Berechnung unelastischer Rahmen nach der Theorie 2. Ordnung

Working Paper**Author(s):**

Aas-Jakobsen, Knut; Grenacher, Mathis

Publication date:

1973

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000674500>

Rights / license:

In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

Originally published in:

Bericht / Institut für Baustatik ETH Zürich 45

**Berechnung unelastischer
Rahmen nach der Theorie
2. Ordnung**

Knut Aas-Jakobsen
Mathis Grenacher

Januar 1973
Bericht Nr. 45

Berechnung unelastischer Rahmen nach der Theorie 2. Ordnung

von

Lic. techn. Knut Aas-Jakobsen

Dipl. Ing. Mathis Grenacher

Institut für Baustatik

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

Zürich
Januar 1973

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
1. EINLEITUNG	1
1.1 Problemstellung	1
1.2 Generelles Vorgehen bei der Berechnung von Rahmentragwerken	1
2. PROBLEME BEI DER BERECHNUNG VON STAHLBETONRAHMEN	5
2.1 Berechnung von elastischen Stabtragwerken mit der Methode der finiten Elemente	5
2.2 Berechnung der effektiven Biegesteifigkeit $\overline{EI}$	9
2.3 Steuerung des Rechenganges	13
3. BESCHRIEB DES PROGRAMMES	18
3.1 Genereller Aufbau des Programmes	18
3.2 Beschrieb der einzelnen Programmteile	19
4. RECHENBEISPIELE	21
BEZEICHNUNGEN	26
LITERATUR	28
VERDANKUNGEN	29
ZUSAMMENFASSUNG - RESUME - SUMMARY	30
ANHANG	
1. Eingabe der Daten	31
2. Beispiel einer Dateneingabe	33
3. Output der Resultate	33

1. EINLEITUNG

1.1 Problemstellung

In Erweiterung des Forschungsprojektes des Instituts für Baustatik, Abt. Massivbau, ETH-Z, über die Tragfähigkeit von Stahlbetonstützen unter Berücksichtigung von unelastischen Verformungen wird das Verhalten von Stahlbetonrahmen studiert. In einem ersten Schritt wird ein Rechenprogramm entwickelt zum Studium von schlanken Rahmentragwerken. Das Programm muss einen vielseitigen Anwendungsbereich in bezug auf die Geometrie und das Materialverhalten des Tragwerkes ermöglichen. Es müssen somit die folgenden Einflüsse berücksichtigt werden:

- Die Gleichgewichtsbedingungen werden am deformierten System formuliert (Theorie 2. Ordnung).
- Dem nicht-linearen Verformungsverhalten unter Kurz- und Langzeitlasten wird Rechnung getragen.
- Eine beliebige Lastgeschichte kann berücksichtigt werden.

Dabei werden die folgenden, grundlegenden Annahmen getroffen:

- Ebene Querschnitte bleiben eben.
- Der Einfluss der Querkraft auf die Durchbiegungen wird vernachlässigt.
- Die Durchbiegungen bleiben klein im Verhältnis zu den Spannweiten.
- Es werden nur ebene Tragwerke berechnet unter Belastungen in der Tragwerksebene.

Die Anwendung dieses Rechenprogrammes wird am Beispiel von Stahlbetontragwerken gezeigt.

1.2 Generelles Vorgehen bei der Berechnung von Rahmentragwerken

Um ein möglichst vielseitiges Rechenprogramm entwickeln zu können und die Nichtlinearität des Materials zu berücksichtigen, wird das ganze Tragwerk diskretisiert (Bild 1).

Das Tragwerk wird unterteilt in Stäbe (Balken und Stützen). Damit ist eine Lösung für beliebige ebene Rahmentragwerke möglich. Die einzelnen Stäbe werden ihrerseits unterteilt in eine Anzahl von Elementen. Ueber die Länge der Elemente wird eine konstante effektive Steifigkeit $\overline{EI}$ vorausgesetzt, was nur für kleine Elemente vernünftig ist.

Für nichtlineares Materialverhalten kann im allgemeinen keine geschlossene Beziehung zwischen Schnittkräften und Querschnittsverformungen (d.h. für die Momenten-Normalkraft-Zeit-Krümmungs-Beziehung) formuliert werden. Deshalb wird der Querschnitt in einzelne Fasern unterteilt. Die Spannung wird für jede Faser direkt aus der Spannungs-Dehnungs-Beziehung des entsprechenden Materials berechnet.

Das in Kap. 3 beschriebene Rechenprogramm ist auf einer sukzessiven Steifigkeits-

Bild 1: Diskretisation des Tragwerks

Vorgehen: $\bar{EI} \rightarrow M, N \rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M}{\bar{EI}} \rightarrow M \rightarrow \bar{EI} = \bar{M}/(1/\rho) ; \bar{EI} \rightarrow \dots$

elastische Analyse nicht lineare Querschnittsanalyse

Bild 2: Berechnung der effektiven Biegesteifigkeit $\bar{EI}$

Approximation aufgebaut. In einem iterativen Rechenprozess wird die Biegesteifigkeit für jede Laststufe solange verändert, bis sie zu einem Gleichgewichtszustand der inneren und äusseren Kräfte (d.h. Momente und Achsialkräfte) führt. Die einzelnen Schritte im verwendeten Rechenverfahren können wie folgt beschrieben werden:

1. Die Steifigkeiten aller Tragwerkselemente werden angenommen.
2. Für eine Belastung werden die Schnittkräfte M und N sowie die Krümmung $1/\rho$ ($= M/\overline{EI}$) für alle Elemente mit einer elastischen Analyse des Tragwerks berechnet, wobei der Einfluss 2. Ordnung mitberücksichtigt wird.
3. Für die berechnete Krümmung $1/\rho$ und die Achsialkraft N wird das innere Moment $\overline{M}$ für jedes Element unter Wahrung des achsialen Gleichgewichts ermittelt.
4. Ein besserer Wert für die effektive Steifigkeit $\overline{EI}$ kann aus dem inneren Moment $\overline{M}$ wie folgt berechnet werden:

$$\overline{EI} = \overline{M} / (1/\rho)$$

5. Eine weitere elastische Analyse wird mit der neuen Steifigkeit durchgeführt (Pt.2) und das Verfahren wird wiederholt bis ein zu definierendes Konvergenzkriterium erfüllt ist (Bild 2).

Die zwei wichtigsten Schritte in der Ermittlung des Verformungsverhaltens von schlanken Rahmentragwerken mit nichtlinearen Materialeigenschaften sind in Kapitel 2 beschrieben. Es sind dies:

- Die elastische Analyse (Kap. 2.1)
- Die Momenten-Krümmungs-Beziehungen unter Berücksichtigung des nichtlinearen Materialverhaltens (Kap. 2.2).

Eine Schwierigkeit beim oben beschriebenen Verfahren ergibt sich bei schlanken Rahmentragwerken mit nichtlinearem Materialverhalten aus der Tatsache, dass die Traglast einem labilen Gleichgewichtszustand entsprechen kann. Dieser Zustand ist ersichtlich aus Bild 3 und der Punkt der maximalen Last wird als Stabilitätsgrenze bezeichnet. Wenn die Last schrittweise erhöht wird, ist es schwierig, im kritischen Bereich der Stabilitätsgrenze einen Gleichgewichtszustand zu finden, und die Konvergenz des iterativen Rechenprozesses ist schlecht. Keine Schwierigkeiten ergeben sich jedoch, wenn an Stelle der Last die Verformung an einem Punkt des Tragwerkes schrittweise erhöht wird und die dazugehörige Last berechnet wird.

Bild 3: Versagen von schlanken Rahmentragwerken mit unelastischem Materialverhalten

2. PROBLEME BEI DER BERECHNUNG VON STAHLBETONRAHMEN

2.1 Berechnung von elastischen Stabtragwerken mit der Methode der finiten Elemente

Die Methode der finiten Elemente ist andernorts mehrfach beschrieben worden (z.B. [1], [2], [3]). An dieser Stelle sollen nur einige grundsätzliche Ideen und deren Anwendung im Rechenprogramm gegeben werden. Das Programm ist in Kap. 3 beschrieben.

Das lineare Gleichungssystem

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, wird das Rahmentragwerk in Elemente unterteilt. Diese Elemente sind an ihren Enden in den sogenannten Knotenpunkten miteinander verbunden. Die Verschiebungen dieser Knotenpunkte sind die grundlegenden Unbekannten bei der Berechnung des Tragwerkes. In jedem Knoten gibt es drei mögliche äussere Lasten, zwei Verschiebungen und eine Verdrehung (Bild 4).

Bild 4: Knotenverschiebungen $\{w\}$ und äussere Lasten $\{P\}$

Die Beziehungen zwischen den Knotenverschiebungen $\{w\}$ und den Knotenkräften $\{P\}$ führen zu einem linearen Gleichungssystem von folgender Form:

$$[K]\{w\} = \{P\} \quad (1)$$

wobei $[K]$ die globale Steifigkeitsmatrix des Tragwerks ist.

