Bruchwiderstand von Stahlbetonbalken unter Torsion und Biegung

Working Paper

Author(s):

Lampert, Paul

Publication date:

1970

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000747216>

Rights / license:

In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

Originally published in:

Bericht / Institut für Baustatik ETH Zürich 26

**Bruchwiderstand von
Stahlbetonbalken unter
Torsion und Biegung**

Paul Lampert

Januar 1970
Bericht Nr. 26

Institut für Baustatik ETH Zürich

**Bruchwiderstand von Stahlbetonbalken
unter Torsion und Biegung**

von

Dr. sc. techn. Paul Lampert

Institut für Baustatik
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

Zürich
Januar 1970

Leer - Vide - Empty

VORWORT

Die kombinierte Beanspruchung Torsion, Biegung und Querkraft von Stahlbeton- und Spannbetonträgern ist Gegenstand eines Forschungsprojektes des Institutes für Baustatik, Abteilung Massivbau.

Als Teil dieses Programmes hat Herr P. Lampert in diesem Bericht eine Bruchtheorie für Torsion und Torsion-Biegung als Dissertation (Referent Prof. Dr. B. Thürlimann, Korreferent Prof. Dr. P. Dubas) ausgearbeitet. An Hand eines verallgemeinerten Fachwerkmodelles bestimmt er auf Grund der Plastizitätstheorie den Bruchwiderstand unter Torsion-Biegung. Der Vergleich mit Versuchen zeigt eine sehr schöne Uebereinstimmung der Resultate.

Für die praktische Anwendung hat er einfache Bemessungsformeln hergeleitet. Damit steht der Praxis zum ersten Mal eine fundierte Methode zur Behandlung solcher Probleme zur Verfügung.

Eidgenössische Technische
Hochschule - Zürich

Prof. Dr. Bruno Thürlimann

Januar 1970

Leer - Vide - Empty

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
1. Einleitung	7
1.1 Bisherige Theorien und Versuchsergebnisse	7
1.2 Bruchmodell	9
1.3 Idealisierung des Bruchmodells	11
1.4 Lösungsidee	12
1.5 Grenzwertsätze der Plastizitätstheorie	13
2. Erläuterung des Vorgehens	15
2.1 Quadratisches Fachwerkmodell mit 45° -Diagonalen	15
2.2 Schubwandelement	20
2.2.1 Anschauliche Lösung	21
2.2.2 Lösung mit dem statischen Grenzwertsatz	24
2.2.3 Lösung mit dem kinematischen Grenzwertsatz	27
2.3 Quadratisches Fachwerkmodell mit variabler Diagonalenneigung	30
3. Torsions- und Biegewiderstand allgemeiner Querschnitte	36
3.1 Gleichgewichtsbedingungen	37
3.2 Kinematische Bedingungen	42
3.3 Statische Methode	45
3.3.1 Die Gleichgewichtsbedingungen	45
3.3.2 Die Plastizitätsbedingungen	46
3.3.3 Optimierung	47
3.3.4 Ergebnis	51
3.4 Mechanismus-Methode	52
3.4.1 Die kinematischen Bedingungen	52
3.4.2 Die Leistungs-Bedingung	53
3.4.3 Optimierung	54
3.4.4 Ergebnis	57
3.5 Graphische Lösung der Mechanismus-Methode	58
3.5.1 Minimumsaufgabe	59
3.5.2 Maximumsaufgabe	62
3.5.3 Ergebnis und Folgerungen	63
3.6 Zusammenfassung des Lösungsweges	66
3.6.1 Vorgehen und Ergebnisse	66
3.6.2 Graphischer Lösungsweg	68
3.6.3 Analytischer Lösungsweg	72
3.7 Beispiel	75
3.7.1 Idealisierung des Querschnitts	75
3.7.2 Graphischer Lösungsweg	76
3.7.3 Analytischer Lösungsweg	79

	Seite
4. Interaktion Torsion-Biegung-Normalkraft	82
4.1 Interaktion Torsion-Biegung	82
4.2 Interaktion Torsion-Normalkraft	87
4.3 Beispiele von Interaktionsdiagrammen	90
4.3.1 Torsion-Biegung	91
4.3.2 Torsion-Normalkraft	95
5. Anwendungsbereich und Grenzen der Theorie	100
5.1 Querschnittsform	100
5.2 Längsseiten im Druckbereich	102
5.3 Versagen des Betons	107
5.4 Umlagerungswinkel $\text{tg}\alpha$	111
6. Zusammenfassung	116
Summary	120
Anhang A: Lösung des linearen Programms der statischen Methode	124
Anhang B: Lösung des linearen Programms der Mechanismus-Methode	126
Anhang C: Torsion und Biegung des Trapez-Querschnitts	128
1. Reine Torsion	129
2. Reine Biegung	130
3. Interaktion Torsion-Biegung	130
4. Bemessung	135
Anhang D: Torsion und Biegung des Rechteck-Querschnitts	140
1. Reine Torsion und reine Biegung	140
2. Interaktion Torsion-Biegung	141
3. Vergleich mit Versuchsergebnissen	146
4. Bemessung	150
Anhang E: Lastfall Vorspannung	151
Bilder 1 ÷ 29	153
Bilder 30 ÷ 37 zu Anhang	175
Bezeichnungen	183
Literaturverzeichnis	188

1. EINLEITUNG

Seit etwa 1960 setzte eine intensive Forschung des Bruchverhaltens von Stahlbetonbalken und vorgespannten Betonträgern unter Torsionsbeanspruchung ein. Diese Entwicklung ergab sich durch neue Konstruktionsformen und Lagerungsarten (gekrümmte Trägerachse, schiefe Lagerung). Der projektierende Ingenieur wird deshalb vor Probleme gestellt, zu deren Lösung er die Kenntnis des Bruchverhaltens für kombinierte Beanspruchungsarten benötigt.

1.1 Bisherige Theorien und Versuchsergebnisse

Verschiedene Autoren haben versucht, von den Bruchbedingungen unarmierter Balken auf die Verhältnisse bei armierten Trägern zu schliessen. Dies führte zu Bruchbedingungen des Betons unter kombinierter Beanspruchung und deshalb oft zur Feststellung, dass die Armierung beim Lastfall Torsion keine wesentliche Erhöhung der Traglast über die Risslast hinaus bewirke.

Diese Ideen sind aus der neuesten Literatur verschwunden, wie sie z.B. in [1] übersichtlich zusammengestellt sind. Längst hat sich die Auffassung durchgesetzt, dass der ungerissene und der gerissene armierte Balken zwei ganz verschiedene Tragsysteme darstellen, die zwei verschiedene Betrachtungs-Modelle erfordern. Die verschiedenen Autoren unterscheiden sich nun in der Wahl ihres Modells des Tragverhaltens nach dem Riss, insbesondere in der Wahl des Bruchmodells.

Die Mehrzahl der in [1] beschriebenen Modelle beschränken sich auf den Rechteckquerschnitt und nehmen einen spiral-

förmigen, auf drei Seiten unter konstanter Neigung durchlaufenden Riss und eine verbindende Druckzone auf der vierten Seite an. In der Zugzone werden die Längseisen und Bügel als fliessend angenommen, während die Druckzone als ungerissen vorausgesetzt wird. Zur Berechnung der Traglast werden eine bis zwei der sechs möglichen Gleichgewichtsbedingungen herangezogen, während die Erfüllung der übrigen den Dübelkräften, der Verzahnung des Betons und Schubspannungen in der Druckzone überlassen werden. Diese Theorien beschränken sich allerdings auf den Lastfall spezieller Biegung in Kombination mit Torsion und Querkraft, wie auch auf den Fall ringsherum konstant durchlaufender Bügelarmierung.

Der Vergleich mit Versuchsergebnissen zeigt eine gute Uebereinstimmung dieser Theorien für überwiegende Biegebeanspruchung, da für diesen Fall das angenommene Bruchmodell mit schief zur Längsachse verlaufender Druckzone auch beobachtet werden kann. Entsprechend erfolgt der Bruch durch Stauchen der Betondruckzone. Schlechter sieht der Vergleich bei überwiegender Torsionsbeanspruchung aus, da bei solchen Balken eine Druckzone nicht mehr existiert. Der Bruch erfolgt in diesem Fall schliesslich durch ein Zermahlen der Betondruckdiagonalen bei grossen Schiebungen.

An Versuchen am Institut für Baustatik an der ETH Zürich an Balken grösseren Querschnitts ([2], [3], [4]) wurden diese Brucharten beobachtet und als Stauchungsbruch der Betondruckzone und als Schiebungsbruch bezeichnet. Allerdings wurden die oben erwähnten Bruchmodelle nicht beobachtet, sondern es zeigte sich ein Bruchmodell, das der Wirkungsweise eines räumlichen Fachwerks entspricht, wie es im folgenden beschrieben wird. Für den Spezialfall reiner Torsion und volumengleicher Bügel- und Längsarmierung wurde das Fachwerkmodell mit 45° -Diagonalen bestätigt. Dieses Modell

ist erstaunlicherweise bereits von Mörsch und Rausch vor rund 50 Jahren eingeführt worden.

1.2 Bruchmodell

In Bild 1 ist das dieser Arbeit zugrunde liegende Bruchmodell dargestellt. Es ist ein räumliches Fachwerk mit variabler Diagonalenneigung α , das für Stahlbetonträger gültig sein soll, welche durch St. Venant'sche Torsion beansprucht werden. Neben den Längseisenkräften Z und den Bügelkräften B sind noch Betondiagonalkräfte D wirksam, die unter einem, pro Seite als konstant angenommenen, Winkel α gegenüber der Balkenachse auftreten. Die Kräfte Z , B und D sollen pro Seite in einer Ebene liegen. Ausser der Beschränkung auf die Theorie I. Ordnung und der Voraussetzung eines zumindest stückweise konstanten Querschnitts wird noch das Ebenbleiben des Querschnitts gefordert. Wohl können auf St. Venant'sche Torsion beanspruchte Balken auch wölben. In der vorliegenden Theorie wird eine zwängungsfreie Wölbverformung im Bruchzustand durch die spätere Annahme starrer Druckdiagonalen verunmöglicht (siehe 3.2).

Dieses Bruchmodell wird in dieser Arbeit für den unterarmierten Fall untersucht, d.h. die Längs- und Bügelarmierung soll vor dem Bruch ihre Fließspannung erreichen. Zu diesem Zweck dürfen die Balken nicht überarmiert sein und das Verhältnis von Längs- und Bügelarmierung muss so gewählt werden, dass tatsächlich beide zum Fließen kommen können. Auch ein lokales Versagen muss ausgeschlossen werden. Darunter ist neben ausreichender Verankerung der Armierungsstäbe zu verstehen, dass ein Ausbrechen der Druckdiagonalen an den Querschnittsecken durch engen Bügelabstand und/oder genügend starke Eckeisen verhindert wird.

Vorderhand wird dieses Modell für kombinierte Beanspruchung schiefe Biegung (M_y, M_z) - Torsion (T) - Normalkraft (N) untersucht (Bild 1). Da noch keine repräsentativen Versuche für die Beanspruchungskombination Torsion-Biegung-Querkraft vorliegen, ist noch zu prüfen, ob dieses Modell auch auf diesen Fall erweitert werden darf. Deshalb werden die Querkräfte Q_y und Q_z in dieser Untersuchung weggelassen. Das Biegemoment ist somit über den Bruchbereich konstant, während T und N zumindest als stückweise konstant betrachtet werden dürfen.

Die Idee zu diesem Modell stammte aus den erwähnten Torsions-Biege-Versuchen ([2], [3], [4]) an grösseren Hohlquerschnitten, bei welchen folgende, in diesem Zusammenhang wichtige Feststellungen gemacht werden konnten:

- a) Beim Bruch flossen sämtliche Armierungseisen auf drei der vier Seiten.
- b) Die Neigung der Betondruckdiagonalen war im allgemeinen nicht identisch mit der Rissneigung.
- c) Vor Erreichen der Traglast bildeten sich mehrere an den Querschnittsecken nicht durchlaufende Druckspiralen; der eigentliche Bruch trat dann an zufälliger Stelle ungefähr in einem Querschnitt auf.
- d) Zwischen einem Hohl- und einem Vollquerschnitt mit gleichen Aussenabmessungen und gleicher Armierung war kein Unterschied in der Bruchlast festzustellen.

Die Punkte a) und b) sagen zusammen aus, dass sich die Neigung der Druckdiagonalen aus Gleichgewichtsgründen den Fließkräften in den Längseisen und Bügeln anpasst, womit die Wahl einer entsprechenden Diagonalenneigung verständlich wird. Die Feststellungen c) und d) bestätigen

die Fachwerkwirkung.

1.3 Idealisierung des Bruchmodells

Für die Berechnung wird das grundsätzliche Modell des Bildes 1 zu demjenigen des Bildes 2 vereinfacht. Die einzelnen Längseisen werden zu konzentrierten Eckeisen Z_i , zu eigentlichen Stringern, zusammengefasst. Die als gleichmässig über eine "Schubwand" verteilt angenommenen Betondruckspannungen werden durch eine in Seitenmitte angreifende, konzentrierte Diagonalkraft D_k dargestellt. Vollquerschnitte werden als Hohlquerschnitte mit einer wirkamen Wandstärke betrachtet.

Die Art der Aufteilung der Längseisen in einzelne Stringer bedarf noch der Erläuterung. Da für den Lastfall reiner Torsion eine solche Konzentration der Längseisen einer gleichmässig über den Umfang verteilten Anordnung gleichwertig ist [2], hat man lediglich dafür zu sorgen, dass bei der Aufteilung das statische Moment der Armierung um die Axen y und z erhalten bleibt.

Im Detail (a) des Bildes 2 ist dies prinzipiell gezeigt; das Produkt aus Fliesskraft und Hebelarm bleibt auf diese Weise etwa gleich. Für Zweifelsfälle könnte natürlich auch jedes einzelne Längseisen als Stringer betrachtet werden, womit sich lediglich der Rechenaufwand erhöht.

Während bei überwiegender Torsionsbeanspruchung alle Längseisen auf Zug beansprucht werden, bildet sich bei überwiegender Biegebeanspruchung eine Druckzone, in der auch Längseisen liegen werden. Das Problem ist nun, dass bei Druckbeanspruchung der diese Längseisen umgebende Beton mitwirkt. Man hilft sich hier so, dass dem Stringer

zunächst das idealisierte Spannungs-Dehnungs-Diagramm des Bildes 3(a) zugrunde gelegt wird, das Druckkräfte auf die Stringer in unbegrenzter Höhe zulässt. In einem zweiten Schritt ist dann zu kontrollieren, ob diese Druckkräfte auf den umgebenden Beton so verteilt werden können, dass der innere Hebelarm der Zugkräfte nicht kleiner wird (siehe 5.2). Als Grenzfall kann dabei stets der Fall reiner Biegung dienen.

1.4 Lösungsidee

Für das Bruchmodell des Bildes 2 soll für einen unterarmierten Querschnitt und für die allgemeine Belastung M_y , M_z , T , N der Bruchwiderstand gefunden werden. Insbesondere ist für jede Belastungskombination beim Bruch von Interesse, welche Längseisen und welche Bügel ihre Fließspannung erreichen müssen und welche Neigung dabei die Druckdiagonalen auf den verschiedenen Querschnittsseiten annehmen.

Während für das Rechteck bei spezieller Biegung und Torsion schon rein anschaulich klar wird, welche Eisen vor dem Bruch fließen werden, ist dies beim allgemeinen Querschnitt (Bild 1) und bei schiefer Biegung mit Torsion schon schwieriger. Ebenso sind die in [1] gemachten Annahmen, wie die zum Druckrand parallele Druckzone oder der konstante Neigungswinkel der Spiralen zur Balkenachse bei Balken mit ringsherum ungleicher Bügelarmierung (z.B. Kastenquerschnitt einer Brücke) nicht zutreffend. Es stellt sich deshalb die Frage, ob sich mit Hilfe der Plastizitätstheorie nicht einige allgemein gültige Regeln für das vorliegende Fachwerkmodell ergeben.

Die Idee zur Lösung dieser Aufgabe besteht darin, dass mit dem 1. Grenzwertsatz eine untere Schranke, mit dem 2.

Grenzwertsatz eine obere Schranke der Traglast gesucht wird. Für den unteren Grenzwert benötigt man statisch zulässige Gleichgewichtszustände, wobei der Traglastfaktor unter Einhaltung der Plastizitätsbedingungen maximiert werden soll. Für den oberen Grenzwert werden kinematisch zulässige Bewegungszustände betrachtet, wobei unter Einhaltung der Leistungsbedingung der Traglastfaktor minimiert wird. Werden bei beiden Optimierungsaufgaben die Traglastfaktoren identisch, so bildet einerseits der untere Grenzwert einen Mechanismus und andererseits erfüllt der obere Grenzwert die Plastizitätsbedingungen, so dass der gefundene Traglastfaktor die exakte Lösung für das vorliegende Modell darstellt.

1.5 Grenzwertsätze der Plastizitätstheorie

Das räumliche Fachwerkmodell besteht aus Längseisen, Bügeln und Betondruckdiagonalen. Fließen der Armierung auf Zug soll für das Versagen massgebend sein. Versagen des Betons und lokales Versagen werden ausgeschlossen. Die daher nicht massgebenden Betondruckdiagonalen können als starr angesehen werden. Von Interesse für die Ermittlung der Traglast verbleiben deshalb noch die Bügel und Längseisen-Stringer, deren idealisierte starr-plastische Spannungs-Dehnungs-Diagramme in Bild 3 dargestellt sind.

Für statische Beanspruchungen entspricht nach [5] das Einsetzen plastischer Verformungen in einem starr-plastischen Fachwerk dem Erreichen der Traglast des elastisch-plastischen Fachwerks. Die Traglast ist demnach die Fließgrenze des starr-plastischen Fachwerks.

Die beiden für diese Arbeit fundamentalen Grenzwertsätze

der Plastizitätstheorie lauten nach [5], [6]:

1. Grenzwertsatz oder statischer Grenzwertsatz

"Jede Belastung, zu der sich ein stabiler, statisch zulässiger Spannungszustand angeben lässt, liegt nicht höher als die Traglast".

Eine solche Belastung stellt also eine untere Schranke für die Traglast dar. Sie liegt noch unter bzw. an der Grenze der Tragfähigkeit des Systems.

Ein Spannungszustand wird als statisch zulässig bezeichnet, wenn unter einer Gruppe von äusseren und inneren Kräften jeder Teil des betrachteten Systems im Gleichgewicht ist. Ein solcher Spannungszustand wird als stabil bezeichnet, wenn nirgends die Plastizitätsbedingung verletzt wird.

2. Grenzwertsatz oder kinematischer Grenzwertsatz

"Jede Belastung, zu der sich ein instabiler, kinematisch zulässiger Bewegungszustand angeben lässt, liegt nicht tiefer als die Traglast".

Eine solche Belastung stellt also eine obere Schranke für die Traglast dar. Sie liegt über bzw. an der Grenze der Tragfähigkeit des Systems.

Ein Bewegungszustand wird als kinematisch zulässig bezeichnet, wenn er mit den kinematischen Bindungen des Systems verträglich ist. Ein solcher Bewegungszustand wird als instabil bezeichnet, wenn die Leistung der äusseren Lasten gleich oder grösser ist als die Dissipationsleistung.

2. ERLAEUTERUNG DES VORGEHENS

In diesem Kapitel sollen zunächst an einem quadratischen Fachwerkmodell mit 45° -Diagonalen die Interaktionsverhältnisse Torsion-Biegung anschaulich dargestellt werden. An einem Schubwandelement wird anschliessend gezeigt, wie sich der Winkel der Betondruckdiagonalen einstellen muss, damit die gesamte Wandarmierung zum Fliessen kommt. Um das spätere Vorgehen zu erläutern, wird dasselbe auch als Optimierungsaufgabe nach der statischen- wie auch nach der Mechanismus-Methode gelöst. Das bereits behandelte quadratische Fachwerk soll dann mit einer von 45° abweichenden Diagonalenneigung berechnet und die Ergebnisse mit Versuchsergebnissen verglichen werden.

2.1 Quadratisches Fachwerkmodell mit 45° -Diagonalen

Um die Interaktionsverhältnisse zu veranschaulichen, sei ein räumliches Fachwerkmodell quadratischen Querschnitts betrachtet (Bild 4). Dieses einfach symmetrische Modell mit verschiedenen starken oberen und unteren Gurtungen stellt eine Idealisierung eines biegearmierten quadratischen Hohlquerschnitts mit ringsherum gleicher Bügelarmierung dar. Die Diagonalen besitzen den Neigungswinkel $\alpha=45^{\circ}$ zur Balkenachse. Die Bügel mit dem gegenseitigen Abstand s werden zu Fachwerk-Pfosten konzentriert gedacht.

Dieses Modell werde durch ein Biegemoment M (Vektor parallel zur y -Axe) und durch ein Torsionsmoment T beansprucht. Die Betrachtung einer Ecke (Bild 4) liefert zunächst zwei Ergebnisse:

a) Bei über die Modell-Länge konstanter Zugkraft Z (konst.

Torsionsmoment) und ringsherum konstantem Neigungswinkel α der Diagonalkraft zur Balkenachse müssen die Diagonalkräfte gleich gross sein (konstanter Schubfluss)

- b) Die y- und z-Komponenten der Diagonalkraft werden durch die Pfosten (Bügel) aufgenommen. Die Kraft in einem Bügel ergibt sich für einen allgemeinen Winkel α aus der Beziehung

$$B \frac{a}{s \operatorname{tg} \alpha} = D \sin \alpha$$

zu

$$B = \frac{s}{a} D \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha \quad (1)$$

In einem zur x-Axe senkrechten Schnitt (z.B. in der Mitte zwischen 2 Pfosten) stehen 6 Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung. Die verbleibenden nichttrivialen Bedingungen lauten mit den in Bild 4 eingeführten Bezeichnungen:

$$\Sigma X = 0 = 2(Z_o + Z_u) - 4 D \cos \alpha \quad (2)$$

$$\Sigma M_x = T = 4 D \sin \alpha \cdot \frac{a}{2} \quad (3)$$

$$\Sigma M_y = M = 2 Z_u \cdot \frac{a}{2} - 2 Z_o \cdot \frac{a}{2} \quad (4)$$

Setzt man voraus, dass Fliessen der Armierung für den Bruch verantwortlich ist (unterarmierter Balken), so lässt sich die nicht massgebende Diagonalkraft D (Betondiagonale) aus (3) berechnen und in (2) einsetzen. Man erhält dann:

$$Z_o + Z_u = \frac{T}{a \operatorname{tg} \alpha} \quad (5)$$

Aus (4) bleibt:

$$Z_u - Z_o = \frac{M}{a} \quad (6)$$

Es wird zunächst vorausgesetzt, dass die Bügel nach den Längseisen ihre Fliesskraft erreichen. Mit den Längseisen-Fliesskräften Z_{fu} resp. Z_{fo} , wobei $Z_{fu} \geq Z_{fo}$ (Biegearmierung), mit $\tan \alpha = 1$ (45° -Diagonalen) und dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm des Bildes 3 ergeben sich anhand der Gl. (5) und (6) folgende Interaktionsbeziehungen:

a) Fall: Reine Torsion ($M=0$)

Aus Gl. (6) wird $Z_u = Z_o = Z_{fo}$ und eingesetzt in Gl. (5) wird das Torsionsfliessmoment zu:

$$T_{f0} = 2 a Z_{fo} \quad (7)$$

b) Fall: Reine Biegung ($T=0$)

Aus Gl. (5) wird $-Z_o = Z_u = Z_{fu}$ und eingesetzt in Gl. (6) wird das Biegefliessmoment zu:

$$M_{f0} = 2 a Z_{fu} \quad (8)$$

c) Fall: Kombinierte Beanspruchung

Es lassen sich 2 Fälle denken: Entweder fliesst die obere Armierung (wie bei reiner Torsion) oder die untere Armierung (wie bei reiner Biegung).

Bei fliessender oberer Armierung eliminiert sich durch Subtraktion der Gl. (5) und (6) die Unbekannte Z_u und es wird:

$$T - M = 2 a Z_{fo}$$

oder nach Umformung unter Einbezug der reinen Torsions-

und Biegeflussmomente nach Gl. (7) und (8):

$$\frac{T}{T_{f0}} - \frac{M}{M_{f0}} \cdot \frac{Z_{fu}}{Z_{fo}} = 1 \quad (9)$$

Bei fliessender unterer Armierung eliminiert sich durch Addition der Gl. (5) und (6) die Unbekannte Z_o und es wird:

$$T + M = 2 a Z_{fu}$$

oder nach analoger Umformung:

$$\frac{T}{T_{f0}} \cdot \frac{Z_{fo}}{Z_{fu}} + \frac{M}{M_{f0}} = 1 \quad (10)$$

Diese beiden Geraden der Gl. (9) und (10) geben einen guten Ueberblick über die Interaktion Torsion-Biegung dieses Fachwerkmodells. Sie sind für das Verhältnis $Z_{fu}/Z_{fo} = 3$ in Bild 5 aufgetragen worden. Ihr Schnittpunkt entspricht dem vom Querschnitt maximal aufnehmbaren Torsionsmoment, das sich aus der Gleichsetzung von M/M_{f0} der Gl. (9) und (10) ergibt zu:

$$T_{\max} = (Z_{fu} + Z_{fo}) a \quad (11)$$

Das dazugehörige Biegemoment wird

$$M(T_{\max}) = (Z_{fu} - Z_{fo}) a \quad (12)$$

und das entsprechende Verhältnis $\kappa = T/M$:

$$\kappa(T_{\max}) = \frac{Z_{fu} + Z_{fo}}{Z_{fu} - Z_{fo}} \quad (13)$$

Für grössere κ -Werte wird die obere, für kleinere κ -Werte

die untere Armierung massgebend.

Interessehalber wird noch derjenige κ -Wert bestimmt, bei welchem in der oberen Gurtung die Zugkraft infolge Torsion durch die Druckkraft infolge Biegung gerade aufgehoben wird. Mit der Bedingung $Z_0=0$ der Gl. (5) und (6) wird:

$$\kappa(Z_0=0) = 1 \quad (14)$$

Bis jetzt wurde vorausgesetzt, dass die Bügel nach den Längseisen ihre Flie遢spannung erreichen. Im umgekehrten Fall wird das maximale Torsionsmoment unabhängig vom Biegemoment durch die Bügel begrenzt. Aus Gl. (3) ergibt sich nämlich, unter Verwendung von Gl. (1) bei fliessenden Bügeln:

$$T = \frac{2a^2 B_f}{s \operatorname{tg} \alpha} \quad (15)$$

Mit $\operatorname{tg} \alpha = 1$ und T_{f0} nach Gl. (7) wird schliesslich:

$$\frac{T}{T_{f0}} = \frac{a B_f}{s Z_{f0}} = \lambda_0 \quad (16)$$

In Bild 5 ist diese zur Abszisse parallele Gerade für $\lambda_0 = 1,5$ eingetragen worden. Der zulässige Bereich der Interaktion dieses räumlichen Fachwerkmodells mit 45° -Diagonalen ist schraffiert.

Einige qualitative Schlüsse lassen sich aus diesem stark vereinfachten Modell bereits ziehen:

- Eine Interaktionskurve gilt jeweils nur für einen bestimmten Querschnitt mit einer bestimmten Armierung. Entscheidend sind die Verteilung der Längsarmierung (Z_{fu}/Z_{fo}) und das Verhältnis der Bügelarmierung zur

Längsarmierung ($\lambda_o = B_f a / Z_{fo} s$).

- Die Torsionstragfähigkeit kann in gewissen Bereichen durch ein gleichzeitig wirkendes Biegemoment erhöht werden. Die maximale Erhöhung tritt bei demjenigen Biegemoment ein, bei welchem sämtliche Längseisen und die Bügel fließen. Beim torsionsarmierten Querschnitt ($Z_{fu} = Z_{fo}$) tritt keine Erhöhung ein, wie aus Gl. (13) mit $\kappa(T_{max}) = \infty$ ersichtlich ist.
- Die Biegetragfähigkeit wird durch ein gleichzeitig wirkendes Torsionsmoment immer vermindert.

Im Abschnitt 2.3 wird gezeigt, dass die tatsächlichen Interaktionskurven die durch Gl. (9), (10) und (16) bestimmten Geraden umschreiben. Sie sind in Bild 5 gestrichelt gezeichnet. Dies entspricht einer Kräfteumlagerung zwischen Bügeln und Längseisen und damit, aus Gleichgewichtsgründen, einer von 45° abweichenden Diagonalenneigung. Innerhalb gewisser Armierungsgrenzen stellt sich die Diagonale so ein, dass sowohl die Längseisen wie auch die Bügel auf den massgebenden Seiten ins Fließen kommen. Diese Grundidee der vorliegenden Arbeit soll im folgenden zunächst an einem Schubwandelement demonstriert werden.

2.2 Schubwandelement

In Bild 6 ist ein Schubwandelement dargestellt, das durch eine Schubkraft V und eine Längskraft H beansprucht ist. Die Armierung besteht aus Längseisen der Gesamtfläche F_L und Bügeln der Einzelfläche F_B . Der Beton baut die zum Gleichgewicht notwendigen Diagonalkräfte auf. Diese sind so stark und so verankert, dass sie für das Versagen nicht massgebend werden. Die Neigung α der Diagonalen stellt sich unabhängig von der Neigung der ersten Risse so ein, dass

sowohl die Bügel wie auch die Längseisen ins Fließen kommen. Der Winkel α ist deshalb, innerhalb gewisser Schranken, von der Armierungsanordnung abhängig. Im folgenden wird die Traglast dieses Wandelementes zuerst auf anschauliche Weise, dann als Optimierungsaufgabe mit der statischen- und mit der Mechanismus-Methode bestimmt.

2.2.1 Anschauliche Lösung

Stellt man die beiden nichttrivialen Gleichgewichtsbedingungen in horizontaler und vertikaler Richtung an einem Schnitt senkrecht zur x-Axe auf, so erhält man:

$$H = Z - D \cos \alpha$$

$$V = D \sin \alpha$$

Schneidet man das Element entlang 1-1, so wird die Vertikalkomponente der auf die Länge ($a \operatorname{tg} \alpha$) entfallenden Diagonalkraft durch die von 1-1 geschnittenen Bügel aufgenommen:

$$B \frac{a}{s} = D \frac{a \operatorname{tg} \alpha}{a} \sin \alpha = D \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha$$

Die Diagonalkraft lässt sich mit Hilfe dieser Beziehung aus obigen Gleichgewichtsbeziehungen eliminieren, die dann folgende Form annehmen:

$$H = Z - B \frac{a}{s \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (17)$$

$$V = B \frac{a}{s \operatorname{tg} \alpha} \quad (18)$$

Für ein gegebenes Belastungsverhältnis H/V und unter der Annahme, dass Längseisen und Bügel ihre Fließspannung erreichen, ist bis auf den Winkel α die Traglast H_u bekannt.

Dieser Winkel α bestimmt sich aus dem Gleichgewichtsdiagramm des Bildes 6(b) zu:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B_V a}{Z_V s \operatorname{tg} \alpha}$$

oder

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{B_V a}{Z_V s} \quad (19)$$

Dabei bedeuten B_V und Z_V die aus der Schubkraft V herrührenden Anteile der beiden Kräfte. Während die Biegelkraft nur von V beeinflusst wird, setzt sich die Längskraft Z aus den zwei Anteilen Z_V und Z_H zusammen, die zusammen die Fliesskraft ergeben müssen. Mit $Z_V + Z_H = Z_f$ und $Z_H = H$ resp. $Z_V = V / \operatorname{tg} \alpha$ aus den Gl. (17) und (18) wird

$$Z_V = \frac{Z_f}{1 + \frac{Z_H}{Z_V}} = \frac{Z_f}{1 + \frac{H \operatorname{tg} \alpha}{V}}$$

und damit:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{B_f a}{Z_f s} \left(1 + \frac{H}{V} \operatorname{tg} \alpha \right) \quad (20)$$

Mit

$$\lambda = \frac{B_f a}{Z_f s} \quad (21)$$

wird

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \lambda \left(1 + \frac{H}{V} \operatorname{tg} \alpha \right)$$

und

$$\operatorname{tg} \alpha = \lambda \left(\frac{H}{2V} \right) \left[1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{2V}{H} \right)^2} \right] \quad (22)$$

Für die Spezialfälle $V=0$ resp. $H=0$ ergibt Gl. (22) $\operatorname{tg} \alpha = \infty$

resp. $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\lambda}$.

