoch noch weitgehend.
- c) Je nach dem statischen System, der Lagerungsart und den Baugrundverhältnissen kann die Systemdämpfung einen ansehnlichen oder sogar stark dominierenden Beitrag an die gesamte Dämpfung eines Bauwerks leisten. Vor allem bei sehr steifen Tragwerken mit Einspannungen bei den Lagern bzw. Auflagerknoten kann die Systemdämpfung recht gross werden. Hingegen scheinen schlanke Tragwerke, welche durch Kipp- und reibungsarme Rollen- oder Gleitlager aufgelagert sind, fast ausschliesslich Materialdämpfung aufweisen.
- d) Bei einem Betontragwerk, welches vorwiegend auf Schub, d.h. durch Querkraft und Torsion, beansprucht wird, ist prinzipiell ein zum Verhalten unter Biegebeanspruchung analoges Dämpfungsverhalten zu erwarten. Auch hier ist zu vermuten, dass sich im elastischen Beanspruchungsbereich die gesamte Materialdämpfung aus einem Anteil viskoser Dämpfung und einem Anteil Coulomb-Dämpfung zusammensetzt. Der Anteil der Coulomb-Dämpfung dürfte im wesentlichen wiederum durch die Reibung zwischen den Bügel- bzw. Längsbewehrungen und dem umgebenden Beton bedingt sein. In der Theorie wird im allgemeinen angenommen, dass sich auch die Rissufer von Schubrissen senkrecht gegeneinander bewegen, so dass dort somit wie bei den Biegerissen keine Reibung entstehen sollte. Im elastischen Beanspruchungsbereich wäre somit im Risszustand auch bei einer Beanspruchung durch Biegung und Torsion bei steigender Beanspruchung bzw. Amplitude mit einem kleiner werdenden Dämpfungsmass zu rechnen. In Wirklichkeit tritt jedoch bei Schubrissen nebst einer Bewegung senkrecht zu den Rissufern auch eine Verschiebung in Richtung des Schubrisses auf. Wegen der Verzahnung der Rissufer wird dadurch einerseits der Schubwiderstand erhöht, andererseits ist es hier nun möglich, dass bei der gegenseitigen Verschiebung der verzahnten und nicht mehr spannungsfreien Rissufer Energie entsprechend dem Modell der Coulomb-Dämpfung dissipiert werden kann. Eine quantitative Aussage kann jedoch nur aufgrund gezielter Versuche erfolgen.

9. Schlussbemerkungen, ungelöste Probleme

Mit der vorliegenden Arbeit ist es gelungen, das experimentell beobachtete Dämpfungsverhalten von schlaff bewehrten und vorwiegend auf Biegung beanspruchten Stahlbetontragwerken anhand physikalisch plausibler Modellvorstellungen zu erklären. Durch das Aufzeigen der Mechanismen, welche die Energiedissipation bewirken, dürfte das Verständnis für das Dämpfungsverhalten eines Stahlbetontragwerks verbessert worden sein.

Die durchgeführten Untersuchungen zeigen, dass die Dämpfung von Stahlbetontragwerken von einer Vielzahl von Parametern beeinflusst wird, die zum Teil nur mit grosser Mühe quantitativ abgeschätzt werden können. Es ist deshalb nicht erstaunlich, dass mit den aufgrund des beschriebenen Dämpfungsmodells erhaltenen Berechnungsergebnissen die wirklichen Verhältnisse nicht immer genau dargestellt werden können. Innerhalb der Anwendungsgrenzen des Modells (vgl. Abschnitt 8.7) können jedoch die wirklichen Verhältnisse - wie der Vergleich mit Versuchsergebnissen zeigt - qualitativ sehr gut und zum Teil auch quantitativ befriedigend erfasst werden. Das Modell sollte damit auch dazu beitragen, den anhaltenden Diskussionen um die "richtige" Höhe des in dynamischen Berechnungen anzunehmenden Dämpfungsmasses eine physikalisch fundierte Grundlage zu geben. In den vorhergehenden Kapiteln konnte auch ein besserer Einblick in das Phänomen der Reibungsdämpfung gegeben werden. Es ist klar aufgezeigt worden, dass die Coulomb-Reibung vor allem bei kleinen Amplituden wesentlich ist. Diese Erkenntnis kann auch bei der Beurteilung des Einflusses einer Lagerreibung verwendet werden. Bei den Lagern von Baukonstruktionen kann im allgemeinen angenommen werden, dass die vorhandene Auflagerkraft konstant ist und durch die dynamische Belastung nicht massgeblich verändert wird. Somit kann auch hier die durch das Lager bewirkte Energiedissipation mit dem Modell der Coulomb-Dämpfung mit konstanter Reibungskraft beschrieben werden. Demzufolge nimmt der Einfluss der Lagerreibung mit grösser werdender Beanspruchung ab. Der Einfluss von Reibung in Verbindungen, wie sie z.B. im Stahlbau bei Schraubverbindungen häufig auftritt, kann auf analoge Art und Weise beurteilt werden.

Nicht zuletzt könnte es mit der vorliegenden Arbeit gelungen sein, auch in das Verbundverhalten von profilierten Bewehrungsstählen einen vertieften Einblick zu geben.

Die dringlichsten Probleme auf dem hier bearbeiteten Gebiet, deren Lösung nach Ansicht des Verfassers noch in Angriff genommen werden sollten, werden im folgenden kurz angeführt:

- Während die Dämpfungseigenschaften von voll vorgespannten und ungerissenen Betonträgern schon recht gut bekannt sind, wurden bis heute noch keine

systematischen Versuche an teilweise vorgespannten Trägern im Rissezustand durchgeführt. Bei solchen Trägern dürfte wie bei gerissenen Stahlbetonträgern nebst viskoser Dämpfung auch ein gewisser Anteil an Coulomb-Dämpfung zu erwarten sein. Vergleichende Untersuchungen zwischen im Spannbett hergestellten und mit Kabeln vorgespannten sowie von mit und ohne Verbund (injiziert, nicht injiziert) vorgespannten Trägern dürften ebenfalls von Interesse sein. Derartige Untersuchungen könnten dabei helfen, die an schlaff bewehrten Stahlbetonträgern gewonnenen Erkenntnisse über die Dämpfung im Rissezustand wesentlich zu vertiefen und zu ergänzen.

- Im allgemeinen werden zwischen den Werten für die Dämpfungsmasse, welche in Feldversuchen an ganzen Stahlbetontragwerken ermittelt und solchen, welche in Laborversuchen an einzelnen Stahlbetonbauteilen festgestellt wurden, erhebliche Unterschiede festzustellen sein. Diese Unterschiede können häufig nicht nur mit einer allfälligen Amplitudenabhängigkeit des Dämpfungsmasses erklärt werden. Je nach Art des statischen Systems des Tragwerks kann zusätzlich zur Materialdämpfung ein beträchtlicher Anteil Systemdämpfung (vgl. Abschnitte 2.4 und 8.7) hinzukommen. Bei solchen Tragwerken wird ein Teil des Baugrundes ebenfalls zu Schwingungen angeregt, wobei im Baugrund Energie dissipiert wird. Damit wird die Schwingungsenergie des Tragwerks reduziert. Bei der Auswertung von dynamischen Feldversuchen wird jedoch im allgemeinen die im Baugrund dissipierte Energie dem Tragwerk zugerechnet, so dass dieses scheinbar eine grössere Dämpfung aufweist. Je nach Art des statischen Systems, der Lagerung und den Baugrundverhältnissen kann der Anteil der Systemdämpfung an der gesamten Dämpfung beträchtlich sein.