Berechnung der Steifigkeitsmatrix

Die Ermittlung der globalen Steifigkeitsmatrix $[K]$ eines Tragwerkes erfordert zuerst die Berechnung der Steifigkeitsmatrix für jedes einzelne Element in irgendeinem günstigen lokalen Koordinatensystem. Um auch den Einfluss 2. Ordnung zu berücksichtigen, kann die Gleichung (1) wie folgt erweitert werden:

$$([K_1] - [K_2]) \{w\} = \{P\} \quad (1a)$$

wobei $[K_1]$ die Steifigkeitsmatrix nach Theorie 1. Ordnung ist und $[K_2]$ die Ergänzung der Steifigkeitsmatrix infolge der Theorie 2. Ordnung ist. $[K_2]$ wird oft auch als geometrische Steifigkeitsmatrix bezeichnet.

In Anwendung des 1. Theorems von Castigliano kann die lokale Steifigkeitsmatrix eines Elementes aus der Formänderungsenergie U abgeleitet werden. Die Steifigkeitskoeffizienten K_{ij} berechnen sich zu:

$$K_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial w_i \partial w_j} \quad (2)$$

Die Formänderungsenergie U kann in Funktion der Verschiebungen für prismatische Stäbe wie folgt ausgedrückt werden:

$$U = \frac{1}{2} EI \int_L \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} EF \int_L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_L N \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \quad (3)$$

Die beiden ersten Terme entsprechen den bekannten Ausdrücken für die Formänderungsenergie bei Biegung resp. achsialer Verformung. Der letzte Term entspricht der Energie, die N bei der Verkürzung infolge Verbiegung des Elementes beiträgt. Dies ist der Einfluss 2. Ordnung.

Um die Formänderungsenergie berechnen zu können, muss das Verschiebungsfeld $w_x(x)$ und $w_y(x)$ in Funktion der lokalen Knotenverschiebungen $\{w\}$ gegeben sein. Diese Beziehung für die beiden Verschiebungen kann erfasst werden durch den Ansatz eines Polynoms von der gleichen Ordnung wie Knotenverschiebungen pro Element vorhanden sind. Dies ergibt ein Polynom 1. Ordnung für die Verschiebung $w_x(x)$ entlang der Elementachse und ein Polynom 3. Ordnung für die Verschiebung $w_y(x)$ normal zur Elementachse. Ausgedrückt in Funktion der Knotenverschiebungen in einem lokalen Koordinatensystem mit der x -Achse entlang der Elementachse und der y -Achse normal dazu ergeben sich die Verschiebungen w_x und w_y zu:

$$\left. \begin{aligned} w_x &= w_x^i + (w_x^j - w_x^i) \xi \\ w_y &= (1-3\xi^2 + 2\xi^3) w_y^i + L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) w_\alpha^i + (3\xi^2 - 2\xi^3) w_y^j + \\ &\quad + L(-\xi^2 + \xi^3) w_\alpha^j \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

wobei $\xi = \frac{x}{L}$

Durch Einsetzen der Ausdrücke (4) für die Verschiebungen in die Gleichung (3) ergibt sich aus (2) die Elementsteifigkeitsmatrix $[K]_{\text{lokal}}$

Um die Elementsteifigkeitsmatrizen zu einer Systemsteifigkeitsmatrix zusammenfügen zu können, müssen die lokalen Matrizen der Elemente auf ein globales Koordinatensystem bezogen werden. Mit einer Rotationsmatrix $[R]_{6 \times 6}$, die abhängig ist vom entsprechenden Winkel α des Elementes, ergibt sich die globale Steifigkeitsmatrix zu:

$$[K] = [R] [K]_{\text{lokal}} [R]^T \quad (5)$$

Mit den folgenden Abkürzungen:

$$s = \sin \alpha \quad c = \cos \alpha$$

wird:

$$[K] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & x_i & y_i & \alpha_i & x_j & y_j & \alpha_j \\ \begin{array}{c} x_i \\ y_i \\ \alpha_i \\ x_j \\ y_j \\ \alpha_j \end{array} & \begin{array}{c} \frac{EF}{L} \cdot c^2 + \\ \left(12 \frac{EI}{L^3} + \frac{6N}{5L}\right) \cdot s^2 \\ \left(\frac{EF}{L} \cdot s^2 + \right. \\ \left. \left(12 \frac{EI}{L^3} + \frac{6N}{5L}\right) \cdot c^2 \right) \\ 4 \frac{EI}{L} + \frac{2}{15} \cdot N \cdot L \end{array} & \begin{array}{c} \left(\frac{EF}{L} \cdot 6N - 12 \frac{EI}{L^3}\right) \cdot sc \\ + \left(6 \frac{EI}{L^2} + \frac{N}{10}\right) \cdot s \\ + \left(6 \frac{EI}{L^2} + \frac{N}{10}\right) \cdot c \\ - \left(6 \frac{EI}{L^2} + \frac{N}{10}\right) \cdot s \end{array} & \begin{array}{c} - \left(6 \frac{EI}{L^2} + \frac{N}{10}\right) \cdot s \\ - \left(6 \frac{EI}{L^2} + \frac{N}{10}\right) \cdot c \\ - K_{x_i, \alpha_i} \\ + K_{x_i, x_i} \end{array} & \begin{array}{c} - K_{x_i, y_i} \\ - K_{y_i, y_i} \\ - K_{y_i, \alpha_i} \\ K_{x_i, y_i} \end{array} & \begin{array}{c} + K_{x_i, \alpha_i} \\ K_{y_i, \alpha_i} \\ 2 \frac{EI}{L} - \frac{1}{30} N \cdot L \\ - K_{x_i, \alpha_i} \end{array} \end{array} \end{array}$$

Um die Steifigkeitsmatrix $[K]$ zu berechnen, muss allerdings für jedes Element die Normalkraft N bekannt sein. Dies ist normalerweise nicht der Fall, sodass ein iterativer Rechenprozess, der aber sehr schnell konvergiert, notwendig ist. $[K]$ wird für die Normalkräfte aus dem vorhergehenden Iterationsschritt berechnet.

Geometrische Randbedingungen und gegebene Verschiebungen

Da die Verschiebungen die Unbekannten des linearen Gleichungssystems (1) sind, vereinfachen geometrische Randbedingungen, die gegebenen Knotenverschiebungen entsprechen, das Gleichungssystem. Ganz allgemein kann eine solche Vereinfachung infolge einer gegebenen Knotenverschiebung w_i durch die folgenden Manipulationen berücksichtigt werden:

1. Alle Glieder der i -ten Kolonne des Gleichungssystems (d.h. $K_{j,i} \cdot w_i$) werden auf die rechte Seite des Gleichheitszeichens gebracht.
2. Die Koeffizienten der i -ten Kolonne und der i -ten Zeile der Steifigkeitsmatrix $[K]$ werden gleich 0 gesetzt.
3. $K_{i,i}$ wird gleich 1 und P_i gleich w_i gesetzt.

Damit vereinfacht sich das Gleichungssystem (1) - die i-te Gleichung wird trivial - wie folgt:

$$i \quad \begin{bmatrix} K_{1,1} & \dots & 0 & \dots & K_{1,n} \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ K_{n,1} & \dots & 0 & \dots & K_{n,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 - K_{1,i} w_i \\ \vdots \\ P_i - K_{i,i} w_i \\ \vdots \\ P_n - K_{n,i} w_i \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Wenn die Reaktionen RE_i berechnet werden sollen, so müssen die Koeffizienten der i-ten Zeile von $[K]$ gespeichert werden. Nach der Berechnung der Verschiebungen $\{w\}$ können die Reaktionen wie folgt berechnet werden:

$$RE_i = \sum_{j=1}^n K_{ij} \cdot w_j \quad (7)$$

Lösung des Gleichungssystems (6) und Berechnung der Elementendkräfte

Es handelt sich um ein lineares Gleichungssystem, dessen Koeffizientenmatrix im allgemeinen bandförmig ist. Aus Symmetriegründen muss nur die Hälfte des Bandes gespeichert werden. Die Auflösung des Gleichungssystems geschieht nach dem Gauss'schen Algorithmus.