Mit den so errechneten Werten für $\operatorname{tg} \alpha$ folgt aus den Gl. (17) und (18):

$$H_u = Z_f - B_f \frac{a}{s \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (23)$$

$$V_u = B_f \frac{a}{s \operatorname{tg} \alpha} \quad (24)$$

Die Horizontalkraft für $V=0$ und die Schubkraft für $H=0$ ergeben sich daraus zu:

$$H_{u0} = Z_f \quad (25)$$

$$V_{u0} = B_f \frac{a}{s \sqrt{\lambda}} = \sqrt{Z_f B_f \frac{a}{s}} \quad (26)$$

Die Interaktionskurve zwischen H und V erhält man durch Einsetzen von $\operatorname{tg} \alpha$ nach Gl. (24) in Gl. (23) zu:

$$\frac{H_u}{Z_f} = 1 - \frac{V_u^2 s}{Z_f B_f a}$$

Unter Einführung der Ausdrücke nach Gl. (25) und (26) ergibt sich die Interaktionsbeziehung zu:

$$\left(\frac{V_u}{V_{u0}} \right)^2 = 1 - \frac{H_u}{H_{u0}} \quad (27)$$

Diese Kurve ist in Bild 6(c) dargestellt. Sie zeigt die Interaktionsverhältnisse zwischen H und V bei variabler Diagonalenneigung α . Da im Druckbereich (H negativ) der Beton massgebend werden kann, darf die Kurve nicht beliebig nach links verlängert werden.

Würde als Vergleich mit starrer Diagonalenneigung von 45° gerechnet ($\operatorname{tg} \alpha = 1$), so würde bei massgebender Längsarmie-

runge $H_{u0} = Z_f$, $V_{u0} = Z_f$ und mit Gl. (23)

$$\frac{V_u}{V_{u0}} = 1 - \frac{H_u}{H_{u0}} \quad (28)$$

Wird die Bügelarmierung massgebend, so wird die Interaktion durch die abszissenparallele Gerade

$$\frac{V_u}{V_{u0}} = \frac{B_f}{Z_f} \frac{a}{s} = \lambda \quad (29)$$

abgeschnitten. Die Geraden der Gl. (28) und (29) sind auch in Bild 6(c) eingetragen worden. Der Einfluss der variablen Diagonalenneigung ist deutlich zu sehen.

Für beliebige Querschnitte ist diese anschauliche Methode nicht durchführbar. An diesem einfachen Beispiel soll deshalb der Lösungsweg mit Hilfe des statischen und des kinematischen Grenzwertsatzes gezeigt werden, der auch der allgemeinen Lösung zugrunde liegt.

2.2.2 Lösung mit dem statischen Grenzwertsatz

Der statische Grenzwertsatz (siehe 1.5) lässt sich für die vorliegende Schubwand wie folgt modifizieren:

"Jede Belastung H und V , die weder die Gleichgewichts- noch die Plastizitätsbedingungen verletzt, liegt nicht höher als die Traglast".

Unter den Belastungen ωH und ωV wird somit jene herausgesucht, bei welcher der Traglastfaktor ω maximal wird. Diese Optimierungsaufgabe liefert im Falle, dass der dazugehörige Bewegungszustand einen Mechanismus bildet, die exakte Lösung für die Traglast.

Die Gleichgewichtsbedingungen der Gl. (17) und (18) lauten:

$$0 = -\omega H + Z - B \frac{a}{s \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (30)$$

$$0 = -\omega V + B \frac{a}{s \operatorname{tg} \alpha} \quad (31)$$

Der Traglastfaktor ω soll maximalisiert werden. Dabei wird vorläufig eine proportionale Laststeigerung von H und V angenommen.

Die Plastizitätsbedingungen sagen aus, dass die Zugkräfte in Längseisen und Bügeln nirgends die Fließgrenze überschreiten.

$$y_L = Z_f - Z \geq 0 \quad (32)$$

$$y_B = B_f \frac{a}{s} - B \frac{a}{s} \geq 0 \quad (33)$$

Es sei festgehalten, dass die Variablen y_L und y_B stets positiv sein müssen.

Stellt man die Gleichungen (30) und (31), sowie die Ungleichungen (32) und (33) in einem Tableau nach [7] dar, so ergibt sich die Darstellung des Bildes 7(a). Da $\operatorname{tg} \alpha$ auch variabel ist, ist dieses Problem nichtlinear. Diese Nichtlinearität lässt sich beseitigen, wenn auf die proportionelle Zunahme von H und V (Bild 6(c), strichpunktiert) verzichtet und statt dessen zu einem festen $V=V_1$ das dazugehörige $H_u=\omega H$ gesucht wird (Bild 6(c), gestrichelt). Mit festem V_1 wird nach Gl. (31):

$$B \frac{a}{s \operatorname{tg} \alpha} = V_1 \quad (34)$$

Damit entfällt die 3. Zeile des Tableaus 7(a). Das modifizierte Tableau hat die Form des Bildes 7(b).

Aus Gl. (34) bestimmt sich $\operatorname{tg} \alpha$ zu

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B}{V_1} \frac{a}{s} \quad (35)$$

und die Variable $(B \frac{a}{s} \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha})$ kann mit Gl. (35) unabhängig von $\operatorname{tg} \alpha$ ausgedrückt werden:

$$B \frac{a}{s} \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{V_1^2}{B} \frac{s}{a} \quad (36)$$

Das Tableau 7(b) geht über in dasjenige des Bildes 7(c), wobei die Vorzeichenänderung in der letzten Zeile (Plastizitätsbedingung) zu beachten ist, da die Variable B jetzt im Nenner steht.

In 2 Austauschschritten (z.B. [8]) werden nun die abhängigen nichtnegativen Variablen y_L resp. y_B mit den unabhängigen unbeschränkten Variablen Z resp. $(V_1^2 s/B a)$ vertauscht. Diese Zwischenrechnung ist im Tableau 7(d) ausgeführt.

Tauscht man in einem letzten Schritt noch die 0 mit ω um den Pivot (-H) aus, so verbleibt das endgültige Tableau des Bildes 7(e). Von den identischen Zeilen 1 und 2 wurde eine weggelassen.

Die Lösung ist unmittelbar in der 1. Kolonne abzulesen. Der Lastfaktor ω soll maximalisiert werden. Da die Koeffizienten der nichtnegativen Variablen y_L und y_B in der Zielfunktion (1. Zeile) negativ sind, würde jeder positive Wert von y_L und y_B eine Verkleinerung von ω bedeuten. Deshalb wird die optimale Lösung erhalten, indem $y_L = y_B = 0$ gesetzt wird. Aus der 2. und 3. Zeile oder auch direkt aus den Gl. (32) und (33) ist ersichtlich, dass in diesem Fall die Längseisen und die Bügel zum Fließen kommen. Das Optimum des Traglastfaktors steht in der 1. Zeile und lautet:

$$\omega = \frac{1}{H} \left(Z_f - \frac{V_1^2 s}{B_f a} \right) \quad (37)$$

Der Wert ωH erfüllt also die Gleichgewichts- und die Plastizitätsbedingungen und er ist, da das Fließen beider Armierungen offensichtlich einen Mechanismus darstellt, auch gerade die Traglast H_u . Tatsächlich entspricht der Wert $H_u = \omega H$ der Gl. (37) dem früher auf anschauliche Weise abgeleiteten Wert der Gl. (23), wenn noch Gl. (36) berücksichtigt wird.

2.2.3 Lösung mit dem kinematischen Grenzwertsatz

Der kinematischen Grenzwertsatz (siehe 1.5) lässt sich für die vorliegende Schubwand wie folgt modifizieren:

"Jede Belastung H und V , deren Gesamtleistung bei einer kinematisch zulässigen Bewegung nichtnegativ ist, liegt nicht tiefer als die Traglast."

Unter den Belastungen ωH und ωV wird deshalb jene herausgesucht, bei welcher der Traglastfaktor ω minimal wird. Diese Optimierungsaufgabe liefert im Falle, dass der dazugehörige Spannungszustand die Plastizitätsbedingungen nicht verletzt, die exakte Lösung für die Traglast.

Bei einem Mechanismus fließen die Bügel und die Längseisen; die Betondruckdiagonalen werden als starr vorausgesetzt, da sie für das Versagen nicht massgebend werden sollen. Unter dieser Voraussetzung ist in Bild 8(a) ein Verschiebungsplan für die 2 interessierenden Verschiebungen u und w in Richtung der Kräfte H und V gezeichnet.

Geht man von Verschiebungen zu Verschiebungsgeschwindig-

keiten über und bewegt man das Element des Bildes 8(a) der beliebigen Länge l mit $\dot{u}$, so wird:

$$\dot{\epsilon}_L \cdot l = \dot{u} \quad (38)$$

Die Schiebungsgleichung des Bildes 8(a) beschränkt die kinematisch zulässigen Bewegungsmöglichkeiten:

$$\dot{\gamma} = \dot{\epsilon}_B \operatorname{tg} \alpha + \frac{\dot{\epsilon}_L}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (39)$$

Mit $\dot{\gamma} \cdot l = \dot{w}$ erhält man aus Gl. (39) mit Gl. (38):

$$\dot{\epsilon}_B = \frac{\dot{w}}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{\dot{u}}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (40)$$

Die Leistung der äusseren Kräfte ωH und ωV bei einem kinematisch zulässigen Bewegungszustand $\dot{u}$ und $\dot{w}$ beträgt:

$$L_a = \omega(H \cdot \dot{u} + V \cdot \dot{w}) \quad (41)$$

Die Dissipationsleistung ist bei Vernachlässigung elastischer Deformationen gleich der negativen Leistung der inneren Kräfte:

$$L_d = -L_i = Z_f \cdot \dot{\epsilon}_L \cdot l + B_f \cdot \frac{1}{s} \cdot \dot{\epsilon}_B \cdot a \quad (42)$$

Es ist dies nichts anderes als die Summe aller Fließkräfte mal den zum Bewegungszustand gehörigen Dehngeschwindigkeiten.

Die Gesamtleistung

$$L = L_a + L_i = L_a - L_d$$

soll nichtnegativ sein.

$$L = \omega(H \cdot \dot{u} + V \cdot \dot{w}) - Z_f \cdot \dot{\epsilon}_L - B_f \cdot \frac{a}{s} \cdot \dot{\epsilon}_B \geq 0 \quad (43)$$

Für den minimalen Traglastfaktor ω für einen bestimmten Bewegungszustand hat das Gleichheitszeichen Gültigkeit. Damit wird:

$$\omega = \frac{Z_f \cdot \dot{\epsilon}_L + B_f \cdot \frac{a}{s} \cdot \dot{\epsilon}_B}{H \cdot \dot{u} + V \cdot \dot{w}} \quad (44)$$

Da der absolute Betrag der Dehngeschwindigkeiten beliebig ist, kann verlangt werden, dass der Nenner von Gl. (44) die Summe 1 ergibt:

$$H \cdot \dot{u} + V \cdot \dot{w} = 1 \quad (45)$$

Damit wird Gl. (44) zu:

$$\omega = Z_f \cdot \dot{\epsilon}_L + B_f \cdot \frac{a}{s} \cdot \dot{\epsilon}_B \quad (46)$$

Stellt man die Leistungsgleichungen (46) und (45), sowie die kinematischen Bedingungen der Gl. (38) und (40) zusammen, so erhält man das Tableau des Bildes 8(b).

Vergleicht man nun das Tableau des Bildes 8(b) mit demjenigen des Bildes 7(a), so stellt man fest, dass 8(b) das zu 7(a) duale Problem darstellt (vgl. hierzu [7]). Tableau 7(a) ist ein Maximum-, Tableau 8(b) ein Minimum-Problem. Nach dem Dualitäts-Theorem der linearen Programmierung (siehe z.B. [9]) wird der Traglastfaktor ω für 7(a) und 8(b) denselben Wert haben.

Damit ist gezeigt, dass das Resultat der Optimierungsaufgabe nach der statischen wie auch nach der kinematischen Methode den exakten Wert für den Traglastfaktor ω liefert. Einerseits ist jeder zu einem tiefer liegenden ω -Wert ge-

hörende Bewegungszustand kein Mechanismus und andererseits verletzt jeder zu einem höheren ω -Wert gehörende Spannungszustand die Plastizitätsbedingungen.

Im Rahmen dieses Einführungsbeispiels sei nicht näher auf die Mechanismus-Methode eingegangen. Im 3. Kapitel erweist sich diese als äusserst anschaulich zur graphischen Interpretation des Optimums.

2.3 Quadratisches Fachwerkmodell mit variabler Diagonalen- neigung

Das in 2.1 behandelte Fachwerkmodell soll nun noch in anschaulicher Weise mit variabler Diagonalenneigung berechnet werden. Wiederum beschränkt man sich auf einen biegearmierten Querschnitt mit verschiedenen starken oberen und unteren Gurtungen und ringsherum gleicher Bügelarmierung. Bei konstantem Schubfluss bedeutet dies, dass die Neigung der Druckdiagonalen auf allen vier Seiten dieselbe sein muss. Dieser Winkel α bestimmt sich nun analog 2.2.

Die Beanspruchung der unteren Längseisen des Fachwerks in Bild 4 setzt sich ebenfalls aus 2 Anteilen zusammen, wie aus Bild 6(b) bei der Schubwand hervorgeht. Anstelle von Z_V , Z_H und B_V treten Z_T , Z_M und B_T , wobei sich der Index T auf Torsion und der Index M auf Biegung bezieht. Analog zu Gl. (19) bestimmt sich der Winkel α bei massgebender Unterseite mit:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha_u = \frac{B_{Tu}}{Z_{Tu}} \frac{a}{s} \quad (47)$$

Durch Addition von Gl. (5) und (6) wird:

$$Z_u = \frac{T}{2a \operatorname{tg} \alpha_u} + \frac{M}{2a} = Z_{Tu} + Z_{Mu} \quad (48)$$

Beim vorausgesetzten Fließen von Bügeln und Längseisen auf der Unterseite wird

$$B_{Tu} = B_{fu}$$

und aus $Z_{Tu} + Z_{Mu} = Z_{fu}$ und mit $Z_{Mu}/Z_{Tu} = M \operatorname{tg} \alpha_u / T$ aus Gl. (48)

$$Z_{Tu} = \frac{Z_{fu}}{1 + \frac{Z_{Mu}}{Z_{Tu}}} = \frac{Z_{fu}}{1 + \frac{M \operatorname{tg} \alpha_u}{T}} \quad (49)$$

Damit wird unter Verwendung von $\kappa = T/M$ aus Gl. (47):

$$\operatorname{tg}^2 \alpha_u = \frac{B_{fu} a}{Z_{fu} s} \left(1 + \frac{\operatorname{tg} \alpha_u}{\kappa} \right) \quad (50)$$

Nach Auflösung nach $\operatorname{tg} \alpha$ und mit der Abkürzung

$$\lambda_u = \frac{B_{fu} a}{Z_{fu} s}$$

bestimmt sich der Neigungswinkel der Druckdiagonalen bei massgebender Unterseite zu:

$$\operatorname{tg} \alpha_u = \frac{\lambda_u}{2\kappa} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda_u} (2\kappa)^2} \right] \quad (51)$$

Diese Gleichung entspricht der Gl. (22) für die Schubwand.

Im Falle massgebender oberer Längseisen gelten diese Ableitungen analog. Es ist lediglich zu beachten, dass in Gl. (48) der Zugkraft infolge Torsion dann eine Druckkraft infolge Biegung entgegenwirkt. Aus der Subtraktion der Gl. (6) von Gl. (5) wird nämlich:

$$Z_o = \frac{T}{2a \operatorname{tg} \alpha_o} - \frac{M}{2a} = Z_{To} + Z_{Mo} \quad (52)$$

Mit

$$\operatorname{tg}^2 \alpha_o = \frac{B_{To} a}{Z_{To} s} = \frac{B_{fo} a}{Z_{fo} s} \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha_o}{\kappa}\right) \quad (53)$$

und

$$\lambda_o = \frac{B_{fo} a}{Z_{fo} s}$$

wird schliesslich der Neigungswinkel der Druckdiagonalen bei massgebender Oberseite zu:

$$\operatorname{tg} \alpha_o = \frac{\lambda_o}{2\kappa} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda_o} (2\kappa)^2}\right] \quad (54)$$

Nimmt man vorläufig an, es sei stets $Z_{fu} > Z_{fo}$ (Biegearmierung), so gelten folgende Beziehungen:

a) Fall: Reine Torsion ($M=0$, $\kappa=\infty$)

Da $Z_{fu} > Z_{fo}$ wird obere Seite massgebend. Aus Gl. (52) wird mit $Z_o = Z_{fo}$:

$$T_{u0} = 2a Z_{fo} \operatorname{tg} \alpha_o = 2a Z_{fo} \sqrt{\lambda_o} \quad (55)$$

b) Fall: Reine Biegung ($T=0$, $\kappa=0$)

Bei massgebender Unterseite wird aus Gl. (48) mit $Z_u = Z_{fu}$:

$$M_{u0} = 2a Z_{fu} \quad (56)$$

c) Fall: Kombinierte Beanspruchung

Es lassen sich zwei Fälle unterscheiden: Entweder wird die obere (wie bei reiner Torsion) oder die untere Armierung (wie bei reiner Biegung) massgebend.

Bei massgebender oberer Armierung wird unter Verwendung von Gl. (52) mit $Z_o = Z_{fo}$:

$$1 = \frac{T_u}{2a Z_{fo} \operatorname{tg} \alpha_o} - \frac{M_u}{2a Z_{fo}}$$

Nach Umformung und Einbezug der reinen Torsions- und Biegebruchmomente nach Gl. (55) und (56) wird

$$\frac{T_u}{T_{u0}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_o}{\sqrt{\lambda_o}} \left(1 + \frac{Z_{fu}}{Z_{fo}} \frac{M_u}{M_{u0}} \right) \quad (57)$$

Da $\operatorname{tg} \alpha_o$ noch von κ abhängig ist, muss $\operatorname{tg} \alpha_o / \sqrt{\lambda_o}$ noch eliminiert werden. Mit Gl. (53) und (52) wird

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_o}{\lambda_o} = 1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha_o}{\kappa} = 1 + \frac{Z_{Mo}}{Z_{To}} = \frac{Z_{fo}}{Z_{To}} = \frac{1}{1 - \frac{Z_{Mo}}{Z_{fo}}}$$

und mit Gl. (52) und (56)

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_o}{\lambda_o} = \frac{1}{1 + \frac{M_u}{2a Z_{fo}}} = \frac{1}{1 + \frac{Z_{fu}}{Z_{fo}} \frac{M_u}{M_{u0}}}$$

Quadriert man Gl. (57) und setzt obigen Ausdruck ein, so erhält man die Interaktionskurve für massgebende obere Armierung:

$$\left(\frac{T_u}{T_{u0}} \right)^2 = 1 + \frac{Z_{fu}}{Z_{fo}} \frac{M_u}{M_{u0}} \quad (58)$$

Bei massgebender unterer Armierung wird unter Verwendung von Gl. (48) und $Z_u = Z_{fu}$:

$$1 = \frac{T_u}{2a Z_{fu} \operatorname{tg} \alpha_u} + \frac{M_u}{2a Z_{fu}}$$

Nach Umformung und Einbezug der reinen Torsions- und Biegemomente nach Gl. (55) und (56) wird

$$\frac{T_u}{T_{u0}} = \frac{Z_{fu}}{Z_{fo}} \frac{\operatorname{tg} \alpha_u}{\sqrt{\lambda_o}} \left(1 - \frac{M_u}{M_{u0}}\right) \quad (59)$$

Da $\operatorname{tg} \alpha_u$ von κ abhängig ist, muss $\operatorname{tg} \alpha_u / \sqrt{\lambda_o}$ eliminiert werden. Mit Gl. (50) und (48) wird

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_u}{\lambda_o} = \frac{\lambda_u}{\lambda_o} \left(1 + \frac{\operatorname{tg} \alpha_u}{\kappa}\right) = \frac{\lambda_u}{\lambda_o} \left(1 + \frac{Z_{Mu}}{Z_{Tu}}\right) = \frac{\lambda_u}{\lambda_o} \frac{Z_{fu}}{Z_{Tu}} = \frac{\lambda_u}{\lambda_o} \frac{1}{\left(1 - \frac{Z_{Mu}}{Z_{fu}}\right)}$$

und mit Gl. (48) und (56)

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_u}{\lambda_o} = \frac{\lambda_u}{\lambda_o} \frac{1}{\left(1 - \frac{M_u}{2a \frac{Z_{fu}}{Z_{fo}}}\right)} = \frac{\lambda_u}{\lambda_o} \frac{1}{\left(1 - \frac{M_u}{M_{u0}}\right)}$$

Quadriert man Gl. (59) und setzt obigen Ausdruck, sowie λ_u und λ_o ein, so erhält man die Interaktionskurve für massgebende untere Armierung:

$$\left(\frac{T_u}{T_{u0}}\right)^2 = \frac{Z_{fu}}{Z_{fo}} \frac{B_{fu}}{B_{fo}} \left(1 - \frac{M_u}{M_{u0}}\right) \quad (60)$$

Die beiden Interaktionskurven der Gl. (58) und (60) sind in Bild 9 für $B_{fu}/B_{fo}=1$ und $Z_{fu}/Z_{fo}=3$ resp. 1 dargestellt. Ist, entgegen der bisherigen Annahme, $Z_{fu} < Z_{fo}$, so wird die entsprechende Interaktion durch Spiegelung der Kurve für Z_{fo}/Z_{fu} um die Ordinate erhalten. Dies ist sofort einzusehen, wenn an einem solchen Querschnitt ein im negativen Sinne wirkendes Biegemoment angebracht und dann der Querschnitt samt Momentenvektor um 180° gedreht wird.

Die am Schluss von 2.1 gezogenen qualitativen Schlüsse werden anhand dieser Interaktionskurven bestätigt. Insbesondere ist zu sehen, dass für den torsionsarmierten Quer-

schnitt ($Z_{fu}/Z_{fo} = B_{fu}/B_{fo} = 1$) keine Erhöhung der Torsionstragfähigkeit durch ein gleichzeitig wirkendes Biegemoment eintritt.

Der Vollständigkeit halber seien die Formeln zur direkten Berechnung der Torsions- und Biegebruchmomente unter kombinierter Beanspruchung Torsion-Biegung für den quadratischen Querschnitt mit ringsherum gleicher Bügelarmierung angegeben. Aus den Gl. (48) und (52) ergeben sich die Bruchmomente für massgebende untere Armierung

$$M_u(\kappa) = 2a Z_{fu} \frac{\text{tg}\alpha_u}{\kappa + \text{tg}\alpha_u} \quad (61)$$

und für massgebende obere Armierung

$$M_u(\kappa) = 2a Z_{fo} \frac{\text{tg}\alpha_o}{\kappa - \text{tg}\alpha_o} \quad (62)$$

Dabei ist $\text{tg}\alpha_u$ resp. $\text{tg}\alpha_o$ nach den Gl. (51) resp. (54) einzusetzen. Die $T_u(\kappa)$ ergeben sich aus $\kappa M_u(\kappa)$.

In Bild 9 sind auch die Resultate von Balkenversuchen an quadratischen Hohl- und Vollquerschnitten ([2], [3]) eingetragen. Als Bezugsmomente wurden die reinen Torsions- und Biegebruchmomente nach den Gl. (55) und (56) verwendet. Die Uebereinstimmung zwischen Versuch und obenstehender Theorie ist gut. Es erscheint deshalb gerechtfertigt, mit der Grundidee variabler Diagonalenneigung auch allgemeinere Querschnittsformen zu behandeln.

3. TORSIONS- UND BIEGEWIDERSTAND ALLGEMEINER QUERSCHNITTE

In diesem Kapitel wird der Bruchwiderstand von Stahlbetonbalken unter Torsion und Biegung für allgemeine Querschnittsformen untersucht, bei denen das Torsionsmoment durch St. Venant'sche Torsion aufgenommen wird. Zudem wird ein über die Länge konstanter, oder zumindest stückweise konstanter Querschnitt vorausgesetzt.

An Beanspruchungen werden neben dem Torsionsmoment ein Biegemoment und eine Normalkraft zugelassen. Der Einfluss der Querkraft wird in dieser Arbeit nicht behandelt. Vorläufig liegen noch keine repräsentativen Versuche in Torsion-Biegung-Querkraft vor. Daher konnte die Gültigkeit dieses Modells für Querkraft-Beanspruchung nicht untersucht werden.

Im folgenden werden die Gleichgewichts- und die kinematischen Bedingungen hergeleitet. Mit dem statischen Grenzwertsatz wird ein unterer, mit dem kinematischen Grenzwertsatz ein oberer Grenzwert des Traglastfaktor abgeleitet. Die beiden Grenzwerte fallen zusammen; die kinematische Herleitung eignet sich jedoch zur graphischen Interpretation.

Der Leser, der an der rein mathematischen Behandlung des Optimierungsproblems nicht interessiert ist, kann diese Abschnitte überspringen. Er findet unter 3.6 eine Zusammenfassung des in 3.1 bis 3.5 hergeleiteten Lösungsweges, die zum Verständnis der darauffolgenden Kapitel genügt. Zudem wird das Verfahren in 3.7 an einem Beispiel erläutert.

3.1 Gleichgewichtsbedingungen

In Bild 10 ist ein allgemeiner Querschnitt, senkrecht zu seiner Längsachse geschnitten, dargestellt. Die Längseisen wurden in den Querschnittsecken zu Stringern konzentriert. Sie können Zug- und unbeschränkte Druckkräfte gemäss Bild 3(a) aufnehmen. Zwischen diesen Stringern liegen als eben angenommene Schubwände, die eine unter einem bestimmten Winkel zur Längsachse geneigte Diagonalkraft aufnehmen können. Diese Diagonalkräfte wurden jeweils in Seitenmitte zu einer Resultierenden zusammengefasst. Die Kanten i (Stringer) sind im positiven Drehsinn der x-Achse von 1 bis m, die Seitenmitten k (Diagonalkräfte) von 2 bis n nummeriert. Das Axenkreuz ist ein beliebiges rechtwinkliges Dreibein nach der Rechtsschraubenregel. Sein Ursprung liegt im Angriffspunkt der Schnittkräfte.

Die Schnittkräfte des abgeschnittenen Teiles stehen im Gleichgewicht mit den im Schnitt wirksamen Stringerkräften Z_i und Diagonalkräften D_k . Mit Hilfe des Bildes 10, sowie der Detailskizze des gleichen Bildes werden die 6 Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned}
 \Sigma X &= N = \sum_1^m Z_i - \sum_2^n D_k \cos \alpha_k \\
 \Sigma Y &= Q_y = - \sum_2^n D_k \sin \alpha_k \sin \delta_k \\
 \Sigma Z &= Q_z = \sum_2^n D_k \sin \alpha_k \cos \delta_k \\
 \Sigma M_x &= T = \sum_2^n D_k \sin \alpha_k \cdot r_k \\
 \Sigma M_y &= M_y = \sum_1^m Z_i \cdot z_i - \sum_2^n D_k \cos \alpha_k \cdot z_k \\
 \Sigma M_z &= M_z = - \sum_1^m Z_i \cdot y_i + \sum_2^n D_k \cos \alpha_k \cdot y_k
 \end{aligned} \tag{63}$$

In diesen Beziehungen kommen die Bügelkräfte nicht vor. Anhand einer Gleichgewichtsbetrachtung eines ECKELEMEN- tes der Länge Δx können die nicht massgebenden Betondiagonalkräfte durch die Bügelkräfte ersetzt werden. Ein solches Element ist in Bild 11 in Grundriss und Schnitt dargestellt. Da die an die Ecke i angrenzenden Schubwände in der Mitte abgeschnitten sind, greifen nur die halben der in Bild 10 definierten Diagonalkräfte an. Die auf die Länge Δx entfallende Diagonalkraft wird als das Mittel derjenigen bei $x=-\Delta x/2$ und $x=+\Delta x/2$ angenommen, allerdings im Verhältnis $x \cdot \tan \alpha_k / a_k$. Ihre Resultierende greife bei $x=0$ an. Die über die Länge Δx wirksamen Bügelkräfte werden ebenfalls zu einer Resultierenden B_k zusammengefasst. Die 6 Gleichgewichtsbedingungen dieses Elementes werden im folgenden analysiert.

$$\begin{aligned} \Sigma M_y = 0 &= - \frac{D_k}{2} \sin \alpha_k \cos \psi \cdot \frac{\Delta x}{2} - \left(\frac{D_k}{2} + \frac{\Delta D_k}{2} \right) \sin \alpha_k \cos \psi \cdot \frac{\Delta x}{2} \\ &\quad - \frac{\Delta D_k}{2} \cos \alpha_k \cdot \frac{a_k}{4} \cos \psi + \left(D_k + \frac{\Delta D_k}{2} \right) \frac{\Delta x}{a_k} \tan \alpha_k \cos \alpha_k \cdot \frac{a_k}{2} \cos \psi \\ 0 &= - \frac{a_k}{8} \Delta D_k \cos \alpha_k \quad \cos \alpha_k \neq 0 \end{aligned}$$

$$\Delta D_k = 0 \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_z = 0 &= - \frac{D_k}{2} \sin \alpha_k \sin \psi \cdot \frac{\Delta x}{2} - \left(\frac{D_k}{2} + \frac{\Delta D_k}{2} \right) \sin \alpha_k \sin \psi \cdot \frac{\Delta x}{2} \\ &\quad - \frac{\Delta D_k}{2} \cos \alpha_k \cdot \frac{a_k}{4} \sin \psi + \left(D_k + \frac{\Delta D_k}{2} \right) \frac{\Delta x}{a_k} \tan \alpha_k \cos \alpha_k \cdot \frac{a_k}{2} \sin \psi \\ &\quad - \frac{D_\ell}{2} \sin \alpha_\ell \cdot \frac{\Delta x}{2} - \left(\frac{D_\ell}{2} + \frac{\Delta D_\ell}{2} \right) \sin \alpha_\ell \cdot \frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta D_\ell}{2} \cos \alpha_\ell \cdot \frac{a_\ell}{4} \\ &\quad + \left(D_\ell + \frac{\Delta D_\ell}{2} \right) \frac{\Delta x}{a_\ell} \tan \alpha_\ell \cos \alpha_\ell \cdot \frac{a_\ell}{2} \\ 0 &= - \frac{a_k}{8} \Delta D_k \cos \alpha_k \sin \psi + \frac{a_\ell}{8} \Delta D_\ell \cos \alpha_\ell \quad \cos \alpha_\ell \neq 0 \\ &\quad \Delta D_k = 0 \end{aligned}$$

$$\Delta D_\ell = 0 \quad (65)$$

$\Sigma M_x = 0$: Diese Bedingung wird hier trivial, da die Bügel und die Diagonalen mit den Längseisen in einer Ebene liegen.

Unter Berücksichtigung von $\Delta D_k = \Delta D_\ell = 0$ ergeben die drei Komponentenbedingungen:

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0 &= -D_k \frac{\Delta x}{a_k} \operatorname{tg} \alpha_k \cos \alpha_k + D_\ell \frac{\Delta x}{a_\ell} \operatorname{tg} \alpha_\ell \cos \alpha_\ell - \Delta Z_i \\ \Delta Z_i &= D_\ell \frac{\Delta x}{a_\ell} \sin \alpha_\ell - D_k \frac{\Delta x}{a_k} \sin \alpha_k \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \Sigma Y = 0 &= -D_k \frac{\Delta x}{a_k} \operatorname{tg} \alpha_k \sin \alpha_k + D_\ell \frac{\Delta x}{a_\ell} \operatorname{tg} \alpha_\ell \sin \alpha_\ell + B_k - B_\ell \\ D_\ell \frac{\Delta x}{a_\ell} \operatorname{tg} \alpha_\ell \sin \alpha_\ell - B_\ell &= D_k \frac{\Delta x}{a_k} \operatorname{tg} \alpha_k \sin \alpha_k - B_k \end{aligned} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \Sigma Z = 0 &= D_k \frac{\Delta x}{a_k} \operatorname{tg} \alpha_k \sin \alpha_k \cdot \cos \psi - B_k \cos \psi \\ B_k &= D_k \frac{\Delta x}{a_k} \operatorname{tg} \alpha_k \sin \alpha_k \end{aligned} \quad (68)$$

Es sei zunächst festgehalten, dass der Winkel ψ in keiner der Gl. (64) bis (68) vorkommt. Diese Beziehungen gelten deshalb für einen beliebigen Eckwinkel, insbesondere auch für $\psi = 90^\circ$.