Die Uebertragbarkeit der in Laborversuchen an Bauteilen ermittelten Werte für die Materialdämpfung auf ganze Konstruktionen kann nur dann in allen Fällen gewährleistet sein, wenn der Anteil der Systemdämpfung der betreffenden Konstruktion ebenfalls bekannt ist.

Die Baugrunddämpfung bzw. die Systemdämpfung können oft auch durch das Modell der viskosen Dämpfung beschrieben werden. Es ist somit wahrscheinlich, dass der Einfluss der Systemdämpfung bei grösser werdender Amplitude nicht abnimmt. Eine systematische Erforschung der Systemdämpfung könnte hier sehr nützlich sein.

- Die bisherigen Untersuchungen zur Ermittlung der Dämpfungseigenschaften wurden meistens an auf Biegung beanspruchten Versuchsträgern durchgeführt. Obwohl bei vorwiegend auf Querkraft und Torsion beanspruchten Betonträgern wie bei Biegeträgern die Lasten durch Ausbilden von Druck- (Beton) und Zuggliedern (Stahl) abgetragen werden, können derart beanspruchten Trägern nicht a priori dieselben Dämpfungseigenschaften wie den Biegeträgern zugeordnet werden. Auch hier könnten systematische Versuche an auf Schub beanspruchten Trägern wertvolle Hinweise geben.

- Zur Berechnung der Reibungskraft in Kapitel 4 wurde unter anderem das in statischen Versuchen ermittelte Grundgesetz verwendet. Der Reibungskoeffizient $\bar{\mu}$ und der Koeffizient A (Gl. (5.11)) wurden aufgrund der Versuchsergebnisse abgeschätzt (Abschnitt 7.1.2). Genauere Angaben bezüglich der Verteilung der Verbundspannungen und der Grösse von $\bar{\mu}$ und A bei dynamischer Belastung könnten nur aufgrund von speziellen dynamischen Versuchen erfolgen.

Zusammenfassung

Im Jahre 1977 wurden am Institut für Baustatik und Konstruktion der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich dynamische Versuche an sieben unterschiedlich schlaff bewehrten Beton- und Leichtbetonträgern durchgeführt. Durch systematische Untersuchungen wurde der Einfluss der Rissbildung auf die Eigenfrequenzen und die Dämpfungseigenschaften bei Biegebeanspruchungen bis zur Proportionalitätsgrenze des Bewehrungsstahles ermittelt. Dabei konnte festgestellt werden, dass die Dämpfung infolge der Rissbildung nach anfänglichem Anstieg auf sehr kleine Werte absinken kann.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, physikalisch plausible Modelle zur Erfassung der Dämpfungseigenschaften (nur Materialdämpfung) von vorwiegend auf Biegung beanspruchten, schlaff bewehrten und voll vorgespannten Stahlbetonbauteilen und Stahlbetonkonstruktionen zu entwickeln. Besonderes Gewicht wird dabei dem Risszustand von schlaff bewehrten Tragwerken zugemessen.

Zunächst werden die Grundlagen der Dämpfung zusammengestellt. Die Bedeutung des äquivalenten viskosen Dämpfungsmasses als Verhältnis der in einem Körper pro Schwingungszyklus dissipierten Energie zur maximalen in diesem Körper gespeicherten Formänderungsenergie wird herausgestrichen. Die gebräuchlichsten Modelle zur Berücksichtigung der Dämpfung und die entsprechenden Lösungen der Schwingungsdifferentialgleichung werden dargestellt.

Anhand einer eingehenden Literaturlauswertung werden die wichtigsten bisherigen Kenntnisse über die Dämpfungseigenschaften von Beton, Stahl und Stahlbeton zusammengestellt.

Die eingangs erwähnten Versuche haben gezeigt, dass der Verbund zwischen der Bewehrung und dem Beton für das Auftreten von Reibungs-Dämpfung in Stahlbetonträgern verantwortlich ist. Zur Ermittlung der auftretenden Reibungskräfte wird deshalb das Verbundverhalten von profiliertem Bewehrungsstahl genauer betrachtet. Aufgrund der Differentialgleichung des verschieblichen Verbundes und eines bekannten experimentell ermittelten Zusammenhangs zwischen der Verbundspannung und der Relativverschiebung zwischen Beton und Stahl (Verbundgesetz) werden die Verteilung der Stahlspannungen, der Verbundspannungen und der Relativverschiebungen längs eines gerissenen Biegeelementes sowie die Beanspruchung des Betons durch die Verbundspannungen berechnet.

Für ein einzelnes, gerissenes oder ungerissenes Biegeelement eines Stahlbetonbiegeträgers wird je ein Dämpfungsmodell definiert. Bei einem gerissenen Biegeelement wird Energie sowohl durch ein viskoses Dämpfungselement (Biegedruckzone) als auch durch ein Reibungselement (Biegezugzone) dissipiert. Bei einem ungerissenen Biegeelement erfolgt die Energiedissipation

ausschliesslich durch ein viskoses Dämpfungselement (Biegedruck- und Biegezugzone). Die durch die einzelnen Dämpfungselemente pro Schwingungszyklus dissipierte Dämpfungsenergie wird berechnet.

Ein vorwiegend auf Biegung beanspruchtes Tragwerk setzt sich aus einer bestimmten Anzahl Biegeelemente zusammen, welche je nach der Höhe der Biegebeanspruchung ungerissen sind oder einen Biegeriss aufweisen. Aufgrund der Dämpfungseigenschaften eines einzelnen Biegeelementes bzw. des zugehörigen Dämpfungsmodells lassen sich durch Aneinanderreihen der notwendigen Anzahl gerissener oder ungerissener Biegeelemente sowie durch geeignete Superpositionsmethoden das Dämpfungsmodell bzw. die Dämpfungseigenschaften eines ganzen Stahlbetonträgers ermitteln. Die Phase zunehmender Rissausbreitung kann ebenfalls berücksichtigt werden. Die numerisch am Dämpfungsmodell eines ganzen Biegeträgers ermittelten Resultate werden mit Versuchsergebnissen verglichen. Es zeigt sich, dass durch geeignete Wahl je eines Parameters für die viskose Dämpfung und für die Reibungsdämpfung eine sehr gute Uebereinstimmung zwischen den theoretischen Berechnungen an den Modellen und den Versuchsergebnissen gefunden werden kann.