Mit den ermittelten globalen Verschiebungen $\{w\}$ lassen sich die lokalen Elementendkräfte für ein Element i-j wie folgt berechnen:

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ Q_i \\ M_i \\ N_j \\ Q_j \\ M_j \end{Bmatrix} = [K]_{\text{lokal}} [R]^T \{w\} \quad (8)$$

wobei sich unter Verwendung derselben Abkürzungen wie bei der globalen Steifigkeitsmatrix $[K]$ auf Seite 7 der folgende Ausdruck für $[K]_{\text{lokal}} \cdot [R]^T$ ergibt:

$$[K]_{\text{lokal}} [R]^T =$$

$\frac{EF}{L} c$	$\frac{EF}{L} s$	0	$-\frac{EF}{L} c$	$-\frac{EF}{L} s$	0
$-\left(12 \frac{EI}{L^3} + \frac{6 N}{5 L}\right) s$	$+\left(12 \frac{EI}{L^3} + \frac{6 N}{5 L}\right) c$	$+6 \frac{EI}{L^2} + \frac{N}{10}$	$\left(12 \frac{EI}{L^3} + \frac{6 N}{5 L}\right) s$	$-\left(12 \frac{EI}{L^3} + \frac{6 N}{5 L}\right) c$	$+\left(6 \frac{EI}{L^2} + \frac{N}{10}\right)$
$-\left(6 \frac{EI}{L^2} + \frac{N}{10}\right) s$	$+\left(6 \frac{EI}{L^2} + \frac{N}{10}\right) c$	$4 \frac{EI}{L} + 2 \frac{NL}{15}$	$+\left(6 \frac{EI}{L^2} + \frac{N}{10}\right) s$	$-\left(6 \frac{EI}{L^2} + \frac{N}{10}\right) c$	$2 \frac{EI}{L} - \frac{NL}{30}$
$-\frac{EF}{L} c$	$-\frac{EF}{L} s$	0	$\frac{EF}{L} c$	$\frac{EF}{L} s$	0
$\left(12 \frac{EI}{L^3} + \frac{6 N}{5 L}\right) s$	$-\left(12 \frac{EI}{L^3} + \frac{6 N}{5 L}\right) c$	$-\left(6 \frac{EI}{L^2} + \frac{N}{10}\right)$	$-\left(12 \frac{EI}{L^3} + \frac{6 N}{5 L}\right) s$	$+\left(12 \frac{EI}{L^3} + \frac{6 N}{5 L}\right) c$	$-\left(6 \frac{EI}{L^2} + \frac{N}{10}\right)$
$-\left(6 \frac{EI}{L^2} + \frac{N}{10}\right) s$	$+\left(6 \frac{EI}{L^2} + \frac{N}{10}\right) c$	$2 \frac{EI}{L} - \frac{NL}{30}$	$+\left(6 \frac{EI}{L^2} + \frac{N}{10}\right) s$	$-\left(6 \frac{EI}{L^2} + \frac{N}{10}\right) c$	$4 \frac{EI}{L} + 2 \frac{NL}{15}$

Die Vorzeichenkonvention ist dieselbe wie für die äusseren Lasten (Bild 4).

Die Elementendkräfte könnten auch aus den Ableitungen der berechneten Verschiebungen ermittelt werden. Wegen der verwendeten Verschiebungsansätze wäre dabei aber das Gleichgewicht unter Umständen nicht exakt erfüllt.

2.2 Berechnung der effektiven Biegesteifigkeit $\overline{EI}$

Generelles Vorgehen

Wie bereits in der Einleitung beschrieben, werden für gegebene Lasten die Momente M und die Normalkraft N in jedem Element in einer elastischen Analyse berechnet. Die dazugehörige Krümmung $1/\rho$ ist:

$$1/\rho = M / \overline{EI} \quad (9)$$

Zu dieser Krümmung $1/\rho$ kann für unelastisches Materialverhalten das dazugehörige innere Moment $\overline{M}$ unter Berücksichtigung der Normalkraft N berechnet werden (Bild 2). Mit diesem inneren Moment $\overline{M}$ ergibt sich eine neue Steifigkeit $\overline{EI}$:

$$\overline{EI} = \overline{M} / (1/\rho) \quad (10)$$

Damit ist ein neuer Iterationsschritt möglich. Dieses Iterationsverfahren wird angewendet bis die Biegesteifigkeiten $\overline{EI}$ in allen Elementen mit gegebener Genauigkeit konvergieren. Bei diesem Verfahren wird die Steifigkeit $\overline{EI}$ als konstant über die Elementlänge angenommen. Normalerweise wird die Steifigkeit in der Mitte eines jeden Elementes bestimmt.

Bestimmung des inneren Momentes $\bar{M}$ für eine gegebene Krümmung $(1/\rho)$ und Achsialkraft N

Die inneren Kräfte werden bestimmt durch eine Integration der Spannungen über die Querschnittsfläche:

$$\bar{N} = \sum \sigma \Delta F \quad (11a)$$

$$\bar{M} = \sum \sigma \cdot y \Delta F \quad (11b)$$

Die Spannungen sind abhängig von den Dehnungen, die sich unter der Annahme einer linearen Dehnungsverteilung wie folgt berechnen lassen:

$$\epsilon = \epsilon_m + (1/\rho) y \quad (12)$$

wobei ϵ_m = Dehnung in Querschnittsmitte

$1/\rho$ = Krümmung

In Gleichung (12) ist nur die Dehnung in Querschnittsmitte ϵ_m unbekannt. Diese Position der Dehnungsebene wird in einem iterativen Rechenprozess bestimmt, bei dem die Lage der Dehnungsebene so lange verändert wird, bis die resultierende Normalkraft dem äusseren N entspricht. Die iterative Bestimmung von ϵ_m aus dem achsialen Gleichgewicht kann beschleunigt werden durch verschiedene Methoden wie Newton-Raphsons oder andere. In diesem Programm wird ein Lagrange Polynom verwendet, wie es in [4] von Aitken beschrieben worden ist.

In den einzelnen Fasern des Querschnitts muss nur die Spannungs-Dehnungs-Zeitbeziehung der Materialien bekannt sein.

$\sigma - \epsilon - t$ - Beziehung für Beton und Stahl

Um die inneren Kräfte für eine bestimmte Dehnungsverteilung bestimmen zu können, müssen die Spannungs-Dehnungs-Zeit-Beziehungen für die Materialien formuliert sein. Im folgenden werden die einfachen Beziehungen für Beton und Armierungsstahl beschrieben, wie sie im Programm verwendet werden. Sie sind in einer einzigen Subroutine programmiert und können deshalb ohne grossen Aufwand durch andere Beziehungen ersetzt werden.

Die grundlegende Beziehung zwischen Spannungen und Dehnungen wird für Beton und für Stahl wie folgt formuliert:

$$\sigma = E_0 (\epsilon - \epsilon_f) \quad (13)$$

wobei E_0 = initialer Elastizitätsmodul

ϵ = totale Dehnung

ϵ_f = "plastische" Dehnung zum betrachteten Zeitpunkt

Die Spannung, wie sie mit (13) berechnet wird, muss limitiert werden durch das $\sigma - \epsilon$ -Diagramm für eine Kurzzeitbelastung bis zum Bruch. Diese maximal möglichen Spannungen sind gegeben in Bild 5.

Bild 5 : Spannungs - Dehnungs - Beziehungen

Für Stahl ist die Spannung durch die Streck- oder Fließgrenze $\sigma_{0,2}$ beschränkt:

$$|\sigma_{s,max}| \leq |\sigma_{0,2}| \quad (14a)$$

Für Beton ist die Spannung beschränkt durch:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{b,max} &= 0 \text{ für } \epsilon \leq 0 \text{ (Zugdehnung)} \\ \sigma_{b,max} &= \beta_{Br} (2\epsilon/\epsilon_b - (\epsilon/\epsilon_b)^2) \text{ für } 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_b \\ \sigma_{b,max} &= \beta_{Br} \text{ für } \epsilon_b \leq \epsilon \leq 3,5 \text{‰} \end{aligned} \right\} \quad (14b)$$

Wird nun zu einem Zeitpunkt $t + \Delta t$ die Spannung σ für die totale Dehnung ϵ gesucht, so muss zuerst, um die Gleichung (13) verwenden zu können, ϵ_f berechnet werden. Diese Berechnung der "plastischen" Dehnung soll im folgenden beschrieben werden.

Das Verhalten des Armierungsstahles wird als zeitunabhängig angenommen, sodass die Spannung zur Zeit $t + \Delta t$ direkt mit Gleichung (13) bestimmt werden kann. Die "pla-

stische" Dehnung ϵ_{fs} wird nur verändert, wenn die Spannung σ die Fließspannung (14a) überschreitet.

Die "plastische" Dehnung des Betons ergibt sich aus drei verschiedenen Einflüssen:

- Die "plastische" Dehnung bei Kurzzeitbelastung (Bild 5).
Dieser Anteil an ϵ_f ist unabhängig von der Zeit.
- Die "plastische" Dehnung infolge Schwinden. Dieser Anteil ist unabhängig von der Spannung. Die Vergrößerung der Schwinddehnung $\Delta\epsilon_{f1}$ im Zeitintervall Δt wird wie folgt angenommen:

$$\Delta\epsilon_{f1} = \epsilon_{sch,\infty} \left(\frac{t + \Delta t}{t_{y2} + t + \Delta t} - \frac{t}{t_{y2} + t} \right) \quad (15)$$

wobei:

$\epsilon_{sch,\infty}$ = Endschwinddehnung

t_{y2} = Zeitpunkt, bei dem $\epsilon_{sch} = \frac{1}{2} \epsilon_{sch,\infty}$

Der Ansatz (15) entspricht einer hyperbolischen Vergrößerung mit der Zeit. Durch geeignete Wahl von $\epsilon_{sch,\infty}$ und t_{y2} kann dieser Ansatz gut einer gemessenen Kurve angeglichen werden.