Greift man Gl. (66) heraus

$$\frac{\Delta Z_i}{\Delta x} = \frac{D_\ell}{a_\ell} \sin \alpha_\ell - \frac{D_k}{a_k} \sin \alpha_k$$

so stellt die rechte Seite die Differenz der Schubflüsse der an i angrenzenden Wände dar.

$$\frac{\Delta Z_i}{\Delta x} = (\tau \cdot t)_\ell - (\tau \cdot t)_k$$

Beschränkt man sich nun, wie zu Beginn dieses Kapitels erläutert, auf querkraftfreie Biegung und setzt man weiter voraus, dass im Bruchbereich das Torsionsmoment und die Normalkraft als konstant angenommen werden darf, so bedeutet dies, dass sich die Längseisenkraft Z_i über eine Länge Δx nicht ändert.

$$\frac{\Delta Z_i}{\Delta x} = 0 \quad (69)$$

Damit wird

$$(\tau \cdot t)_k = (\tau \cdot t)_k \quad (70)$$

d.h. der Schubfluss ist für jedes Wandelement k eine konstante Grösse; sie wird im folgenden mit S bezeichnet.

$$\frac{D_k}{a_k} \sin \alpha_k = S = \text{konstant für alle } k \quad (71)$$

Die 6 Gleichgewichtsbedingungen (63) vereinfachen sich mit Hilfe der Gl. (71) wie folgt:

$$N = \sum_1^m Z_i - S \cdot \sum_2^n \frac{a_k}{\tan \alpha_k} \quad (72)$$

$$O = - S \cdot \sum_2^n a_k \sin \delta_k \quad (73)$$

$$O = S \cdot \sum_2^n a_k \cos \delta_k \quad (74)$$

$$T = S \cdot \sum_2^n a_k r_k \quad (75)$$

$$M_y = \sum_1^m Z_i \cdot z_i - S \cdot \sum_2^n \frac{a_k z_k}{\tan \alpha_k} \quad (76)$$

$$M_z = - \sum_1^m Z_i \cdot y_i + S \cdot \sum_2^n \frac{a_k y_k}{\tan \alpha_k} \quad (77)$$

Bis anhin wurden die Gl. (67) und (68) noch nicht verwen-

det. Gl. (68) sagt aus (vgl. Bild 11), dass die zur Bügelkraft parallele Komponente der auf die Länge Δx wirkenden Diagonalkraft von den auf dieselbe Länge Δx wirkenden Bügeln aufgenommen wird. Das gleiche gilt für Gl. (67), da deren rechte Seite mit Blick auf Gl. (68) zu null wird. Wählt man als Länge Δx gerade den Bügelabstand s , so wird die Bügelkraft in einem Bügel nach Gl. (68) und (71):

$$B_k = \frac{D_k}{a_k} \sin \alpha_k \cdot s_k \operatorname{tg} \alpha_k = S \cdot s_k \operatorname{tg} \alpha_k$$

oder

$$\frac{B_k}{s_k \operatorname{tg} \alpha_k} = S = \text{konstant für alle } k \quad (78)$$

Durch Einsetzen von S nach Gl. (78) in die Gl. (72) bis (77) gelingt es, die 6 Gleichgewichtsbeziehungen nur in Funktion der Unbekannten Z_i , B_k und $\operatorname{tg} \alpha_k$ auszudrücken. In ihrer endgültigen Form lauten diese Beziehungen damit:

$$\begin{aligned} N &= \sum_1^m Z_i - \sum_2^n B_k \frac{a_k}{s_k} \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha_k} \\ 0 &= - \sum_2^n B_k \frac{a_k}{s_k} \frac{\sin \delta_k}{\operatorname{tg} \alpha_k} \\ 0 &= \sum_2^n B_k \frac{a_k}{s_k} \frac{\cos \delta_k}{\operatorname{tg} \alpha_k} \\ T &= \sum_2^n B_k \frac{a_k}{s_k} \frac{r_k}{\operatorname{tg} \alpha_k} \\ M_y &= \sum_1^m Z_i \cdot z_i - \sum_2^n B_k \frac{a_k}{s_k} \frac{z_k}{\operatorname{tg}^2 \alpha_k} \\ M_z &= - \sum_1^m Z_i \cdot y_i + \sum_2^n B_k \frac{a_k}{s_k} \frac{y_k}{\operatorname{tg}^2 \alpha_k} \end{aligned} \quad (79)$$

In dieser Form werden die Gleichgewichtsbeziehungen für die statische Methode in 3.3 verwendet werden. Ferner werden die Gl. (71) und (78) als zusätzliche wichtige Informationen festgehalten.

3.2 Kinematische Bedingungen

In Bild 12(a) ist ein allgemeiner Querschnitt, senkrecht zu seiner Längsachse geschnitten, dargestellt, der hinsichtlich Numerierung der Kanten und Seitenmitten demjenigen des Bildes 10 entspricht. Das Axenkreuz ist ein beliebiges rechtwinkliges Dreiein nach der Rechtsschraubenregel. Sein Ursprung liegt im Angriffspunkt der Verformungen.

Die 6 Verformungskomponenten $u, v, w, \vartheta, \varphi_y, \varphi_z$ bewirken für die einzelnen Stringer und Schubwände einerseits eine Verlängerung Δl und andererseits eine Schiebung γ in der Wandebene. Einer Verschiebung senkrecht zur Wandebene (siehe Detailskizze Bild 12(a)) soll kein Widerstand entgegengebracht werden, d.h. die Biegesteifigkeit der einzelnen Schubwand als Platte wird vernachlässigt.

In Bild 12(b) ist ein Schubwandelement herausgegriffen worden. Der Zusammenhang zwischen Schiebung und Längenänderung der Längseisen, Bügel und Betondruckdiagonalen ist aus diesem Verschiebungsplan abzulesen:

$$\gamma_k = \epsilon_{Bk} \operatorname{tg} \alpha_k + \frac{\epsilon_{Lk}}{\operatorname{tg} \alpha_k} - \frac{\epsilon_{bk}}{\sin \alpha_k \cos \alpha_k} \quad (80)$$

Darin bedeuten für die Wand k ϵ_{Bk} die Dehnung der zu einem Pfosten konzentriert gedachten Bügel, ϵ_{Lk} die mittlere Dehnung der Längseisengurtungen (Stringer) und ϵ_{bk} diejenige der Diagonalen.

Beim Bruch sollen die Stringer und Bügel fließen, die Betondruckdiagonalen dürfen für das Versagen nicht massgebend werden. Beim Mechanismus, der zum Versagen führt, leisten deshalb die Betondruckdiagonalen keine Dissipa-

tionsarbeit, da diese, bei der vorausgesetzten Vernachlässigung elastischer Deformationen, als starr angesehen werden können ($\Delta d=0$). Damit wird eine zwängungsfreie Verwölbung des Querschnitts ausgeschlossen, da bei starrer Druckdiagonale und spannungslosen Längseisen und Bügeln eine Schiebung des Elementes in Bild 12(b) nicht möglich ist.

In Bild 12(c) ist eine Schubwand dargestellt, die eine Verlängerung Δl erleidet. Diese kann durch u , φ_y oder φ_z entstanden sein. Bei starrer Diagonale ($\Delta d=0$) ist eine Verlängerung Δl nur mit einer gleichzeitigen Verkürzung $-\Delta b$ der Bügel möglich. Beträgt die Verlängerung auf die willkürliche Länge des Bruchmechanismus von $\Delta x=1$ bezogen Δl , so beträgt sie auf die Länge $a/\operatorname{tg}\alpha$:

$$\overline{\Delta l} = \Delta l \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Nach Bild 12(c) beträgt dabei die Verkürzung der Bügel:

$$-\Delta b = \frac{\overline{\Delta l}}{\operatorname{tg}\alpha} = \Delta l \frac{a}{\operatorname{tg}^2\alpha} \quad (81)$$

Eine Schubwand, die eine Schiebung γ gemäss Bild 12(d) mitmachen muss, kann das bei starrer Diagonale ($\Delta d=0$) nur mit einer Verlängerung der Bügel bewerkstelligen. Die Stringer erleiden keine Verlängerung. Diese Schiebung kann durch v , w oder ϑ entstanden sein. Nach Bild 12(d) beträgt die durch die Schiebung γ bedingte Verschiebung und damit Verlängerung der Bügel auf die Länge $a/\operatorname{tg}\alpha$:

$$\Delta b = \gamma \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha} \quad (82)$$

Die Längenänderung der Bügel setzt sich demnach aus den 2 Anteilen der Gl. (81) und (82) zusammen:

$$\Delta b = \gamma \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha} - \Delta l \frac{a}{\operatorname{tg}^2\alpha}$$

Geht man gleich zur BÜGELDEHNUNG $\epsilon_B = \Delta b/a$ über, so wird diese für die k-te Wand:

$$\epsilon_{Bk} = \frac{\gamma_k}{\operatorname{tg} \alpha_k} - \frac{\Delta l_k}{\operatorname{tg}^2 \alpha_k} \quad (83)$$

Diese Beziehung hätte man auch direkt aus Gl. (80) finden können, wenn dort wegen der starren Diagonalen $\epsilon_{bk} = 0$ gesetzt würde. Durch Division der verbleibenden Gl. (80) durch $\operatorname{tg} \alpha_k$ und mit $\epsilon_{Lk} = \Delta l_k$, wegen $\Delta x = 1$, entsteht tatsächlich Gl. (83).

Die Schiebung γ_k und die Verlängerung Δl_k müssen nun noch in Funktion der 6 Verformungskomponenten ausgedrückt werden. Aus Bild 12(a) ist sofort abzulesen, dass

$$\Delta l_k = u + z_k \cdot \varphi_y - y_k \cdot \varphi_z \quad (84)$$

wobei durch Einsetzen der Hebelarme z_k und y_k die mittlere Verlängerung der Wand berücksichtigt wird. Hier wird auch die Voraussetzung ebenbleibender Querschnitte zum ersten Mal gebraucht. Aus Bild 12(d) und der Detailskizze des Bildes 12(a) ist ersichtlich, dass für $\Delta x = 1$:

$$\gamma_k = -v \cdot \sin \delta_k + w \cdot \cos \delta_k + r_k \cdot \vartheta \quad (85)$$

Durch Einsetzen von Gl. (84) und (85) in Gl. (83) ergibt sich die BÜGELDEHNUNG der k-ten Wand zu:

$$\epsilon_{Bk} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_k} (-v \cdot \sin \delta_k + w \cdot \cos \delta_k + r_k \cdot \vartheta) - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha_k} (u + z_k \cdot \varphi_y - y_k \cdot \varphi_z) \quad (86)$$

Die Verlängerung der Stringer infolge der 6 Verformungskomponenten lässt sich unmittelbar aus Gl. (84) ablesen, wenn der Index k durch i ersetzt wird. Die Verformungen v, w und ϑ bewirken keine Verlängerung. Mit $\Delta x = 1$ beträgt

die Dehnung der Stringer:

$$\epsilon_{Li} = \Delta l_i = u + z_i \cdot \varphi_y - y_i \cdot \varphi_z \quad (87)$$

Die kinematischen Beziehungen (86) und (87) werden in dieser Form für die kinematische Methode in 3.4 verwendet werden. Es sei festgehalten, dass sie für die willkürliche Länge $\Delta x=1$ des Bruch-Mechanismus abgeleitet wurden.

3.3 Statische Methode

Der statische Grenzwertsatz (siehe 1.5) lässt sich für das gewählte Bruchmodell (Bilder 10 und 11) wie folgt anwenden:

Unter der Annahme proportionaler Laststeigerung wird jene Belastung ωN , ωT , ωM_y und ωM_z gesucht, für die der Tragfaktor ω maximal wird. Diese Optimierungsaufgabe liefert im Falle, dass der dazugehörige Bewegungszustand einen Mechanismus bildet, die exakte Lösung für die Traglast.

3.3.1 Die Gleichgewichtsbedingungen

Die Gleichgewichtsbeziehungen wurden in 3.1 vorbereitet. Die dortigen Gl. (79) lauten unter Einführung des Traglastfaktors:

$$\begin{aligned}
 0 &= -\omega N + \sum_1^m Z_i - \sum_2^n B_k \frac{a_k}{s_k} \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha_k} \\
 0 &= -\sum_2^n B_k \frac{a_k}{s_k} \frac{\sin \delta_k}{\operatorname{tg} \alpha_k} \\
 0 &= \sum_2^n B_k \frac{a_k}{s_k} \frac{\cos \delta_k}{\operatorname{tg} \alpha_k} \\
 0 &= -\omega T + \sum_2^n B_k \frac{a_k}{s_k} \frac{r_k}{\operatorname{tg} \alpha_k} \\
 0 &= -\omega M_y + \sum_1^m Z_i \cdot z_i - \sum_2^n B_k \frac{a_k}{s_k} \frac{z_k}{\operatorname{tg}^2 \alpha_k} \\
 0 &= -\omega M_z - \sum_1^m Z_i \cdot y_i + \sum_2^n B_k \frac{a_k}{s_k} \frac{y_k}{\operatorname{tg}^2 \alpha_k}
 \end{aligned} \tag{88}$$

3.3.2 Die Plastizitätsbedingungen

Die Plastizitätsbedingungen verlangen, dass die vorhandenen Beanspruchungen über das ganze Bruchmodell kleiner sind als die maximalen Widerstände. Im Falle eines Stahles mit starr-plastischem Spannungs-Dehnungs-Diagramm (Bild 3) stellt die Fließkraft den maximalen Widerstand dar. Für die Längseisen-Stringer und die Bügel ergeben sich demnach folgende Beschränkungen ihrer Zugkraft:

$$\begin{aligned}
 Z_i &\leq Z_{fi} & (i = 1 \text{ bis } m) \\
 B_k &\leq B_{fk} & (k = 2 \text{ bis } n)
 \end{aligned} \tag{89}$$

Da gemäss dem Diagramm des Bildes 3(a) die Stringer eventuelle Druckkräfte vorläufig unbeschränkt aufnehmen sollen, entfällt eine diesbezügliche Beschränkung. Schreibt man die Plastizitätsbedingungen (89) mit den abhängigen Variablen y_{Li} und y_{Bk} in der Form

$$\begin{aligned} y_{Li} &= Z_{fi} - Z_i & (i = 1 \text{ bis } m) \\ y_{Bk} &= B_{fk} - B_k & (k = 2 \text{ bis } n) \end{aligned} \quad (90)$$

so folgt aus Gl. (89), dass die y_{Li} und y_{Bk} stets positiv sein müssen

$$\begin{aligned} y_{Li} &\geq 0 \\ y_{Bk} &\geq 0 \end{aligned} \quad (91)$$

Damit kann die Optimierungsaufgabe in Angriff genommen werden.

3.3.3 Optimierung

Die Gleichgewichts- und die Plastizitätsbedingungen der Gl. (88) und (90) sind in Bild 13 in Tableauform zusammengestellt. Am linken Rand stehen die beschränkten abhängigen Variablen y_{Li} und y_{Bk} , am Kopf die freien unabhängigen Variablen Z_i und B_k . In der 1. Zeile steht die Zielfunktion; der Traglastfaktor ω ist zu maximieren. In den Restriktionen kommen jedoch noch die Werte $1/\text{tg}^2\alpha_k$ und $1/\text{tg}\alpha_k$ vor, die ebenfalls Variable sind. Dieses Programm ist somit nichtlinear.

Auf dem Gebiete der nichtlinearen Programmierung ist die mathematische Forschung in vollem Gange [9]. Bis heute beschränken sich die bekannten Verfahren auf quadratische Zielfunktionen und lineare Restriktionen. Dies trifft beim vorliegenden Programm nicht zu. Mit der folgenden Umformung gelingt es jedoch, dieses Programm in ein lineares überzuführen.

Zu diesem Zweck wird die bisher nicht verwendete Gl. (78) herangezogen, die B_k , $\text{tg}\alpha_k$ und S miteinander verknüpft, wobei der Schubfluss S für alle Seiten k konstant ist. Setzt man

$$\frac{1}{\text{tg}\alpha_k} = S \frac{s_k}{B_k} \quad (92)$$

so lässt sich $\text{tg}\alpha_k$ in den Restriktionen durch S und B_k ausdrücken. Diese Umformung liesse sich mathematisch mit Austauschschritten vornehmen, sie sei hier jedoch anschaulich durchgeführt.

Durch Einsetzen von $\text{tg}\alpha_k$ nach Gl. (92) in die Gleichgewichtsbeziehungen (88) schreiben sich diese zu:

$$\begin{aligned} 0 &= -\omega N + \sum_1^m Z_i - S^2 \sum_2^n \frac{a_k s_k}{B_k} \\ 0 &= -S \sum_2^n a_k \sin \delta_k \\ 0 &= S \sum_2^n a_k \cos \delta_k \\ 0 &= -T + S \sum_2^n a_k r_k \\ 0 &= -\omega M_y + \sum_1^m Z_i \cdot z_i - S^2 \sum_2^n \frac{a_k s_k z_k}{B_k} \\ 0 &= -\omega M_z - \sum_1^m Z_i \cdot y_i + S^2 \sum_2^n \frac{a_k s_k y_k}{B_k} \end{aligned} \quad (93)$$

Hält man nun, und dies ist der kleine Trick der Umformung, den Schubfluss S bei der Optimierung konstant, so enthalten die 2., 3. und 4. Beziehung der Gl. (93) keine Variablen mehr und können weggelassen werden. Die 2. und 3. Beziehung ergeben die Forderung

$$\sum_2^n a_k \sin \delta_k = \sum_2^n a_k \cos \delta_k = 0$$

die für die Querschnitte, in denen ein Torsions-Schubfluss auftreten soll (St. Venant'sche Torsion) trivial wird. Die 4. Beziehung verdient jedoch noch Beachtung. Man erkennt, dass ein Konstanthalten von S gleichbedeutend mit einem Konstanthalten von T ist. Deshalb entfällt auch der Koeffizient ω vor T , da nur noch N , M_y und M_z proportional gesteigert werden können. Der Zusammenhang zwischen S und T wird hier einmal festgehalten mit:

$$T = S \sum_{k=1}^n a_k r_k = 2 F_0 S \quad (94)$$

wobei F_0 die von der Verbindungslinie der Längseisen-Stringers umschlossene Fläche darstellt.

Die physikalische Bedeutung dieses Vorgehens soll noch anhand des Bildes 9, an der Interaktionskurve des quadratischen Fachwerkmodells, erläutert werden. Man wählt einen bestimmten Betrag des Schubflusses S_1 und hält diesen für die Optimierung konstant. Damit ergibt sich mit Gl. (94) ein konstantes Torsionsmoment T_1 . Auf dem Niveau T_1 sucht man nun in positiver und negativer Richtung nach den Schnittpunkten dieses Niveaus mit den Interaktionskurven, den beiden Werten Max und Min in Bild 9. Offensichtlich hätten diese Werte Max und Min auch direkt von 0 aus mit proportionaler Laststeigerung erreicht werden können (strichpunktierte Geraden), wenn dieser Weg mathematisch gangbar wäre.

Auch die Plastizitätsbedingungen der Bügel erfahren eine Modifikation, da in den Beziehungen (93) die Variable B_k im Nenner vorkommt. Da nach Gl. (89)

$$B_k \leq B_{fk}$$

wird

$$\frac{1}{B_k} \geq \frac{1}{B_{fk}}$$

und damit das neue

$$y_{Bk} = \frac{1}{B_k} - \frac{1}{B_{fk}} \quad (k = 2 \text{ bis } n) \quad (95)$$

Die Beziehung

$$y_{Li} = Z_{fi} - Z_i \quad (i = 1 \text{ bis } m) \quad (96)$$

bleibt bestehen. Wiederum sind y_{Bk} und $y_{Li} \geq 0$.

Die modifizierten drei nichttrivialen Gleichgewichtsbedingungen (93) und die Plastizitätsbedingungen (95) und (96) können nun in einem vereinfachten Tableau dargestellt werden (Bild 14). Am linken Rand stehen wiederum die beschränkten abhängigen Variablen y_{Li} und y_{Bk} , am Kopf die freien unabhängigen Variablen Z_i und $1/B_k$. In der 1. Zeile steht die Zielfunktion. Der Traglastfaktor ω ist erst zu maximieren, dann zu minimieren; die beiden Lösungen Max und Min entsprechen den zu einem bestimmten Niveau von S gehörenden extremen N , M_y und M_z , die untereinander in einem bestimmten Verhältnis

$$M_z/M_y = \rho \quad (97)$$

$$N/M_y = \eta$$

stehen und proportional gesteigert werden. Diese Lösungen sind untere Schranken für die Traglast. Bilden sie einen Mechanismus, so ist der exakte Wert für die Traglast gefunden. Da das Tableau in dieser Form linear ist, können die Optimalwerte mit dem Simplex-Verfahren ermittelt werden. Dies ist im Anhang A für das Tableau des Bildes 14 durchgeführt worden.

3.3.4 Ergebnis

Das Schlusstableau nach den durchgeführten Austauschschritten ist im Anhang A als Bild 31(c) zu sehen. Die Basislösung ist zulässig, wenn y_{L1} und y_{L3} einen positiven Wert annehmen. Sie ist zudem optimal, wenn alle Koeffizienten der y_{Li} und y_{Bk} in der Zielfunktion ω gleiches Vorzeichen aufweisen. Sind sie negativ, so wird ω maximal, sind sie positiv, wird ω minimal. Werden einzelne Koeffizienten null, so ist das Vorzeichen der nicht verschwindenden Koeffizienten massgebend.

Stillschweigend wurden nur die beiden Variablen y_{L1} und y_{L3} und nicht etwa Variable y_{Bk} ausgetauscht. Bei einer zulässigen Lösung ($y_{L1} \geq 0$, $y_{L3} \geq 0$) bedeutet dies mit Blick auf Gl. (96), dass die Stringerkräfte Z_1 und Z_3 ihre Fließkräfte Z_{f1} und Z_{f3} nicht erreichen. Da bei einer optimalen Lösung alle anderen y_{Li} und y_{Bk} zu null gesetzt werden, erreichen alle anderen Kräfte Z_i und B_k ihre Fließkräfte Z_{fi} und B_{fk} . Anschaulich ausgedrückt würde dies bedeuten, dass beim Optimum 2 der m Längseisen-Stringer nicht fließen, wahrscheinlich die zwei, um deren Achse sich der Querschnitt beim Versagen öffnet. Ein solcher Mechanismus wäre vernünftig. Um ihn zu beweisen müsste man zeigen, dass es Wertepaare z_1 , y_1 und z_3 , y_3 gibt, so, dass die Koeffizienten im Tableau des Bildes 31(c) die zu Beginn dieses Abschnittes aufgestellten Bedingungen für eine optimale zulässige Lösung erfüllen.

Dieser Beweis wäre äusserst langwierig. Eine elegantere Beweisführung wird mit der graphischen Interpretation der Mechanismus-Methode möglich sein. Auch die Beantwortung der Frage, wie sich die Bügel beim Optimum verhalten, muss bis zum Abschnitt 3.5 zurückgestellt werden.

3.4 Mechanismus-Methode

Der kinematische Grenzwertsatz (siehe 1.5) lässt sich für das gewählte Bruchmodell (Bilder 10 und 11) wie folgt anwenden:

Unter der Annahme proportionaler Laststeigerung wird jene Belastung ωN , ωT , ωM_y und ωM_z gesucht, für die der Traglastfaktor ω minimal wird. Diese Optimierungsaufgabe liefert im Falle, dass der dazugehörige Spannungszustand die Plastizitätsbedingungen nicht verletzt, die exakte Lösung für die Traglast.

3.4.1 Die kinematischen Bedingungen

Die kinematischen Bedingungen wurden in 3.2 für ein Bruchmodell der Länge $\Delta x=1$ vorbereitet. Die dortigen Beziehungen (87) und (86) wurden nach der Zeit abgeleitet, was durch den Punkt dargestellt wird, und lauten:

$$\dot{\epsilon}_{Li} = \dot{u} + z_i \cdot \dot{\phi}_y - y_i \cdot \dot{\phi}_z \quad (98)$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{Bk} = & - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha_k} (\dot{u} + z_k \cdot \dot{\phi}_y - y_k \cdot \dot{\phi}_z) + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_k} (-\dot{v} \cdot \sin \delta_k + \dot{w} \cdot \cos \delta_k \\ & + r_k \cdot \dot{\vartheta}) \end{aligned}$$

Die Bezeichnungen sind aus Bild 12 ersichtlich.

3.4.2 Die Leistungs-Bedingung

Die Leistungsbedingung verlangt, dass der kinematisch zulässige Bewegungszustand instabil sei, d.h. die Gesamtleistung der äusseren und inneren Kräfte bei dieser kinematisch zulässigen Bewegung soll nichtnegativ sein.

Die Leistung der äusseren Kräfte ωN , ωT , ωM_y und ωM_z bei einem Bewegungszustand $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{w}$, $\dot{\phi}_y$, $\dot{\phi}_z$ und $\dot{\psi}$ beträgt:

$$L_a = \omega(N \cdot \dot{u} + T \cdot \dot{\psi} + M_y \cdot \dot{\phi}_y + M_z \cdot \dot{\phi}_z) \quad (99)$$

Bei der vorausgesetzten Annahme eines starrplastischen Materials (Vernachlässigung elastischer Verformungen) ist die Dissipationsleistung gleich der negativen Leistung der inneren Kräfte:

$$L_d = -L_i = \sum_1^m Z_{fi} \cdot \dot{\epsilon}_{Li} + \sum_2^n B_{fk} \cdot \frac{1}{s_k} \cdot \dot{\epsilon}_{Bk} \cdot a_k \quad (100)$$

wobei

$$\dot{\epsilon}_{Li} > 0 \quad \dot{\epsilon}_{Bk} > 0 \quad (101)$$

Die beiden Beziehungen (99) und (100) gelten für die Länge $\Delta x=1$ des Mechanismus. Die Dissipationsleistung ist die Summe aller Fließkräfte mal die zum Bewegungszustand gehörigen Dehngeschwindigkeiten. Infolge der Annahme starrer Betondruckdiagonalen leisten diese keine Dissipationsarbeit, was gleichbedeutend ist mit der Aussage, dass sie für das Versagen nicht massgebend werden dürfen.

Die Bedingung für Instabilität des Bewegungszustandes lautet, dass die Gesamtleistung

$$L = L_a + L_i = L_a - L_d$$

nichtnegativ sein soll. Setzt man für L_a und L_d die Ausdrücke der Gl. (99) und (100) ein, so schreibt sich die Leistungsbedingung:

$$L = \omega (N \cdot \dot{u} + T \cdot \dot{\phi} + M_y \cdot \dot{\phi}_y + M_z \cdot \dot{\phi}_z) - \sum_1^m Z_{fi} \cdot \dot{\epsilon}_{Li} - \sum_2^n B_{fk} \frac{a_k}{s_k} \cdot \dot{\epsilon}_{Bk} \geq 0 \quad (102)$$

Für den minimalen Traglastfaktor eines Bewegungszustandes hat das Gleichheitszeichen Gültigkeit. Damit wird:

$$\omega = \frac{\sum_1^m Z_{fi} \cdot \dot{\epsilon}_{Li} + \sum_2^n B_{fk} \frac{a_k}{s_k} \cdot \dot{\epsilon}_{Bk}}{N \cdot \dot{u} + T \cdot \dot{\phi} + M_y \cdot \dot{\phi}_y + M_z \cdot \dot{\phi}_z} \quad (103)$$

Da der absolute Betrag der Verformungsgeschwindigkeiten beliebig sein kann, darf der Nenner von Gl. (103) zu

$$N \cdot \dot{u} + T \cdot \dot{\phi} + M_y \cdot \dot{\phi}_y + M_z \cdot \dot{\phi}_z = 1 \quad (104)$$

gesetzt werden. Unter Berücksichtigung von Gl. (104) wird schliesslich der Traglastfaktor nach Gl. (103) zu:

$$\omega = \sum_1^m Z_{fi} \cdot \dot{\epsilon}_{Li} + \sum_2^n B_{fk} \frac{a_k}{s_k} \cdot \dot{\epsilon}_{Bk} \quad (105)$$

Damit kann die Optimierungsaufgabe in Angriff genommen werden.

3.4.3 Optimierung

Die kinematischen Bedingungen (98) und die Leistungsbedingungen (104) und (105) können wiederum in Tableauform dargestellt werden (Bild 15). Am linken Rand stehen lauter Nullen, am Kopf alle freien und beschränkten Variablen. In der 1. Zeile steht die Zielfunktion. Der Traglastfaktor ω ist zu minimieren.

Vergleicht man das Tableau des Bildes 15 mit demjenigen der statischen Methode (Bild 13), so stellt man fest, dass die beiden Systeme zueinander dual sind. Die Koeffizientenmatrix des einen Systems ist die negativ Transponierte der Koeffizientenmatrix des andern Systems. Das eine ist ein Maximum-, das andere ein Minimum-Problem. Jeder Ungleichung im einen System entspricht im andern System eine nichtnegative Variable, jeder Gleichung eine freie Variable und umgekehrt [9]. Die Dualitätsregeln sind auch in [7] dargestellt; zudem findet sich ein Schema als Bild 19.

Um dieses nichtlineare Programm in ein lineares überzuführen, werden folgende Umformungen vorgenommen. Die konzentrierten Verformungen werden in 2 Gruppen aufgeteilt. In einem ersten Schritt werden die Verformungsgeschwindigkeiten $\dot{\vartheta}$, $\dot{v}$ und $\dot{w}$ angebracht und konstantgehalten. Mit den Gl. (98), (99) und (100) ergeben sich dabei folgende Dehngeschwindigkeiten und Leistungsanteile:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{Li}^I &= 0 \\ \dot{\epsilon}_{Bk}^I &= \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_k} (-\dot{v} \cdot \sin \delta_k + \dot{w} \cdot \cos \delta_k + r_k \cdot \dot{\vartheta}) \\ L_a^I &= T \cdot \dot{\vartheta} \\ L_d^I &= \sum_k^n B_{fk} \frac{a_k}{s_k} \cdot \dot{\epsilon}_{Bk}^I\end{aligned}\tag{106}$$

Der Traglastfaktor ω bei der äusseren Leistung entfällt. Die Leistungsbedingung $L_a^I - L_d^I = 0$ führt zur Bestätigung von Gl. (92).

In einem zweiten Schritt werden die Verformungsgeschwindigkeiten $\dot{u}$, $\dot{\phi}_y$ und $\dot{\phi}_z$ aufgebracht und die dazugehörigen optimalen Dehngeschwindigkeiten bestimmt. Mit denselben Gleichungen wie oben wird:

$$\begin{aligned}
 \dot{\epsilon}_{Li}^{II} &= \dot{u} + z_i \cdot \dot{\phi}_y - y_i \cdot \dot{\phi}_z \\
 \dot{\epsilon}_{Bk}^{II} &= - \frac{1}{tg^2 \alpha_k} (\dot{u} + z_k \cdot \dot{\phi}_y - y_k \cdot \dot{\phi}_z) \\
 L_a^{II} &= \omega (N \cdot \dot{u} + M_y \cdot \dot{\phi}_y + M_z \cdot \dot{\phi}_z) \\
 L_d^{II} &= \sum_1^m Z_{fi} \cdot \dot{\epsilon}_{Li}^{II} + \sum_2^n B_{fk} \frac{a_k}{s_k} \cdot \dot{\epsilon}_{Bk}^{II}
 \end{aligned} \tag{107}$$

Die Leistungsbedingung für diesen zweiten Schritt lautet:

$$\begin{aligned}
 L = L_a^{II} - L_d^{II} &= \omega (N \cdot \dot{u} + M_y \cdot \dot{\phi}_y + M_z \cdot \dot{\phi}_z) - \sum_1^m Z_{fi} \cdot \dot{\epsilon}_{Li}^{II} \\
 &\quad - \sum_2^n B_{fk} \frac{a_k}{s_k} \cdot \dot{\epsilon}_{Bk}^{II} = 0
 \end{aligned} \tag{108}$$

Daraus wird mit

$$N \cdot \dot{u} + M_y \cdot \dot{\phi}_y + M_z \cdot \dot{\phi}_z = 1 \tag{109}$$

in Analogie zu Gl. (104) der zu optimierende Traglastfaktor zu:

$$\omega = \sum_1^m Z_{fi} \cdot \dot{\epsilon}_{Li}^{II} + \sum_2^n B_{fk} \frac{a_k}{s_k} \cdot \dot{\epsilon}_{Bk}^{II} \tag{110}$$

Mit den Gl. (110) und (109), sowie den zwei ersten Zeilen der Gl. (107) lässt sich das vereinfachte Tableau des Bildes 16 anschreiben. Dieses Programm ist linear in den Variablen $\dot{\epsilon}_{Li}^{II}$ und $\dot{\epsilon}_{Bk}^{II} tg^2 \alpha_k$, wobei für $\dot{\epsilon}_{Li}^{II}$ auch $\dot{\epsilon}_{Li}^I$ geschrieben werden kann, da ja $\dot{\epsilon}_{Li}^I = 0$ ist. Man beachte jedoch, dass das $\dot{\epsilon}_{Bk}$ des Tableaus 15 mit dem $\dot{\epsilon}_{Bk}^{II}$ des Tableaus 16 nicht identisch ist und dass in Bild 16 B_{fk} mit Hilfe der Gl. (92) durch $S \cdot s_k tg \alpha_k$ ersetzt wurde.