Das hohe Dämpfungsmass, das gerissene Stahlbetonträger bei geringen Amplituden bzw. geringen dynamischen Beanspruchungen aufweisen können, ist die Folge der im Verbundbereich zwischen dem Bewehrungsstahl und dem Beton auftretenden Reibung. Bei ungerissenen sowie bei gerissenen, jedoch mit grossen Amplituden schwingenden Tragwerken ist der Einfluss dieser Reibung auf das Dämpfungsmass klein, so dass in diesen Fällen mit sehr geringen Dämpfungsmassen gerechnet werden muss.

Einige praktische Beispiele - z.B. auch ein Stahlbetonrahmen - veranschaulichen die Anwendung der Modelle. Die Anwendungsgrenzen der beschriebenen Modelle werden aufgezeigt sowie Anregungen zu weiteren theoretischen und experimentellen Untersuchungen gemacht.

Résumé

A l'institut de statique et de construction de l'école polytechnique fédérale de Zurich on a effectué, en 1977, des essais dynamiques sur sept poutres en béton ou béton léger à armature passive. Par des recherches dynamiques, on a pu déterminer quelle est l'influence de la fissuration sur les fréquences propres et les caractéristiques d'amortissement lorsque ces poutres sont soumises à des sollicitations de flexion allant jusqu'à la limite de proportionnalité de l'armature. Il a été constaté que l'amortissement provoqué par la fissuration pourrait, après un début de croissance, tomber jusqu'à de très petites valeurs.

Le but du travail présenté est de développer des modèles physiquement plausibles qui permettent de saisir les caractéristiques d'amortissement (seulement du matériau) des constructions et des éléments porteurs en béton armé et en béton précontraint sollicités à la flexion. Une attention particulière a été attribuée à l'observation de l'état de fissuration des poutres à armature passive.

Tout d'abord on résume les bases théoriques concernant l'amortissement. Ensuite on souligne l'importance de l'amortissement visqueux, représenté par le rapport de l'énergie dissipée par cycles d'oscillation dans un corps sur l'énergie maximale de déformation emmagasinée dans ce même corps. Enfin on présente les modèles connus qui tiennent compte de l'amortissement et des solutions correspondantes des équations différentielles pour les oscillations.

Les plus importantes connaissances actuelles concernant les caractéristiques d'amortissement du béton, du béton armé et de l'acier ont été réunies dans une analyse documentaire détaillée.

Les essais mentionnés ci-dessus ont montré que l'adhérence entre l'armature et le béton est responsable de l'amortissement par frottement; l'adhérence des barres d'armature profilées y est analysée de telle façon que l'on puisse en estimer les forces de frottement. A l'aide de l'équation différentielle d'adhérence variable et une loi de comportement (loi d'adhérence) on a déterminé la répartition des contraintes dans l'armature, celle des contraintes d'adhérence et celle du déplacement relatif le long de l'élément fissuré.

On a défini un modèle pour l'amortissement d'un élément d'une poutre en béton armé non fissuré ou fissuré qui est soumis à des sollicitations de flexion.

Dans un élément en béton armé fissuré sollicité à la flexion, l'énergie dissipée provient de l'amortissement d'un élément visqueux (zone de compression) et d'un de frottement (zone de traction). Dans un élément non fissuré, la

dissipation de l'énergie est provoquée essentiellement par l'amortissement d'un élément visqueux (zones de compression et de traction). On calcule l'énergie d'amortissement par cycle d'oscillation dissipée par les différents éléments.

Une poutre en béton armé sollicitée à la flexion est composée d'éléments qui sont, suivant le niveau de charge, soit fissurés soit non fissurés. En partant des caractéristiques d'amortissement d'un élément de flexion respectivement d'un modèle d'amortissement correspondant, on peut, moyennant une loi de superposition appropriée, déterminer les caractéristiques d'amortissement d'une poutre en béton armé. Simultanément, on peut tenir compte de la propagation des fissures.

La comparaison des résultats numériques avec ceux des essais a montré que si l'on fait un choix judicieux des paramètres d'amortissement visqueux ou de frottement on obtient une bonne concordance.

L'important amortissement trouvé dans les poutres en béton armé soumises à de petites amplitudes respectivement à de petites sollicitations dynamiques est la conséquence directe du frottement existant entre l'armature et le béton dans les zones d'adhérence. Dans le cas de grandes amplitudes, l'influence de ce frottement sur l'amortissement est petit et ceci aussi bien pour les éléments fissurés que non fissurés; par conséquent il faut s'attendre à de petites valeurs d'amortissement.

Quelques exemples pratiques - par exemple un cadre en béton armé - rendent l'application du modèle plus claire. On discute les limites d'application des modèles décrits. On fait des suggestions pour d'autres recherches théoriques et expérimentales.

Summary

In 1977, as a project at the Institute of Structural Engineering of the Swiss Federal Institute of Technology Zurich, dynamic tests were conducted on a series of seven beams. The beams were made of either concrete or lightweight concrete, and were reinforced to varying degrees. The influence of cracking due to bending on eigenfrequency and damping properties was investigated through systematic tests, which were continued until the proportional limit of the reinforcing steel was reached. From the results of these tests it was concluded that damping as a function of cracking sinks to a very low level after an initial increase.

The objective of the following work is to develop physically plausible models for the understanding of damping properties (material damping only) in normally reinforced and fully-prestressed concrete constructions, loaded predominantly through bending. Special attention is therefore given to the cracked condition of normally reinforced structures.

The first steps taken were to compile groundwork information concerning damping. The significance of the equivalent viscous damping ratio, as the relationship of the dissipated energy in a body per vibration cycle to the maximum collected strain energy of the body, was disregarded. The models usually employed for the consideration of the damping and the corresponding solution of the differential equation of vibration were then presented.

A thorough search through the literature resulted in a collection of the most significant previous knowledge concerning the damping properties of concrete, steel and reinforced concrete.

The previously mentioned dynamic tests showed that the bond between reinforcement and concrete is responsible for the behaviour of the friction-damping. In order to make a better determination of the appearing friction forces, the bond relationship of the ribbed reinforcement was more closely studied. On the basis of both the differential equation of bonding and a known experimentally determined relationship between bond stress and the relative displacement between concrete and steel (the bond law), the distribution of the steel stress, the distribution of the bond stress, the relative displacement along a cracked bending element, and the stress on the concrete through the bond stress were calculated.

For every individual cracked or uncracked bending element of a reinforced concrete beam, a damping model was defined. In a cracked bending element, energy is dissipated through both a viscous damping element (bending compression zone) and through a friction element (bending tension zone). In an uncracked bending element, the energy is dissipated exclusively through a

viscous damping element (bending compression zone and bending tension zone). The damping energy dissipated through the individual damping elements per vibration cycle was calculated.

A structure which is predominantly stressed through bending is composed of a set number of bending elements which, depending on the level of the bending stress, show either no crack or a bending crack. On the basis of the damping properties of an individual bending element (respectively of the corresponding damping model), the damping model (respectively the damping properties) of a whole reinforced concrete beam can be determined by joining the necessary number of cracked or uncracked bending elements through suitable superposition methods. The stage of increasing cracking can likewise be considered.