- Der dritte Anteil an der "plastischen" Dehnung ist die Kriechdehnung. Die Vergrößerung der Kriechdehnung $\Delta\epsilon_{f2}$ im Zeitintervall Δt wird wie folgt angenommen:

$$\Delta\epsilon_{f2} = \epsilon_{kr,\infty} \left(\frac{t + \Delta t}{t_{y2} + t + \Delta t} - \frac{t}{t_{y2} + t} \right) \quad (16)$$

Dieser Ansatz (16) ist ähnlich aufgebaut wie der Ansatz (15) für das Schwinden. $\epsilon_{kr,\infty}$ ist die Endkriechdehnung, die abhängig ist von der Spannung und sich mit der Kriechzahl φ wie folgt ausdrücken lässt:

$$\epsilon_{kr,\infty} = \epsilon_0 \varphi \quad (17)$$

ϵ_0 ist die Dehnung infolge einer Kurzzeitbelastung und berechnet sich aus (14b) zu

$$\epsilon_0 = \epsilon_b \left(-\sqrt{1 - \sigma_t / \beta_{Br}} + 1 \right) \quad (18)$$

Vereinfachend wird die Spannung σ_t zur Zeit t verwendet, um die Kriechdehnung im Zeitintervall Δt zu ermitteln. Die Endkriechdehnung $\epsilon_{kr,\infty}$ unter konstanter Spannung ist nach Ansatz (17) proportional zur Dehnung zur Zeit $t = 0$. Der Verlauf der Kriechdehnungen über die Zeit t kann in (16) resp. (17) durch geeignete Wahl von φ und t_{y2} einer gemessenen Kurve angepasst werden.

Das oben beschriebene Verfahren für die Berechnung der Kriechdehnungen unter variabler Spannung entspricht der "rate of creep" Methode.

Mit den beschriebenen Ansätzen kann die Vergrößerung der "plastischen" Dehnungen berechnet werden und damit wird die Spannung zur Zeit $t + \Delta t$ mit Gleichung (13) ermittelt. Nach jeder Spannungsberechnung muss die Kontrolle gemacht werden, ob die Grenzspannungen (14) nicht überschritten werden.

Die totale "plastische" Dehnung zur Zeit $t + \Delta t$ ist Grundlage für den nächsten Rechengang und kann aus Gleichung (13) wie folgt berechnet werden:

$$\epsilon_f = \epsilon - \sigma_{t+\Delta t} / E_0 \quad (19)$$

Diese Gleichung gilt für Stahl wie auch für Beton.

2.3 Steuerung des Rechenvorganges

Einleitung

Mit dem in diesem Bericht beschriebenen Programm kann das Verhalten von schlanken Rahmen für eine beliebige Lastgeschichte untersucht werden. Neben konstanten Lasten können zusätzlich proportionale Lasten, die mit einem Lastfaktor λ variiert werden, in der Rechnung berücksichtigt werden. Ein Beispiel für diese beiden Möglichkeiten ist in Bild 6 gegeben.

- P_1 = konstante Last
- P_2, P_3 = Proportionale Lasten
- λ = Gesuchter Lastfaktor

Bild 6: Beispiel für einen möglichen Belastungsfall

Wie bereits in Kap. 1 erwähnt, bieten sich zwei Rechenverfahren an. Einerseits kann der Lastfaktor λ stufenweise erhöht und für jede Laststufe der entsprechende Gleichgewichtszustand ermittelt werden. Andererseits kann irgendeine Verformung kontrolliert und stufenweise erhöht werden. Dabei nimmt der zu berechnende Lastfaktor λ bis zu einem maximalen Wert (Traglast) zu und bei weiterer Verformung wird er wieder kleiner. Diese verformungsgesteuerte Methode hat den Vorteil, dass das Tragwerk ohne Konvergenzschwierigkeiten über den kritischen Zustand hinaus berechnet werden

kann.

Für die verformungsgesteuerte Traglastberechnung muss ein sogenannter Kontroll-Schnitt spezifiziert werden. In diesem Schnitt wird die Krümmung kontrolliert und stufenweise erhöht. Aus der Last-Verformungs-Beziehung (Bild 3) wird der Lastfaktor λ für die gegebene Krümmung bestimmt. Der Kontroll-Schnitt kann beliebig gewählt werden. Die Wahl dieses Schnittes hat aber einen Einfluss auf die Konvergenz der Rechnung. Am günstigsten ist derjenige Schnitt, in dem die Krümmung den grössten Einfluss hat auf den Lastfaktor λ . Normalerweise wird der Schnitt mit dem grössten Moment als Kontroll-Schnitt bezeichnet.

Steuerung

Für das lastgesteuerte wie auch für das verformungsgesteuerte Rechenverfahren wird dieselbe elastische Analyse des Tragwerkes durchgeführt (Kap. 2.1). Für gegebene konstante Lasten werden mit den Biegesteifigkeiten und Normalkräften, die aus dem vorhergehenden Rechengang bekannt sind, für zwei Werte des Lastfaktors λ die Momente, Normalkräfte und Krümmungen berechnet. Diese elastische Berechnung wird für $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ durchgeführt (Bild 7). Die beiden Gleichgewichtszustände für λ_1

Bild 7: Elastische Analyse für konstantes $\overline{EI}$ und N

und λ_2 werden aufgrund derselben Biegesteifigkeiten und Normalkräfte ermittelt. Dies bedeutet, dass eine lineare Beziehung zwischen λ und allen übrigen Parametern wie z.B. den Krümmungen existiert. Diese Linearität ist aus der Steifigkeitsmatrix $[K]$ (vgl. (5)) ersichtlich. Für jede elastische Analyse können dank der linearen Beziehungen die Elementkräfte und die Krümmungen durch Interpolation wie folgt bestimmt werden:

$$M = M_1 + \frac{M_2 - M_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda - \lambda_1) = M_1 + (M_2 - M_1)(\lambda - 1) \quad (20a)$$

$$N = N_1 + \frac{N_2 - N_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda - \lambda_1) = N_1 + (N_2 - N_1)(\lambda - 1) \quad (20b)$$

$$(\gamma\rho) = (\gamma\rho)_1 + \frac{(\gamma\rho)_2 - (\gamma\rho)_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda - \lambda_1) = (\gamma\rho)_1 + ((\gamma\rho)_2 - (\gamma\rho)_1)(\lambda - 1) \quad (20c)$$

Die Indices "1" und "2" beziehen sich auf die beiden Gleichgewichtszustände für $\lambda=1$ und $\lambda=2$. Die gleiche Interpolation (20) kann auch verwendet werden, um andere Parameter wie Reaktionen und Verschiebungen zu berechnen.

Im lastgesteuerten Rechenverfahren ist der Lastfaktor λ gegeben und die Gleichungen (20 a-c) können direkt verwendet werden. Bei bekanntem λ könnte die elastische Analyse direkt für λ gemacht werden, statt zuerst für λ_1 und λ_2 zu rechnen und dann zu interpolieren. Diese Vereinfachung wird aus programmtechnischen Gründen nicht gemacht, damit derselbe Rechengang auch für die Verformungssteuerung verwendet werden kann.

Im verformungsgesteuerten Verfahren ist nicht λ sondern die Krümmung $(\gamma\rho)_{ks}$ im Kontroll-Schnitt gegeben. Mit der folgenden Gleichung

$$\lambda = \lambda_1 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{(\gamma\rho)_2 - (\gamma\rho)_1} ((\gamma\rho)_{ks} - (\gamma\rho)_1) = 1 + \frac{(\gamma\rho)_{ks} - (\gamma\rho)_1}{(\gamma\rho)_2 - (\gamma\rho)_1} \quad (20d)$$

muss zuerst λ berechnet werden. Damit können für die weitere Rechnung wieder die Gleichungen (20 a-c) verwendet werden.

Mit den aufgrund dieser elastischen Berechnung ermittelten Elementkräften und Krümmungen werden verbesserte Steifigkeiten bestimmt (Kap. 2.2). Damit wird die elastische Analyse wiederholt. Dieser Rechenprozess ist in Bild 8 dargestellt. Er wird durchgeführt bis die Steifigkeiten aller Elemente konvergieren.

Im verformungsgesteuerten Rechenverfahren wird, wie bereits erwähnt, die Krümmung kontrolliert und nicht irgendeine Verschiebung. Das "krümmungsgesteuerte" Verfahren hat den Vorteil, dass die Vergrößerung der Krümmung $\Delta(\gamma\rho)$ für jeden Rechenschritt meist unabhängig vom zu berechnenden Tragwerk gegeben werden kann. Normalerweise wird $\Delta(\gamma\rho) = 0.0005/H$ gesetzt, wobei H gleich der Querschnittshöhe im Kontroll-Schnitt ist. Würde eine Verschiebung kontrolliert, so wäre die Vergrößerung der Verschiebung abhängig vom Tragsystem und deshalb schwierig im voraus festzulegen.

Im lastgesteuerten Rechenverfahren werden Kurzzeit- und Langzeitlasten sehr ähnlich berechnet. Anstelle der Last wird die Zeit verändert, während die gegebene Dauerlast konstant gehalten wird. Eine beliebige Last-Zeitgeschichte kann berücksichtigt werden, solange keine Gleichgewichtszustände im kritischen Bereich der Traglast berechnet werden sollen.