Man hätte dieses Tableau auch durch die duale Umformung aus dem Tableau des Bildes 14 (statische Methode) erhalten können, ohne sich um die physikalische Bedeutung zu kümmern. Aus den Zuordnungsgesetzen weiss man, dass den Ungleichungen des Bildes 14 nichtnegative Variable des Bildes 16 entsprechen. Tatsächlich sind ja die $\dot{\epsilon}_{Li}$ gemäss Gl. (101) und $-\dot{\epsilon}_{Bk}^{II} \text{tg}^2 \alpha_k$ nach den zwei ersten Zeilen der Beziehungen (107) nichtnegative Variable.

Nach dem Dualitätstheorem der linearen Programmierung [9] wird der Traglastfaktor ω für beide Systeme denselben Wert annehmen. Dem Maximum im einen entspricht ein Minimum im andern System und umgekehrt, wobei die Vorzeichen nach den in Bild 19 zusammengestellten Dualitätsregeln zu beachten sind. Im Anhang B sind die weiteren zu Anhang A dualen Tableaux zu finden.

Immerhin lässt sich aus dem Dualitätstheorem bereits die wichtige Folgerung ziehen, dass die Lösung ω dieser Programme den exakten Traglastfaktor dieses Modells darstellen wird. Als Lösung des "statischen Programms" verletzt ω sicher nicht die Gleichgewichts- und die Plastizitätsbedingungen, als Lösung des "kinematischen Programms" wird bestätigt, dass der dazugehörige Bewegungszustand auch einen Mechanismus darstellt.

3.4.4 Ergebnis

Die Austauschschritte wurden beim Stand des Tableaus Bild 33 des Anhanges B abgebrochen. Es könnten noch zwei beschränkte Variable, z.B. $\dot{\epsilon}_{L1}$ und $\dot{\epsilon}_{L3}$, aus der Basis genommen und mit $\dot{u}$ und $\dot{\phi}_z$ ausgetauscht werden. Man würde dann ein zu Bild 31(c) des Anhang A duales Tableau erhal-

ten. Die Beweisführung der Vorzeichen der Matrixglieder wäre langwierig, so dass sich die elegantere Lösung der graphischen Interpretation des Tableaus 33 aufdrängt, da dort nur noch 2 freie Variable auftreten. Diese graphische Lösung des linearen Programms wird im folgenden Abschnitt 3.5 gezeigt werden.

Immerhin sei noch festgehalten, dass es sich bei den beiden noch austauschbaren und bei der Basislösung verschwindenden Dehngeschwindigkeiten $\dot{\epsilon}_{L1}$ und $\dot{\epsilon}_{L3}$ um diejenigen jener Längseisen-Stringer handeln muss, die bei der "statischen Lösung" (Bild 31(c)) in der Basis standen. Der dortigen Aussage (vgl. auch 3.3.4), dass die Stringerkräfte Z_1 und Z_3 ihre Fließsspannung nicht erreichen, entspricht hier die Aussage $\dot{\epsilon}_{L1} = \dot{\epsilon}_{L3} = 0$. Beim vorausgesetzten starrplastischen Material bedeutet dies, dass die Fließsspannung in den beiden Stringern noch nicht erreicht ist. Alle übrigen Dehngeschwindigkeiten erhalten bei einer zulässigen Lösung positive Werte, d.h. dass die entsprechende Bewehrung beim Mechanismus fließt.

3.5 Graphische Lösung der Mechanismus-Methode

Grundlage für die graphische Lösung ist das Tableau des Bildes 33 des Anhangs B. Es wurde in endgültiger Form als Bild 17(a) zusammengestellt. Am Kopf des Tableaus stehen die zwei unbeschränkten Variablen $\dot{u}$ und $\dot{\phi}_2$. Am linken Rand stehen, neben der abhängigen Variablen $\dot{\phi}_1$, die Zielfunktion ω und die Restriktionen $\dot{\epsilon}_{Li} \geq 0$ und $-\dot{\epsilon}_{Bk}^{II} \tan^2 \alpha_k \geq 0$, die den zulässigen Bereich der Variablen abgrenzen. Im folgenden sollen erst die Minimums-, dann die Maximumsaufgabe gelöst und allgemein gültige Erkenntnisse festgehalten werden.

3.5.1 Minimumsaufgabe

Jede Restriktion stellt im rechtwinkligen Koordinatensystem $\dot{u}$, $\dot{\phi}_z$ für den Fall $\dot{\epsilon}_{Li} = 0$ oder $-\dot{\epsilon}_{Bk}^{II} \text{tg}^2 \alpha_k = 0$ eine Gerade dar, die die Ebene in 2 Halbebenen aufteilt. Anhand des Ungleichheitszeichens kann die zulässige Halbebene ermittelt werden. Aus Bild 17(a) lesen sich die folgenden Restriktionen ab:

$$\dot{\epsilon}_{Li} = \frac{z_i}{M_y} + (1 - \eta z_i) \dot{u} - (y_i + \rho z_i) \dot{\phi}_z \geq 0 \quad (111)$$

$$-\dot{\epsilon}_{Bk}^{II} \text{tg}^2 \alpha_k = \frac{z_k}{M_y} + (1 - \eta z_k) \dot{u} - (y_k + \rho z_k) \dot{\phi}_z \geq 0$$

Multipliziert man mit M_y und bezeichnet man der Einfachheit halber die linke Seite mit $\dot{\epsilon}_i$ (i = ungerade) für die Stringer und mit $\dot{\epsilon}_k$ (k = gerade) für die Bügel, so wird:

$$\dot{\epsilon}_i = z_i + (1 - \eta z_i) \dot{u} M_y - (y_i + \rho z_i) \dot{\phi}_z M_y \geq 0 \quad (112)$$

$$\dot{\epsilon}_k = z_k + (1 - \eta z_k) \dot{u} M_y - (y_k + \rho z_k) \dot{\phi}_z M_y \geq 0$$

Bei positiven Koordinaten z_i und z_k enthält die zulässige Halbebene den Nullpunkt. Trägt man auf den Koordinatenachsen gerade $\dot{u} M_y$ und $\dot{\phi}_z M_y$ auf, so werden die endgültigen Geradengleichungen zu:

$$\dot{u} M_y = \frac{y_i + \rho z_i}{1 - \eta z_i} \cdot \dot{\phi}_z M_y - \frac{z_i}{1 - \eta z_i} \quad (i = 1 \text{ bis } m) \quad (113)$$

$$\dot{u} M_y = \frac{y_k + \rho z_k}{1 - \eta z_k} \cdot \dot{\phi}_z M_y - \frac{z_k}{1 - \eta z_k} \quad (k = 2 \text{ bis } n)$$

In Bild 18 sind diese Geraden für einen dreieckförmigen Querschnitt mit beliebigen Koordinatenachsen y, z skizziert, für den Fall $\rho = \eta = 0$ (Torsion und Biegung um y -Axe). Der zulässige Bereich ist grob schraffiert. Aus den Beziehungen (113) ist ersichtlich, dass die Geraden $\dot{\epsilon}_i$ und $\dot{\epsilon}_k$ für ein gegebenes Belastungsverhältnis ρ und η nur von der Geometrie des Querschnitts abhängen, nicht aber von der Bewehrung.

Die Zielfunktion lässt sich aus der 1. Zeile des Tableaus Bild 17 ablesen:

$$\omega = \frac{c_2}{M_y} + (c_1 - \eta c_2) \dot{u} + (c_3 - \rho c_2) \dot{\phi}_z \quad (114)$$

Mit M_y multipliziert wird:

$$\omega M_y = c_2 + (c_1 - \eta c_2) \dot{u} M_y + (c_3 - \rho c_2) \dot{\phi}_z M_y \quad (115)$$

Im rechtwinkligen Koordinatensystem $\dot{u} M_y, \dot{\phi}_z M_y$ des Bildes 18 stellt Gl. (115) eine Schar von parallelen Geraden dar, die die Steigung

$$\frac{\dot{u} M_y}{\dot{\phi}_z M_y} = - \frac{c_3 - \rho c_2}{c_1 - \eta c_2} \quad (116)$$

besitzen. In Bild 18 ist eine solche Gerade ωM_y strichpunktiert durch den Nullpunkt gezeichnet. Unter allen zu dieser parallelen Geraden ist für das Minimum diejenige zu suchen, die den zulässigen Bereich von unten her tangiert. Auf diese Weise wird der Punkt Min als Lösungspunkt der Minimaufgabe des linearen Programms gefunden. Es sei festgehalten, dass die Zielfunktion für ein gegebenes Belastungsverhältnis ρ und η mit den Konstanten c_1, c_2 und c_3 auch von der Geometrie und der Bewehrung des Querschnitts abhängt.

Mit dem Lösungspunkt Min lassen sich die zugehörigen $\dot{u}_y$ (Min) und $\dot{\phi}_z M_y$ (Min) ablesen. Durch Einsetzen in Gl. (115) ergibt sich das dazugehörige Moment zu:

$$\omega M_y(\text{Min}) = c_2 + (c_1 - \eta c_2) \dot{u}_y(\text{Min}) + (c_3 - \rho c_2) \dot{\phi}_z M_y(\text{Min}) \quad (117)$$

Durch Einsetzen in die 2. Zeile des Tableaus Bild 17(a) wird die abhängige Variable $\dot{\phi}_y$ ermittelt:

$$\dot{\phi}_y M_y(\text{Min}) = 1 - \eta \dot{u}_y(\text{Min}) - \rho \dot{\phi}_z M_y(\text{Min}) \quad (118)$$

Mit den Gl. (112) ergeben sich die $\dot{\epsilon}_i$ und $\dot{\epsilon}_k$ zu:

$$\dot{\epsilon}_i(\text{Min}) = z_i + (1 - \eta z_i) \dot{u}_y(\text{Min}) - (y_i + \rho z_i) \dot{\phi}_z M_y(\text{Min}) \quad (119)$$

$$\dot{\epsilon}_k(\text{Min}) = z_k + (1 - \eta z_k) \dot{u}_y(\text{Min}) - (y_k + \rho z_k) \dot{\phi}_z M_y(\text{Min})$$

Wie auch aus Bild 18 ersichtlich, verschwinden diejenigen $\dot{\epsilon}_i$ und $\dot{\epsilon}_k$, deren Geraden durch den Lösungspunkt Min gehen. Im Beispiel des Dreiecks Bild 18 verschwinden $\dot{\epsilon}_1$ und $\dot{\epsilon}_3$, d.h. die Stringer 1 und 3 werden beim Versagen des Querschnitts nicht fließen. Dies ist für eine Torsions- und positive Biegebeanspruchung um die y-Axe leicht einzusehen. Die Bedingung $\dot{\epsilon}_2 = 0$ bedeutet nicht, dass die zwischen 1 und 3 liegenden Bügel nicht zum Fließen kommen. Da sich die Bügeldehnungen aus 2 Anteilen zusammensetzen, einem $\dot{\epsilon}_{Bk}^I$ nach Gl. (106), das konstant gehalten wird, und einem $\dot{\epsilon}_{Bk}^{II}$ nach Gl. (107) bedeutet $\dot{\epsilon}_k = 0$ lediglich, dass der Anteil $\dot{\epsilon}_{Bk}^{II}$ zu null wird.

3.5.2 Maximumsaufgabe

Vorgängig der Inangriffnahme der Maximumsaufgabe müssen am Tableau des Bildes 17(a) einige Aenderungen angebracht werden. Die Dualitätsregeln (siehe z.B. [7]) sind in Bild 19 zusammengestellt worden. In Bild 19(a) ist der Uebergang vom Maximum-System ins duale Minimum-System dargestellt. Die Koeffizientenmatrix der x_i geht in die negativ-transponierte Matrix, der Spaltenvektor b in den Zeilenvektor b über.

Beim Uebergang vom Minimum-System ins duale Maximum-System (Bild 19(b)) sind diese Regeln so anzuwenden, dass vom dualen Maximum-System ausgegangen wird. Wie man sich leicht überzeugt, hat dies gegenüber dem dualen System des Bildes 19(a) einen Vorzeichenwechsel der 1. Kolonne und der 1. Zeile zur Folge. Aus diesem Grunde wurde auch in Bild 16 der Max-Pfeil in Klammern gesetzt.

Das duale System des Bildes 19(b) kann durch Aenderung der Vorzeichen aller Restriktionszeilen in dasjenige des Bildes 19(c) übergeführt werden. Dieses System unterscheidet sich vom System des Minimum-Problems Bild 19(a) nur dadurch, dass die Variablen am Kopf ihr Vorzeichen und die Restriktionen ihren zulässigen Bereich wechseln. In Bild 17(b) ist dieses im Vergleich zu 17(a) so modifizierte Tableau dargestellt. Es bildet die Grundlage für die Maximumsaufgabe.

Denkt man sich in der graphischen Darstellung des Bildes 18 die negativen Axenabschnitte $\dot{u}_y$ und $\dot{\phi}_z M_y$ als positiv, indem die Figur um 180° gedreht wird, so kann das für die Minimumsaufgabe bereits vorbereitete Diagramm für die Maximumsaufgabe vollständig übernommen werden. Es ändert sich nur der zulässige Bereich der Restriktionen, der in Bild 18 fein schraffiert wurde. Auf diese Weise wird der Punkt Max

als Lösungspunkt der Maximumsaufgabe samt den dazugehörigen $\dot{u}_y(\text{Max})$ und $\dot{\phi}_z M_y(\text{Max})$ gefunden.

Durch Einsetzen dieser Werte in das Tableau des Bildes 17(b) ergeben sich die zu den Gl. (117), (118) und (119) analogen Beziehungen:

$$\omega_{M_y}(\text{Max}) = c_2 + (c_1 - \eta c_2) [-\dot{u}_y(\text{Max})] + (c_3 - \rho c_2) [-\dot{\phi}_z M_y(\text{Max})] \quad (120)$$

$$-\dot{\phi}_y M_y(\text{Max}) = 1 - \eta [-\dot{u}_y(\text{Max})] - \rho [-\dot{\phi}_z M_y(\text{Max})] \quad (121)$$

$$-\dot{\epsilon}_i(\text{Max}) = z_i + (1 - \eta z_i) [-\dot{u}_y(\text{Max})] - (y_i + \rho z_i) [-\dot{\phi}_z M_y(\text{Max})] \quad (122)$$

$$-\dot{\epsilon}_k(\text{Max}) = z_k + (1 - \eta z_k) [-\dot{u}_y(\text{Max})] - (y_k + \rho z_k) [-\dot{\phi}_z M_y(\text{Max})]$$

Im Beispiel des Bildes 18 verschwinden in diesem Fall die Stringerdehnungsgeschwindigkeiten 3 und 5, was für ein negatives Biegemoment M_y durchaus verständlich ist.

3.5.3 Ergebnis und Folgerungen

Zeichnet man die Zielfunktion und die Restriktionen des Tableaus 17(a) in einem rechtwinkligen Koordinatensystem $\dot{u}_y, \dot{\phi}_z M_y$ auf, so findet man mit Umkehr der zulässigen Bereiche zwei optimale Werte, die mit Min und Max bezeichnet werden.

Dieses graphische Verfahren ist ja nur eine anschauliche Lösungsmethode der grundsätzlichen linearen Optimierungsaufgabe, bei einem bestimmten Niveau des Torsionsmomentes die übrigen Belastungen N, M_y und M_z solange proportional in der positiven und negativen Richtung zu steigern, bis ein Mechanismus eintritt (vgl. Bild 9). Die beiden optima-

len Werte Max und Min entsprechen in der graphischen Lösung der Mechanismus-Methode den Lösungspunkten Min und Max.

In der graphischen Lösung lassen sich jedoch einige Gesetzmässigkeiten des Optimums besser aufzeigen. Im Beispiel des Bildes 18 flossen jeweils zwei benachbarte Längseisen-Stringer nicht, d.h. der Mechanismus öffnete sich um die Verbindungsgerade dieser zwei Stringer. Konzentriert man im Punkt 2 zusätzliche Längseisen zu einem Stringer, so fliesst dieser beim Mechanismus ebenfalls nicht, da die Restriktionsgerade $\dot{e}_2$ ebenfalls durch den Lösungspunkt Min geht.

Ändert man die Querschnittsform leicht ab, indem z.B. der Stringer 2 etwas tiefer als die Verbindungsgerade 1-3 gelegt wird (konkaver Querschnitt), so fällt die Gerade $\dot{e}_2$ aus dem Lösungspunkt Min und der Stringer 2 kommt beim Mechanismus ins Fließen. Legt man aber den Stringer 2 etwas höher als die Verbindungsgerade 1-3, so schneidet die Gerade $\dot{e}_2$ den zulässigen Bereich an, d.h. der Querschnitt öffnet sich bei der vorliegenden Zielfunktion um der Verbindungsgerade der Stringer 1 und 2, während 3 fließen wird.

Allgemein kann deshalb die erste wichtige Folgerung gezogen werden, dass sich ein Mechanismus immer um die Verbindungsgerade zweier Längseisen-Stringer öffnet, sofern diese Gerade den Querschnitt nicht schneidet. Diese Einschränkung gilt für konkave Querschnitte. Diesen beiden Stringern, die beim Mechanismus nicht ins Fließen kommen, entsprechen die beiden Variablen y_{L1} und y_{L3} des Tableaus 31(c), also die beiden Variablen, die bei der Lösung nach der statischen Methode in der Basis verbleiben (vgl. 3.3.4).

Liegen mehr als 2 Stringer auf der geraden Drehachse des Mechanismus, so kommen diese ebenfalls nicht zum Fließen,

da sich die entsprechenden Restriktionsgeraden $\hat{e}_i$ im Lösungspunkt schneiden müssen. Dreht man nämlich das beliebige Axenkreuz y, z so, dass diese Drehachse parallel zur y -Achse wird, so besitzen alle Punkte auf dieser Geraden den gleichen z -Wert. Anhand der Gl. (113) ist abzulesen, dass in diesem Falle alle zu Stringern auf der Drehachse gehörenden Restriktionsgeraden den gleichen Abschnitt auf der $\hat{u}_{M_y}$ -Achse aufweisen, sich also dort schneiden. Lediglich die Steigung der Geraden wird verschieden, da die y_i verschiedene Werte annehmen, wobei die Steigungen für die Stringer mit grösstem und kleinstem y -Wert extrem werden. Dies bedeutet, dass der zulässige Bereich immer durch die zu Eck-Stringern der Querschnitte gehörenden Restriktionsgeraden begrenzt wird.

Da die durch die Bügel bedingten Restriktionen der Gl. (113) y_k - und z_k -Werte aufweisen, die stets auf der Verbindungsgeraden der zwei benachbarten Längseisen-Stringer liegen, ergibt sich aus den obigen Ausführungen die zweite wichtige Folgerung, dass die Bügel aller Seiten beim Mechanismus fliessen müssen, denn die Bügel-Restriktionen werden für die Begrenzung des zulässigen Bereiches nie massgebend. Wohl geht die Restriktionsgerade der auf der Drehachse liegenden Bügel durch den Lösungspunkt. Dies bedeutet jedoch nur, dass der eine Anteil der Bügeldehngeschwindigkeit gemäss Gl. (107) zu null wird, währenddem der Anteil gemäss Gl. (106) nicht verschwindet (siehe auch 3.5.1). Deshalb könnte sogar auf das Zeichnen der Bügel-Restriktionen verzichtet werden.

Mit diesen Unterlagen ist man nun bereit, für einen allgemeinen Querschnitt mit beliebiger Längs- und Bügelarmierung mit Hilfe des Diagramms die zu einem bestimmten Niveau des Torsionsmomentes gehörenden beiden Traglastfaktoren ω für proportionale Steigerung der N , M_y und M_z zu

bestimmen. Ebenso wichtig sind jedoch die in diesem Abschnitt gewonnenen beiden qualitativen Aussagen, dass einerseits die Drehachse des Mechanismus mit der Verbindungsgeraden zweier Längseisen-Stringer zusammenfallen muss, sofern diese den Querschnitt nicht schneidet, und dass andererseits die Bügel aller Seiten beim Mechanismus ins Fließen kommen. Von diesen wichtigen Folgerungen, die natürlich auch für den Spezialfall reiner Torsion gelten, wird im folgenden stets Gebrauch gemacht. Vorgängig wird jedoch der in den Abschnitten 3.1 bis 3.5 hergeleitete Lösungsweg zusammengefasst und an einem Zahlenbeispiel erläutert.

3.6 Zusammenfassung des Lösungsweges

3.6.1 Vorgehen und Ergebnisse

Das dieser Theorie zugrunde liegende Bruchmodell der Länge $\Delta x=1$ ist in Bild 20(a) dargestellt. Die Variablen sind die Stringerkräfte Z_i , die Bügelkräfte B_k , die Betondruckdiagonalenkräfte D_k und die Winkel α_k . Als Beanspruchungen des Modells sind neben dem Torsionsmoment T die beiden Biegemomente M_y und M_z , sowie die Normalkraft N zugelassen. Die Verformungen lassen sich aus den Verdrehungen ϑ , φ_y , φ_z und den Verschiebungen u , v , w zusammensetzen. Der Ursprung des Koordinatensystems x , y , z braucht nicht mit dem Schwerpunkt zusammenzufallen, er ist lediglich der Angriffspunkt der Schnittkräfte resp. der Verformungen im Querschnitt.

Mit den 6 Gleichgewichtsbedingungen (88) und den Plastizitätsbedingungen (90) kann das nichtlineare Programm des Bildes 13 aufgestellt werden. Gesucht wird der Maximalwert des Traglastfaktors ω bei proportionaler Laststeigerung

von N , T , M_y und M_z . Dieser Wert liegt nach dem statischen Grenzwertsatz nicht höher als die Traglast (siehe 1.5).

Mit den kinematischen Bedingungen (98) und den Leistungsbedingungen (104) und (105) entsteht das nicht lineare Programm des Bildes 15. Gesucht wird der Minimalwert des Traglastfaktors ω bei proportionaler Laststeigerung der N , T , M_y und M_z . Dieser Wert liegt nach dem kinematischen Grenzwertsatz nicht tiefer als die Traglast (siehe 1.5).

Die nichtlinearen Tableaux 13 resp. 15 können durch eine Umformung in die linearen Programme der Bilder 14 resp. 16 übergeführt werden. Diese Umformung besteht darin, dass das Torsionsmoment resp. die Torsionsverdrehungsgeschwindigkeit aufgebracht und dann konstant gehalten wird. Das Optimum wird dann für eine proportionale Steigerung der N , M_y und M_z resp. der $\dot{u}$, $\dot{\phi}_y$ und $\dot{\phi}_z$ gesucht. Diese linearen Programme wurden mit dem Simplex-Verfahren (siehe z.B. [7], [8], [9]) allgemein gelöst. Infolge der Tatsache, dass die beiden Programme 14 und 16 zueinander dual sind, gilt nach dem Dualitätstheorem linearer Programme [9], dass das Optimum denselben Wert annehmen muss. Das Optimum stellt deshalb den exakten Wert der Traglast dar.

Am anschaulichsten können die Programme mit der graphischen Lösung der Mechanismus-Methode interpretiert werden, die möglich ist, weil das Zwischentableau des Bildes 17 nur noch von 2 Variablen abhängt. Da auf einem gewissen Niveau der Torsionsverdrehungsgeschwindigkeit der Strahl der proportional gesteigerten Verformungsgeschwindigkeiten $\dot{u}$, $\dot{\phi}_y$ und $\dot{\phi}_z$ in zwei Richtungen wachsen kann, muss nach zwei Optimalwerten gesucht werden, den beiden Durchstoßpunkten dieses Strahls durch die Interaktionsfläche. Im Beispiel des Bildes 18 ist ersichtlich, dass diese beiden Punkte Min und Max im gleichen Diagramm erhalten werden. Lediglich

der zulässige Bereich der Restriktionen hat sich geändert. Durch Einsetzen der beiden Lösungspunkte in die Beziehungen des Tableaus Bild 17 werden alle zur Lösung des Programms notwendigen Informationen geliefert.

Das interessanteste Ergebnis der graphischen Lösungsmethode sind jedoch die beiden allgemein gültigen Folgerungen, die für das weitere Vorgehen entscheidend sind:

- a) Ein Mechanismus öffnet sich immer um die Verbindungsgerade zweier Längseisen-Stringer, sofern diese Gerade den Querschnitt nicht schneidet.
- b) Beim Mechanismus fließen die Bügel auf allen Querschnittsseiten.

Der Satz a) ist durch Bild 20(b) verdeutlicht. Insbesondere gilt er auch für konkave Querschnittsformen. Zusammen mit Satz b) sagt er aus, dass beim Mechanismus alle Bügel und alle Längseisen ihre Fließgrenze erreichen müssen, mit Ausnahme der zwei Längseisen-Stringer auf der Drehachse. Dies wird auch die Grundlage einer analytischen Lösung sein, die unter 3.6.3 entwickelt wird. Zuerst soll jedoch in 3.6.2 der graphische Lösungsweg zusammengefasst werden.

3.6.2 Graphischer Lösungsweg

Gegeben sei eine bestimmte Querschnittsform mit einer Längs- und Bügelbewehrung. Gesucht wird der Bruchwiderstand dieses Querschnitts bei konstant gehaltenem Torsionsmoment T und proportionaler Laststeigerung der Momente M_y und M_z , sowie der Normalkraft N .

Zunächst legt man ein Koordinatensystem x, y, z in den Querschnitt, und zwar so, dass sein Ursprung mit dem An-

griffspunkt der Schnittkräfte zusammenfällt. Damit sind die Koordinaten y_i, z_i der Längseisen-Stringer und y_k, z_k der Bügel (Seitenmitten) festgelegt.

Mit Hilfe des Tableaus 17(a) entstanden die Restriktionsgleichungen (113). Aufgrund der Folgerung b) vorigen Abschnitts können die zu den Bügeln gehörigen Restriktionen (Index k) gerade weggelassen werden. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem $\dot{u}_y, \dot{\phi}_z M_y$ zeichnet man nun die zu den Längseisen-Stringern gehörigen Restriktionsgeraden:

$$\dot{u}_y = \frac{y_i + \rho z_i}{1 - \eta z_i} \cdot \dot{\phi}_z M_y - \frac{z_i}{1 - \eta z_i} \quad (i = 1 \text{ bis } m) \quad (123)$$

Darin bedeuten

$$\rho = M_z / M_y \quad \eta = N / M_y \quad (124)$$

und y_i, z_i die Koordinaten der Längseisen-Stringer im oben erwähnten System x, y, z . Die zulässige Halbebene der Restriktionen beim Minimumproblem enthält dann den Nullpunkt des $\dot{u}_y, \dot{\phi}_z M_y$ - Systems, wenn der dazugehörige z_i -Wert positiv ist (siehe Gl. (112)). Auf diese Weise ergibt sich ein geradlinig begrenzter zulässiger Bereich für das Minimumproblem.

Infolge des konstant gehaltenen Torsionsmomentes erhält man auf einem bestimmten Niveau noch einen zweiten Durchstoßpunkt des Belastungsstrahls durch die Interaktionsfläche, den Maximalwert. Aus Bild 17(b) ist ersichtlich, dass sich die zulässigen Bereiche der Restriktionsgeraden beim Maximumproblem gerade umkehren. Ebenfalls ist ersichtlich, dass die Zielfunktion ω im $\dot{u}_y, \dot{\phi}_z M_y$ - System dieselbe Steigung hat. Man kann sich deshalb für das Maximumproblem das Diagramm um 180° gedreht vorstellen, so dass die

negativen Axen zu den positiven werden.

Die Steigung der Zielfunktion ist gegeben durch die Beziehung (116) und beträgt:

$$\frac{\dot{u}_y}{\dot{\varphi}_z M_y} = - \frac{c_3 - \rho c_2}{c_1 - \eta c_2} \quad (125)$$

In den Konstanten

$$\begin{aligned} c_1 &= \sum_{i=1}^m Z_{fi} - S^2 \sum_{k=1}^n \frac{a_k s_k}{B_{fk}} \\ c_2 &= \sum_{i=1}^m Z_{fi} \cdot z_i - S^2 \sum_{k=1}^n \frac{a_k s_k}{B_{fk}} \cdot z_k \\ c_3 &= - \sum_{i=1}^m Z_{fi} \cdot y_i + S^2 \sum_{k=1}^n \frac{a_k s_k}{B_{fk}} \cdot y_k \end{aligned} \quad (126)$$

bedeuten Z_{fi} resp. B_{fk} die Fließkräfte der Stringer resp. eines Bügels, a_k die Seitenlänge, s_k der Bügelabstand einer Wand, z_i , y_i resp. z_k , y_k die Koordinaten der Längseisen-Stringer resp. Bügel (Seitenmitten) im x, y, z-Koordinatensystem des Querschnitts. Der Schubfluss S bestimmt sich aus dem konstant angenommenen Torsionsmoment nach Gl. (94) zu:

$$S = \frac{T}{2F_0} \quad (127)$$

Das kürzeste Lot zwischen Zielfunktion und den beiden zulässigen Bereichen (siehe Bild 18) ergibt die Lösungspunkte Min und Max, sowie die dazugehörigen Werte $\dot{u}_y(\text{Min})$, $\dot{\varphi}_z M_y(\text{Min})$ und $\dot{u}_y(\text{Max})$, $\dot{\varphi}_z M_y(\text{Max})$. Es ist daran zu denken, dass man $\dot{u}_y(\text{Max})$ usw. im um 180° gedrehten System abliest. Das minimale und das maximale Moment, dem der Bruchwiderstand des Querschnitts bei proportionaler Laststeigerung von N , M_y und M_z in positiver und negativer Richtung, bei konstant gehaltenem Torsionsmoment T entspricht, ergibt

sich anhand der Gl. (117) und (120) zu:

$$\omega_{M_y}(\text{Min}) = c_2 + (c_1 - \eta c_2) \dot{u}_{M_y}(\text{Min}) + (c_3 - \rho c_2) \dot{\phi}_z M_y(\text{Min}) \quad (128)$$

$$\omega_{M_y}(\text{Max}) = c_2 + (c_1 - \eta c_2) [-\dot{u}_{M_y}(\text{Max})] + (c_3 - \rho c_2) [-\dot{\phi}_z M_y(\text{Max})]$$

Anhand der Gl. (118), (119), (121) und (122) können die dazugehörigen Verformungsgeschwindigkeiten ermittelt werden. Diejenigen Längseisen-Stringer, deren Restriktionsgeraden sich im Lösungspunkt Min oder Max treffen, erreichen beim Mechanismus ihre Fließspannung nicht. Der Mechanismus wird sich um die Verbindungsgerade dieser beiden Längseisen-Stringer öffnen.

Wie im 5. Kapitel gezeigt werden wird, benötigt man zur Abgrenzung des Gültigkeitsbereiches dieser Theorie u.a. auch den sich einstellenden Neigungswinkel α der Druckdiagonalen und die Grösse der Betondruckkraft. Aus Gl. (92) wird für jede Wand k:

$$\text{tg} \alpha_k = \frac{B_{fk}}{S s_k} \quad (129)$$

und mit Gl. (71):

$$D_k = \frac{S a_k}{\sin \alpha_k}$$

Als Bezugsmass spielt die zentrische Druckspannung in der Druckstrebe der wirksamen Dicke t eine Rolle. Diese wird zu

$$\sigma_D = \frac{-D_k}{t_k a_k \cos \alpha_k}$$

oder mit D_k nach obiger Formel:

$$\sigma_D = \frac{-S}{t_k \sin \alpha_k \cos \alpha_k} = \frac{-\tau}{\sin \alpha_k \cos \alpha_k} \quad (130)$$

Für den Fall einer 45° -Diagonalen ergibt Gl. (130) den bekannten Wert von $\sigma_D = -2\tau$.

Diese graphische Lösungsmethode hat den Vorteil, dass sie, allerdings für ein konstant gehaltenes Torsionsmoment, direkt zur exakten Lösung der Traglast ωM_y führt. Für ein variables Torsionsmoment muss mit einem neuen S, also mit einer neuen Zielfunktion eine neue Lösung gesucht werden, was diesen Lösungsweg schwerfällig macht. Immerhin eignet er sich sehr gut für die anschauliche Deutung bei Veränderung einzelner Querschnittswerte und zur punktweisen Konstruktion von Interaktionskurven.

3.6.3 Analytischer Lösungsweg

Es ist ohne weiteres möglich, das lineare Programm des Bildes 14 numerisch zu lösen, doch ist dieser Weg für die gestellte Aufgabe zu aufwendig. Gesucht wird der Bruchwiderstand eines bewehrten Querschnitts, im allgemeinen bei proportionaler Laststeigerung der Momente M_y und M_z , des Torsionsmoments T und der Normalkraft N. Wiederum legt man ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, z so in den Querschnitt, dass der Ursprung mit dem Angriffspunkt der Schnittkräfte zusammenfällt.