The numerically determined result of the damping model for an entire beam in bending was compared with the test results. The comparison showed that through suitable choices of parameters for the viscous damping and for the friction damping, a very good over-all agreement can be found between the model and the test results.

The high damping ratio that the cracked reinforced concrete beam can show for negligible amplitude or respectively for negligible dynamic stress is the result of the appearing friction between the reinforcing steel and the concrete. However, for uncracked as well as cracked structures with large vibration amplitudes, the influence of this friction on the damping ratio is so small that it is almost negligible.

Several practical examples, including a reinforced concrete frame, illustrate the application of the model. The usable limits of the described model are demonstrated and suggestions for further theoretical and experimental studies are made.

Bezeichnungen

Geometrische Grössen

H	Balkenhöhe
h	statische Höhe
h'	Abstand der Druckbewehrung von der Druckkante
B	Balkenbreite
L	Trägerlänge
l	Stützweite
r_{ger}	Länge des gerissenen Teils des Trägers
r_{unger}	Länge des ungerissenen Teils des Trägers
x	Lagekoordinate in Balkenlängsrichtung
x_{Na}	Abstand der neutralen Achse von der Druckkante
y	Hebelarm der inneren Kräfte
F_e	untere schlaffe Trägerlängsbewehrung
F_e'	obere schlaffe Trägerlängsbewehrung
$\emptyset$	Durchmesser der Bewehrungsstäbe
s	Rissabstand, Breite eines Biegeelementes
I_o	Massenrotationsträgheitsmoment
I	Flächenträgheitsmoment
EI	Biegesteifigkeit
V_o	Volumen
a	Rippenabstand eines profilierten Bewehrungsstahles

Kraftgrössen

Z	Zugkraft der Längsbewehrung
D	Betondruckkraft
M	Biegemoment
M_R	Rissmoment
M_p	Plastisches Moment
Q	Querkraft
R	Bewegungshemmende Kraft des Einmassenschwingers
F_F	Federkraft des Einmassenschwingers, elastische Rückstellkraft
F_D	Dämpfungskraft

F_{VD}	Dämpfungskraft infolge viskoser Dämpfung
F_{CD}	Dämpfungskraft (Reibungskraft) infolge Coulomb-Dämpfung
F_{SD}	Dämpfungskraft infolge 'Structural-Damping'
P_R	Belastung einer Betonkonsole durch eine Bewehrungsstahlrippe
P_A	Auslenkkraft beim Ausschwingversuch
P_o	Maximale Erregerkraft beim Resonanzversuch
$P(t)$	Erregerkraft beim Resonanzversuch

Massen

$m(x)$	Verteilte Masse des Trägers
m_i	Diskret angeordnete Masse des Trägers
m	Ersatzmasse des Einmassenschwingers
$m_{i,j}$	Koeffizienten der Massenmatrix eines Mehrmassenschwingers

Festigkeitswerte und Spannungen

β_w	Würfeldruckfestigkeit des Betons bzw. Leichtbetons
β_p	Zylinderdruckfestigkeit des Betons bzw. Leichtbetons
β_{bz}	Biegezugfestigkeit des Betons bzw. Leichtbetons
σ_b	Betonrandspannung
$\sigma_{b,d}$	Maximale Betonrandspannung entsprechend dem maximal auftretenden Biegemoment
σ_e	Stahlspannung
σ_F	Fließspannung des Stahles
$\sigma_{e,d}$	Maximale Stahlspannung entsprechend dem maximal auftretenden Biegemoment
$\bar{\sigma}_e$	Festgelegter Wert der Stahlspannung
$\sigma_{e,max}$	Maximale Stahlspannung im Biegeriss
$\sigma_{e,m}$	Ueber ganzes Biegeelement gemittelte Stahlspannung
σ_v	Zentrische Spannung infolge Vorspannung
τ_v	Verbundspannung
$\tau_{v,m}$	Ueber ganzes Biegeelement gemittelte Verbundspannung
σ_r	Radialspannung zwischen dem die Bewehrung umgebenden Beton und der Bewehrung
σ_{rz}	Ringzugspannung infolge der Verbundspannung τ_v
E_e	Elastizitätsmodul des Bewehrungsstahls
E_b	Elastizitätsmodul des Betons bzw. Leichtbetons

Verformungen

k	Federsteifigkeit des Einmassenschwingers
$k_{i,j}$	Koeffizienten der Steifigkeitsmatrix eines Mehrmassenschwingers
$\Psi_i(x)$	Eigenschwungsform der i-ten Eigenschwingung
Φ_i	i-ter Eigenvektor
$[\Phi]$	Matrix der Eigenvektoren
ϵ_e	Stahldehnung
$\epsilon_{e,max}$	Maximale Stahldehnung im Riss
$\epsilon_{e,m}$	Ueber ganzes Biegeelement gemittelte Stahldehnung
ϵ_F	Fliessdehnung des Stahles
ϵ_b	Betondehnung
w	Absolute Verschiebung des Einmassenschwingers
z	Relative Verschiebung des Einmassenschwingers
z_{max}	Maximale stationäre Amplitude bei Resonanz
η	Normalkoordinate eines Mehrmassenschwingers
v	Relativverschiebung des Bewehrungsstahles gegenüber dem Beton
v_{max}	Maximale Relativverschiebung im Riss
v_m	Ueber ganzes Biegeelement gemittelte Relativverschiebung
$v_{o,m}$	Ueber das Biegeelement mit der Beanspruchung $\sigma_{e,d}$ gemittelte Relativverschiebung
Φ	Krümmung des Betonquerschnittes
Φ_P	Krümmung beim Fliessbeginn des Stahles

Dynamische Grössen

n	Dämpfungsexponent
d	Spezifischer Dämpfungskoeffizient
Ω	Erregerfrequenz
ω_i	Eigenkreisfrequenz der i-ten Eigenschwingung
f	Eigenfrequenz
c	Dämpfungskoeffizient des Einmassenschwingers
$c_{i,j}$	Koeffizienten der Dämpfungsmatrix eines Mehrmassenschwingers
c_{kr}	Kritische Dämpfung
ξ	Dämpfungsmass
ξ_{VD}	Dämpfungsmass infolge viskoser Dämpfung
ξ_{CD}	Dämpfungsmass infolge Coulomb-Dämpfung
ϑ	Logarithmisches Dekrement

η	Verlustfaktor
V_o	Vergrößerungsfaktor
θ	Phasenverschiebung zwischen der Amplitude und der Erregerkraft
T	Schwingungsperiode
t	Zeit

Energien

D	Spezifische Dämpfungsenergie
D_d	Spezifische Dämpfungsenergie bei der Spannung σ_d
D_m	Ueber den ganzen Körper gemittelte spezifische Dämpfungsenergie
D_o	Totale Dämpfungsenergie des ganzen Körpers
$D_{o,VD}$	Totale Dämpfungsenergie infolge viskoser Dämpfung
$D_{o,CD}$	Totale Dämpfungsenergie infolge Coulomb-Dämpfung
W	Spezifische Formänderungsenergie
W_o	Totale Formänderungsenergie des ganzen Körpers
E_o	Durch äussere Kräfte zugeführte Energie