Etwas komplizierter ist das verformungsgesteuerte Rechenverfahren. Für Kurzzeitlasten wird die Krümmung im Kontroll-Schnitt schrittweise vergrößert und für jeden Schritt wird der Lastfaktor λ berechnet. Für Langzeitbelastung, d.h. für ein gegebenes λ_D und eine gegebene Zeitdauer, wird wie bei der Kurzzeitbelastung die Krümmung schrittweise erhöht. Für jeden Schritt wird die Zeit t verändert bis der Lastfaktor gleich dem gegebenen Faktor λ_D für die Dauerlast ist. Die Vergrößerung der Zeitdauer t , die der Vergrößerung der Krümmung entspricht, muss iterativ bestimmt werden. Diese

Bild 8: Steuerung des Rechenprozesses

Iteration wird durch eine Interpolation mit einem Lagrange Polynom beschleunigt und ist in Bild 9 gezeigt.

Wird der Lastfaktor λ bei einer Erhöhung der Krümmung kleiner, bevor die Zeit vergrößert wird, so ist es nicht mehr möglich, dass die Rechnung konvergiert. In diesem Falle handelt es sich um vorzeitiges Versagen infolge Kriechen.

Bild 9 : Steuerung für Langzeitlasten: Interpolation von t

3. BESCHRIEB DES PROGRAMMES

3.1 Genereller Aufbau des Programmes

Das Programm besteht aus einem Hauptprogramm (MAIN) und 11 Unterprogrammen. Bild 10 gibt einen schematischen Ueberblick über dessen Aufbau.

Bild 10: Aufbau des Programmes

Es können die vier folgenden Gruppen unterschieden werden:

- Hauptprogramm: Zum kurzen Hauptprogramm gehören die Input- und Output-Routinen.
- Steuerung: Die Steuerung wird kontrolliert vom Hauptprogramm. LASTG steuert den gegebenen Lastfaktor λ . PHIG kontrolliert die Krümmung $(\psi\rho)_{ks}$ im Kontroll-Schnitt bei der Verformungssteuerung.
- Steifigkeitsberechnung: Die Subroutinen EIS, AG und MN berechnen die Steifigkeit EI für jedes Element unter Berücksichtigung der berechneten Krümmungen und Achsiallasten. (Momenten-Krümmungs-Beziehung)

- Elastische Rahmenberechnung und Rechenhilfen:

RAHMEN führt eine elastische Rahmenberechnung durch nach der Deformationsmethode unter Berücksichtigung der Theorie 2. Ordnung. BANDGL löst das dazugehörige lineare Gleichungssystem. INPOL führt eine Interpolation durch mit Hilfe des Polynoms von Lagrange nach der Methode von Aitken.

3.2 Beschrieb der einzelnen Programmteile

Im folgenden wird eine summarische Beschreibung der einzelnen Programmteile gegeben.

RAHMEN

Die Biegesteifigkeiten und die Achsiallasten für jedes Element, die Randbedingungen und alle Lasten müssen gegeben sein. Das Programm berechnet die globale Steifigkeitsmatrix $[K]$ unter Berücksichtigung der Biegesteifigkeiten, der Achsiallasten (Theorie 2. Ordnung) und der Randbedingungen. Für den Lastfaktor $\lambda = 1$ und $\lambda = 2$ wird je eine elastische Analyse des Tragwerks gemacht. Dabei werden neben den Verschiebungen auch die Stabkräfte und die Reaktionen bestimmt.

Je nach der aktuellen Steuerung werden durch Interpolation die Verschiebungen, Stabkräfte und Reaktionen so ermittelt, dass λ mit dem gegebenen Lastfaktor (Laststeuerung), oder dass die Krümmung im Kontroll-Schnitt mit der spezifizierten Krümmung (Verformungssteuerung) übereinstimmt.

BANDGL (Bandgleichungen)

Nach dem Gauss'schen Algorithmus löst das Programm das lineare Gleichungssystem der Rahmenberechnung, wobei berücksichtigt wird, dass die Steifigkeitsmatrix bandförmig und symmetrisch ist.

INPOL (Interpolation)

Durch n -Stützstellen wird ein Polynom von $(n-1)$ tem Grade gelegt und die gesuchten Werte werden interpoliert. Bild 9 gibt ein Beispiel für eine solche Interpolation.

EIS (Steifigkeit $\overline{EI}$)

Es werden die Biegesteifigkeiten für alle Elemente berechnet ($\overline{EI} = \overline{M}/(\gamma\rho)$). Die inneren Momente $\overline{M}$ werden aufgrund der gegebenen Krümmungen ($\gamma\rho$) unter Wahrung des achsialen Gleichgewichts in AG resp. MN ermittelt.

AG (Achsiales Gleichgewicht)

Für eine gegebene Krümmung irgendeines Querschnittes wird die mittlere achsiale Dehnung ϵ_m variiert bis das achsiale Gleichgewicht erfüllt ist.

Für jede Position der Dehnungsebene werden $\overline{M}$ und $\overline{N}$ in der MN-Routine berechnet. Nach der Durchrechnung von zwei Dehnungspositionen ϵ_m wird ein neuer Näherungswert für ϵ_m durch eine lineare Interpolation bestimmt, sodass sich die dazugehörige Normalkraft $\overline{N}$ sehr rasch der gegebenen Normalkraft nähert. Das Konvergenzkriterium kann in der

INPUT-Routine spezifiziert werden. Hat diese Iteration konvergiert, so wird mit dem entsprechenden $\bar{M}$ in der EIS-Routine die Biegesteifigkeit berechnet.

MN (Moment, Normalkraft)

Für eine gegebene Position der Dehnungsebene werden die inneren Kräfte $\bar{M}$ und $\bar{N}$ durch Integration der Spannungen über die Querschnittsfläche bestimmt. Die dabei verwendeten $\sigma - \epsilon - t$ - Beziehungen sind in Kapitel 2.2 beschrieben.

LASTG (Lastgesteuert)

Der Rahmen wird nach der lastgesteuerten Methode berechnet, die im Kapitel 2.3 ausführlich beschrieben ist. Eingegeben werden der Lastfaktor λ und die Belastungsdauer Δt .

PHIG (Krümmung ϕ wird gesteuert)

Für Kurzzeitbelastung wird die bezogene Krümmung ϕ ($= H/\rho$) im Kontroll-Schnitt stufenweise erhöht und der dazugehörige Lastfaktor λ wird ermittelt. Ein Versagen infolge Instabilität stellt sich dann ein, wenn bei einer Erhöhung von ϕ die Last P kleiner wird.

Bei Langzeitbelastung wird zusätzlich noch Δt variiert bis λ gleich dem gegebenen Faktor λ_D für die Dauerlast wird. Wird λ nach einer Erhöhung der Krümmung kleiner als der gegebene Lastfaktor λ_D ohne Veränderung von t , so bedeutet dies ein vorzeitiges Versagen infolge Kriechen.

INPUT / OUTPUT

Diese beiden Routinen sind im Anhang anhand eines Beispiels beschrieben.

MAIN

Dieses kurze Programm bestimmt die Steuerungsart gemäss den Input-Daten.

4. RECHENBEISPIELE

Die folgenden Beispiele zeigen einige Anwendungsmöglichkeiten des beschriebenen Programmes. Zusätzlich werden einige Resultate mit durchgeführten Versuchen verglichen.

1. Vergleich mit Versuchen

Im Rahmen des Forschungsprojektes des Institutes für Baustatik, Abt. Massivbau, ETH Zürich, über die Tragfähigkeit von Stahlbetonstützen wurden verschiedene Stützen unter Kurz- und Langzeitlasten geprüft. Die Resultate dieser Versuche wurden in [5] veröffentlicht. Drei Versuchsstützen mit verschiedenen Lastgeschichten wurden mit dem beschriebenen Rechenprogramm nachgerechnet. Die drei Stützen waren beidseitig gelenkig gelagert und hatten dieselbe Länge und denselben Querschnitt. Die Abmessungen sind in Bild 11 gegeben. Infolge der Symmetrie der Lagerung musste nur die Hälfte

Bild 11: Last - Auslenkungskurve (Stütze 24)

der Stütze gerechnet werden, wobei dieselbe in 6 Elemente eingeteilt wurde. Der Input und Output für Stütze 24 ist im Anhang gegeben.

In einem Kurzzeitversuch wurde die Stütze 24 (Bild 11) bis zum Bruch belastet. Die gemessene und die berechnete Traglast von 24,2 t stimmen genau überein. Die Abwei-

chungen in den mittleren Auslenkungen δ sind bei der Berechnung auf die Annahmen der $\sigma - \epsilon$ - Diagramme und die Nichtberücksichtigung der Zugspannungen im Beton zurückzuführen.

Stütze 25 (Bild 12) wurde mit einer Dauerlast $P_D = 16,4$ t während 141 Tagen belastet. Nach dieser Zeit zeigte sich eine eindeutige Tendenz zur Stabilisierung der Verformungen. Auch für diese Stütze ist die Übereinstimmung der gemessenen und berechneten Traglast im abschliessenden Kurzzeitversuch gut ($< 2\%$). Die berechneten Auslenkungen sowohl unter Langzeit- wie auch unter Kurzzeitlasten sind aus den oben erwähnten Gründen etwas zu gross. Die Abhängigkeit der mittleren Auslenkung δ von der Zeit ist im unteren Teil des Bildes 12 gezeigt. Die Übereinstimmung der beiden Kurven ist zufriedenstellend, wenn man berücksichtigt, dass diese Abhängigkeit grossen Streuungen unterworfen ist [6].