Es wird nun von den am Ende des Abschnitts 3.6.1 zusammengestellten Folgerungen a) und b) Gebrauch gemacht. Man schätzt eine wahrscheinliche Drehachse und bestimmt das dazugehörige Moment bei proportionaler Laststeigerung unter der bewiesenen Voraussetzung, dass alle Bügel und alle nicht auf der Drehachse liegenden Längseisen-Stringers ihre

Fliessspannung erreichen. Mit den Gleichgewichtsbedingungen werden der Bruchwiderstand sowie die unbekannten Stringerkräfte auf der Drehachse ermittelt. Sind diese kleiner als die Fließkräfte, so ist die Plastizitätsbedingung erfüllt und der exakte Wert des Bruchwiderstandes ist gefunden.

Die vier wesentlichen Gleichgewichtsbedingungen (72), (75), (76) und (77) sind hier nochmals zusammengestellt:

$$\omega N = \eta \omega M_y = \sum_1^m Z_i - S^2 \sum_2^n \frac{a_k s_k}{B_k} \quad (131)$$

$$\omega M_y = \sum_1^m Z_i \cdot z_i - S^2 \sum_2^n \frac{a_k s_k}{B_k} \cdot z_k \quad (132)$$

$$\omega M_z = \rho \omega M_y = - \sum_1^m Z_i \cdot y_i + S^2 \sum_2^n \frac{a_k s_k}{B_k} \cdot y_k \quad (133)$$

$$\omega T = \kappa \omega M_y = 2 F_0 S \quad (134)$$

Darin wurde $\text{tg} \alpha_k$ mit Hilfe der Gl. (78) bereits ersetzt. Für den Bruchwiderstand können für die B_k die Fließkräfte B_{fk} eingesetzt werden. Von den Stringerkräften Z_i nehmen alle bis auf die zwei auf der geschätzten Drehachse liegenden Z_1 und Z_3 die Fließkraft Z_{fi} an. In Gl. (131) schreibt sich also:

$$\sum_1^m Z_i = Z_1 + Z_3 + \sum_5^m Z_{fi} = \sum_1^m Z_{fi} - \sum_1^3 \Delta Z_i$$

Analog können die Gl. (132) und (133) umgeformt werden. Mit den Abkürzungen c_1 , c_2 und c_3 nach Gl. (126) schreiben sich die vier Gleichgewichtsbeziehungen wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \eta \omega M_y &= c_1(S) - \sum_{i=1}^3 \Delta Z_i \\
 \omega M_y &= c_2(S) - \sum_{i=1}^3 \Delta Z_i \cdot z_i \\
 \rho \omega M_y &= c_3(S) + \sum_{i=1}^3 \Delta Z_i \cdot y_i \\
 \kappa \omega M_y &= 2 F_0 S
 \end{aligned} \tag{135}$$

Für gegebene Belastungsverhältnisse

$$\rho = M_z/M_y \quad \eta = N/M_y \quad \kappa = T/M_y \tag{136}$$

können die vier Unbekannten ωM_y , S , ΔZ_1 und ΔZ_3 aus den vier Gleichungen (135) berechnet werden.

Die Kontrolle der Plastizitätsbedingungen ist sehr einfach. Da die ΔZ_1 und ΔZ_3 die Differenz zwischen Fließkraft und effektiver Kraft in den Stringern 1 und 3 auf der Drehachse darstellen, lautet die Plastizitätsbedingung:

$$\Delta Z_i \geq 0 \quad (i = 1, 3) \tag{137}$$

Wird diese Bedingung verletzt, so ist eine obere Schranke des Bruchwiderstandes gefunden. Die Berechnung muss mit einer neu angenommenen Drehachse wiederholt werden, bis Gl. (137) erfüllt ist.

Der sich beim Mechanismus einstellende Winkel α der Druckdiagonalen sowie die in diesen Betondruckstreben vorhandene Spannung sind schliesslich nach den Gl. (129) und (130) zu ermitteln. Diese Werte werden im 5. Kapitel benötigt, um den Gültigkeitsbereich dieser Theorie zu begrenzen.

Dieser analytische Lösungsweg ist sehr rasch, da bei den häufig vorkommenden Belastungsfällen und Querschnitten die Drehachse des Bruch-Mechanismus auf Antrieb richtig geschätzt werden kann. Sollen gewisse Belastungen nicht proportional gesteigert werden, so kann auf der linken Seite der Beziehungen (135) lediglich der konstante Wert eingesetzt werden. Die folgenden Kapitel werden deshalb auf diesem analytischen Lösungsweg aufgebaut sein, wenngleich im folgenden Beispiel nochmals beide Methoden dargestellt werden sollen.

3.7 Beispiel

Als Beispiel soll der Bruchwiderstand des konkaven Querschnitts des Bildes 21(a) bestimmt werden, der durch zwei Biegemomente M_y und M_z , ein Torsionsmoment T und eine Normalkraft N beansprucht ist, die der Einfachheit halber proportional im Verhältnis $\rho=\eta=\kappa=1$ (siehe Gl. (136)) gesteigert werden sollen. Der Angriffspunkt der Schnittkräfte liegt im Ursprung des Axenkreuzes x, y, z .

3.7.1 Idealisierung des Querschnitts

Der Querschnitt des Bildes 21(a) wird zum Rechenquerschnitt des Bildes 21(b) idealisiert. Die Längseisen werden dabei nach Bild 2 und der in (a) gestrichelt eingetragenen Pfeile in die Ecken zu Stringern konzentriert. Die Stringer werden ungerade, die Bügel (Seitenmitten) gerade fortlaufend numeriert. Die Flächen der Stringer und der einzelnen Bügel wurden in Klammern über diese Nummern geschrieben. Mit einer Fließsspannung von $4,6 \text{ t/cm}^2$ ergeben sich die in Tabelle I angegebenen Stringer- und Bügel-Fließkräfte Z_{fi} und B_{fk} . In der selben Tabelle ist die

Berechnung der für beide Lösungswege wichtigen Werte c_1 , c_2 und c_3 zusammengestellt.

3.7.2 Graphischer Lösungsweg

Beim graphischen Lösungsweg muss zunächst ein Wert für S und damit für das Torsionsmoment T angenommen werden. Die Forderung $\kappa = T/M_y = 1$ kann deshalb nur durch sukzessive Approximation befriedigt werden. Mit $\rho = \eta = 1$ werden die Gl. (123) zu:

$$\dot{u}_{M_y} = \frac{y_i + z_i}{1 - z_i} \cdot \dot{\phi}_{z M_y} - \frac{z_i}{1 - z_i} \quad (i = 1 \text{ bis } 9)$$

Diese Restriktionsgeraden wurden in Bild 21(c) in ein $\dot{u}_{M_y}$, $\dot{\phi}_{z M_y}$ -Koordinatensystem eingetragen. Die zulässigen Bereiche für das Minimum- und das Maximum-Problem sind schraffiert.

Die Steigung der Zielfunktion ist gegeben durch Gl. (125):

$$\frac{\dot{u}_{M_y}}{\dot{\phi}_{z M_y}} = - \frac{c_3 - c_2}{c_1 - c_2}$$

Die Werte c_1 , c_2 und c_3 berechnen sich nach den in Tabelle I vorbereiteten Beziehungen. Zuerst muss man sich nun auf ein bestimmtes S festlegen. Wählt man

$$S = 30 \text{ t/m}$$

so werden $c_1 = 140,8$; $c_2 = 24,8$; $c_3 = 28,7$ und die Steigung der Zielfunktion

$$\frac{\dot{u}_{M_y}}{\dot{\phi}_{z M_y}} = - \frac{3,9}{116,0} = - 0,0336$$

Tabelle I : Berechnung der Querschnittskonstanten des Beispiels

Stringer Nr.	Z_{fi} t	$Z_{fi} \cdot z_i$ mt	$Z_{fi} \cdot y_i$ mt	Bügel Nr.	B_{fk} t	$\frac{a_k s_k}{B_{fk}} \frac{m^2}{t}$	$\frac{a_k s_k}{B_{fk}} \cdot z_k \frac{m^3}{t}$	$\frac{a_k s_k}{B_{fk}} \cdot y_k \frac{m^3}{t}$
1	55,1	-27,6	-27,6	2	11,7	$99 \cdot 10^{-4}$	$-34,6 \cdot 10^{-4}$	$-24,8 \cdot 10^{-4}$
3	14,3	-2,9	0	4	7,1	$163 \cdot 10^{-4}$	$-57,0 \cdot 10^{-4}$	$40,7 \cdot 10^{-4}$
5	21,2	-10,6	10,6	6	7,1	$287 \cdot 10^{-4}$	0	$115,0 \cdot 10^{-4}$
7	52,0	26,0	15,6	8	11,7	$103 \cdot 10^{-4}$	$51,5 \cdot 10^{-4}$	0
9	72,6	36,3	-21,8	10	11,7	$174 \cdot 10^{-4}$	0	$-69,6 \cdot 10^{-4}$
$\sum_1^9$	215,2	21,2	-23,2	$\sum_2^{10}$	—	$826 \cdot 10^{-4}$	$-40,1 \cdot 10^{-4}$	$61,3 \cdot 10^{-4}$

$$c_1 = \sum_1^9 Z_{fi} - S^2 \sum_2^{10} \frac{a_k s_k}{B_{fk}} = 215,2 - 826 \cdot 10^{-4} \cdot S^2$$

$$c_2 = \sum_1^9 Z_{fi} \cdot z_i - S^2 \sum_2^{10} \frac{a_k s_k}{B_{fk}} \cdot z_k = 21,2 + 40,1 \cdot 10^{-4} \cdot S^2$$

$$c_3 = -\sum_1^9 Z_{fi} \cdot y_i + S^2 \sum_2^{10} \frac{a_k s_k}{B_{fk}} \cdot y_k = 23,2 + 61,3 \cdot 10^{-4} \cdot S^2$$

Das kürzeste Lot zwischen dieser in Bild 21(c) strichpunkt-
tiert eingetragenen Geraden und den zulässigen Bereichen
ergibt die Lösungspunkte Min und Max mit den dazugehörigen
Verformungsgeschwindigkeiten:

$$\dot{u}_y(\text{Min}) = \frac{1}{3} \quad \dot{\phi}_z^{M_y}(\text{Min}) = 0$$

$$\dot{u}_y(\text{Max}) = \frac{1}{2} \quad \dot{\phi}_z^{M_y}(\text{Max}) = -\frac{5}{4}$$

Damit ergibt sich der Bruchwiderstand für die beiden Lö-
sungspunkte nach den Gl. (128) zu:

$$\omega_{M_y}(\text{Min}) = 24,8 + 116,0 \cdot \frac{1}{3} = 63,5 \text{ mt}$$

$$\omega_{M_y}(\text{Max}) = 24,8 + 116,0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3,9 \cdot \frac{5}{4} = -28,3 \text{ mt}$$

Nach Gl. (127) und mit der von der Verbindungsgeraden der Längseisen-Stringer umschlossenen Fläche $F_0=0,65 \text{ m}^2$ wird $T=2F_0S=1,3 \cdot 30=39 \text{ mt}$. Da $\kappa=T/M_y=39/63,5<1$, ist eine zweite Rechnung mit

$$S = 40 \text{ t/m}$$

notwendig. Mit den Werten $c_1=83,2$; $c_2=27,6$; $c_3=33,0$ wird die neue Steigung der Zielfunktion:

$$\frac{\dot{M}_y}{\phi_z M_y} = - \frac{5,4}{55,6} = - 0,097$$

Dies ergibt nach Bild 21(c) dieselben Lösungspunkte Min und Max. Der neue Bruchwiderstand wird damit zu:

$$\omega M_y(\text{Min}) = 27,6 + 55,6 \cdot \frac{1}{3} = 46,1 \text{ mt}$$

$$\omega M_y(\text{Max}) = 27,6 + 55,6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 5,4 \cdot \frac{5}{4} = 6,6 \text{ mt}$$

Da $T=2F_0S=1,3 \cdot 40=52 \text{ mt}$, ist jetzt $\kappa=T/M_y=52/46,1>1$ und der zu $\kappa=1$ gehörende Bruchwiderstand liegt zwischen 63,5 und 46,1 mt, aber näher bei 46,1 mt. Er lässt sich nun aus der Bedingung $\kappa \omega M_y(\text{Min})=T$ auch explizit bestimmen, doch sieht man, dass diese Verfahren für solche Aufgaben schwerfällig wird.

Für die punktweise Bestimmung des Interaktionsdiagramms hingegen ist diese Methode sehr rasch. In obigem Beispiel wurden für jedes Niveau von S zwei Traglastfaktoren erhalten, die zu zwei verschiedenen Mechanismen gehören und deshalb auf zwei verschiedenen Ästen des Interaktionsdiagramms liegen. Schon aus Bild 21(c) ist ersichtlich, dass im Falle Min die Drehachse durch die Verbindungsgerade 1-5 im Falle Max durch 1-9 gegeben ist. Dies wird auch bestätigt, wenn man mit den Gl. (118) und (121) die dritte Verformungsgeschwindigkeit $\dot{\phi}_y$ bestimmt

$$\dot{\phi}_y M_y(\text{Min}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$-\dot{\phi}_y M_y(\text{Max}) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{5}{4} = \frac{1}{4}$$

und die resultierende Gesamtverformung infolge $\dot{\phi}_y$, $\dot{\phi}_z$ und $\dot{u}$ berechnet.

3.7.3 Analytischer Lösungsweg

Für den analytischen Lösungsweg schätzt man zunächst eine Drehachse, als z.B. die Verbindungsgerade 1-5. Für $\rho=\eta=\kappa=1$ und mit den c-Werten der Tabelle I schreiben sich die Gleichgewichtsbedingungen (135) wie folgt:

$$\omega M_y = 215,2 - 826 \cdot 10^{-4} S^2 - \Delta Z_1 - \Delta Z_5$$

$$\omega M_y = 21,2 + 40,1 \cdot 10^{-4} S^2 - \Delta Z_1 \cdot z_1 - \Delta Z_5 \cdot z_5$$

$$\omega M_y = 23,2 + 61,3 \cdot 10^{-4} S^2 + \Delta Z_1 \cdot y_1 + \Delta Z_5 \cdot y_5$$

$$\omega M_y = 2 F_0 S$$

Durch Addition und Subtraktion der 2. und 3. Zeile wird:

$$2\omega M_y = 44,4 + 101,4 \cdot 10^{-4} S^2 + \Delta Z_1(-0,5+0,5) + \Delta Z_5(0,5+0,5)$$

$$0 = 2,0 + 21,2 \cdot 10^{-4} S^2 + \Delta Z_1(-0,5-0,5) + \Delta Z_5(0,5-0,5)$$

Zusammen mit der 4. Zeile wird

$$\Delta Z_5 = 4 F_0 S - 44,4 - 101,4 \cdot 10^{-4} S^2$$

$$\Delta Z_1 = 2,0 + 21,2 \cdot 10^{-4} S^2$$

Eingesetzt in die erste der vier Beziehungen wird mit $F_0 = 0,65 \text{ m}^2$:

$$1,3 S = 215,2 - 826 \cdot 10^{-4} S^2 - 2,0 - 21,2 \cdot 10^{-4} S^2 - 2,6 S \\ + 44,4 + 101,4 \cdot 10^{-4} S^2$$

oder

$$745,8 \cdot 10^{-4} S^2 + 3,9 S - 257,6 = 0$$

Daraus errechnet sich S zu:

$$S = \frac{-3,9 + \sqrt{15,2 + 4 \cdot 745,8 \cdot 10^{-4} \cdot 257,6}}{2 \cdot 745,8 \cdot 10^{-4}} = 38,2 \text{ t/m}$$

Damit ergibt sich der Bruchwiderstand für $\rho = \eta = \kappa = 1$ zu:

$$\omega M_y = 2 F_0 S = 1,3 \cdot 38,2 = 49,6 \text{ mt}$$

Für die Plastizitätskontrolle nach Gl. (137) benötigt man ΔZ_1 und ΔZ_5 nach den oben vorbereiteten Beziehungen mit $S^2 = 1460$:

$$\Delta Z_5 = 99,2 - 44,4 - 14,8 = 40 \text{ t} > 0$$

$$\Delta Z_1 = 2,0 + 3,1 = 5,1 \text{ t} > 0$$

Da beide $\Delta Z > 0$ sind die Plastizitätsbedingungen erfüllt. Der endgültige Bruchwiderstand dieses Modells ist gefunden. Der Mechanismus öffnet sich um die Drehachse 1-5.

Nach Gl. (129) wird der Winkel der Druckdiagonalen zu:

$$\text{tg} \alpha = \frac{7,1}{38,2 \cdot 0,2} = 0,93 \text{ für die Seiten 4 und 6}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{11,7}{38,2 \cdot 0,2} = 1,53 \text{ für die Seiten 2, 8 und 10}$$

Die Spannung in den Druckdiagonalen wird nach Gl. (130) zu:

$$\sigma_D = \frac{-\tau}{0,68 \cdot 0,73} = -2,01 \cdot \tau \text{ für die Seiten 4 und 6}$$

$$\sigma_D = \frac{-\tau}{0,84 \cdot 0,54} = -2,20 \cdot \tau \text{ für die Seiten 2, 8 und 10}$$

Da $\tau = S/t$, ist für eine wirksame Wandstärke t die Grösse dieser Druckspannung bestimmt. Auf evtl. Begrenzungen von τ und $\operatorname{tg} \alpha$ wird im 5. Kapitel näher eingegangen.

Mit diesem einfachen analytischen Lösungsweg kann der Bruchwiderstand eines allgemeinen Querschnitts für Belastungskombinationen M_y , M_z , T und N bestimmt werden. Schätzt man die Drehachse des Mechanismus beim ersten Mal falsch, so ist eine zweite Berechnung rasch durchgeführt, da sich die Grundwerte der Tabelle I nicht ändern.

4. INTERAKTION TORSION-BIEGUNG-NORMALKRAFT

Mit dem graphischen oder analytischen Lösungsweg des 3. Kapitels ist man in der Lage, den Bruchwiderstand dieses Modells für eine beliebige Kombination von M_y , M_z , T und N zu bestimmen. Einen anschaulichen Ueberblick über die Zusammenhänge dieser Beanspruchungsarten liefern die sog. Interaktionsflächen. Besonders übersichtlich sind die Interaktionskurven von je zwei Beanspruchungsarten, weshalb im folgenden die Interaktionsdiagramme zwischen Torsion und Biegung einerseits und zwischen Torsion und Normalkraft andererseits getrennt betrachtet werden.

Man benötigt dazu die Folgerungen a) und b) des Abschnitts 3.6.1, die im Prinzip aussagen, dass sich der Bruchmechanismus um die Verbindungsgerade jener zweier Längseisen-Stringer öffnet, die nicht ins Fließen kommen. Bestimmt man nun zu jeder möglichen Drehachse eines bestimmten Querschnitts die dazugehörige Interaktionskurve, so begrenzen alle diese Kurven das eigentliche Interaktionsdiagramm. Als Grundlage für die folgenden Berechnungen werden lediglich die im Abschnitt 3.6.3 zusammengestellten Gleichgewichtsbeziehungen (131) bis (134) benötigt.

4.1 Interaktion Torsion-Biegung

In Bild 22(a) ist ein allgemeiner Querschnitt, der durch ein Torsions- und ein Biegemoment beansprucht wird, dargestellt. Es werde festgelegt, dass der Biegemomentenvektor immer mit der y -Achse des beliebigen Querschnittskoordinatensystems zusammenfallen soll. Die möglichen Drehachsen j - j sind mit 1-1 bis 5-5 numeriert.

Vorgängig der Berechnung der zu einer bestimmten Drehachse gehörenden Interaktion wird folgende Umformung vorgenommen. Man dreht den Querschnitt im Gegenuhrzeigersinn so, dass die Drehachse j - j parallel zur y -Axe wird und verschiebt ihn so, dass diese Drehachse mit der y -Axe zusammenfällt und alle z -Koordinaten positive Werte annehmen. Anders ausgedrückt: Man legt für jede Drehachse j - j ein neues Rechtsschrauben-Koordinatensystem x_j, y_j, z_j so in den Querschnitt, dass die Drehachse mit der y_j -Axe zusammenfällt und der gesamte Querschnitt in den positiven z_j -Bereich zu liegen kommt. Der im Gegenuhrzeigersinn gemessene Winkel zwischen der y_j -Axe und der y -Axe wird mit δ_j bezeichnet.

In Bild 22(b) ist diese Umformung für die Drehachse $j=1$ gezeigt. Da die Momentenvektoren ihren Betrag bei einer Translation und Rotation nicht ändern, können sie z.B. auch in den Ursprung des y_j, z_j -Systems gebracht werden. Um die vorbereiteten Gleichgewichtsbeziehungen übernehmen zu können, wird das Biegemoment M in zwei axenparallele Komponenten M_{y_j} und M_{z_j} zerlegt. Der Sinn dieser Umformung liegt darin, dass auf diese Weise die Interaktionsbeziehung aus einer einzigen Gleichgewichtsbeziehung direkt erhalten werden kann, nämlich aus der Momentenbedingung um die y_j -Axe, da die beiden Unbekannten, die Stringerkräfte auf der Drehachse j - j , den Hebelarm $z_j=0$ besitzen.

Da die Interaktionskurven mit Vorteil auf die reinen Bruchmomente bezogen werden, sollen zunächst mit dem gleichen Verfahren das reine Torsionsbruchmoment T_{u0} und das reine Biegebruchmoment M_{u0} bestimmt werden. Für reine Torsionsbeanspruchung lauten die Beziehungen (131) bis (134) wie folgt:

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_1^m Z_i - S^2 \sum_2^n \frac{a_k s_k}{B_k} \\
 0 &= \sum_1^m Z_i \cdot z_i - S^2 \sum_2^n \frac{a_k s_k}{B_k} \cdot z_k \\
 0 &= - \sum_1^m Z_i \cdot y_i + S^2 \sum_2^n \frac{a_k s_k}{B_k} \cdot y_k \\
 T_{u0} &= 2 F_0 S
 \end{aligned} \tag{138}$$

Mit einem neuen Koordinatensystem y_j, z_j , dessen y_j -Axe mit der geschätzten Drehachse für reine Torsion zusammenfällt, lässt sich unter Einsetzung der Fließkräfte $B_k = B_{fk}$ und $Z_i = Z_{fi}$ (die unbekannten Z_i haben den Hebelarm 0) aus der zweiten Beziehung (138) die Unbekannte S^2 direkt bestimmen:

$$S^2 = \frac{\sum_1^m Z_{fi} \cdot z_{ij}}{\sum_2^n \frac{a_k s_k}{B_{fk}} \cdot z_{kj}}$$

Mit Hilfe der vierten Beziehung (138) bestimmt sich daraus das Quadrat des reinen Torsionsbruchmomentes zu:

$$T_{u0}^2 = 4F_0^2 \frac{\sum_1^m Z_{fi} \cdot z_{iT}}{\sum_2^n \frac{a_k s_k}{B_{fk}} \cdot z_{kT}} \tag{139}$$

Der Zeiger $j=T$ deutet an, dass die Hebelarme z_{iT} und z_{kT} auf die zum reinen Torsionsbruchmechanismus gehörende Drehachse zu beziehen sind. Die erste und die dritte Beziehung (138) dienen zur Bestimmung der beiden unbekannten Stringerkräfte auf der Drehachse und somit zur Kontrolle der Plastizitätsbedingung $Z_i \leq Z_{fi}$.

Für reine Biegebeanspruchung benötigt man die Gleichungen (131) bis (133) mit $T=S=0$ in der Form:

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_1^m Z_i \\
 M_{yj} &= M_{u0} \cdot \cos \delta_j = \sum_1^m Z_i \cdot z_{ij} \\
 M_{zj} &= M_{u0} \cdot \sin \delta_j = - \sum_1^m Z_i \cdot y_{ij}
 \end{aligned} \tag{140}$$

Das reine Biegebruchmoment für die geschätzte Drehachse lässt sich aus der zweiten Beziehung (140) mit $Z_i = Z_{fi}$ direkt bestimmen:

$$M_{u0} = \frac{\sum_1^m Z_{fi} \cdot z_{iM}}{\cos \delta_M} \tag{141}$$

Der Zeiger $j=M$ deutet an, dass die Hebelarme z_{iM} und der Drehwinkel δ_M auf die zum reinen Biegebruchmechanismus gehörende Drehachse zu beziehen sind. Wiederum dienen die erste und dritte Beziehung (140) zur Kontrolle der Plastizitätsbedingungen.

Für den kombinierten Lastfall Torsion und Biegung schreiben sich die Beziehungen (131) bis (134) in der folgenden Weise:

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_1^m Z_i - S^2 \sum_2^n \frac{a_k s_k}{B_k} \\
 M_{yj} &= M_u \cdot \cos \delta_j = \sum_1^m Z_i \cdot z_{ij} - S^2 \sum_2^n \frac{a_k s_k}{B_k} \cdot z_{kj} \\
 M_{zj} &= M_u \cdot \sin \delta_j = - \sum_1^m Z_i \cdot y_{ij} + S^2 \sum_2^n \frac{a_k s_k}{B_k} \cdot y_{kj} \\
 T_u &= 2 F_0 S
 \end{aligned} \tag{142}$$

Setzt man die vierte in die zweite Beziehung ein, so ergibt sich mit $Z_i = Z_{fi}$ und $B_k = B_{fk}$ die Interaktion zwischen T_u und M_u für die Drehachse $j-j$ zu:

$$M_u \cdot \cos \delta_j = \sum_1^m Z_{fi} \cdot z_{ij} - \frac{T_u^2}{4F_0^2} \cdot \sum_2^n \frac{a_k^s k}{B_{fk}} \cdot z_{kj}$$

Bezieht man, wie vorgesehen, die Torsions- und Biegebruchmomente auf die reinen Torsions- und Biegebruchmomente der Gl. (139) und (141), so wird:

$$\frac{M_u}{M_{u0}} \frac{\cos \delta_j}{\cos \delta_M} \cdot \sum_1^m Z_{fi} \cdot z_{iM} = \sum_1^m Z_{fi} \cdot z_{ij} - \frac{T_u^2}{T_{u0}^2} \cdot \sum_2^n \frac{a_k^s k}{B_{fk}} \cdot z_{kj} \cdot \frac{\sum_1^m Z_{fi} \cdot z_{iT}}{\sum_2^n \frac{a_k^s k}{B_{fk}} \cdot z_{kT}}$$

Daraus ergibt sich nach Umordnung die definitive Form der allgemeinen Interaktionsformel:

$$\left(\frac{T_u}{T_{u0}}\right)^2 = \frac{\cos \delta_j}{\cos \delta_M} \frac{\sum_1^m Z_{fi} \cdot z_{iM}}{\sum_1^m Z_{fi} \cdot z_{iT}} \frac{\sum_2^n \frac{a_k^s k}{B_{fk}} \cdot z_{kT}}{\sum_2^n \frac{a_k^s k}{B_{fk}} \cdot z_{kj}} \left[\frac{\cos \delta_M}{\cos \delta_j} \frac{\sum_1^m Z_{fi} \cdot z_{ij}}{\sum_1^m Z_{fi} \cdot z_{iM}} - \left(\frac{M_u}{M_{u0}}\right) \right] \quad (143)$$

Der Zeiger j bedeutet die Numerierung der der Berechnung zugrunde liegenden Drehachse. Für den Fall $\cos \delta_j = 0$, der bei einfachen Querschnittsformen sehr häufig vorkommt, wird aus der Interaktionskurve eine zur M_u/M_{u0} -Axe parallele Gerade.

Für den Fall, dass die Drehachse derjenigen für reine Torsion entspricht ($j=T$), vereinfacht sich Gl. (143) zu:

$$\left(\frac{T_u}{T_{u0}}\right)_{j=T}^2 = 1 - \frac{\cos \delta_T}{\cos \delta_M} \frac{\sum_1^m Z_{fi} \cdot z_{iM}}{\sum_1^m Z_{fi} \cdot z_{iT}} \left(\frac{M_u}{M_{u0}}\right) \quad (144)$$

Für den Fall, dass die Drehachse derjenigen für reine Biegung entspricht ($j=M$), vereinfacht sich Gl. (143) zu:

$$\left(\frac{T_u}{T_{u0}}\right)_{j=M}^2 = \frac{\frac{m}{\sum_{i=1}^m z_{fi} \cdot z_{iT}}}{\frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{a_{k^s k}}{B_{fk}} \cdot z_{kT}}} \left[1 - \left(\frac{M_u}{M_{u0}}\right)\right] \quad (145)$$

Die Interaktionskurven Torsion-Biegung besitzen im allgemeinen die Form des Bildes 9, wie aus obiger Gl. (143) ersichtlich ist. Auch ein Vergleich mit den Beziehungen (58) und (60) des quadratischen Fachwerkmodells zeigt, dass jene Beziehungen den Gl. (144) und (145) entsprechen, wobei sich in Gl. (144) wegen $\cos \delta_M = -1$ das Vorzeichen des 2. Terms umkehrt. Das Vorgehen zur Bestimmung der Interaktion Torsion-Biegung soll am Beispiel des Bildes 21 im Abschnitt 4.3.1 veranschaulicht werden.

4.2 Interaktion Torsion-Normalkraft

In Bild 23(a) ist ein allgemeiner Querschnitt, der durch ein Torsionsmoment T und eine Normalkraft N beansprucht wird, dargestellt. Man geht gleich vor wie im vorhergehenden Abschnitt und legt ein neues Rechtsschrauben-Koordinatensystem x_j, y_j, z_j so in den Querschnitt, dass die betrachtete Drehachse j - j mit der y_j -Achse zusammenfällt und der gesamte Querschnitt im positiven z_j -Bereich liegt. Dies ist in Bild 23(b) für die Drehachse $j=1$ gezeigt. Der Drehwinkel δ_j spielt hier keine Rolle, hingegen entsteht, infolge der Normalkraft, bei einer Verschiebung des Angriffspunktes der Schnittkräfte in den Ursprung des y_j, z_j -Systems neu ein Biegemoment M_{y_j} , dessen Vektor auf der y_j -Achse liegt und dessen Betrag $N \cdot e_j$ wird, wenn mit e_j die z_j -Koordinate des ursprünglichen Angriffspunktes der Normalkraft bezeichnet wird. Ein Moment M_{z_j} tritt nicht auf, da an die Lage der z_j -Achse die Forderung gestellt werden kann, dass sie durch den ursprünglichen Angriffspunkt der

Normalkraft gehen soll.

Wiederum werden zuerst die Widerstände gegen reine Torsion und reine Normalkraft ermittelt. Für reine Torsion kann die Beziehung (139) des vorigen Abschnitts übernommen werden. Für die Plastizitätskontrollen stehen die erste und dritte Beziehung (138) zur Verfügung.

Für reine Normalzugkraft schreiben sich die Beziehungen (131) bis (133) mit $T=S=0$ wie folgt:

$$\begin{aligned} N_{u0} &= \sum_1^m Z_i \\ M_{yj} &= N_{u0} \cdot e_j = \sum_1^m Z_i \cdot z_{ij} \\ 0 &= \sum_1^m Z_i \cdot y_{ij} \end{aligned} \quad (146)$$

Die reine Zugbruchkraft N_{u0} lässt sich aus der zweiten Beziehung (146) mit $Z_i = Z_{fi}$ direkt bestimmen:

$$N_{u0} = \frac{\sum_1^m Z_{fi} \cdot z_{iN}}{e_N} \quad (147)$$

Der Zeiger N deutet an, dass die Hebelarme z_{iN} und die Exzentrizität e_N auf die zum reinen Zugbruchmechanismus gehörende Drehachse zu beziehen sind. Zur Kontrolle der Plastizitätsbedingungen stehen die erste und dritte Beziehung (146) zur Verfügung.