Dimensionslose Parameter

j	Anzahl Stäbe der Längszugbewehrung
A	Verhältnis der Radialspannung σ_r und der Verbundspannung τ_v
μ	Bewehrungsgehalt (untere Längsbewehrung)
μ'	Bewehrungsgehalt (obere Längsbewehrung)
κ	Verbundkoeffizient
n	Verhältnis E_e/E_b
$\bar{\mu}$	Reibungskoeffizient zwischen Beton und Stahl
i	Komplexe Einheit
$\operatorname{sgn} \dot{z}$	Vorzeichen der Funktion $\dot{z}$
p	Anzahl gerissener Biegeelemente eines Biegeträgers
q	Anzahl ungerissener Biegeelemente eines Biegeträgers
m	Anzahl Freiheitsgrade eines Mehrmassenschwingers

Indices

b	Beton, Leichtbeton
e	Stahl
id	ideel
$unger$	ungerissen

ger	gerissen
el	auf Biegeelement bezogen (hochgestellter Index)
VD	Viskose Dämpfung
CD	Coulomb-Dämpfung
eq	äquivalent
dyn	dynamisch
stat	statisch

Literaturverzeichnis

Allgemeine Dynamik

- [1.1] Newmark N.M., Rosenblueth E.: "Fundamentals of Earthquake Engineering", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.
- [1.2] Clough R.W., Penzien J.: "Dynamics of Structures", McGraw-Hill, New York, 1975.
- [1.3] Caughey T.K.: "Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems", Journal of Applied Mechanics, 27, and Transactions of ASME, 82, Series E, 269-71, 1960.
- [1.4] Crandall S.H.: "Dynamic Response of Systems with Structural Damping", Air Force Office of Scientific Research, Contract No. 49 (638)-504, 1961.
- [1.5] Hurty W.C., Rubinstein M.F.: "Dynamics of Structures", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.

Dämpfung allein

- [2.1] Goodman L.E.: "Material Damping and Slip Damping", Chapter 36 in Shock and Vibration Handbook, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1961.
- [2.2] Joos R.: "Survey of Damping Mechanisms", Feinwerktechnik und Messtechnik, 84, 1976.
- [2.3] Lazan B.J.: "Internal Friction, Damping and Cyclic Plasticity", ASTM Special Technical Publication No. 378, 1965.
- [2.4] Podnieks E.R., Lazan B.J.: "Analytical Methods for Determining Specific Damping Energy Considering Stress Distribution", WADC Technical Report 56-44, June 1957.
- [2.5] Lazan B.J.: "Fatigue Failure under Resonant Vibration Conditions", WADC, March 1954.
- [2.6] Jennings P.C.: "Equivalent Viscous Damping for Yielding Structures", Proceedings of ASCE, Vol. 94, EM1, February 1968, p. 103ff.
- [2.7] Jacobsen L.S.: "Steady Forced Vibration as Influenced by Damping", Transactions of ASME, 52, Appl. Mech. Section, 1930, p. 169-178.
- [2.8] Ruzicka J.E., Derby T.F.: "Vibration Isolation with Nonlinear Damping", Transactions of ASME, J. Eng. Ind. 93 (2), May 1971, p. 627-635.

Versuche zur Ermittlung der Dämpfung

- [3.1] Dieterle R., Bachmann H.: "Versuche über den Einfluss der Rissbildung auf die dynamischen Eigenschaften von Leichtbeton- und Betonbalken", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Versuchsbericht Nr. 7501-1, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, Dezember 1979.
- [3.2] Teichen K.T.: "Ueber die innere Dämpfung von Beton", Otto-Graf-Institut, Schriftenreihe Heft 38, Stuttgart, 1968.
- [3.3] Ali, Kesler C.E.: "Rheology of Concrete: A Review of Research", University of Illinois, Bulletin V. 62, No. 68, March 1965.

- [3.4] Baker L.S., Kesler C.E.: "A Study of the Damping Properties of Mortar", Theoretical and Applied Mechanics, Report No. 598, Urbana, Ill., University of Illinois, August 1961.
- [3.5] Cole D.G., Spooner D.C.: "The Damping Capacity of Hardened Cement Paste and Mortar in Specimens Vibration at Very Low Frequencies", Proceedings ASTM, Vol. 65, 1965, p. 661.
- [3.6] Kesler C.E., Chang T.S.: "Utilization of Data Obtained in Sonic Tests of Plain Concrete", Theoretical and Applied Mechanics, Report No. 77, Urbana, Ill., University of Illinois, 1954, p. 18ff.
- [3.7] Obert L., Duvall W.T.: "Discussion of Dynamic Methods of Testing Concrete with Suggestions for Standardization, Proc. of ASTM, Vol. 41, 1941, p. 1053-1070.
- [3.8] Richards C.W., Radjy F.: "A New Application of Internal Friction to Concrete Research", Materials Research and Standards, V. 6, No. 8, August 1966, p. 386-392.
- [3.9] Thomson W.T.: "Measuring Changes in Physical Properties of Concrete by the Dynamic Method", Proceedings of ASTM, Vol. 40, 1940, p. 1113-1120.
- [3.10] Swamy R.N.: "Damping Mechanics of Cementitious Systems", Chapter 30 in Dynamic Waves in Civil Engineering, Wiley Interscience, 1974.
- [3.11] Girgrah M., Kesler C.E.: "A Study of the Rheological and Damping Properties of Concrete", Theoretical and Applied Mechanics, Report No. 173, Urbana Ill., University of Illinois, 1960, p. 53ff.
- [3.12] Jones R.: "The Effect of Frequency on the Dynamic Modulus and Damping Coefficient of Concrete", Zement-Kalk-Gips, Nr. 7, 1958, p. 321-322.
- [3.13] Ehlers, G.: "Das Elastizitätsmass des Betons bei Schwingungen", Beton und Eisen, Heft 20, 1941.
- [3.14] Kesler C.E., Higuchi Y.: "Determination of Compressive Strength of Concrete by Using its Sonic Properties", Proceedings of ASTM, Vol. 53, 1953, p. 1044.
- [3.15] Morrone A.: "Damping Values of Nuclear Power Plant Components", Nuclear Engineering Design, 26(3), 1974, p. 343-363.
- [3.16] Bock E.: "Ueber den dynamischen E-Modul und die Dämpfung von Betonbalken verschiedener Bewehrung bei Bieguings- und Längsschwingungen", Dissertation, Berlin, 1939.
- [3.17] Lenk H.: "Ueber das Schwingungsverhalten von Spannbeton- und Stahlbetonbalken", Dissertation, Technische Hochschule Stuttgart, 1964.
- [3.18] Penzien J.: "Damping Characteristics of Prestressed Concrete", ACI Journal, Proceedings V. 61, No. 9, September 1964, p. 1125-1148.
- [3.19] Denkhaus G., Dück G.: "Ueber das Verhalten von Spannbetonbalken bei Biegeschwingungen", Beton und Stahlbetonbau, Heft 3, 1952, p. 59-62.
- [3.20] Müller F.P.: "Die Ermittlung der Abweichung vom linearen Formänderungsgesetz sowie die Dämpfung von Spannbeton durch Ausschwingversuche", Beton und Stahlbetonbau 54, Heft 11, 1959, p. 276-278.
- [3.21] Fritz-de-la-Orta G.O.: "Ueber das Verhalten von Spannbetonbauteilen bei dynamischer Beanspruchung, insbesondere bei Erdbeben", Dissertation, Technische Hochschule München, 1958.
- [3.22] Brondum-Nielsen T.: "Effect of Prestress on the Damping of Concrete", Structural Research Laboratory, Technical University of Denmark, Report No. 51, 1974.