Bild 13 zeigt den Langzeitversuch, der zu einem vorzeitigen Versagen infolge Kriechen führte (Stütze 22). Die berechnete Last-Auslenkungskurve stimmt sehr genau mit der gemessenen überein. Bei einer mittleren Auslenkung δ von ca. 9 cm wird die Stütze unter der konstanten Dauerlast $P_D = 18,9$ t instabil. Die Abhängigkeit der Auslenkung δ von der Zeit t stimmt gut überein bis kurz vor dem Bruch bei $t = 61$ Tagen. Die Rechnung ergibt ein Versagen der Stütze erst bei $t = 185$ Tagen. Dieser Zeitpunkt ist aber im Gegensatz zur entsprechenden Auslenkung sehr grossen Streuungen unterworfen. Zur Illustration ist unten im Bild 13 gestrichelt auch der berechnete zeitliche Verlauf von δ für eine um 10% niedrigere Bruchspannung β_{Br} des Betons gezeigt. Die Zeitdauer bis zum Kriechbruch ($t = 68$ Tage) wird auf einen Drittel verkürzt.

Abschliessend lässt sich sagen, dass die Last-Auslenkungskurven sich sehr genau berechnen lassen. Hingegen ist der zeitliche Verlauf der Auslenkungen grossen Streuungen unterworfen und kann ohne statistische Untersuchungen nicht zuverlässig berechnet werden. Eine solche Untersuchung wurde in [6] gemacht.

2. Bogen unter Schneelast

Es wird ein Bogen berechnet wie er als Binder bei Sporthallen oder Flugzeughangars gebaut werden kann. Das statische System, die Abmessungen und die Lasten sind in Bild 14 gezeigt. Es ist ein beidseits eingespannter Bogen mit einem Zugband, das für die Rechnung durch eine Feder ($k = 0,05$ cm/t) ersetzt wird. Der Bogen wird in 14 gerade Elemente eingeteilt.

Als sehr ungünstiger Lastfall wird eine Schneelast von $\lambda \cdot 3,00$ t/m' über die Hälfte des Bogens in Rechnung gestellt. Das Eigengewicht $g = 3,66$ t/m' ist konstant über die ganze Bogenlänge. Gesucht wird der maximale Lastfaktor λ für die Schneelast. Bild 15 zeigt die berechnete Beziehung zwischen dem Lastfaktor λ und der maximalen Durchbiegung δ , die ungefähr im Drittelpunkt unter der Schneelast ermittelt wird. Die gestrichelte Kurve entspricht einer Kurzzeitbelastung. Für die ausgezogene Kurve wird der Bogen zuerst bis zu $\lambda = 0,70$ belastet. Diese Last wird während 300 Tagen konstant gehalten und anschliessend bis zur Traglast gesteigert.

Bild 12 : Langzeitversuch mit abschliessendem Kurzzeitversuch (Stütze 25)

Bild 13: Langzeitversuch bis zum Kriechbruch (Stütze 22)

Bild 14 : Statisches System und Lasten (Beispiel 2)

Bild 15 : Last - Durchbiegungsverhalten eines Bogens unter Kurz- und Langzeitlasten

BEZEICHNUNGENKräfte, Steifigkeiten

M	Äusseres Moment
$\bar{M}$	inneres Moment
N	Normalkraft
$\{P\}$	Äussere Lasten
P_D	Dauerlast
$\{RE\}$	Reaktionen
$[K]$	Steifigkeitsmatrix des ganzen Tragwerkes
$[K_1]$	Steifigkeitsmatrix nach der Theorie 1. Ordnung
$[K_2]$	Ergänzung der Steifigkeitsmatrix infolge der Theorie 2. Ordnung (Geometrische Steifigkeitsmatrix)
$\bar{EI}$	Effektive Biegesteifigkeit = $M/(\psi\rho)$
EF	Achsiale Steifigkeit

Festigkeitswerte, Spannungen

σ_b	Betonspannung
β_{Br}	Bruchspannung des Betons
σ_s	Stahlspannung
$\sigma_{0,2}$	Streckgrenze des Stahles
E_0	initialer Elastizitätsmodul
E_b	Elastizitätsmodul von Beton
E_s	Elastizitätsmodul von Stahl

Dehnungen, Krümmungen, Verschiebungen, Längen

ϵ	totale Dehnung
ϵ_m	achsiale Dehnung in Querschnittsmitte
ϵ_f	"plastische" Dehnung
ϵ_0	Dehnung infolge Kurzzeitbelastung
ϵ_s	Stahldehnung
ϵ_b	Dehnung bei Erreichen der max. Betonspannung β_{Br}
ϵ_{kr}	Kriechdehnung
$\epsilon_{kr,\infty}$	Endkriechdehnung
ϵ_{sch}	Schwinddehnung

$\epsilon_{sch,\infty}$	Endschwinddehnung
$\gamma\rho$	Krümmung
$(\gamma\rho)_{ks}$	gegebene Krümmung im Kontroll-Schnitt
ϕ	$= H/\rho$, bezogene Krümmung
$\{w\}$	Knotenverschiebungen
B	Querschnittsbreite
H	Querschnittshöhe
L	Elementlänge

Verschiedenes

λ	Lastfaktor für proportionale Lasten
λ_D	Lastfaktor für Dauerlasten
ϕ	Kriechzahl
t	Zeit
$t_{\gamma/2}$	Zeitpunkt, bei dem $\epsilon_{sch} = \gamma/2 \epsilon_{sch,\infty}$ (resp. $\epsilon_{kr} = \gamma/2 \epsilon_{kr,\infty}$)
α	Drehwinkel eines Elementes gegenüber dem globalen Koordinatensystem
$[R]$	Rotationsmatrix für den Winkel α
U	Formänderungsenergie

LITERATUR

- [1] Hartz, B.:
"Matrix Formulation of Structural Stability Problems"
ASCE Proc., Vol. 91, ST 5, Dec. 1965

- [2] Zienkiewicz, O.C.:
"The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics"
McGraw Hill, 1967

- [3] Holand, I. and Bell, K.:
"Finite Element Methods in Stress Analysis"
Tapir, Norway, 1969

- [4] Fröberg, C.E.:
"Lärobok i numerisk analys"
Svenska Bokförlaget/Bonniers, Stockholm 1962

- [5] Ramu, P., Grenacher, M., Baumann, M. und Thürlimann, B.:
"Versuche an gelenkig gelagerten Stahlbetonstützen unter Dauerlast"
Bericht Nr. 6418-1, Institut für Baustatik, ETH, Zürich, Mai 1969

- [6] Oelhafen, U.:
"Formänderungen von Stahlbetonstützen unter exzentrischer Druckkraft"
Bericht Nr. 31, Institut für Baustatik, ETH, Zürich, Okt. 1970

VERDANKUNGEN

Der vorliegende Bericht wurde im Rahmen eines Forschungsprogrammes "Tragfähigkeit von Stahlbetonstützen unter Berücksichtigung von unelastischen Verformungen" des Instituts für Baustatik, Abt. Massivbau, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich, ausgearbeitet. Dem Leiter dieses Forschungsprogrammes, Herrn Prof. Dr. B. Thürlimann, möchten die Verfasser für die wertvollen Anregungen und Hinweise aufrichtig danken. Die Verfasser schätzten auch die programmtechnischen Ratschläge von Herrn Dr. E. Anderheggen und danken ihm für die Durchsicht des Manuskriptes.

Die Arbeit wurde ermöglicht durch die folgenden grosszügigen Unterstützungen:

Für K. Aas-Jakobsen : The Royal Norwegian Council for Scientific and Industrial
Research
und
Johan Helmich Janson og Marcia Jansons Legat.

Für M. Grenacher : Schweizerischer Nationalfonds (Projekt Nr. 4388)

Die Verfasser sind den genannten Stellen zu grossem Dank verpflichtet.

Für die Gestaltung des Berichtes und die Zeichenarbeiten war Herr G. Göseli verantwortlich. Die Druckbogen wurden von Frl. S. Burki geschrieben. Für ihre Arbeit sei den Genannten bestens gedankt.

ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Bericht wird eine Möglichkeit aufgezeigt, unelastische Stabtragwerke nach der Theorie 2. Ordnung zu berechnen. Der beschriebene Rechnungsgang basiert auf der Methode der finiten Elemente, wobei die effektiven Biegesteifigkeiten $\overline{EI}$ für jeden Belastungszustand iterativ aus den wirklichen Momenten-Krümmungs-Beziehungen ermittelt werden. Um die Traglastberechnung zu ermöglichen, wird aus Konvergenzgründen ein verformungsgesteuertes Vorgehen angewendet.

Der Rechenprozess ist für Stahlbetontragwerke beschrieben. Dabei werden auch Langzeiteffekte für Kriechen und Schwinden berücksichtigt. Die Kriechverformungen unter variabler Spannung werden mit der "rate of creep" Methode berechnet. Dies wird möglich durch eine Diskretisation der Zeit.