Für den kombinierten Lastfall Torsion und Normalkraft schreiben sich die Beziehungen (131) bis (134) in der folgenden Weise:

$$\begin{aligned}
 N_u &= \sum_1^m Z_i - S^2 \sum_2^n \frac{a_k s_k}{B_k} \\
 M_{yj} &= N_u \cdot e_j = \sum_1^m Z_i \cdot z_{ij} - S^2 \sum_2^n \frac{a_k s_k}{B_k} \cdot z_{kj} \\
 0 &= - \sum_1^m Z_i \cdot y_{ij} + S^2 \sum_2^n \frac{a_k s_k}{B_k} \cdot y_{kj} \\
 T_u &= 2 F_0 S
 \end{aligned} \tag{148}$$

Setzt man die vierte in die zweite Beziehung ein, so ergibt sich mit $Z_i = Z_{fi}$ und $B_k = B_{fk}$ die Interaktion zwischen T_u und N_u für die Drehachse j-j zu:

$$N_u \cdot e_j = \sum_1^m Z_{fi} \cdot z_{ij} - \frac{T_u^2}{4F_0^2} \sum_2^n \frac{a_k s_k}{B_{fk}} \cdot z_{kj}$$

Ein Vergleich mit der entsprechenden Beziehung für Torsion und Biegung und zwischen Gl. (147) und (141) zeigt, dass die eine Beziehung in die andere übergeführt werden kann, wenn M_u durch N_u und $\cos \delta_j$ durch e_j ersetzt werden. Die definitive Form der allgemeinen Interaktionsformel lautet demnach in Analogie zu Gl. (143):

$$\left(\frac{T_u}{T_{u0}} \right)^2 = \frac{e_j}{e_N} \frac{\sum_1^m Z_{fi} \cdot z_{iN}}{\sum_1^m Z_{fi} \cdot z_{iT}} \frac{\sum_2^n \frac{a_k s_k}{B_{fk}} \cdot z_{kT}}{\sum_2^n \frac{a_k s_k}{B_{fk}} \cdot z_{kj}} \left[\frac{e_N}{e_j} \frac{\sum_1^m Z_{fi} \cdot z_{ij}}{\sum_1^m Z_{fi} \cdot z_{iN}} - \left(\frac{N_u}{N_{u0}} \right) \right] \tag{149}$$

Der Zeiger j bedeutet die Numerierung der der Berechnung zugrunde liegenden Drehachse.

Analog zu Gl. (144) vereinfacht sich Gl. (149) für den Fall, dass die Drehachse derjenigen für reine Torsion ($j=T$) entspricht zu:

$$\left(\frac{T_u}{T_{u0}}\right)_{j=T}^2 = 1 - \frac{e_T}{e_N} \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Z_{fi} \cdot z_{iN}}{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Z_{fi} \cdot z_{iT}} \left(\frac{N_u}{N_{u0}}\right) \quad (150)$$

Für den Fall, dass die Drehachse derjenigen für reine Normalzugkraft entspricht ($j=N$), vereinfacht sich Gl. (149) analog zu Gl. (145):

$$\left(\frac{T_u}{T_{u0}}\right)_{j=N}^2 = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Z_{fi} \cdot z_{iN}}{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Z_{fi} \cdot z_{iT}} \frac{\frac{n}{2} \frac{a_k s_k}{B_{fk}} \cdot z_{kT}}{\frac{n}{2} \frac{a_k s_k}{B_{fk}} \cdot z_{kN}} \left[1 - \left(\frac{N_u}{N_{u0}}\right)\right] \quad (151)$$

Die Interaktionskurven Torsion-Normalkraft besitzen im allgemeinen die Form des Bildes 9, wobei jedoch nur die sich nach links öffnenden Kurven der Gl. (60) auftreten, da e_j , im Gegensatz zu $\cos \delta_j$, stets das gleiche Vorzeichen besitzt. Die linke Begrenzung des Interaktionsdiagramms (im Normaldruckbereich) ist die zu einer anderen Bruchart (Betonzerstörung vor Fließen der Armierung) gehörende Interaktionskurve, auf die im 5. Kapitel noch eingegangen wird. Am Beispiel des Bildes 21 soll im Abschnitt 4.3.2 das Vorgehen zur Bestimmung der Interaktion Torsion-Normalkraft veranschaulicht werden.

4.3 Beispiele von Interaktionsdiagrammen

Als Beispiel wird dasjenige des Kapitels 3.7 verwendet (Bild 21). Die Fließkräfte Z_{fi} und B_{fk} sowie die Ausdrücke $a_k s_k / B_{fk}$ werden der Tabelle I entnommen.

4.3.1 Torsion-Biegung

Der Querschnitt des Bildes 24(a) werde durch ein Torsionsmoment T und ein Biegemoment M beansprucht, dessen Vektor nach unten zeigt. Um die vorbereiteten Beziehungen des Abschnitts 4.1 übernehmen zu können, muss das Koordinatensystem x, y, z so gelegt werden, dass der M -Vektor mit der y -Axe zusammenfällt.

Man wählt nun jede Seite nacheinander als Drehachse und legt jeweiligen neue Koordinatensysteme x_j, y_j, z_j so in den Querschnitt, dass die y_j -Axe mit der Drehachse j - j zusammenfällt, und der gesamte Querschnitt im positiven z_j -Bereich liegt. Der dazu notwendige Drehwinkel wird als δ_j bezeichnet.

Vorgängig sind das reine Torsion- und Biegebruchmoment zu bestimmen. Für reine Torsionsbelastung schätzt man die Drehachse 1-9, da die Ecken 5 und 7 schwächer armiert sind. Mit Hilfe der Tabelle I in 3.7 und Bild 24(a) werden die Ausdrücke

$$F_0 = 0,65 \text{ m}^2 \qquad \cos \delta_T = -0,98$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^9 z_{fi} \cdot z_{iT} &= 14,3 \cdot 0,43 + 21,2 \cdot 0,98 + 52,0 \cdot 0,59 = 57,65 \text{ mt} \\ \sum_{k=2}^{10} \frac{a_k s_k}{B_{fk}} \cdot z_{kT} &= 10^{-4} (99 \cdot 0,22 + 163 \cdot 0,71 + 287 \cdot 0,78 + 103 \cdot 0,29) \\ &= 391,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{t} \end{aligned}$$

und mit Gl. (139) bestimmt sich das Quadrat des reinen Torsionsbruchmomentes zu:

$$T_{u0}^2 = 4 \cdot 0,65^2 \cdot \frac{57,65}{391,5} \cdot 10^4 = 2490 \text{ m}^2 \text{t}^2$$

Die Plastizitätskontrollen mit der ersten und dritten Bezie-

hung (138) ergeben mit $S^2 = T_{u0}^2 / 4F_0^2 = 1475 \text{ t}^2/\text{m}^2$:

$$Z_1 + Z_9 + 87,5 = 1475 \cdot 826 \cdot 10^{-4}$$

$$Z_1 \cdot 1,02 + Z_9 \cdot 0 + 20,0 = 1475 \cdot 381,5 \cdot 10^{-4}$$

und daraus

$$Z_1 = 35,5 \text{ t} < 55,1 \text{ t}$$

$$Z_9 = -1,0 \text{ t} < 72,6 \text{ t}$$

Die Plastizitätsbedingungen sind erfüllt und damit ist die Drehachse 1-9 tatsächlich diejenige für reine Torsionsbeanspruchung.

Für reine Biegebeanspruchung schätzt man die Drehachse 5-7. Mit Hilfe der Tabelle I in 3.7 und Bild 24(a) werden die Ausdrücke

$$\cos \delta_M = 0,98 \qquad \sin \delta_M = -0,196$$

$$\sum_1^9 Z_{fi} \cdot z_{iM} = 55,1 \cdot 0,98 + 14,3 \cdot 0,43 + 72,6 \cdot 0,59 = 103,0 \text{ mt}$$

$$\sum_2^{10} \frac{a_{k^s}}{B_{fk}} \cdot z_{kM} = 10^{-4} (99 \cdot 0,71 + 163 \cdot 0,22 + 103 \cdot 0,29 +$$

$$+ 174 \cdot 0,78) = 271,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{t}$$

und mit Gl. (141) bestimmt sich das reine Biegebruchmoment zu:

$$M_{u0} = \frac{103,0}{0,98} = 105 \text{ mt}$$

Die Plastizitätskontrollen mit der ersten und dritten Be-

ziehung (140) ergeben:

$$Z_5 + Z_7 + 142,0 = 0$$

$$105 \cdot (-0,196) + Z_5 \cdot (-1,02) + Z_7 \cdot 0 - 45,4 = 0$$

und daraus

$$Z_5 = - 64,6 \text{ t} < 21,2 \text{ t}$$

$$Z_7 = - 77,4 \text{ t} < 52,0 \text{ t}$$

Die Plastizitätsbedingungen sind erfüllt und damit ist die Drehachse 5-7 tatsächlich diejenige für reine Biegebeanspruchung.

Jetzt können die zu den vier möglichen Drehachsen gehörenden Interaktionskurven bestimmt werden. Beginnt man mit der Drehachse 1-9, so kann, da dies diejenige für reine Torsionsbeanspruchung ist, mit der vereinfachten Interaktionsbeziehung der Gl. (144) gerechnet werden:

$$\left(\frac{T_u}{T_{u0}}\right)^2 = 1 - \frac{(-0,98)}{0,98} \frac{103,0}{57,65} \left(\frac{M_u}{M_{u0}}\right) = 1 + 1,785 \cdot \left(\frac{M_u}{M_{u0}}\right) \quad (152)$$

Für die Drehachse 5-7, die mit derjenigen für reine Biegung identisch ist, gilt die vereinfachte Beziehung der Gl. (145):

$$\left(\frac{T_u}{T_{u0}}\right)^2 = \frac{103,0}{57,65} \frac{391,5}{271,5} \left[1 - \left(\frac{M_u}{M_{u0}}\right)\right] = 2,57 \cdot \left[1 - \left(\frac{M_u}{M_{u0}}\right)\right] \quad (153)$$

Für die Drehachse 7-9 benötigt man noch die Ausdrücke

$$\cos \delta_j = 0$$

$$\sum_1^9 z_{fi} \cdot z_{ij} = (55,1 + 21,2) \cdot 1,0 + 14,3 \cdot 0,7 = 86,3 \text{ mt}$$

$$\begin{aligned} \sum_2^{10} \frac{a_{k^s k}}{B_{fk}} \cdot z_{kj} &= 10^{-4} [(99 + 163) \cdot 0,85 + (287 + 174) \cdot 0,5] = \\ &= 453,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{t} \end{aligned}$$

Mit der allgemeinen Interaktionsbeziehung (143) wird:

$$\left(\frac{T_u}{T_{u0}}\right)^2 = \frac{86,3}{57,65} \frac{391,5}{453,0} = 1,29 \quad (154)$$

Schliesslich wird für die Drehachse 1-5 mit

$$\cos \delta_j = 0$$

$$\sum_1^9 z_{fi} \cdot z_{ij} = (52,0 + 72,6) \cdot 1,0 + 14,3 \cdot 0,3 = 128,9 \text{ mt}$$

$$\begin{aligned} \sum_2^{10} \frac{a_{k^s k}}{B_{fk}} \cdot z_{kj} &= 10^{-4} [(99 + 163) \cdot 0,15 + (287 + 174) \cdot 0,5 \\ &+ 103 \cdot 1,0] = 372,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{t} \end{aligned}$$

die Interaktionsbeziehung (143) zu:

$$\left(\frac{T_u}{T_{u0}}\right)^2 = \frac{128,9}{57,65} \frac{391,5}{372,8} = 2,34 \quad (155)$$

Die vier Interaktionskurven sind in Bild 24(b) aufgezeichnet. Der massgebende Bereich ist schraffiert. Man erkennt, dass sich über den ganzen Bereich drei verschiedene Drehachsen einstellen werden, während sich die Drehachse 1-5 nie ausbilden wird.

Für weitere mögliche Einschränkungen des Diagramms infolge beschränkter Gültigkeit des Modells wird auf das 5. Kapitel verwiesen. Sucht man das Bruchmoment für ein bestimmtes Verhältnis $\kappa=T/M$ von z.B. 0,5, so bestimmt sich die Steigung der Belastungsgeraden zu:

$$\frac{T}{T_{u0}} / \frac{M}{M_{u0}} = \kappa \cdot \frac{M_{u0}}{T_{u0}} = 0,5 \cdot \frac{105}{2490} = 1,05$$

Im Interaktionsdiagramm des Bildes 24(b) sind die zugehörigen Bruchmomente direkt abzulesen.

4.3.2 Torsion-Normalkraft

Derselbe Querschnitt werde nun durch ein Torsionsmoment T und eine Normalkraft N beansprucht (Bild 25(a)). Es werde wieder das normale Koordinatensystem x, y, z mit nach unten zeigender z -Axe verwendet. Wiederum wählt man nacheinander jede Seite als Drehachse und legt ein entsprechendes Koordinatensystem x_j, y_j, z_j so in den Querschnitt, dass die y_j -Axe mit der Drehachse zusammenfällt und der gesamte Querschnitt im positiven Bereich der z_j -Axe liegt, die ihrerseits durch den ursprünglichen Angriffspunkt der Normalkraft gehen soll. Die Translation der Normalkraft um den Betrag e_j in den Ursprung des x_j, y_j, z_j -Systems erzeugt ein zusätzliches Biegemoment $M_{yj} = N \cdot e_j$.

Vorgängig sind das reine Torsionsbruchmoment und die reine Zugbruchkraft zu bestimmen. Für reine Torsionsbelastung können die Ergebnisse des vorigen Abschnitts übernommen werden (Drehachse 1-9):

$$F_0 = 0,65 \text{ m}^2 \quad e_T = 0,39 \text{ m}$$

$$\sum_1^9 Z_{fi} \cdot z_{iT} = 57,65 \text{ mt}$$

$$\sum_2^{10} \frac{a_{k^s k}}{B_{fk}} \cdot z_{kT} = 391,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{t}$$

$$T_{u0}^2 = 2490 \text{ m}^2 \text{t}^2$$

$$Z_1 = 35,5 \text{ t} < 55,1 \text{ t}$$

$$Z_9 = -1,0 \text{ t} < 72,6 \text{ t}$$

Für reine Normalkraft-Beanspruchung auf Zug schätzt man dieselbe Drehachse 1-9. Man übernimmt deshalb von oben die Ausdrücke

$$e_N = 0,39 \text{ m}$$

$$\sum_1^9 Z_{fi} \cdot z_{iN} = 57,65 \text{ mt}$$

$$\sum_2^{10} \frac{a_{k^s k}}{B_{fk}} \cdot z_{kN} = 391,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{t}$$

und bestimmt mit Gl. (147) die reine Zugbruchkraft zu:

$$N_{u0} = \frac{57,65}{0,39} = 148 \text{ t}$$

Die Plastizitätskontrollen mit der ersten und dritten Beziehung (146) ergeben:

$$Z_1 + Z_9 + 87,5 = 148$$

$$Z_1 \cdot 0,59 + Z_9 \cdot (-0,43) - 17,62 = 0$$

und daraus

$$Z_1 = 42,75 \text{ t} < 55,1 \text{ t}$$

$$Z_9 = 17,7 \text{ t} < 72,6 \text{ t}$$

Die Plastizitätsbedingungen sind erfüllt und damit ist die Drehachse 1-9 tatsächlich diejenige für reine Zugbeanspruchung.

Jetzt können die zu den vier möglichen Drehachsen gehörenden Interaktionskurven bestimmt werden. Beginnt man mit der Drehachse 1-9, so kann, da dies diejenige für reine Torsions- und reine Zugbeanspruchung ist, mit der vereinfachten Gl. (150) gerechnet werden:

$$\left(\frac{T_u}{T_{u0}}\right)^2 = 1 - \left(\frac{N_u}{N_{u0}}\right) \quad (156)$$

Für die Drehachse 5-7 berechnen sich mit Hilfe der Tabelle I in 3.7 und Bild 25(a) die Ausdrücke:

$$e_j = 0,39 \text{ m}$$

$$\sum_1^9 Z_{fi} \cdot z_{ij} = 14,3 \cdot 0,43 + 55,1 \cdot 0,98 + 72,6 \cdot 0,59 = 103,0 \text{ mt}$$

$$\begin{aligned} \sum_2^{10} \frac{a_k s_k}{B_{fk}} \cdot z_{kj} &= 10^{-4} (99 \cdot 0,71 + 163 \cdot 0,22 + 103 \cdot 0,29 + \\ &+ 174 \cdot 0,78) = 271,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{t} \end{aligned}$$

Man erkennt, dass diese Werte auch direkt aus den entsprechenden Berechnungen des vorigen Abschnitts 4.3.1 übernommen werden können. Damit wird mit der allgemeinen Interaktionsbeziehung (149):

$$\begin{aligned} \left(\frac{T_u}{T_{u0}}\right)^2 &= \frac{0,39}{0,39} \frac{57,65}{57,65} \frac{391,5}{271,5} \left[\frac{0,39}{0,39} \frac{103,0}{57,65} - \left(\frac{N_u}{N_{u0}}\right) \right] = \\ &= 1,44 \cdot \left[1,785 - \left(\frac{N_u}{N_{u0}}\right) \right] \end{aligned} \quad (157)$$

Für die Drehachse 7-9 übernimmt man aus Bild 25(a) und Abschnitt 4.3.1:

$$\begin{aligned} e_j &= 0,50 \text{ m} \\ \sum_1^9 Z_{fi} \cdot z_{ij} &= 86,3 \text{ mt} \\ \sum_2^{10} \frac{a_k s_k}{B_{fk}} \cdot z_{kj} &= 453,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{t} \end{aligned}$$

Mit der Beziehung (149) ergibt sich

$$\begin{aligned} \left(\frac{T_u}{T_{u0}}\right)^2 &= \frac{0,50}{0,39} \frac{57,65}{57,65} \frac{391,5}{453,0} \left[\frac{0,39}{0,50} \frac{86,3}{57,65} - \left(\frac{N_u}{N_{u0}}\right) \right] = \\ &= 1,11 \cdot \left[1,17 - \left(\frac{N_u}{N_{u0}}\right) \right] \end{aligned} \quad (158)$$

Schliesslich wird für die Drehachse 1-5 mit

$$\begin{aligned} e_j &= 0,50 \text{ m} \\ \sum_1^9 Z_{fi} \cdot z_{ij} &= 128,9 \text{ mt} \\ \sum_2^{10} \frac{a_k s_k}{B_{fk}} \cdot z_{kj} &= 372,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{t} \end{aligned}$$

die Interaktionsbeziehung (149) zu:

$$\begin{aligned} \left(\frac{T_u}{T_{u0}}\right)^2 &= \frac{0,50}{0,39} \frac{57,65}{57,65} \frac{391,5}{372,8} \left[\frac{0,39}{0,50} \frac{128,9}{57,65} - \left(\frac{N_u}{N_{u0}}\right) \right] = \\ &= 1,35 \cdot \left[1,74 - \left(\frac{N_u}{N_{u0}}\right) \right] \end{aligned} \quad (159)$$

Diese vier Interaktionskurven sind in Bild 25(b) aufgezeichnet. Alle Kurven haben dieselbe Form. Im vorliegenden Beispiel tritt über den ganzen Bereich die Drehachse 1-9 auf. Die Beschränkung des Diagramms nach links (Druckbereich) erfolgt durch Versagen des Betons, auf das in 5.3 noch eingegangen wird.

Da sowohl die Normalkraft, wie auch das Torsionsmoment, alle Längseisen ungefähr gleichmässig auf Zug beanspruchen, ist es verständlich, dass die Drehachsen für beide reinen Beanspruchungsarten sowie für ihre Kombination identisch sind. Infolge des unterschiedlichen Einflusses der Bügel können davon abweichende Fälle konstruiert werden. Setzt man im vorliegenden Beispiel für Z_{fl} anstelle von 55,1 t nur 35,5 t ein, so bleibt die Drehachse 1-9 für reine Torsion, hingegen wird N_{u0} nur zu 133,4 t, mit der Drehachse 7-9. Die Interaktionsbeziehungen werden dann für die Drehachse 1-9 mit Gl. (150):

$$\left(\frac{T_u}{T_{u0}}\right)^2 = 1 - \frac{0,39}{0,50} \frac{66,7}{57,65} \left(\frac{N_u}{N_{u0}}\right) = 1 - 0,9 \cdot \left(\frac{N_u}{N_{u0}}\right) \quad (160)$$

und für die Drehachse 7-9 mit Gl. (151):

$$\left(\frac{T_u}{T_{u0}}\right)^2 = \frac{66,7}{57,65} \frac{391,5}{453,0} \left[1 - \left(\frac{N_u}{N_{u0}}\right)\right] = 1 - \left(\frac{N_u}{N_{u0}}\right) \quad (161)$$

Auch diese beiden Gleichungen sind in Bild 25(b) eingetragen. Es ist ersichtlich, dass für positive N die Drehachse 7-9, für negative N die Achse 1-9 massgebend wird. Die Veränderung des Interaktionsdiagramms ist aber äusserst gering, so dass die grundsätzliche Form des Diagramms, wie in Bild 25(b) schraffiert, allgemeine Gültigkeit hat.

Ein wichtiger Spezialfall einer Normalkraftbeanspruchung ist die Vorspannung. Auf diese wird im Anhang E noch näher eingegangen werden.

5. ANWENDUNGSBEREICH UND GRENZEN DER THEORIE

Das räumliche Fachwerkmodell beruht auf der Annahme, dass sämtliche Armierungseisen auf allen ausser einer Seite vor dem Bruch ihre Fliesskraft erreichen. Dies bedingt auf diesen Seiten auch eine Umlagerung der Kräfte von der Längsarmierung auf die Bügel und umgekehrt, indem sich die Diagonalenneigung so einstellt, wie es die Gleichgewichtsbedingungen in der Querschnittswand verlangen. Solche Brüche wurden in Balkenversuchen für unterarmierte Querschnitte tatsächlich beobachtet und in [2] und [3] als Schiebungsbruch und Stauchungsbruch der Betondruckzone definiert. Die erste Bruchart tritt bei überwiegender Torsions-, die letztere bei überwiegender Biegebeanspruchung auf.

Bei ungenügender Verankerung der Längseisen oder Bügel können Verankerungsbrüche, bei zu weitem Bügelabstand und ungenügender Eck-Längsbewehrung ein Ausbrechen der Druckdiagonalen zwischen zwei Bügeln eintreten. Solche, durch unzureichende Konstruktion bedingten Mängel, sollen im folgenden ausgeschlossen werden. Dagegen ergeben sich für das vorliegende Bruchmodell einige Begrenzungen des Anwendungsbereiches hinsichtlich Querschnittsform, Versagen des Betons, Armierungsverhältnis Längseisen-Bügel (Umlagerungswinkel $\tan \alpha$) und Verkleinerung des inneren Hebelarmes bei grösseren Armierungsgehalten (Längseisen im Druckbereich), die eine nähere Untersuchung notwendig machen.

5.1 Querschnittsform

Die vorliegende Theorie ist anwendbar für Hohlquerschnitte und Vollquerschnitte, deren Aussenabmessungen in allen

Richtungen die gleiche Grössenordnung besitzen (Bild 26(a)). Es sind dies Querschnitte, bei welchen einerseits die St. Venant'sche Torsion die Wölb torsion überwiegt und die andererseits noch nicht in den Bereich der Platten fallen, die durch einen Biegebruch infolge der Hauptbiegemomente zugrunde gehen.

Bei Vollquerschnitten hat sich im Versuch gezeigt [2], dass sich diese im Bruchzustand von einem Hohlquerschnitt mit gleichen Aussenabmessungen und gleicher Armierung nicht unterscheiden. Deshalb werden Vollquerschnitte im Bruchzustand durch einen wirksamen Hohlkasten ersetzt (Bild 26(b)). Die ideelle Wandstärke t_i spielt nur für die Beanspruchung der Betondruckdiagonalen eine Rolle. Sie wurde in [10] als der kleinere der beiden Werte

$$t_i = b/6 \qquad t_i = b_0/5 \qquad (162)$$

vorgeschlagen. Dabei bedeutet bei allgemeinen Querschnittsformen b resp. b_0 der Durchmesser des grössten in die Querschnittsfläche resp. in die Fläche F_0 eingeschriebenen Kreises.

Zusammengesetzte, wölb freie Querschnitte (Bild 26(c)) werden ebenfalls durch Hohlquerschnitte gleicher Aussenabmessungen mit einer ideellen Wandstärke nach Gl. (162) ersetzt. Voraussetzung ist allerdings, dass die Armierung entlang des Querschnittsumfanges verläuft und damit den Aufbau eines Schubflusses ermöglicht. Dazu ist eine gewisse minimale Dicke des Querschnittsteiles erforderlich.

Für offene, nicht wölb freie Querschnitte (Bild 26(d)) ist diese Theorie nur für Balken zutreffend, bei denen die Verwölbung durch die Lagerung oder die Belastungsart nicht behindert wird. In diesen Fällen wird das Torsionsmoment

nur durch St. Venant'sche Torsion aufgenommen. Hinsichtlich des wirksamen Ersatzquerschnitts wird auf den obigen Absatz verwiesen. In allen andern Fällen hat auch im Stahlbeton die Wölbtorsion die gleiche Grössenordnung wie die St. Venant'sche Torsion. Die kombinierte Beanspruchung kann für den homogenen Zustand gelöst werden (siehe z.B. [11]). Für den Bruchzustand ist jedoch noch keine Lösung verfügbar. Es ist insbesondere daran zu denken, dass nach der Rissbildung die Torsionssteifigkeit stärker abfällt als die Biegesteifigkeit, was eine erhöhte Bedeutung der Wölbtorsion im Bruchzustand zur Folge hat.

Bei zusammengesetzten Querschnitten ist ferner zu beachten, dass sich die einzelnen Querschnittsteile um eine Achse drehen, die im allgemeinen nicht mit den Achsen der individuellen Querschnittsteile zusammenfällt. Dadurch entstehen, bei nicht konstantem Torsionsmoment und bei nicht zwängungsfreier Lagerung, Querbiegemomente, die umso grösser werden je dicker die Querschnittsteile sind. Gerade bei gedungenen Stahlbetonbalken kann dieser Widerstand bedeutend werden.

5.2 Längseisen im Druckbereich

Im 1. Kapitel wurde der Querschnitt so idealisiert, dass die Längseisen zu sog. Stringern in die Querschnittsecken konzentriert wurden (Bild 2). Die auf der Drehachse des Bruchmechanismus liegenden Stringer kommen nicht ins Fliesen. Bei grossen Biegemomenten erhalten sie sogar Druck, wobei bis anhin unter Zugrundelegung des Diagramms Bild 3(a) dieser Druck unbeschränkt aufgenommen werden konnte. Dies geschah aus der Ueberlegung heraus, dass sich beim Auftreten von Druck um diese Längseisen eine Betondruckzone bilden wird, die in der Lage ist, die anfallende

Druckkraft zu übernehmen. Bei grösseren Armierungsgehalten ist es nun möglich, dass der Schwerpunkt dieser Druckzone innerhalb der Wandmittellinie liegt, was einer Verkleinerung des Hebelarmes der Längseisen im Zugbereich und damit einer Reduktion des Bruchmomentes gleichkäme.

Betrachtet man z.B. den Querschnitt des Bildes 27(a), dessen Drehachse nach der Berechnung mit der y_j -Axe zusammenfallen soll. Die Plastizitätskontrolle liefert die beiden unbekannten Kräfte Z_1 und Z_3 auf der Drehachse, die zunächst im Druckbereich einen beliebigen Wert annehmen dürfen. In Wirklichkeit wird sich jedoch eine Druckzone bilden, die sich aus den Kräften D_{f1} und D_{f3} im gedrückten Stahl und D_b als Resultierende der Betondruckspannungen zusammensetzt. Diese als geradlinig begrenzt angenommene Druckzone lässt sich aus den Kräften Z_1 und Z_3 bestimmen, wenn für D_{f1} und D_{f3} die Druckfliesskraft, für D_b die Prismenfestigkeit mal Fläche der Druckzone eingesetzt wird. Aus der Längskraftbedingung muss

$$Z_1 + Z_3 = D_{f1} + D_{f3} + D_b \quad (166)$$

sein, woraus sich der Betrag von D_b bestimmen lässt. Aus der Momentenbedingung um die z_j -Axe lässt sich mit

$$Z_1 \cdot y_1 + Z_3 \cdot y_3 = D_{f1} \cdot y_1 + D_{f3} \cdot y_3 + D_b \cdot y_D$$

die Exzentrizität der Druckkraft D_b bestimmen zu:

$$y_D = \frac{(Z_1 - D_{f1})y_1 + (Z_3 - D_{f3})y_3}{D_b} \quad (167)$$

Für eine bestimmte Querschnittsform und eine bestimmte Verteilung der Betondruckspannungen (z.B. rechteckig in Bild 27(c)) lässt sich nun die Lage der Nulllinie und damit die Koordinate z_D der Resultierenden D_b bestimmen (Bild

27(a)). Betrachtet man die Momentenbedingung um die y_j -Axe, so wird ersichtlich, dass die Druckkraft D_b mit ihrem Hebelarm z_D neu in die Beziehung eintritt. Liegt D_b ausserhalb der Wandmittellinie (Verbindungsgerade $D_{f1}-D_{f3}$), so wirkt sie günstig und darf vernachlässigt werden. Liegt sie innerhalb der Wandmittellinie, so vermindert sie das Bruchmoment, umso mehr als auch $\sum Z_{fi} \cdot z_{ij}$ kleiner werden kann, da einige Stäbe, die der Nulllinie nahe liegen, ihre Fliessspannung evtl. nicht erreichen. Der Fall innerhalb der Wandmittellinie liegender Resultierender D_b soll im weiteren näher untersucht werden.

Die Konsequenzen der zusätzlichen Druckkraft D_b werden am Beispiel der Interaktion Torsion-Biegung gezeigt. Es wird sich dabei stets um kleine T/M-Verhältnisse handeln, bei denen eine grosse Druckzone vorkommt, mit dem Grenzfall reiner Biegung. So beanspruchte Balken gehen durch Stauchen der Betondruckzone zugrunde, wenn eine bestimmte Druckdehnung am Druckrand überschritten wird. Deshalb wird vom gesamten Interaktionsbereich nur diejenige Interaktionskurve betroffen, die dem Mechanismus für reine Biegung entspricht. In Bild 27(d) ist ein solcher Ast des Interaktionsbereiches dargestellt.

In den Gleichgewichtsbeziehungen (142) ändert sich die Momentenbedingung um die y_j -Axe wie folgt:

$$M_u \cdot \cos \delta_j = \sum_1^m Z_i \cdot z_{ij} - S^2 \sum_2^n \frac{a_k s_k}{B_k} \cdot z_{kj} - D_b \cdot z_D \quad (168)$$

Die Interaktionsbeziehung (143) modifiziert sich unter Verwendung von Gl. (168) mit $Z_i = Z_{fi}$ und $B_k = B_{fk}$ und den reinen Bruchmomenten T_{u0} und M_{u0} nach den Gl. (139) und (141) zu:

$$\left(\frac{T_u}{T_{u0}}\right)^2 = \frac{\cos \delta_j}{\cos \delta_M} \frac{\frac{1}{\sum_{i=1}^m Z_{fi} \cdot z_{iT}} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{a_k s_k}{B_{fk}} \cdot z_{kT}}{\frac{1}{\sum_{i=1}^m Z_{fi} \cdot z_{iT}} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{a_k s_k}{B_{fk}} \cdot z_{kT}}}{\left[\frac{\cos \delta_M}{\cos \delta_j} \frac{\frac{1}{\sum_{i=1}^m Z_{fi} \cdot z_{iT}} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{a_k s_k}{B_{fk}} \cdot z_{kT}}{\frac{1}{\sum_{i=1}^m Z_{fi} \cdot z_{iT}} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{a_k s_k}{B_{fk}} \cdot z_{kT}} - D_b \cdot z_D} \right]} - \left(\frac{M_u}{M_{u0}}\right)] \quad (169)$$

Da, wie oben erwähnt, die Drehachse mit derjenigen für reine Biegung übereinstimmt, vereinfacht sich mit $j=M$ Gl. (169) zu:

$$\left(\frac{T_u}{T_{u0}}\right)^2 = \frac{\frac{1}{\sum_{i=1}^m Z_{fi} \cdot z_{iT}} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{a_k s_k}{B_{fk}} \cdot z_{kT}}{\frac{1}{\sum_{i=1}^m Z_{fi} \cdot z_{iT}} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{a_k s_k}{B_{fk}} \cdot z_{kM}}}{\left[\left(1 - \frac{D_b \cdot z_D}{\sum_{i=1}^m Z_{fi} \cdot z_{iM}}\right) - \left(\frac{M_u}{M_{u0}}\right) \right]} \quad (170)$$

Ein Vergleich mit Gl. (145) zeigt die erwartete Uebereinstimmung für $z_D=0$. In Beziehung (170) ist jedoch $D_b \cdot z_D$ von S und damit von T abhängig. Die Längskraftbeziehung der Gl. (142) wird nämlich:

$$0 = \sum_{i=1}^m Z_{fi} - D_{f1} - D_{f3} - D_b - S^2 \sum_{k=1}^n \frac{a_k s_k}{B_{fk}}$$

und daraus

$$D_b = \sum_{i=1}^m Z_{fi} - \sum_{i=1}^3 D_{fi} - S^2 \sum_{k=1}^n \frac{a_k s_k}{B_{fk}} \quad (171)$$

Hieraus ist ersichtlich, dass bei gleichbleibenden $\sum Z_{fi}$ und $\sum B_{fk}$ die resultierende Betondruckkraft D_b mit zunehmendem Torsionsmoment (oder Schubfluss S) abnimmt. Der Dehnungsverlauf wird sich demnach, bei gleichbleibender Betonranddehnung, gemäss Bild 27(b) in der Weise ändern, dass eine stärkere Krümmung des Balkens bei zunehmendem Torsionseinfluss ($T>0$) eintritt, was in Versuchen tatsächlich beobachtet wurde [3]. Mit kleiner werdendem D_b wird

auch der Hebelarm z_D kleiner, bis er schliesslich zu null wird. Dies ist der Schnittpunkt A der beiden Interaktionskurven der Gl. (145) und (170), die in Bild 27(d) generell dargestellt sind. Der Wert auf der Abszisse ergibt sich aus Gl. (170) mit $T_u/T_{u0} = 0$ zu:

$$\frac{M_u^B}{M_{u0}} = 1 - \frac{D_b \cdot z_D}{m \sum_{i=1}^n z_{fi} \cdot z_{iM}} \quad (172)$$

Dieser Wert wird tatsächlich kleiner als 1, solange $z_D > 0$ ist. Wird $z_D < 0$, so darf der Zuwachs an statischer Höhe vernachlässigt werden. Das Moment M_u^B ist nichts anderes als das Bruchmoment des auf reine Biegung beanspruchten Querschnitts, berechnet nach der Theorie für reine Biegung, unter der Voraussetzung, dass der Querschnitt durch Versagen der Betondruckzone bei fliessender Zugarmierung zugrunde geht.