- [3.23] CUR: "Vibration Problems in Prestressed Concrete", Report No. 17, Netherlands Committee for Concrete Research, The Hague, January 1960.
- [3.24] Holand I.: "Damping of Vibrations in Simply Supported Prestressed Beams", Institut for Statikk, Norges Tekniske Hogskole, Trondheim, Norway, April 1962.
- [3.25] Duffield R.C., Salance H.J.: "Damping Characteristics of a Composite Girder", Journal of the Structural Division, ST1, January 1977.
- [3.26] Dieterle R., Bachmann H.: "Einfluss der Rissbildung auf die dynamischen Eigenschaften von Leichtbeton- und Betonbalken", Schweizer Ingenieur und Architekt, 98. Jahrgang, Heft 32/80, 7. Aug. 1980.

Verbund, Stahlbeton

- [4.1] Rehm G.: "Ueber die Grundlagen des Verbundes zwischen Stahl und Beton", Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 138, Berlin 1961.
- [4.2] Martin H.: "Zusammenhang zwischen Oberflächenbeschaffenheit, Verbund und Sprengwirkung von Bewehrungsstählen unter Kurzzeitbelastung", Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 228, Berlin 1973.
- [4.3] Goto Y.: "Experimental Studies on Cracks Formed in Concrete around Deformed Tension Bars", Technology Reports, Tohoku University, Vol. 44, No. 1, 1979.
- [4.4] Wascheidt H.: "Dauerschwingfestigkeit von Betonstählen in einbetoniertem Zustand", Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 200, Berlin 1968.
- [4.5] Bachmann H.: "Stahlbeton I" und "Stahlbeton II", Vorlesungsautographien, Abteilung für Bauingenieurwesen, ETH Zürich, 1972.

Anhang A1: Gerissenes und ungerissenes Biegeelement

1. Gerissenes Biegeelement

Die gesamte durch viskose Dämpfung innerhalb der Druckzone des gerissenen Biegeelementes dissipierte Energie $D_{o,VD}^{el}$ ergibt sich mit

$$D(x,y,z) = d \cdot \frac{\sigma^2(x,y,z)}{\beta_p^2} \quad \text{und} \quad D_{o,VD}^{el} = \int_V D \cdot dV \quad (A 1.1)$$

zu

$$D_{o,VD}^{el} = \int_V d \cdot \frac{\sigma^2(x,y,z)}{\beta_p^2} \cdot dV$$

$$D_{o,VD}^{el} = \int_{-s/2}^{s/2} \int_{-B/2}^{B/2} \int_0^{x_{Na}} d \cdot \frac{\sigma^2(x,y,z)}{\beta_p^2} \cdot dz \cdot dy \cdot dx \quad (A 1.2)$$

Wenn angenommen wird, dass sich die Spannungen längs der Achse des Elementes nicht verändern, kann die Betonspannung bei einer linearen Spannungsverteilung durch die Gleichung

$$\sigma(x,y,z) = \sigma(z) = \sigma_b \cdot \frac{z}{x_{Na}} \quad (A 1.3)$$

ausgedrückt werden. Durch Einsetzen von Gl. (A 1.3) in Gl. (A 1.2) erhält man für $D_{o,VD}^{el}$

$$D_{o,VD}^{el} = d \cdot s \cdot B \cdot \frac{1}{x_{Na}^2} \cdot \frac{\sigma_b^2}{\beta_p^2} \cdot \int_0^{x_{Na}} z^2 \cdot dz$$

$$D_{o,VD}^{el} = \frac{1}{3} \cdot d \cdot s \cdot B \cdot x_{Na} \cdot \frac{\sigma_b^2}{\beta_p^2} \quad (A 1.4)$$

Die maximale im gerissenen Biegeelement gespeicherte Formänderungsenergie W_o^{el} beträgt

$$W_o^{el} = \frac{1}{2} \cdot \int_V \frac{\sigma^2(x,y,z)}{E} \cdot dV \quad (A 1.5)$$

$$W_o^{el} = \frac{1}{2 \cdot E_b} \cdot \int_{-s/2}^{s/2} \int_{-B/2}^{B/2} \int_0^{x_{Na}} \sigma^2(x,y,z) \cdot dz \cdot dy \cdot dx +$$

$$+ \frac{1}{2 \cdot E_g} \cdot \left[F_g \cdot \int_{-s/2}^{s/2} \sigma_g^2 \cdot dx + F_g' \cdot \int_{-s/2}^{s/2} \sigma_g'^2 \cdot dx \right] \quad (A 1.6)$$

Mit Gl. (A 1.3) und $\sigma_e = \text{konstant}$, $\sigma'_e = \text{konstant}$ erhält man daraus

$$W_o^{el} = \frac{1}{6 \cdot E_b} \cdot s \cdot B \cdot x_{Na} \cdot \sigma_b^2 + \frac{1}{2 \cdot E_e} [Fe \cdot s \cdot \sigma_e^2 + Fe' \cdot s \cdot \sigma_e'^2] . \quad (A 1.7)$$

Aus der Annahme für das Ebenbleiben der Querschnitte ergibt sich für σ_e und σ'_e

$$\sigma_e = n \cdot \sigma_b \cdot \frac{h - x_{Na}}{x_{Na}} \quad \text{bzw.} \quad \sigma'_e = n \cdot \sigma_b \cdot \frac{x_{Na} - h'}{x_{Na}} , \quad (A 1.8)$$

womit man für W_o^{el} den Ausdruck

$$\begin{aligned} W_o^{el} &= \frac{1}{6 \cdot E_b} \cdot s \cdot B \cdot x_{Na} \cdot \sigma_b^2 + \frac{1}{2 \cdot n \cdot E_b} \cdot [\mu \cdot B \cdot h \cdot s \cdot n^2 \cdot \sigma_b^2 \cdot \frac{(h - x_{Na})^2}{x_{Na}^2} + \\ &\quad + \mu' \cdot B \cdot h \cdot s \cdot n^2 \cdot \sigma_b^2 \cdot \frac{(x_{Na} - h')^2}{x_{Na}^2}] \\ W_o^{el} &= \frac{s \cdot B \cdot x_{Na}}{6 \cdot E_b} \cdot \sigma_b^2 \cdot C_1 \end{aligned} \quad (A 1.9)$$

mit

$$C_1 = 1 + 3 \cdot n \cdot \mu \cdot h \cdot \frac{(h - x_{Na})^2}{x_{Na}^3} + 3 \cdot n \cdot \mu' \cdot h \cdot \frac{(x_{Na} - h')^2}{x_{Na}^3}$$

erhält. Mit σ_e anstelle von σ_b erhält man für W_o^{el}

$$W_o^{el} = \frac{s \cdot B \cdot h}{6 \cdot E_b \cdot n^2} \cdot \sigma_e^2 \cdot C_2 \quad (A 1.10)$$

mit

$$C_2 = \frac{x_{Na}^3}{h \cdot (h - x_{Na}^2)} + 3 \cdot n \cdot \mu + 3 \cdot n \cdot \mu' \cdot \frac{(x_{Na} - h')^2}{(h - x_{Na})^2} .$$