Anhand von zwei Beispielen sind die Möglichkeiten des beschriebenen Rechenverfahrens und des dazugehörigen Computerprogrammes gezeigt.

RESUME

L'objet de ce rapport est la description d'une méthode de calcul selon le 2^e ordre pour les structures composées de barres inélastique. La méthode des éléments finis est à la base de ce calcul, où les rigidités flexionnelles $\overline{EI}$ sont calculées pour chaque état de charge par iteration à partir des relations moments effectifs-courbures. Pour obtenir la charge de ruine avec une bonne convergence, on doit appliquer au système des déformations.

La méthode est appliquée aux structures de béton armé, et l'on peut y introduire les effets du fluage et du retrait. Les déformations dues au fluage sous une contrainte variable sont calculées par la méthode du "rate of creep", au moyen d'une discrétisation du temps.

On montre à l'aide de deux exemples les possibilités de cette méthode, ainsi que le programme relatif à ce calcul.

SUMMARY

In this report an approach to analyze inelastic frame structures is outlined which considers also the second order effects. The computational process described is based on the finite element method. The effective stiffnesses $\overline{EI}$ for each state of loading are determined by trial and error from the actual moment-curvature-relations. To compute the ultimate load and to assure convergence a deformation controlled procedure is employed.

The method is illustrated for reinforced concrete structures. Long time effects such as creep and shrinkage are considered. The deformations due to creep under variable stress are calculated by the "rate of creep method". This is possible by a discretization of time.

Two examples are given to demonstrate the possibilities of the above mentioned analysis and the capability of the computer program which was written for this purpose.

ANHANG

1. Eingabe der Daten

Die Daten werden in der INPUT-Routine mit einer sogenannten Namelist-Anweisung mit dem Namen D (Daten) eingelesen. Jedes Datenpaket besteht aus einer Textkarte und einer beliebigen Anzahl von Datenkarten mit Lochungen nach folgendem Schema:

- \$D-\$
Daten

Die Daten können in beliebiger Reihenfolge eingegeben werden und werden je nach Typ mit dem Parameter SW (Switch) wie folgt geordnet:

- SW = 0 : Generelle Daten wie Konvergenzkriterien, Kontroll-Schnitt, Materialeigenschaften, Spezifikationen für den Output etc. Einige dieser Größen (z.B. $E_s = 2'100'000 \text{ kg/cm}^2$) sind im Programm eingebaut und müssen nur bei Abweichungen eingelesen werden.
- SW = 1 : Bedeutet, dass die Daten für eine Tragwerksberechnung alle eingelesen sind und ein neues Problem folgt (vgl. SW = 10).
- SW = 2 : Enthält allgemeine Daten, die im Programm eingebaut sind. Diese Karte muss nicht eingelesen werden.
- SW = 3 : Eingabe der Knoten und Koordinaten. Sind die Knoten auf einer Geraden, dann müssen nur die Endpunkte eingegeben werden.
- SW = 4 : Querschnittsdaten. Die Querschnittsflächen und Fließsspannung und Ueberdeckung der Armierungsstähle können für verschiedene Querschnittstypen eingelesen werden.
- SW = 5 : Zuordnung der Elemente zu den Knoten und Querschnittstypen.
- SW = 6 : Ort, wo die Biegesteifigkeit $\overline{EI}$ für ein Element berechnet werden soll. Ohne spezielle Anweisungen wird $\overline{EI}$ in Elementmitte bestimmt. Für das Element mit dem Kontroll-Schnitt wird $\overline{EI}$ in diesem Schnitt bestimmt.
- SW = 7 : Konstante Belastungen und Verschiebungen (Randbedingungen) können in jedem Knoten in allen drei Richtungen gegeben werden.
- SW = 8 : Proportionale Lasten können in jedem Knoten in allen drei Richtungen gegeben werden. Diese Lasten werden mit dem Lastfaktor λ multipliziert.
- SW = 9 : Der Lastfaktor mit der entsprechenden Zeit t kann für verschiedene Laststufen eingelesen werden. Zusätzlich muss noch die Art der Steuerung eingegeben werden.
- SW = 10 : Bedeutet, dass die Daten für eine Tragwerksberechnung alle eingelesen sind. Es folgen keine Daten mehr (vgl. SW = 1).

Ein Beispiel einer solchen Eingabe ist im zweiten Abschnitt gegeben. Wie unter SW=1 angedeutet, können gleichzeitig mehrere Probleme eingegeben werden. Das erste Datenpaket muss das Problem vollständig umschreiben mit Ausnahme der im Programm einge-

bauten Daten. Die folgenden Datenpakete müssen nur die Änderungen gegenüber dem vorhergehenden Problem oder allfällige Ergänzungen enthalten. Jedes Datenpaket muss aber mit einer Textkarte beginnen. Sämtliche Inputdaten werden vor den entsprechenden Resultaten für jedes Problem ausgeschrieben.

Für die Eingabe der Daten wird die folgende Nomenklatur verwendet:

Verwendet in SW =	Bezeichnung	Im Programm eingebauter Wert	Bedeutung
0	DEL(1)	100.	Konvergenzkriterium für N; kleinster absoluter Wert
	DEL(2)	0.005	Relatives Konvergenzkriterium $ \Delta N/N $
	DEL(3)	0.01	Relatives Konvergenzkriterium $ \Delta \overline{EI}/\overline{EI} $
	DPHI	0.0005	Schrittgrösse für Krümmung im Kontroll- Schnitt
	EB	0.002	Betondehnung ϵ_b für $\sigma_b = \beta_{Br}$
	EE	2100000.	Elastizitätsmodul für Stahl
	ES	0.0003	Endschwinddehnung
	IMN	1	1: Verhalten von Stahlbeton (Langzeit "Rate of creep") 2: elastische Analyse
	IOUT	1	1: normaler Output 2: mit Reaktionen, $\overline{EI}$ und Krümmungen 3: mit Spannungen 4: alles (1 ÷ 3)
	KS	1	Element mit Kontroll-Schnitt
	KSE	1	Elementende mit Kontroll-Schnitt
	RKZ	2.5	Endkriechzahl
	SB	200.	Betonbruchspannung β_{Br}
	TH	100	Zeit in Tagen, nach der die halbe End- kriechdehnung erreicht ist.
3	K1, K2, DK	DK=1	Knoten K1 bis K2 mit Schritt DK Koordinaten für die Knoten K1 und K2
	$\left. \begin{array}{l} X1, Y1 \\ X2, Y1 \end{array} \right\}$		
4	A1, A2	40.	Armierungsquerschnitte
	B, H		Breite, Höhe des Betonquerschnittes
	IQ	4200.	Nummer des Querschnitttypes
	SE		Fliessspannung des Stahles
	U	4.	Ueberdeckung der Armierung
5	S1, S2		Element S1 bis S2
	K1, K2		Knotennummern für Element S1 am Ende 1 und für Element S2 am Ende 2
	IQ		Zuweisung des Querschnitttypes
6	S1		Elementnummer
	SI		Ort, wo $\overline{EI}$ bestimmt wird
7	K1, K2, DK	DK=1	Knoten K1 bis K2 mit Schritt DK
	B1, B2, B3	0.	Belastung in x-, y- und α -Richtung
	V1, V2, V3	frei	Verschiebung in x-, y- und α -Richtung
8	K1, K2, DK	DK=1	Knoten K1 bis K2 mit Schritt DK
	B1, B2, B3		Wert der proportionalen Lasten für $\lambda=1.0$

Verwendet in SW =	Bezeichnung	Im Programm eingebauter Wert	Bedeutung
9	IT	1	Art der Steuerung 1. Laststeuerung 2. Krümmungssteuerung
	L		Lastfaktor λ
	LS	1	Laststufe
	T	0	Zeit

2. Beispiel einer Dateneingabe

Es wird die Eingabe für das Beispiel Nr. 1 in Kap. 3 gegeben. Mit den oben gegebenen Bezeichnungen sieht die Eingabe wie folgt aus:

```
STUETZE 24 (KURZZEIT)
$D SW=0,EE=2055000.,SB=257.$
$D SW=3,K1=1,K2=7,Y2=216.5$
$D K1=8,X1=3.75$
$D SW=4,A1=3.14,A2=3.14,B=25.,H=15.,SE=4610.,U=2.7$
$D SW=5,K1=1,K2=8,S2=7$
$D SW=7,K1=1,V2=0.,V3=0.$
$D K1=7,V1=0.$
$D SW=8,K1=8,B2=-10000.$
$D SW=9,L=2.$
$D IT=2,L=100.$
$D SW=10$
.FOR.
```