Es ist natürlich mühsam, die Korrektur der Interaktionskurve gemäss Gl. (170) exakt zu berechnen. Man sieht sich deshalb nach einer Näherung um, die innerhalb der exakten Lösung liegt. Es ist naheliegend, diese Näherung gemäss Bild 27(d) so zu wählen, dass die Abszissen der Interaktionskurve proportional zu M_u^B/M_{u0} verkleinert werden. Trägt man auf der Abszisse für den Fall $M_u^B/M_{u0} < 1$ anstelle von M_u/M_{u0} den Wert M_u^B/M_{u0} auf (Bild 27(e)), so geht die Interaktionskurve wieder durch den Wert 1 der Abszisse. Damit ergibt sich die einfache Näherungslösung, dass die M_u auf den kleineren der beiden Werte M_{u0} und M_u^B zu beziehen sind. Rechnet man Bruchmomente für kombinierte Beanspruchung direkt aus, ohne Verwendung von Interaktionskurven, so kann als Näherung das Biegebruchmoment $M_u(\kappa)$ mit M_u^B/M_{u0} multipliziert werden, sofern dieser Wert kleiner als 1 ist.

Dasselbe gilt natürlich auch für den negativen Abszissen-
teil (negative Biegemomente). Kommt im allgemeinen Fall
noch eine Normaldruckkraft als Beanspruchung hinzu, so gilt
dieselbe Näherungsmethode, solange der Bruch durch Fließen
der Zugarmierung eintritt. Im Druckbereich der Interaktion
Torsion-Normalkraft tritt bei überwiegender Druckkraft
eine andere Bruchart ein (Betonzerstörung vor Fließen
der Armierung), der die Anwendbarkeit dieses Modells ohne-
hin beschränkt. Darauf wird im nächsten Abschnitt noch ein-
gegangen.

5.3 Versagen des Betons

Man ist stets bestrebt, ein Tragwerk so zu konstruieren,
dass es einen bevorstehenden Bruch durch grosse Deforma-
tionen anzeigen würde. Man will also einen sog. spröden
Bruch vermeiden. Ein solcher Bruch tritt z.B. dann ein,
wenn der Beton für das Versagen massgebend wird. Im wesent-
lichen sind drei Fälle zu unterscheiden:

- a) Zusammenbruch des Balkens infolge Bildung des ersten
Risses und Zerreißen der Armierung.
- b) Versagen der Betondruckzone bevor die Zugarmierung ihre
Fliessspannung erreicht hat.
- c) Versagen der Betondruckdiagonalen bevor die Schubarmie-
rung ihre Fliessspannung erreicht hat.

In der Biegetheorie werden diese drei Fälle durch

- einen minimalen Armierungsgehalt
- einen maximalen Armierungsgehalt
- eine obere Schubspannungsgrenze

berücksichtigt. Im folgenden wird versucht, den Einfluss

der Torsionsbeanspruchung auf diese Grenzen zu untersuchen.

Der minimale Armierungsgehalt verlangt, dass das Rissmoment von der Armierung noch aufgenommen werden kann. Da in diesem Stadium noch keine Umlagerungseffekte zu erwarten sind, kann die Biegung von der Torsion getrennt betrachtet und die zur Aufnahme von M_{Riss} und T_{Riss} erforderlichen Armierungen zusammengezählt werden.

Der maximale Armierungsgehalt begrenzt die Zugbewehrung in der Weise, dass sie auf alle Fälle ins Fließen kommen soll, bevor die Betondruckzone versagt. Bei kombinierter Beanspruchung können solche Fälle bei kleinen T/M-Verhältnissen vorkommen. Da jedoch nach Bild 27(b) Torsionsmomente die Neutralachse n gegenüber dem Lastfall der reinen Biegung stets heben werden, ist der maximale Armierungsgehalt für reine Biegung zugleich eine sichere Begrenzung für den kombinierten Lastfall.

Etwas schwieriger liegen die Verhältnisse bei der oberen Schubspannungsgrenze. Diese soll verhindern, dass die Betondruckdiagonalen durch einen sog. schiefen Druckbruch zugrunde gehen, bevor die Schubarmierung fließt. Diese Druckdiagonale wird zunächst einmal aus Gleichgewichtsgründen durch eine zentrische Druckkraft beansprucht, die eine zentrische Druckspannung nach Gl. (130) zur Folge hat. Eine zusätzliche Spannung, die in [2] als Verwindungseffekt bezeichnet wurde, ist dafür verantwortlich, dass die Randspannungen so hohe Werte annehmen können, dass ein Versagen der Druckdiagonalen bei erheblich niedrigeren Schubspannungswerten eintreten kann, als man dies vom Querkraftschub her gewohnt ist. Dieser Verwindungseffekt entsteht beim Lastfall Torsion dadurch, dass sich die ursprünglich ebenen Querschnittswände bei einer Verdrehung zu hyperbolischen Paraboloiden verwinden, was zusätzliche Randdehnungen

zur Folge hat, die in [2] zu

$$\epsilon_b(\vartheta) = - \frac{d\vartheta}{dx} \cdot \frac{t}{2}$$

berechnet wurden. Die Randspannung der Druckdiagonalen setzt sich somit aus einem Schubfluss- und einem Verdrehungsanteil zusammen und beträgt näherungsweise mit Gl. (130) und $\alpha=45^\circ$:

$$\sigma_D = E_b \cdot \epsilon_b = - (2\tau + E_b \cdot \frac{t}{2} \cdot \frac{d\vartheta}{dx}) \quad (173)$$

Nimmt man für σ_D einen bestimmten Grenzwert an, der von der Betonqualität abhängig sein wird, so ist ersichtlich, dass die obere Schubspannungsgrenze τ umso geringer sein muss, je grösser die spezifische Verdrehung, die Wandstärke und der E_b -Modul sind.

Da sich in Versuchen [3] gezeigt hat, dass die Torsionssteifigkeit nicht wesentlich vom T/M-Verhältnis abhängt, der Wert 2τ in Gl. (173) jedoch mit T anwächst, ist es wohl vernünftig, die obere Schubspannung für den Lastfall reine Torsion zu begrenzen und dessen Gültigkeit über den gesamten Interaktionsbereich anzunehmen. Da der Drehwinkel $d\vartheta/dx$ im gerissenen Zustand für allgemeine Querschnitte rechnerisch schwer zu erfassen ist, scheint es angebracht, für den Lastfall reine Torsion eine obere Schubspannungsgrenze festzusetzen, die niedriger oder zumindest nicht höher als diejenige für Querkraftbeanspruchung ist. Da die Verdrehung im gerissenen Zustand im wesentlichen umgekehrt proportional zum Armierungsgehalt verläuft [2], wird der schiefe Druckbruch bei umso höherem τ eintreten, je grösser der Armierungsgehalt an Torsionsarmierung ist.

Wie schon früher angedeutet, verdient die Begrenzung des Torsion-Normalkraft-Interaktionsdiagramms im Druckbereich

noch eine besondere Erwähnung. Die dem untersuchten Modell zugrunde liegende Hauptvoraussetzung fließender Armierung auf allen ausser einer Seite wird natürlich bei einer bestimmten Normal-Druckkraft nicht mehr zutreffen. Es können andere, spröde Brucharten auftreten, die die Interaktion im Druckbereich begrenzen.

In Bild 28 ist eine typische Interaktionskurve T-N dargestellt (vgl. Bild 25). Als spröde Brucharten kommen der Stauchungsbruch des gesamten Querschnitts oder der schiefe Druckbruch der Betondiagonalen in Frage. Auf der negativen Abszisse (reiner zentrischer Druck) erreicht man einen Stauchungsbruch bei B. Auf der Ordinate (reine Torsion) tritt bei C der schiefe Druckbruch ein. Die Interaktion zwischen B und C ist noch nicht erforscht. Immerhin kann gesagt werden, dass sowohl ein Hinzufügen von Torsion zu einem vor dem zentrischen Stauchungsbruch stehenden Balken (B), wie auch ein Hinzufügen von Druck zu einem vor dem schiefen Druckbruch unter reiner Torsion stehenden Balken (C), die Bruchmomente B resp. C erniedrigen wird. Bei B würde die erhöhte Hauptdruckspannung im ungerissenen Zustand, bei C die erhöhte Druckspannung in der Betondiagonalen im gerissenen Zustand massgebend. Interaktionsverhältnisse wie die in Bild 28 gestrichelt eingetragene qualitative Kurve wären denkbar. Vorläufig erscheint es jedoch als angebracht, mit der linearen Interaktion zwischen B und C zu rechnen.

Damit kann vor allem der interessante Fall der Vorspannung (kleine Normal-Druckkraft) annähernd erfasst werden, worauf im Anhang E noch näher eingegangen wird. Eine kleine Normal-Druckkraft kann das Torsionsbruchmoment leicht erhöhen, solange Fließen der Armierung massgebend wird. Bei anwachsender Druckkraft besteht bei Erreichen des Schnittpunktes D die Gefahr eines Betonversagens; eine weitere Zunahme der

Druckkraft würde das Torsionsbruchmoment verringern.

5.4. Umlagerungswinkel $\text{tg}\alpha$

Die vorliegende Theorie beruht auf der Voraussetzung, dass die Bügel- und die Längsarmierung vor dem Bruch zum Fließen kommen. Je nach dem Armierungsverhältnis Längseisen/Bügel bedingt das Gleichgewicht einen von 45° abweichenden Winkel der Betondruckdiagonalen zur Balkenachse, der im folgenden als Umlagerungswinkel α bezeichnet wird.

Dieser zur Umlagerung der Kräfte von den Längseisen auf die Bügel, oder umgekehrt, notwendige Winkel α kann indes nicht beliebig zwischen 0° und 90° variieren. Seine Abweichung von 45° hängt, bei einwandfreier Verankerung der Diagonalen, für einen bestimmten Lastfall vom Armierungsverhältnis Längseisen/Bügel ab (vgl. hierzu Anhang D). Sind die Bügel schwächer, so wird $\text{tg}\alpha < 1$ bis zu einem bestimmten Wert $\text{tg}\alpha_{\min}$, bei welchem die Längsarmierung nicht mehr zum Fließen kommt. Sind die Bügel zu stark, so wird $\text{tg}\alpha > 1$ bis zu einem bestimmten Wert $\text{tg}\alpha_{\max}$, bei welchem die Bügel nicht mehr ins Fließen kommen. Aufgrund von wenigen Versuchen an genügend grossen Balken [3], können die Werte $\text{tg}\alpha_{\min}$ und $\text{tg}\alpha_{\max}$ etwa abgeschätzt werden zu etwa 0,5 und 2,0. Damit ist der Umlagerungswinkel α vorläufig beschränkt auf:

$$0,5 < \text{tg}\alpha < 2,0 \quad (174)$$

Zur Berechnung des Winkels α_k jeder Querschnittswand beim Bruchmoment T_u dient die Gl. (129):

$$\text{tg}\alpha_k = \frac{B_{fk}}{S_u s_k} \quad (175)$$

wobei der Schubfluss $S_u = T_u/2F_0$ bekannt ist. Fällt dieser Winkel in die Grenzen der Beziehung (174) so sind die Voraussetzungen dieser Theorie eingehalten. Lediglich für den Fall ausserhalb der erwähnten Grenzen fallender Neigungswinkel α_k müssen die Konsequenzen im folgenden noch untersucht werden.

In Bild 29(a) ist der generelle Verlauf der Beziehung (175) aufgetragen. Bei hoher Torsionsbeanspruchung kann der Fall $\text{tg}\alpha_k < \text{tg}\alpha_{\min}$ eintreten (Punkt T_1). Begrenzt man den sich minimal einstellenden Winkel z.B. nach Gl. (174) mit $\text{tg}\alpha_{\min} = 0,5$, so bedeutet dies, dass der zum Fliessen der Längseisen notwendige Winkel sich nicht einstellen kann. Mit Beziehung (175) wird der maximale Schubfluss begrenzt zu:

$$S_1 = \frac{B_{fk}}{s_k \text{tg}\alpha_{\min}}$$

oder

$$T_1 = \frac{2F_0 B_{fk}}{s_k \text{tg}\alpha_{\min}} \quad (176)$$

Im Interaktionsdiagramm T-M (Bild 29(b)) bedeutet dies, dass das Diagramm durch eine zur M-Axe parallele Gerade abgeschnitten wird. Aus Gl. (131) ist ersichtlich, dass bei der Reduktion des Schubflusses auf den Wert S_1 bei gleichbleibender Belastung auch die Summe der Stringerkräfte ΣZ_1 abnehmen muss. Es würden in einem solchen Fall demnach mehr als zwei Längseisen-Stringer ihre Fliesskraft beim Bruch nicht erreichen. Diese Lösung wäre unwirtschaftlich (teilweise überarmiert), so dass man am besten diesen Fall gänzlich vermeidet, indem die Bügelarmierung erhöht oder die Längsarmierung geschwächt wird, damit beide Armierungsanteile beim Bruch ins Fliessen kom-

men ($T_{u \max} < T_1$).

Bei hoher Biegebeanspruchung wird stets der Fall $\text{tg}\alpha_k > \text{tg}\alpha_{\max}$ eintreten (Bild 29(a), Punkt T_2). Wird der sich maximal einstellende Winkel z.B. nach Gl. (174) mit $\text{tg}\alpha_{\max} = 2,0$ begrenzt, so bedeutet dies, dass der zum Fliessen der Bügel erforderliche Winkel sich von einem gewissen Schubfluss S_2 an nicht einstellen kann. Greift man Gl. (132) heraus und ersetzt man die unbekannte Bügelkraft $B_k < B_{fk}$ mit Hilfe der Gl. (175) durch $S \cdot s_k \text{tg}\alpha_{\max}$, so gilt:

$$\omega M_y = \sum_1^m Z_i \cdot z_i - S \sum_2^n \frac{a_k z_k}{\text{tg}\alpha_{\max}} \quad (177)$$

Ersetzt man darin S nach Gl. (134) mit $\omega T / 2F_0$, so erkennt man eine lineare Beziehung zwischen ωM_y und ωT . Im Interaktionsdiagramm T - M des Bildes 29(b) mit $\omega M_y = M_u$ und $\omega T = T_u$ stellt die Beziehung (177) eine Gerade dar, die durch M_{u0} und den Punkt T_2 geht, bei welchem das Torsionsmoment gerade so gross ist, dass sämtliche $\text{tg}\alpha_k$ in die Grenzen der Gl. (174) fallen.

In Gl. (177) wurde stillschweigend angenommen, dass $\text{tg}\alpha_{\max}$ auf allen k Seiten des Querschnitts massgebend wird. Ist dies jedoch nur auf einzelnen Seiten der Fall, so wird die Abweichung von der Parabel in Bild 29(b) noch geringer. Es erscheint deshalb angebracht, diesen Effekt bei der Berechnung zu vernachlässigen. Bei kleinen Torsionsmomenten wird ohnehin eine konstruktive Schubminimalarmierung vorhanden sein.

Abschliessend sei noch der Fall keiner Umlagerung untersucht. Da in diesem Fall $\text{tg}\alpha = \text{konstant} = 1$ wird, vereinfachen sich die Gleichgewichtsbeziehungen (131) bis (134) unter Einsetzung von B_k/s_k nach Gl. (92):

$$\frac{B_k}{s_k} = S \cdot \operatorname{tg} \alpha_k = S = \text{konstant} \quad (178)$$

zu:

$$\omega N = \sum_1^m Z_i - S \sum_2^n a_k \quad (179)$$

$$\omega M_y = \sum_1^m Z_i \cdot z_i - S \sum_2^n a_k z_k \quad (180)$$

$$\omega M_z = - \sum_1^m Z_i \cdot y_i + S \sum_2^n a_k y_k \quad (181)$$

$$\omega T = 2F_0 S \quad (182)$$

Der lineare Zusammenhang zwischen M und T, wie er schon in Bild 5 ersichtlich war, wird bestätigt. Aus der Beziehung (178) sind alle Bügelkräfte berechenbar:

$$\frac{B_k}{s_k} = S = \frac{T}{2F_0} \quad (183)$$

Massgebend wird die Seite mit der schwächsten Bügelarmierung. Aus der Beziehung (179) ist die Summe der Stringerkräfte mit $\sum a_k = u$ (Umfang) z.B. für $N = 0$ berechenbar zu:

$$\frac{\sum_1^m Z_i}{u} = S = \frac{T}{2F_0} \quad (184)$$

Für reine Torsionsbelastung und über den Umfang gleichmäßig verteilte Armierung stellen die Gl. (183) und (184) die üblichen Bemessungsgleichungen nach einem Fachwerkmodell mit 45°-Diagonalen für die Bügel- und Längsbewehrung dar.

Beim allgemeinen Lastfall (T, M_y, M_z, N) stehen zur Bestim-

mung der Längskräfte ausser den Gl. (179) resp. (184) noch die 2 Beziehungen (180) und (181) zur Verfügung, was in gewissen einfach symmetrischen Querschnitten und Belastungsfällen zur Bestimmung aller Längskräfte genügt. Im allgemeinen muss aber das Ebenbleiben des Querschnitts als Verträglichkeitsbedingung herangezogen werden, um alle Längskräfte zu berechnen.

6. ZUSAMMENFASSUNG

Das Ziel dieser Arbeit ist die Bestimmung des Bruchwiderstandes von Stahlbeton- und Spannbetonbalken allgemeiner Querschnittsform unter Torsion, Biegung und Normalkraft, bei welchen das Torsionsmoment durch St. Venant'sche Torsion aufgenommen wird. Das dieser Arbeit zugrunde liegende Modell wurde in Versuchen an Balken grösseren Querschnitts mit gut verbügelter Armierung beobachtet; es ist in Bild 20(a) dargestellt. Dieses räumliche Fachwerkmodell besteht aus den in die Querschnittsecken zu Stringern konzentriert gedachten Längseisen und dazwischen liegenden Schubwänden, in denen Bügelkräfte und Betondruckdiagonalkräfte wirken, die unter einem, pro Querschnittswand als konstant angenommenen Winkel gegenüber der Balkenachse auftreten. Dieser Winkel beträgt im allgemeinen nicht 45° , sondern stellt sich so ein, dass auf den für den Bruch massgebenden Seiten die Längseisen und die Bügel ihre Fliessspannung erreichen können. Deshalb wird dieses Modell als räumliches Fachwerk mit variabler Diagonalen- neigung bezeichnet und für unterarmierte Balken in dieser Arbeit untersucht.

Die Variablen dieser Aufgabe sind die Längseisen- und die Bügelkräfte, sowie die Winkel der Druckdiagonalen zur Balkenachse, deren Beträge bei Eintreten des Bruchmechanismus gesucht werden. Die Lösung erfolgt mit Hilfe der Plastizitätstheorie. Mit den Gleichgewichts- und den Plastizitätsbedingungen kann das nichtlineare Programm des Bildes 13 aufgestellt werden. Gesucht wird der Maximalwert des Traglastfaktors; dieser liegt nach dem statischen Grenzwertsatz nicht höher als derjenige der Traglast. Mit den kinematischen und den Leistungsbedingungen entsteht das nichtlineare Programm des Bildes 15. Gesucht wird der Minimalwert

des Traglastfaktors; dieser liegt nach dem kinematischen Grenzwertsatz nicht tiefer als derjenige der Traglast. Diese beiden Programme können durch eine Umformung in die linearen Programme der Bilder 14 resp. 16 übergeführt werden, die zueinander dual sind.

Nach dem Dualitätstheorem linearer Programme nimmt das Optimum denselben Wert an, nämlich den exakten Wert der Traglast dieses Bruchmodells. Als Lösung des statischen Programms verletzt es sicher nicht die Gleichgewichts- und Plastizitätsbedingungen, als Lösung des kinematischen Programms wird bestätigt, dass der dazugehörige Bewegungszustand auch einen Mechanismus darstellt.

Während die allgemeine analytische Lösung der linearen Programme schwer überblickbar wird, erweist sich die graphische Lösung der kinematischen Methode als sehr anschaulich. Diese wird möglich, da das Zwischentableau des Bildes 17 nur noch zwei Variable enthält. Die graphische Lösung des Bildes 18 ermöglicht es, zwei allgemein gültige Folgerungen zu ziehen, die für das weitere Vorgehen wesentlich sind:

- a) Ein Mechanismus öffnet sich um die Verbindungsgerade zweier Längseisen-Stringer, sofern diese Gerade den Querschnitt nicht schneidet.
- b) Beim Mechanismus fließen die Bügel auf allen Querschnittsseiten.

Die möglichen Drehachsen eines Querschnitts sind in Bild 20(b) verdeutlicht. Die beiden Folgerungen a) und b) sagen aus, dass beim Mechanismus alle Bügel und alle Längseisen ihre Fließspannung erreichen, mit Ausnahme der zwei Längseisen-Stringer auf der Drehachse. Diese Aussage bildet die Grundlage für die analytische Lösung mit den Gleichgewichts-

beziehungen, wie auch für die Untersuchung der Interaktionsverhältnisse. Die drei grundlegenden Gleichgewichtsbeziehungen (131), (132) und (133) enthalten neben dem unbekannten Bruchmoment, dank obiger Folgerungen, nur noch die Kräfte der zwei nicht fliessenden, auf der Drehachse liegenden Längseisen-Stringer als Unbekannte, womit die Lösung gegeben ist.

Die Interaktionsdiagramme wurden für die beiden, in der Ebene darstellbaren Fälle Torsion-Biegung und Torsion-Normalkraft näher untersucht. Bestimmt man für jede der theoretisch möglichen Drehachsen eines bestimmten Querschnitts die Interaktionskurven, so begrenzen alle diese Kurven das eigentliche Interaktionsdiagramm. In Bild 24 ist ein Beispiel für den Fall Torsion-Biegung durchgerechnet worden. Generell ist ersichtlich, dass die Torsionstragfähigkeit durch ein gleichzeitig wirkendes Biegemoment erhöht werden kann. In Bild 25 ist dasselbe Beispiel für den Fall Torsion-Normalkraft aufgetragen. Es ist ersichtlich, dass kleine Druckkräfte die Torsionstragfähigkeit erhöhen, solange ein Versagen des Betons vor dem Fliessen der Armierung verhindert werden kann. Für den Lastfall Vorspannung wurde im Anhang E gezeigt, dass eine normal vorgespannte Vorspannarmierung prinzipiell wie eine schlaffe Armierung mit hoher Streckgrenze betrachtet werden kann.

Für die entwickelte Theorie ergeben sich einige Begrenzungen des Anwendungsbereiches hinsichtlich Querschnittsform, Versagen des Betons, Armierungsverhältnis Längseisen/Bügel und Verkleinerung des inneren Hebelarmes (bei grösseren Armierungsgehalten und überwiegender Biegebeanspruchung). Auch sollen konstruktive Mängel, wie ungenügende Verankerung der Armierung, zu weiter Bügelabstand und ungenügende Eck-Längsbewehrung, die Verankerungsbrüche oder ein vorzeitiges Ausbrechen der Druckdiagonalen zur Folge haben können, aus-

geschlossen werden.

Im Anhang C und D wurden die beiden für die Praxis wichtigen Spezialfälle eines Trapezquerschnitts und eines Rechteckquerschnitts für Torsion und spezielle Biegung im Detail behandelt. Ihre allgemeinen Interaktionskurven sind in den Bildern 34 resp. 35 zusammengestellt. Für die direkte Bestimmung der Bruchmomente werden geschlossene Formeln angegeben. Für den Rechteckquerschnitt konnte diese Theorie mit vorhandenen Versuchsergebnissen verglichen werden. Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Versuch ist aus den Bildern 9 und 36 ersichtlich.

Für diese einfachen Spezialfälle wird abschliessend noch das Bemessungsproblem behandelt. Es zeigt sich, dass für eine gegebene Torsions- und Biegebelastung und gegebenen Abmessungen eines Querschnitts, das Stahlvolumen minimal wird, wenn der Bemessung ein Fachwerkmodell mit 45° -Diagonalen zugrunde gelegt wird. Für diesen Fall lassen sich für den Trapez- und den Rechteckquerschnitt geschlossene Bemessungsformeln aufstellen. Bemerkenswert ist, dass die Torsions-Längsbewehrung im Biegedruckbereich bei einem gleichzeitig wirkenden Biegemoment reduziert werden kann. Ein Versagen des Betons kann bei der Bemessung z.B. durch Kontrolle der Armierungsgehalte und der oberen Schubspannungsgrenze ausgeschaltet werden.

SUMMARY

Ultimate Strength of Reinforced Concrete Beams in Torsion and Bending

The aim of this work is the determination of the ultimate strength in St. Venant-torsion, bending and axial force of reinforced and prestressed concrete beams of general cross sections. Tests on beams of large dimensions with a close spacing of stirrup reinforcement led to the model, on which this work is based. A picture of this model is presented in Fig. 20(a). This space truss model consists of the longitudinal reinforcement concentrated to stringers in the corners of the cross section, and shear walls lying between them. Stirrup forces and concrete diagonal forces are acting in these shear walls. For each wall they form a certain constant angle with respect to the beam axis. Generally this angle is not equal to 45° . It depends on the condition that in the sides responsible for failure, yield stress in longitudinal and stirrup reinforcement can be reached. That's why this model is called space truss with variable inclination of diagonals. It is investigated in this thesis for under-reinforced beams.

The unknowns of this problem are the forces in the longitudinal and stirrup reinforcement as well as the angles between compression diagonals and beam axis. Unknown are their amounts at the formation of the failure mechanism. The solution is found by means of the theory of plasticity. With the conditions of equilibrium and plasticity, the nonlinear program of Fig. 13 can be formulated. The load factor has to become a maximum. Because of the lower bound theorem it

will certainly not be higher than the one at ultimate load. With the conditions of kinematics and rate of work, the nonlinear program of Fig. 15 can be postulated. The load factor has to be minimized. Because of the upper bound theorem it will certainly not be lower than the one at ultimate load. These two programs can be transformed into linear programs of Fig. 14 and 16, each of which being dual to the other. Because of the theorem of duality of linear programs their optimum has the same value which is equal to the value of the ultimate load of this failure model. Being a solution of the static program, it certainly does not violate the conditions of equilibrium and plasticity and since it is a solution of the kinematic program, it confirms that the corresponding state of motion represents a mechanism as well.

Since the essence of the general analytical solution is difficult to grasp, the graphical solution of the kinematical method represents a clear visualization of the problem. This solution is possible because the intermediate matrix of Fig. 17 contains only two unknowns. The graphical solution of Fig. 18 makes it possible to establish two generally valuable statements which are essential for the further procedure:

- a) A mechanism opens about the straight line connecting two stringers as long as this straight line does not intersect the cross section.
- b) In the state of a mechanism, the stirrups yield on all sides of the cross section.

The possible axis of rotation of a cross section are shown in Fig. 20(b). The two conclusions a) and b) state that in the state of mechanism all stirrups and all longitudinal reinforcement yield, except the two stringers which inter-

sect the axis of rotation. This statement forms the basis for the analytical solution by means of the conditions of equilibrium as well as for the investigation of the interaction. Because of the preceeding conclusions, the three fundamental conditions of equilibrium (131), (132) and (133) contain, aside from the unknown ultimate moment, only the forces of the two nonyielding stringers in the axis of rotation as unknowns. This means that the problem can be solved.

The interaction diagrams were investigated for the two cases of torsion with bending and torsion with axial force which may therefore be represented in a plane. If for all theoretically possible axis of rotation of a certain cross section, the interaction curves are drawn, these resulting curves represent envelopes to the actual interaction diagram. An example for the case of torsion with bending is shown in Fig. 24. Generally it appears that the torsional capacity can be increased by a simultaneously acting bending moment. In Fig. 25 the same example is solved for the case of torsion with axial force. It is evident, that a small compression force increases the torsional capacity as long as failure of the concrete without yielding of steel may be avoided. For the case of prestressing, Appendix E shows that a normally stressed prestressing steel can be considered as a reinforcing bar with a high yield point.

The form of the cross section, danger of a concrete failure, ratio of longitudinal to stirrup reinforcement and reduction of the inner lever arm may limit the applicability of the developed theory. Furthermore imperfections of construction such as unsufficient anchorage of reinforcement, too wide a spacing of stirrup reinforcement and unsufficient longitudinal reinforcement in the corners have to be excluded. Such defects may cause a failure of anchorage or a

premature break out of the compression diagonals.

In Appendix C and D the trapezoidal and the rectangular cross section subjected to torsion and bending are treated in detail. Their general interaction curves are shown in Fig. 34 and 35. Closed formulas are derived for the direct computation of ultimate moments. The results for the rectangular cross section are compared with those of existing tests. The agreement between theory and test is shown in Fig. 9 and 36.

Finally, the design problem is solved for these two types of cross section. It is shown that for a given torsion and bending moment and for given dimensions of a cross section the volume of required steel becomes a minimum, if the design is based on a truss model with 45^0 -diagonals. For this case closed design formulas for trapezoidal and rectangular cross sections are derived. It is remarkable that the required longitudinal reinforcement for torsion in the bending-compression zone can be reduced by a simultaneously acting bending moment. A failure of concrete can be avoided in design, if for instance limits are set to the percentage of reinforcement and the maximum shearing stress.

ANHANG A : Lösung des linearen Programms der statischen

Methode

Man geht aus vom Tableau des Bildes 14. Zunächst vertauscht man in $(m+n)$ Austauschschritten, mit der 1 als Pivotelement, die beschränkten Variablen y_{Li} und y_{Bk} mit den freien Variablen z_i und $1/B_k$. Es entsteht das Tableau des Bildes 30. Für die Austauschschritte dieses Simplex-Verfahrens konsultiere man z.B. [8].

Die freien Variablen z_i und $1/B_k$ stehen nun in der Basis (vergl. [9]). Durch Verwendung der drei Gleichungen des Tableaus können noch das ω und zwei Nicht-Basis-Variablen y_{Li} resp. y_{Bk} mit Austauschschritten in die Basis genommen werden. Da, wie später ersichtlich wird, die Basis-Variablen z_i und $1/B_k$ für die weiteren Austausche keine Bedeutung mehr haben, können sie weggelassen werden.

Vertauscht man in einem ersten Austauschschritt mit dem Pivotelement $-M_y$ das ω mit einem 0, so entsteht das Tableau des Bildes 31(a). Für die Längsseiten und die Bügel werden nur noch die i -ten resp. k -ten Koeffizienten angeschrieben. Die Koeffizienten der Kolonne "0" werden uninteressant und brauchen nicht berechnet zu werden. Ebenso kann die dritte Zeile gestrichen werden, da sie mit der ersten identisch sein muss.

Vertauscht man in einem zweiten Austauschschritt mit dem Pivotelement $p = (y_1 + \rho z_1)$ das y_{L1} mit einem 0, so entsteht das Tableau des Bildes 31(b). In einem dritten Schritt vertauscht man mit dem Pivotelement $q = -1 + n z_3 - (y_3 + \rho z_3)(-1 + n z_1)/p$ das y_{L3} mit dem letzten verbleibenden 0. Es entsteht das Schlusstableau des Bil-

des 31(c). In der Basis stehen jetzt 2 Variable y_{L1} und y_{L3} , währenddem die restlichen Variablen y_{Li} und die y_{Bk} am Kopf des Tableaus stehen.

Setzt man diese Nicht-Basis-Variablen am Kopf des Tableaus zu Null, so erhält man für die Basis-Variablen y_{L1} und y_{L3} und die Zielfunktion ω den Wert der 1. Kolonne. Diese Basislösung ist zulässig, wenn y_{L1} und y_{L3} grösser als Null werden. Der Wert für ω ist nur dann optimal, wenn die Koeffizienten der y_{Li} und y_{Bk} in der ersten Zeile dasselbe Vorzeichen haben.