2. Ungerissenes Biegeelement

Mit

$$\sigma(x, y, z) = \sigma(z) = \sigma_b \cdot \frac{z}{H/2} \quad (A 1.11)$$

erhält man durch Integration über das ganze Volumen des Biegeelementes die gesamte im ungerissenen Biegeelement durch viskose Dämpfung dissipierte Energie $D_{o,VD}^{el}$

$$\begin{aligned}
 D_{o,VD}^{el} &= \int_V d \cdot \frac{\sigma^2(x,y,z)}{\beta_p^2} \\
 &= \int_{-s/2}^{s/2} \int_{-B/2}^{B/2} \int_{-H/2}^{H/2} d \cdot \frac{\sigma_b^2}{\beta_p^2} \cdot \frac{4 \cdot z^2}{H^2} \cdot dz \cdot dy \cdot dx \\
 &= \frac{4 \cdot d \cdot \sigma_b^2}{H^2 \cdot \beta_p^2} \cdot s \cdot B \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{H^3}{8} = \frac{1}{3} \cdot d \cdot s \cdot B \cdot H \cdot \frac{\sigma_b^2}{\beta_p^2} \quad (A \ 1.12)
 \end{aligned}$$

Die maximale im ungerissenen Biegeelement gespeicherte Formänderungsenergie W_o^{el} beträgt

$$W_o^{el} = \frac{1}{2} \cdot \int_V \frac{\sigma^2(x,y,z)}{E} \cdot dV \quad .$$

Mit

$$\sigma = \sigma_b \cdot \frac{z}{\frac{H}{2}} \quad \sigma_e = \sigma'_e = n \cdot \sigma_b \cdot \frac{\frac{H}{2} - h'}{\frac{H}{2}} \quad (A \ 1.13)$$

erhält man für W_o^{el}

$$\begin{aligned}
 W_o^{el} &= \frac{1}{2 \cdot E_b} \cdot \int_{-s/2}^{s/2} \int_{-B/2}^{B/2} \int_{-H/2}^{H/2} \sigma_b^2 \cdot \frac{4 \cdot z^2}{H^2} \cdot dz \cdot dy \cdot dx + \\
 &+ \frac{1}{2 \cdot E_e} \cdot (F_e + F_e') \cdot n^2 \cdot \sigma_b^2 \cdot \frac{(\frac{H}{2} - h')^2}{(\frac{H}{2})^2}
 \end{aligned}$$

$$W_o^{el} = \frac{s \cdot B \cdot H}{6 \cdot E} \cdot \sigma_b^2 \cdot C_o \quad (A \ 1.14)$$

mit

$$C_o = 1 + 3 \cdot n \cdot \frac{h}{H} \cdot (\mu + \mu') \cdot \frac{(\frac{H}{2} - h')^2}{(\frac{H}{2})^2} \quad .$$

Anhang A2: Teilweise gerissener Stahlbetonträger

1. Dämpfungsenergie $D_{o,VD}$

Die gesamte durch viskose Dämpfung innerhalb der Druckzonen der gerissenen Biegeelemente bzw. in den Zug- und Druckzonen der ungerissenen Biegeelemente des Trägers dissipierte Energie $D_{o,VD}$ ergibt sich unter der Annahme einer sinusförmig verteilten Biegebeanspruchung (vgl. Bild 58) aus

$$D_{o,VD} = \int_{V_{unger}} d \cdot \frac{\sigma^2(x,y,z)}{\beta_p^2} \cdot dV + \int_{V_{ger}} d \cdot \frac{\sigma^2(x,y,z)}{\beta_p^2} \cdot dV \quad (A 2.1)$$

Mit

$$\sigma(x,y,z) = \sigma_{b,d} \cdot \frac{z}{x_{Na}} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \quad (\text{gerissenes Biegeelement})$$

$$\text{bzw.} \quad (A 2.2)$$

$$\sigma(x,y,z) = \sigma'_{b,d} \cdot \frac{z}{H/2} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \quad (\text{ungerissenes Biegeelement})$$

erhält man aus Gl. (A 2.1)

$$D_{o,VD} = 2 \cdot \int_0^r \int_{-B/2}^{B/2} \int_{-H/2}^{H/2} d \cdot \frac{\sigma_{b,d}^2}{\beta_p^2} \cdot \frac{4 \cdot z^2}{H^2} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \cdot dz \cdot dy \cdot dx +$$

$$+ 2 \cdot \int_r^{1/2} \int_{-B/2}^{B/2} \int_0^{x_{Na}} d \cdot \frac{\sigma_{b,d}^2}{\beta_p^2} \cdot \frac{z^2}{x_{Na}^2} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \cdot dz \cdot dy \cdot dx$$

wobei $\sigma'_{b,d}$ und $\sigma_{b,d}$ aus

$$\sigma'_{b,d} = \frac{M_o}{W_i} \quad \text{und} \quad \sigma_{b,d} = c_b \cdot \frac{M_o}{b \cdot h^2}$$

berechnet werden können. Daraus erhält man für $D_{o,VD}$

$$D_{o,VD} = \frac{8 \cdot d \cdot B \cdot \sigma_{b,d}^2}{H^2 \cdot \beta_p^2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{H^3}{8} \cdot \int_0^r \sin^2\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \cdot dx + \frac{2 \cdot d \cdot B \cdot \sigma_{b,d}^2}{x_{Na}^2 \cdot \beta_p^2} \cdot \frac{x_{Na}^3}{3} \cdot \int_r^{1/2} \sin^2\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \cdot dx \quad (A 2.3)$$

$$D_{o,VD} = \frac{2}{3} \cdot d \cdot B \cdot H \cdot \frac{\sigma_{b,d}^2}{\beta_p^2} \cdot \int_0^r \sin^2\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \cdot dx + \frac{2}{3} \cdot d \cdot B \cdot x_{Na} \cdot \frac{\sigma_{b,d}^2}{\beta_p^2} \cdot \int_r^{1/2} \sin^2\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \cdot dx$$