3. Output der Resultate

Im normalen Output werden für alle Elemente die Normalkräfte, die Momente an beiden Enden, die Verschiebungen senkrecht zu den Elementachsen und die Dehnungen der Zug- und Druckarmierung ausgedruckt. Dazu wird die Krümmung PHI im Kontroll-Schnitt, der Lastfaktor LFT und die Zeit gegeben. Zur Kontrolle wird nach jedem Output die Anzahl der durchgeführten elastischen Analysen (ITER), die Rechenzeit (T), der Steuerungstyp (TYP) und das verwendete Materialverhalten (IMN) ausgeschrieben. Mit entsprechenden Befehlen können auch die Biegesteifigkeiten, Krümmungen und die Spannungsverteilung über den Querschnitt für alle Elemente sowie die Reaktionen verlangt werden. Als Illustration folgt der Output für Beispiel Nr. 1:

STUETZE 24 (KURZZEIT)

MATERIALEIGENSCHAFTEN:

EME	SB	EB	KZ	T/2	ES
2055000	257	.0020	2.50	100	.0003

QUERSCHNITTE:

Q	R	H	U	A1	A2	SE
1	25.0	15.0	2.70	3.140	3.140	4610

STAEBE:

S	K1	K2	Q	X1	Y1	X2	Y2	SI	TY
1	1	2	1	0.00	0.00	0.00	36.08	0.00	1
2	2	3	1	0.00	36.08	0.00	72.17	.50	1
3	3	4	1	0.00	72.17	0.00	108.25	.50	1
4	4	5	1	0.00	108.25	0.00	144.33	.50	1
5	5	6	1	0.00	144.33	0.00	180.42	.50	1
6	6	7	1	0.00	180.42	0.00	216.50	.50	1
7	7	8	1	0.00	216.50	3.75	216.50	.50	1

KONSTANTE LASTEN/VERSCHIEBUNGEN:

K	B1	B2	B3	V1	V2	V3
1	0	0	0	*000.000	0.000	0.000
7	0	0	0	0.000	*000.000	*000.000

PROPORTIONALE LASTEN:

K	B1	B2	B3
8	0	-10000	0

LASTFAKTOR/ZEIT:

TYP	LASTF	ZEIT
1	2.00	0
2	100.00	0

KONVERGENZ-KRITERIEN:

DN	DN/N	DEI/EI
100	.005	.010

PHI=-.00137(S= 1,E=1), LASTFAKTOR= 2.000 ZEIT= 0

S	N	M1	M2	V1	V2	E2	E4
1	-20000	-113412	-112223	-1.92	-1.86	-.00054	.00034
2	-20000	-112223	-108703	-1.86	-1.69	-.00053	.00031
3	-20000	-108703	-102990	-1.69	-1.40	-.00051	.00027
4	-20000	-102990	-95292	-1.40	-1.01	-.00048	.00020
5	-20000	-95292	-85866	-1.01	-.54	-.00045	.00013
6	-20000	-85866	-75000	-.54	0.00	-.00042	.00006
7	0	-75000	0	-.04	-.11	-.00008	.00054

(ITER= 8,T= .70,TYP=1,IMN=1)

PHI=-.00187(S= 1,E=1), LASTFAKTOR= 2.149 ZEIT= 0

S	N	M1	M2	V1	V2	E2	E4
1	-21494	-135463	-133718	-2.55	-2.47	-.00065	.00055
2	-21494	-133718	-128577	-2.47	-2.23	-.00063	.00050
3	-21494	-128577	-120291	-2.23	-1.84	-.00060	.00042
4	-21494	-120291	-109220	-1.84	-1.33	-.00056	.00032
5	-21494	-109220	-95824	-1.33	-.71	-.00051	.00020
6	-21494	-95824	-80604	-.71	0.00	-.00046	.00008
7	0	-80604	0	-.05	-.13	-.00008	.00058

(ITER= 5,T= 1.09,TYP=2,IMN=1)

PHI=-.00237(S= 1,E=1), LASTFAKTOR= 2.259 ZFIT= 0
 S N M1 M2 V1 V2 F2 F4
 1 -22587 -156362 -154041 -3.17 -3.07 -.00075 .00077
 2 -22587 -154041 -147213 -3.07 -2.77 -.00072 .00070
 3 -22587 -147213 -136253 -2.77 -2.28 -.00069 .00058
 4 -22587 -136253 -121723 -2.28 -1.64 -.00063 .00043
 5 -22587 -121723 -104300 -1.64 -.87 -.00056 .00026
 6 -22587 -104300 -84703 -.87 0.00 -.00049 .00010
 7 0 -84703 -0 -.05 -.15 -.00009 .00061
 (ITER= 5,T= 1.45,TYP=2,IMN=1)

PHI=-.00287(S= 1,E=1), LASTFAKTOR= 2.330 ZEIT= 0
 S N M1 M2 V1 V2 F2 F4
 1 -23302 -175774 -172876 -3.79 -3.67 -.00085 .00099
 2 -23302 -172876 -164366 -3.67 -3.30 -.00082 .00089
 3 -23302 -164366 -150738 -3.30 -2.72 -.00076 .00075
 4 -23302 -150738 -132746 -2.72 -1.95 -.00069 .00054
 5 -23302 -132746 -111309 -1.95 -1.03 -.00061 .00033
 6 -23302 -111309 -87382 -1.03 0.00 -.00052 .00012
 7 0 -87382 0 -.05 -.16 -.00009 .00063
 (ITER= 4,T= 1.76,TYP=2,IMN=1)

PHI=-.00337(S= 1,E=1), LASTFAKTOR= 2.377 ZFIT= 0
 S N M1 M2 V1 V2 F2 F4
 1 -23770 -193815 -190349 -4.41 -4.26 -.00095 .00121
 2 -23770 -190349 -180181 -4.26 -3.83 -.00090 .00109
 3 -23770 -180181 -163940 -3.83 -3.15 -.00084 .00092
 4 -23770 -163940 -142568 -3.15 -2.25 -.00075 .00067
 5 -23770 -142568 -117230 -2.25 -1.18 -.00065 .00039
 6 -23770 -117230 -89137 -1.18 0.00 -.00053 .00014
 7 0 -89137 -0 -.05 -.18 -.00009 .00064
 (ITER= 4,T= 2.07,TYP=2,IMN=1)

PHI=-.00387(S= 1,E=1), LASTFAKTOR= 2.399 ZFIT= 0
 S N M1 M2 V1 V2 F2 F4
 1 -23989 -210312 -206283 -5.01 -4.84 -.00104 .00143
 2 -23989 -206283 -194490 -4.84 -4.35 -.00099 .00129
 3 -23989 -194490 -175707 -4.35 -3.57 -.00091 .00108
 4 -23989 -175707 -151074 -3.57 -2.54 -.00080 .00079
 5 -23989 -151074 -122006 -2.54 -1.33 -.00068 .00045
 6 -23989 -122006 -89958 -1.33 0.00 -.00055 .00015
 7 0 -89958 -0 -.05 -.20 -.00009 .00065
 (ITER= 4,T= 2.38,TYP=2,IMN=1)

PHI=-.00437(S= 1,E=1), LASTFAKTOR= 2.415 ZFIT= 0
 S N M1 M2 V1 V2 F2 F4
 1 -24147 -225391 -220832 -5.59 -5.41 -.00113 .00167
 2 -24147 -220832 -207511 -5.41 -4.85 -.00107 .00149
 3 -24147 -207511 -186361 -4.85 -3.98 -.00097 .00124
 4 -24147 -186361 -158716 -3.98 -2.83 -.00084 .00090
 5 -24147 -158716 -126217 -2.83 -1.48 -.00071 .00051
 6 -24147 -126217 -90551 -1.48 0.00 -.00056 .00017
 7 0 -90551 -0 -.05 -.21 -.00010 .00065
 (ITER= 4,T= 2.67,TYP=2,IMN=1)

PHI=-.00487(S= 1,E=1), LASTFAKTOR= 2.416 ZEIT= 0
 S N M1 M2 V1 V2 F2 F4
 1 -24163 -239771 -234691 -6.19 -5.98 -.00123 .00189
 2 -24163 -234691 -219861 -5.98 -5.36 -.00115 .00169
 3 -24163 -219861 -196367 -5.36 -4.39 -.00103 .00139
 4 -24163 -196367 -165747 -4.39 -3.12 -.00089 .00102
 5 -24163 -165747 -129858 -3.12 -1.63 -.00073 .00058
 6 -24163 -129858 -90611 -1.63 0.00 -.00057 .00018
 7 0 -90611 -0 -.05 -.23 -.00010 .00065
 (ITER= 3,T= 2.89,TYP=2,IMN=1)

PHI=-.00537(S= 1,E=1), LASTFAKTOR= 2.408 ZFIT= 0
 S N M1 M2 V1 V2 F2 F4
 1 -24083 -252904 -247318 -6.76 -6.53 -.00132 .00212
 2 -24083 -247318 -231042 -6.53 -5.85 -.00122 .00189
 3 -24083 -231042 -205322 -5.85 -4.78 -.00109 .00156
 4 -24083 -205322 -171904 -4.78 -3.39 -.00092 .00113
 5 -24083 -171904 -132862 -3.39 -1.77 -.00075 .00064
 6 -24083 -132862 -90311 -1.77 0.00 -.00057 .00020
 7 0 -90311 -0 -.05 -.24 -.00010 .00065
 (ITER= 3,T= 3.13,TYP=2,IMN=1)

STABILITÄTS-BRUCH, ZEIT= 0