2. Dämpfungsenergie $D_{o,CD}$

Die gesamte durch Coulomb-Dämpfung innerhalb der gerissenen Elemente des Stahlbetonbiegeträgers dissipierte Energie $D_{o,CD}$ ergibt sich mit den Annahmen einer konstanten Verbundspannung τ_v und einer Beanspruchungsproportionalen Relativverschiebung v_m (vgl. Gl. (6.18))

$$v_m(x,t) = v_m(\sigma_{e,d}) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \cdot \sin(\omega t)$$

zu (vgl. Gl. (6.19))

$$\begin{aligned} D_{o,CD} &= 8 \cdot \pi \cdot \bar{\mu} \cdot A \cdot j \cdot \emptyset \cdot \tau_{v,m}(\bar{\sigma}_e) \cdot v_m(\sigma_{e,d}) \cdot \int_r^{1/2} \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \cdot dx \cdot \int_0^{T/4} \omega \cdot \cos(\omega t) \cdot dt \\ &= 8 \cdot \pi \cdot \bar{\mu} \cdot A \cdot j \cdot \emptyset \cdot \tau_{v,m}(\bar{\sigma}_e) \cdot v_m(\sigma_{e,d}) \cdot \int_r^{1/2} \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \cdot dx \quad . \end{aligned} \quad (A 2.4)$$

3. Formänderungsenergie W_o

Die maximale im teilweise gerissenen Biegeträger gespeicherte Formänderungsenergie W_o beträgt

$$W_o = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_{V_{unger}} \frac{\sigma^2(x,y,z)}{E} \cdot dV + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_{V_{ger}} \frac{\sigma^2(x,y,z)}{E} \cdot dV \quad . \quad (A 2.5)$$

Mit Gl. (A 2.2) ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} W_o &= \frac{1}{E_b} \cdot \int_0^r \int_{-B/2}^{B/2} \int_{-H/2}^{H/2} \sigma_{b,d}^2 \cdot \frac{4 \cdot z^2}{H^2} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \cdot dz \cdot dy \cdot dx + \\ &+ \frac{1}{E_e} \cdot \int_0^r (F_e + F_e') \cdot n^2 \cdot \sigma_{b,d}^2 \cdot \frac{\left(\frac{H}{2} - h'\right)^2}{\left(\frac{H}{2}\right)^2} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \cdot dx + \\ &+ \frac{1}{E_b} \cdot \int_r^{1/2} \int_{-B/2}^{B/2} \int_{-H/2}^{H/2} \sigma_{b,d}^2 \cdot \frac{z^2}{x_{Na}^2} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \cdot dz \cdot dy \cdot dx + \\ &+ \frac{1}{E_e} \cdot \int_r^{1/2} F_e \cdot n^2 \cdot \sigma_{b,d}^2 \cdot \frac{(h - x_{Na})^2}{x_{Na}^2} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \cdot dx + \\ &+ \frac{1}{E_e} \cdot \int_r^{1/2} F_e' \cdot n^2 \cdot \sigma_{b,d}^2 \cdot \frac{(x_{Na} - h')^2}{x_{Na}^2} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \cdot dx \quad . \end{aligned}$$

Mit den Koeffizienten C_0 und C_1 (vgl. Gleichungen (A 1.14) und (A 1.9)) erhält man für W_0

$$W_0 = \frac{B \cdot H}{3 \cdot E_b} \cdot \sigma_{b,d}'^2 \cdot C_0 \cdot \int_0^r \sin^2\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \cdot dx +$$

$$+ \frac{B \cdot x_{Na}}{3 \cdot E_b} \cdot \sigma_{b,d}^2 \cdot C_1 \cdot \int_r^{l/2} \sin^2\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \cdot dx \quad (A 2.6)$$

mit

$$\sigma_{b,d}' = \frac{M_0}{W_i} \quad ; \quad \sigma_{b,d} = c_b \cdot \frac{M_0}{b \cdot h^2} \quad .$$

Anhang A3: Vereinfachende Empfehlungen für die Annahme des Dämpfungsmasses

Im folgenden geht es nicht darum, die in der vorliegenden Arbeit gemachten Herleitungen über einen Leisten zu schlagen, doch sollen demjenigen Leser, der nur wenig Zeit hat, in diesem Abschnitt ein paar konkrete Hinweise gegeben werden, welche Dämpfungsmasse bei Stahlbetontragwerken mit Beanspruchungen unterhalb der Proportionalitätsgrenze in die Rechnung etwa eingesetzt werden sollen. Die Angaben basieren auf den in [3.1] beschriebenen Versuchsergebnissen. Verständlicherweise tragen sie nur einem Teil der wesentlichen Einflussfaktoren Rechnung und können somit nicht uneingeschränkt gültig sein. Im Zweifelsfall ist das Dämpfungsmass aufgrund der Modelleigenschaften genauer zu berechnen oder konservativ, d.h. gering, anzunehmen. Es sei hier nochmals ausdrücklich darauf hingewiesen, dass mit den hier angegebenen Werten nur die Materialdämpfung eines Tragwerks berücksichtigt wird. Beim Vorhandensein von Systemdämpfung kann das Dämpfungsmass entsprechend erhöht werden. Für das Dämpfungsmass von vorwiegend auf Biegung beanspruchten schlaff bewehrten oder vorgespannten Betonkonstruktionen, welche ungerissen sind, kann unabhängig von der Höhe der Beanspruchung als unterer Grenzwert

$\xi = 0.006$ bzw. 0.6% beim Beton

$\xi = 0.005$ bzw. 0.5% beim Leichtbeton

angenommen werden.

Für das Dämpfungsmass von vorwiegend auf Biegung beanspruchten, schlaff bewehrten Betonkonstruktionen im Risszustand kann bei kleineren durch die Schwingung hervorgerufenen zusätzlichen Stahlspannungen $\sigma_{e,rel}$ infolge dynamischer Belastung (d.h. $\sigma_{e,rel} < 20 \text{ N/mm}^2$)

$\xi = 0.020$ bzw. 2.0% beim Beton

$\xi = 0.016$ bzw. 1.6% beim Leichtbeton

angenommen werden (vgl. auch Bild 72).

Für das Dämpfungsmass von vorwiegend auf Biegung beanspruchten, schlaff bewehrten Betonkonstruktionen im Risszustand kann bei grösseren zusätzlichen Stahlspannungen infolge dynamischer Belastung (d.h. $\sigma_{e,rel} > 200 \text{ N/mm}^2$)

$\xi = 0.006$ bzw. 0.6% beim Beton

$\xi = 0.005$ bzw. 0.5% beim Leichtbeton

angenommen werden.

Bei mittleren zusätzlichen Stahlspannungen (d.h. $20 \text{ N/mm}^2 < \sigma_{e,rel} < 200 \text{ N/mm}^2$) kann für das Dämpfungsmass ein zwischen den obigen Grenzen liegender Wert angenommen werden (hyperbolischen Zusammenhang von ξ und $\sigma_{e,rel}$ gemäss Bild 72 berücksichtigen).