Sind alle Koeffizienten negativ, so würde jede Erhöhung der y_{Li} und y_{Bk} die Zielfunktion verkleinern. Eine Erniedrigung unter Null kann nicht eintreten, da gemäss Definition alle y_{Li} und y_{Bk} grösser als null sein müssen. In diesem Fall hat man es mit einem Maximum zu tun.

Sind hingegen alle Koeffizienten positiv, so würde jede Erhöhung der y_{Li} und y_{Bk} die Zielfunktion vergrössern. In diesem Fall hat man es mit einem Minimum zu tun.

Man sieht jetzt auch ein, dass das Weglassen der Basis-Variablen Z_i und $1/B_k$ in Bild 30 gerechtfertigt war. Die Aussage $Z_i = Z_{fi}$ usw. ist bei der Basislösung des Tableaus 31(c) gleichbedeutend mit der Aussage $y_{Li} = 0$.

ANHANG B : Lösung des linearen Programms der Mechanismus-

Methode

Man geht aus vom Tableau des Bildes 16. Vertauscht man in $(m+n)$ Austauschschritten, mit der 1 als Pivotelement, die Nullen mit den beschränkten Variablen $\dot{e}_{Li}$ und $(-\dot{e}_{Bk}^{II} \operatorname{tg}^2 \alpha_k)$, so entsteht das Tableau des Bildes 32, das zu Bild 30 dual ist. Die Bedeutung der Konstanten n , ρ , c_1 , c_2 , c_3 ist dieselbe wie in Bild 30. Für die weiteren Austauschschritte können alle Koeffizienten, die mit null multipliziert werden, weggelassen werden. Man beschränkt sich daher auf die vier ersten Kolonnen des Bildes 32.

Man kann nun noch eine 0 aus der Basis und dafür z.B. $\dot{\phi}_y$ in die Basis nehmen. Dies entspricht einem Austauschschritt mit dem Pivot M_y . Als Resultat erhält man das zu Bild 31(a) duale Tableau des Bildes 33.

Durch zwei weitere Austauschschritte könnten noch die beiden freien Variablen $\dot{u}$ und $\dot{\phi}_z$ durch zwei beschränkte Variable $\dot{e}_{L1}$ und $\dot{e}_{L3}$ ausgetauscht werden. Das entstehende Tableau wird dann zu Bild 31(c) dual. Am Kopfe stehen die zwei beschränkten Variablen $\dot{e}_{L1}$ und $\dot{e}_{L3}$, die für die Basislösung verschwinden müssen. Die Basis-Variablen erhalten dann die Werte der 1. Kolonne. Diese Basislösung ist zulässig, wenn alle Basiswerte der 1. Kolonne positiv sind. Sie ist auch optimal, wenn die Koeffizienten von $\dot{e}_{L1}$ und $\dot{e}_{L3}$ gleiches Vorzeichen haben. Sind beide positiv, so ist die Basislösung ein Minimum, sind beide negativ, so ist sie ein Maximum. In diesem Fall sind allerdings die Dualitätsregeln des Bildes 19 zu beachten, damit die Vorzeichen der Koeffizienten beim Maximum-Problem richtig gesetzt werden. Deshalb ist auch der Max-Pfeil in Bild 32

und 33 in Klammern gesetzt.

Die Austauschschritte wurden jedoch bei dieser Methode beim Stande des Bildes 33 abgebrochen, da sich dieses lineare Programm mit nur 2 Variablen $\dot{u}$ und $\dot{\varphi}_z$ graphisch lösen lässt. Der langwierige Beweis der Vorzeichen der Koeffizienten des zu Bild 31(c) dualen Tableaus wird dadurch hinfällig.

ANHANG C : Torsion und Biegung des Trapez-Querschnittes

Als Spezialfall soll im folgenden dieser im Brückenbau häufig vorkommende Querschnitt etwas näher untersucht werden. Betrachtet wird ein Schnitt in Feldmitte bei einer Belastung durch ein Torsionsmoment T und ein Biegemoment $M_y = M$. Vorausgesetzt sei ferner, dass die in die Querschnittsecken konzentrierten unteren Längseisen-Stringer die grössere Fliesskraft als die oberen besitzen ($Z_{fu} > Z_{fo}$). Die Bügel seien in den beiden Stegen gleich, aber unten und oben verschieden (Bild 34).

Zur Lösung stehen die Gleichgewichtsbeziehungen (129), (130), (131), (132), (133) und (134) zur Verfügung. Gl. (133) wird aus Symmetriegründen trivial, so dass die beiden wichtigsten Beziehungen für diesen Lastfall lauten:

$$0 = \sum_1^m Z_i - \frac{T^2}{4F_0^2} \sum_2^n \frac{a_k s_k}{B_k} \quad (C.1)$$

$$M = \sum_1^m Z_i \cdot z_i - \frac{T^2}{4F_0^2} \sum_2^n \frac{a_k s_k}{B_k} \cdot z_k \quad (C.2)$$

Dabei wurde Gl. (134) direkt eingesetzt. Für einen gegebenen Lastfall mit $\kappa = T/M$ ist neben dem Bruchmoment noch die Längseisenkraft Z_o oder Z_u , je nach Drehachse, unbekannt, zu deren Bestimmung die 2 Gleichungen (C.1) und (C.2) genügen. Für die nicht auf der Drehachse liegenden Längseisen-Stringer, wie auch für die Bügel, ist die Fliesskraft einzusetzen. Aus Gl. (C.2) ist übrigens ersichtlich, dass anstelle der Längseisen-Stringer gerade so gut jedes einzelne Längseisen mit seinem Hebelarm eingesetzt werden könnte.

1. Reine Torsion

Da $Z_{fu} > Z_{fo}$ wird vermutet, dass die Verbindungsgerade der Z_u die Drehachse für reine Torsion darstellt. Legt man die y-Axe durch diese Drehachse, so ergibt Gl. (C.2) für $M=0$:

$$2Z_{fo}h = \frac{T^2}{4F_0^2} \left(\frac{a_o s_o}{B_{fo}} \cdot h + \frac{a_s s_s}{B_{fs}} \cdot h \right)$$

Daraus ergibt sich das Torsionsbruchmoment zu:

$$T_{u0}^2 = 8F_0^2 \cdot \frac{Z_{fo} B_{fs}}{a_s s_s} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{a_o s_o B_{fs}}{a_s s_s B_{fo}}\right)}$$

Im folgenden erweisen sich die Abkürzungen

$$\beta_o = \left(1 + \frac{a_o s_o B_{fs}}{a_s s_s B_{fo}}\right) \quad \beta_u = \left(1 + \frac{a_u s_u B_{fs}}{a_s s_s B_{fu}}\right) \quad (C.3)$$

als zweckmässig. Damit wird obiges Torsionsbruchmoment zu:

$$T_{u0}^2 = 8F_0^2 \cdot \frac{Z_{fo} B_{fs}}{a_s s_s \beta_o} \quad (C.4)$$

Nach Gl. (C.1) ergibt sich die Kraft Z_u :

$$Z_u = \frac{T_{u0}^2}{8F_0^2} \left(\frac{a_o s_o}{B_{fo}} + \frac{a_u s_u}{B_{fu}} + 2 \frac{a_s s_s}{B_{fs}} \right) - Z_{fo}$$

Unter Einsetzung von T_{u0} nach Gl. (C.4) wird schliesslich:

$$Z_u = Z_{fo} \cdot \frac{\beta_u}{\beta_o} \quad (C.5)$$

Ist $Z_u \leq Z_{fu}$, so ist die Plastizitätsbedingung erfüllt und das Bruchmoment ist endgültig. Im andern Falle ist die Rechnung mit der oberen Drehachse durchzuführen. Zur Kontrolle bestimmt man noch t_{ga} nach Gl. (129) und σ_D nach

Gl. (130) oder auch $\tau = S/t$ und vergleicht mit den zulässigen Werten nach Gl. (174) und den Normvorschriften.

2. Reine Biegung

In diesem Fall ist klar, dass die Verbindungsgerade der Z_0 die Drehachse für reine Biegung sein wird. Legt man das Koordinatensystem gemäss Bild 34(a), so wird nach Gl. (C.2) für $T=0$:

$$M_{u0} = 2Z_{fu} h \quad (C.6)$$

Nach Gl. (C.1) ergibt sich die Kraft Z_0

$$Z_0 = - Z_{fu} \quad (C.7)$$

Da Z_0 stets eine Druckkraft sein wird, ist die Plastizitätsbedingung erfüllt. Es ist lediglich abzuklären, ob der Querschnitt nicht überarmiert ist und wie gross das Biegebruchmoment M_u^B nach der üblichen Biegetheorie mit Druckzone wird. Ist $M_u^B < M_{u0}$, so ist M_u^B als Biegebruchmoment einzusetzen, im andern Fall gilt für Interaktionszwecke M_{u0} nach Gl. (C.6).

3. Interaktion Torsion-Biegung

Das Interaktionsdiagramm Torsion-Biegung wird erhalten, wenn nacheinander die Gleichgewichtsbeziehungen für alle möglichen Drehachsen betrachtet werden. Beginnt man mit der Drehachse für reine Torsion, so findet Gl. (144) Anwendung:

$$\left(\frac{T_u}{T_{u0}}\right)_{j=T}^2 = 1 - \frac{(-1)}{1} \cdot \frac{2Z_{fu} h}{2Z_{fo} h} \left(\frac{M_u}{M_{u0}}\right) = 1 + \frac{Z_{fu}}{Z_{fo}} \left(\frac{M_u}{M_{u0}}\right) \quad (C.8)$$

Für die Drehachse reiner Biegung ergibt Gl. (145):

$$\left(\frac{T_u}{T_{u0}}\right)_{j=M}^2 = \frac{2Z_{fu} h}{2Z_{fo} h} \cdot \frac{\left(\frac{a_o s_o}{B_{fo}} + \frac{a_s s_s}{B_{fs}}\right) h}{\left(\frac{a_u s_u}{B_{fu}} + \frac{a_s s_s}{B_{fs}}\right) h} \left[1 - \left(\frac{M_u}{M_{u0}}\right)\right] = \frac{Z_{fu}}{Z_{fo}} \cdot \frac{\beta_o}{\beta_u} \left[1 - \left(\frac{M_u}{M_{u0}}\right)\right] \quad (C.9)$$

Schliesslich ergibt Gl. (143) für den Fall, dass der Steg zur Drehachse wird:

$$\left(\frac{T_u}{T_{u0}}\right)^2 = \frac{\left(-\frac{c}{a_s}\right)}{1} \cdot \frac{2Z_{fu} h}{2Z_{fo} h} \cdot \frac{\left(\frac{a_o s_o}{B_{fo}} + \frac{a_s s_s}{B_{fs}}\right) h}{\left[\frac{a_o s_o}{B_{fo}} \cdot \frac{a_o}{2} + \frac{a_u s_u}{B_{fu}} \cdot \frac{a_u}{2} + \frac{a_s s_s}{B_{fs}} \left(\frac{a_o + a_u}{2}\right)\right] \frac{h}{a_s}} \cdot \left[\frac{1}{\left(-\frac{c}{a_s}\right)} \cdot \frac{(Z_{fo} a_o + Z_{fu} a_u) \frac{h}{a_s}}{2Z_{fu} h} - \left(\frac{M_u}{M_{u0}}\right)\right]$$

Nach Umformung und mit $2c=a_o-a_u$ wird:

$$\left(\frac{T_u}{T_{u0}}\right)^2 = \frac{Z_{fu}}{Z_{fo}} \left[\frac{(a_o - a_u) \beta_o}{a_o \beta_o + a_u \beta_u}\right] \cdot \left[\frac{(Z_{fo} a_o + Z_{fu} a_u)}{Z_{fu} (a_o - a_u)} + \left(\frac{M_u}{M_{u0}}\right)\right] \quad (C.10)$$

In Bild 34(b) ist der generelle Verlauf der Interaktionskurven aufgetragen worden. Man kann zeigen, dass sich die drei Kurven für diesen einfach symmetrischen Fall in einem Punkte A schneiden müssen. Da in diesem Punkt alle Längseisen und alle Bügel fliessen, kommen alle vier Seiten als Drehachsen in Frage. Es ist jedoch am anschaulichsten, im folgenden nur noch die beiden Interaktionskurven der

Gl. (C.8) und (C.9) zu betrachten. Ihr Schnittpunkt A bestimmt sich durch Gleichsetzung der rechten Seiten der Gl. (C.8) und (C.9) zu :

$$\frac{M_u(A)}{M_{u0}} = \frac{Z_{fu} \beta_o - Z_{fo} \beta_u}{Z_{fu} (\beta_o + \beta_u)} \quad (C.11)$$

Das dazugehörige Torsionsmoment berechnet sich durch Einsetzen von Gl. (C.11) in (C.8) mit:

$$\frac{T_u^2(A)}{T_{u0}^2} = \frac{(Z_{fo} + Z_{fu}) \beta_o}{Z_{fu} (\beta_o + \beta_u)} \quad (C.12)$$

Das Torsionsmoment $T_u(A)$ stellt das von einer bestimmten Armierung maximal aufnehmbare Torsionsmoment bei kombinierter Beanspruchung dar.

Von Interesse ist auch die Länge der Strecke B-C in Bild 34(b), um denjenigen Wert des Moments $M_u(B)$ zu kennen, von welchem an die Torsionstragfähigkeit geringer wird als diejenige bei reiner Torsion. Durch Einsetzen von $(T_u/T_{u0})^2 = 1$ in Gl. (C.9) wird:

$$1 - \frac{M_u(B)}{M_{u0}} = \frac{Z_{fo} \beta_u}{Z_{fu} \beta_o} \quad (C.13)$$

Eine proportionale Laststeigerung von T und M, die zueinander im Verhältnis κ stehen, stellt im Interaktionsdiagramm des Bildes 34(b) eine Gerade dar, die durch den Ursprung geht und die Steigung

$$\frac{T}{T_{u0}} / \frac{M}{M_{u0}} = \kappa \cdot \frac{M_{u0}}{T_{u0}} \quad (C.14)$$

besitzt. Wird für ein bestimmtes Verhältnis κ das Bruch-

moment $M_u(\kappa)$ direkt gesucht, so lässt sich dieses aus den obigen Interaktionsformeln, unter Einsetzung der Werte für M_{u0} und T_{u0} nach den Gl. (C.4) und (C.6) bestimmen.

Nimmt man z.B. an, dass die untere Armierung beim Bruch ins Fließen komme, so ergibt sich aus Gl. (C.9) mit $\kappa = T/M$:

$$\kappa^2 M_u^2 = T_{u0}^2 \frac{Z_{fu}}{Z_{fo}} \frac{\beta_o}{\beta_u} \left[1 - \left(\frac{M_u}{M_{u0}} \right) \right]$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung für M_u ergibt:

$$M_u(\kappa) = \frac{1}{2\kappa^2} \frac{T_{u0}^2}{M_{u0}} \frac{Z_{fu}}{Z_{fo}} \frac{\beta_o}{\beta_u} \left(-1 \pm \sqrt{1 + 4\kappa^2 \cdot \frac{M_{u0}^2}{T_{u0}^2} \frac{Z_{fo}}{Z_{fu}} \frac{\beta_u}{\beta_o}} \right)$$

Nach Einsetzung von M_{u0} und T_{u0} wird schliesslich, unter Berücksichtigung des positiven Vorzeichens der Wurzel:

$$M_u(\kappa) = 2 \cdot \frac{B_{fs} F_0^2}{\kappa^2 \beta_u h a_s s} \left(-1 + \sqrt{1 + 2Z_{fu} h \cdot \frac{\kappa^2 \beta_u h a_s s}{B_{fs} F_0^2}} \right) \quad (C.15)$$

und

$$T_u(\kappa) = \kappa \cdot M_u(\kappa)$$

Für kleine Torsionsmomente ($\kappa \rightarrow 0$) schreibt sich obiger Ausdruck mit Hilfe der Reihenentwicklung

$$\sqrt{1+\epsilon} = 1 + \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{8} \dots$$

$$M_u(\kappa)_{\kappa \rightarrow 0} = 2Z_{fu} h \left(1 - \frac{Z_{fu} h}{2} \frac{\kappa^2 \beta_u h a_s s}{B_{fs} F_0^2} \right) \quad (C.16)$$

Es ist ersichtlich, dass für $\kappa=0$ tatsächlich $M_u(\kappa)=M_{u0}$ wird. Ergibt die Plastizitätskontrolle mit Hilfe der Gl. (C.1)

$$Z_o = M_u^2(\kappa) \frac{\kappa^2 a_s s}{8 F_o^2 B_{fs}} (\beta_o + \beta_u) - Z_{fu} \quad (C.17)$$

dass $Z_o \leq Z_{fo}$, so ist das Bruchmoment gefunden, im andern Fall wird sich der folgende Bruchmechanismus einstellen.

Nimmt man an, dass die obere Armierung beim Bruch ins Fließen komme, so ergibt sich mit Gl. (C.8):

$$\kappa^2 M_u^2 = T_{u0}^2 \left[1 + \frac{Z_{fu}}{Z_{fo}} \left(\frac{M_u}{M_{u0}} \right) \right]$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung für M_u ergibt:

$$M_u(\kappa) = \frac{1}{2\kappa^2} \frac{T_{u0}^2}{M_{u0}} \frac{Z_{fu}}{Z_{fo}} \left(1 \pm \sqrt{1 + 4\kappa^2 \cdot \frac{M_{u0}^2}{T_{u0}^2} \frac{Z_{fo}^2}{Z_{fu}^2}} \right)$$

Nach Einsetzen von M_{u0} und T_{u0} wird:

$$M_u(\kappa) = 2 \cdot \frac{B_{fs} F_o^2}{\kappa^2 \beta_o h a_s s} \left(1 \pm \sqrt{1 + 2Z_{fo} h \cdot \frac{\kappa^2 \beta_o h a_s s}{B_{fs} F_o^2}} \right) \quad (C.18)$$

und

$$T_u(\kappa) = \kappa \cdot M_u(\kappa)$$

wobei das positive Vorzeichen der Wurzel für positive M , das negative für negative M gilt. Für reine Torsion ($\kappa=\infty$) wird nach Gl. (C.18) $M_u(\kappa)=0$ und $T_u(\kappa)=T_{u0}$. Für negative Biegemomente ergibt sich mit dem negativen Vorzeichen der Wurzel in Gl. (C.18) eine zu Gl. (C.15) analoge Beziehung, die sich für kleine Torsionsmomente ($\kappa \rightarrow 0$) wiederum durch Reihenentwicklung vereinfachen lässt zu:

$$M_u(\kappa)_{\kappa \rightarrow 0} = -2Z_{fo} h \left(1 - \frac{Z_{fo} h}{2} \frac{\kappa^2 \beta_o h a_s s}{B_{fs} F_o^2} \right) \quad (C.19)$$

Ergibt die Plastizitätskontrolle mit Hilfe der Gl. (C.1)

$$Z_u = M_u^2(\kappa) \frac{\kappa^2 a_s s}{8 F_0^2 B_{fs}} (\beta_o + \beta_u) - Z_{fo} \quad (C.20)$$

dass $Z_u \leq Z_{fu}$, so ist das Bruchmoment gefunden.

Interessiert man sich nur für das Bruchmoment, so kann die Plastizitätskontrolle durch einen Vergleich von $M_u(\kappa)$ mit $M_u(A)$ nach Gl. (C.11) ersetzt werden:

$$M_u(A) = \frac{2h(Z_{fu}\beta_o - Z_{fo}\beta_u)}{\beta_o + \beta_u} \quad (C.21)$$

Ist $M_u(\kappa) > M_u(A)$, so tritt die Drehachse $Z_o - Z_o$ ein, ist $M_u(\kappa) < M_u(A)$, so wird sich die Drehachse $Z_u - Z_u$ einstellen. An die stets notwendigen Kontrollen von $\tan \alpha$ und σ_D nach Gl. (129) und (130) soll hier nochmals erinnert werden.

4. Bemessung

Während bis anhin stets nach dem Bruchwiderstand eines bestimmt bewehrten Querschnitts für eine gegebene Belastungskombination gefragt wurde, soll nun noch auf die Bemessung eingegangen werden. Gesucht werden, bei gegebener Belastung und gegebenen Abmessungen, die Längs- und Bügelarmierung des Querschnittes. Zur Lösung dieser Aufgabe stehen im allgemeinen Fall zu wenig Gleichgewichtsbeziehungen zur Verfügung, um die (m+n) Unbekannten zu bestimmen.

Das Problem liesse sich vereinfachen, wenn man für $\tan \alpha$ über alle Wände einen konstanten Wert einsetzen könnte. Es sei deshalb zunächst untersucht, ob sich ein Winkel α finden lässt, für den die einzulegende Armierung minimal wird. Als Mass für das Stahlvolumen V kann die Summe der

Fliesskräfte der Längseisen und Bügel über die Länge 1 angesehen werden.

$$Y = \sum_1^m Z_{fi} + \sum_2^n B_{fk} \cdot \frac{a_k}{s_k} \quad (C.22)$$

Aus Gl. (C.1) wird mit $T=2F_0S$ und mit $B_{fk}=S \cdot s_k \operatorname{tg} \alpha_k$ nach Gl. (92) und mit $Z_i=Z_{fi}$ resp. $B_k=B_{fk}$:

$$\sum_1^m Z_{fi} = S \sum_2^n \frac{a_k}{\operatorname{tg} \alpha_k}$$

Damit wird:

$$Y = S \sum_2^n \frac{a_k}{\operatorname{tg} \alpha_k} + S \sum_2^n a_k \operatorname{tg} \alpha_k \quad (C.23)$$

Sollen alle Ableitungen von Y nach α_k verschwinden, so ergibt sich die Bedingung:

$$\frac{dY}{d\alpha_k} = S \left(\frac{-a_k}{\sin^2 \alpha_k} + \frac{a_k}{\cos^2 \alpha_k} \right) = 0$$

Daraus ergibt sich bei $S \neq 0$ die Bedingung:

$$\operatorname{tg} \alpha_k (Y_{\min}) = 1 \quad (C.24)$$

für das Minimum von Y . Es liegt deshalb nahe, der Bemessung das Fachwerk mit 45° -Diagonalen zugrunde zu legen. In Bild 34(c) ist der generelle Verlauf von Y bei konstantem $\operatorname{tg} \alpha$ nach Gl. (C.23)

$$\frac{Y}{S \cdot u} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \quad (C.25)$$

aufgezeichnet.

Mit $\text{tga} = 1$ lassen sich die Bügel mit Hilfe der Gl. (92) sofort bemessen. Da

$$B_k = S \cdot s_k \text{tga}_k = S \cdot s_k \quad (\text{C.26})$$

wird mit $S = T/2F_0$ und $B_k = \sigma_{Bk} F_{Bk}$:

$$\frac{F_{Bk}}{s_k} = \frac{T}{2F_0 \sigma_{Bk}} \quad (\text{C.27})$$

wobei für T das Gebrauchs- resp. das mit dem Sicherheitsfaktor multiplizierte Gebrauchsmoment, für σ_{Bk} die zulässige resp. die Fließspannung eingesetzt wird. Die Bügelarmierung wird somit bei gleicher Stahlqualität auf allen Seiten gleich stark.

Für die Bemessung der Längseisen-Stringer stehen noch die beiden Beziehungen (C.1) und (C.2) zur Verfügung. Diese sind für den vorliegenden einfach symmetrischen Kasten mit den beiden Unbekannten Z_0 und Z_u gerade ausreichend. Im allgemeinen Fall wären dank der zusätzlichen Beziehung (133) drei Unbekannte möglich. Ersetzt man in Gl. (C.1) ein $T/2F_0 = S$ mit B_k/s_k nach Gl. (C.26) so wird:

$$\sum_1^m Z_i = \frac{T}{2F_0} \sum_2^n a_k$$

Mit $\sum a_k = u$ (Umfang) und $\sum Z_i = \sum F_L \sigma_L$ ergibt sich die Beziehung für die Summe der Längseisen über den Querschnitt zu:

$$\frac{\sum F_L}{u} = \frac{T}{2F_0 \sigma_L} \quad (\text{C.28})$$

Dies ist für reine Torsion bereits die endgültige Bemessungsformel. Für kombinierte Beanspruchung benötigt man

noch Gl. (C.2). Legt man das Koordinatensystem wie in Bild 34(a) und ersetzt man $T/2F_0$ mit B_k/s_k wie oben, so wird aus Gl. (C.2):

$$M = \sum_1^m Z_i \cdot z_i - \frac{T}{2F_0} \sum_2^n a_k z_k = 2Z_u h - \frac{T}{2F_0} (a_u h + a_s h)$$

Daraus berechnet sich Z_u direkt zu:

$$Z_u = \frac{M}{2h} + \frac{T}{4F_0} (a_u + a_s) \quad (C.29)$$

woraus mit $Z_u = F_u \sigma_L$:

$$F_u = \frac{M}{2h\sigma_L} + \frac{T}{4F_0\sigma_L} (a_u + a_s) \quad (C.30)$$

Die Fläche der oberen Längseisen-Stringer F_o ergibt sich nun direkt aus (C.28) mit $\Sigma F_L = 2(F_o + F_u)$ zu:

$$F_o = - \frac{M}{2h\sigma_L} + \frac{T}{4F_0\sigma_L} (a_o + a_s) \quad (C.31)$$

In den beiden Beziehungen (C.30) und (C.31) ist für M und T das Gebrauchs- resp. das mit dem Sicherheitsfaktor multiplizierte Gebrauchsmoment, für σ_L die zulässige resp. Fließspannung einzusetzen.

Aus den beiden Gleichungen (C.30) und (C.31) ist ersichtlich, dass die Längsarmierung aus einem Biegungs- und einem Torsionsanteil zusammengesetzt werden kann. Da der innere Hebelarm bei stark bewehrten Querschnitten und bei überwiegendem Biegeanteil im Bruchzustand auch kleiner als h werden kann, empfiehlt es sich, den Biegeanteil in Gl. (C.30) nach der normalen Biegetheorie zu berechnen, solange der innere Hebelarm kleiner ist als h .

Zu beachten ist in Gl. (C.31), dass sich die aus der Tor-

sion erforderliche obere Längsbewehrung um die durch das Biegemoment erzeugte Druckkraft vermindert, so dass sich für Lastfälle, bei denen T und M gleichzeitig wirken, eine Reduktion der oberen Torsions-Längsbewehrung erzielen lässt.

Bei der Verteilung der so berechneten Flächen F_o und F_u der Längseisen-Stringer über den Querschnitt, hat man sich lediglich zu überzeugen, dass der Hebelarm der Resultierenden aller Längseisenkräfte mit dem in der Rechnung eingesetzten übereinstimmt (gleiche statische Momente). Auch sei nochmals an die Kontrolle des Betonversagens erinnert, wie sie in 5.3 aufgezeigt wurde (minimaler, maximaler Armierungsgehalt, obere Schubspannungsgrenze).

ANHANG D: Torsion und Biegung des Rechteck-Querschnitts

Der vor allem im Hochbau häufig vorkommende Rechteck-Querschnitt ist ein Spezialfall des Trapez-Querschnitts des Anhangs C. Die Belastung bestehe wiederum aus einem Torsionsmoment T und einem Biegemoment $M_y = M$. Die in die Querschnittsecken konzentrierten unteren Längseisen-Stringer besitzen die grössere Fließkraft als die oberen ($Z_{fu} > Z_{fo}$). Die Bügel seien geschlossen, so dass auf allen Seiten die Bügelfließkraft B_f und der Bügelabstand s dieselben sind (Bild 35(a)). Die folgenden Beziehungen leiten sich direkt aus denjenigen des Trapez-Querschnitts ab.

1. Reine Torsion und reine Biegung

Da B_f/s eine Konstante ist, ergibt sich aus Gl. (C.3) zunächst β_o zu:

$$\beta_o = 1 + \frac{b}{h} = \frac{b+h}{h}$$

Damit wird mit Gl. (C.4)

$$T_{u0}^2 = 8F_0^2 \cdot \frac{Z_{fo} B_f}{s(b+h)} = 16F_0^2 \cdot \frac{Z_{fo} B_f}{s \cdot u} \quad (D.1)$$

Daraus wird

$$T_{u0} = 4F_0 \cdot \sqrt{\frac{Z_{fo} \cdot B_f}{u \cdot s}} \quad (D.2)$$

Die Plastizitätskontrolle ergibt sich nach Gl. (C.5) mit $\beta_o = \beta_u$ zu:

$$Z_u = Z_{fo}$$

Da voraussetzungsgemäss $Z_{fu} > Z_{fo}$, ist immer $Z_u \leq Z_{fu}$ so dass T_{u0} nach Gl. (D.2) endgültig ist, sofern die Kontrollen von

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B_f}{S \cdot s} = \frac{2B_f F_0}{T \cdot s}$$

und

$$\tau = S/t = \frac{T}{2F_0 t}$$

die zulässigen Werte nicht überschreiten.

Für reine Biegung kann Gl. (C.6) direkt übernommen werden:

$$M_{u0} = 2Z_{fu} h \quad (D.3)$$

Ist das Biegebruchmoment M_u^B nach der üblichen Biegetheorie kleiner als M_{u0} , so gilt M_u^B als Biegebruchmoment. Die Kontrolle der Ueberarmierung darf nicht vergessen werden.

2. Interaktion Torsion-Biegung

Fällt die Drehachse mit derjenigen für reine Torsion zusammen, so bleibt Gl. (C.8) unverändert.

$$\left(\frac{T_u}{T_{u0}}\right)_{j=T}^2 = 1 + \frac{Z_{fu}}{Z_{fo}} \left(\frac{M_u}{M_{u0}}\right) \quad (D.4)$$

Für die Drehachse reiner Biegung ergibt sich aus Gl.

(C.9) mit $\beta_o = \beta_u$:

$$\left(\frac{T_u}{T_{u0}}\right)_{j=M}^2 = \frac{Z_{fu}}{Z_{fo}} \left[1 - \left(\frac{M_u}{M_{u0}}\right)\right] \quad (D.5)$$

Für die vertikale Seite als Drehachse vereinfacht sich Gl. (C.10) mit $(a_o - a_u) = 0$ zu :

$$\left(\frac{T_u}{T_{u0}}\right)^2 = \frac{Z_{fo} + Z_{fu}}{2Z_{fo}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{Z_{fu}}{Z_{fo}}\right) \quad (D.6)$$

also unabhängig von M_u/M_{u0} . In Bild 35(b) ist der Verlauf dieser drei Beziehungen aufgetragen. Die Interaktionsfigur ist zu einer durch den Punkt A gehenden vertikalen Axe symmetrisch. Dieser Punkt A, bei welchem alle Längseisen und alle Bügel fließen, bestimmt sich nach Gl. (C.11) mit $\beta_o = \beta_u$ zu:

$$\frac{M_u(A)}{M_{u0}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{Z_{fo}}{Z_{fu}}\right) \quad (D.7)$$

Das dazugehörige Torsionsmoment wird nach Gl. (C.12):

$$\frac{T_u^2(A)}{T_{u0}^2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{Z_{fu}}{Z_{fo}}\right) \quad (D.8)$$

also identisch Gl. (D.6). Die Länge der Strecke B-C in Bild 35(b) ergibt sich aus Gl. (C.13):

$$1 - \frac{M_u(B)}{M_{u0}} = \frac{Z_{fo}}{Z_{fu}} \quad (D.9)$$

Aus den obigen Gleichungen und Bild 35(b) ist ersichtlich, dass die Form der Interaktionskurven von der Armierungsverteilung Z_{fo}/Z_{fu} abhängt. Für den Fall reiner Torsionsarmierung ($Z_{fo}/Z_{fu}=1$) ist die Figur zur T_u/T_{u0} -Axe symmetrisch und geht dort durch 1. Eine Steigerung der Torsionstragfähigkeit durch gleichzeitig wirkende Biegemomente tritt für diesen Fall nicht ein.

Will man für ein bestimmtes Verhältnis $\kappa = T/M$ die Bruch-

momente $T_u(\kappa)$ und $M_u(\kappa)$ direkt bestimmen, so kann analog zu Anhang C vorgegangen werden, indem $\beta=(b+h)/h$ und $a_s=h$ gesetzt wird. Da aber für diesen Fall konstanter Bügelarmierung $\text{tg}\alpha$ ringsherum konstant ist, lässt sich ein einfacheres Vorgehen denken, bei welchem $\text{tg}\alpha$ direkt berechnet werden kann. Die Beziehungen (C.1) und (C.2) schreiben sich nach Einsetzen von

$$\frac{T}{2F_0} = S = \frac{B_f}{s \cdot \text{tg}\alpha} \quad (\text{D.10})$$

zu:

$$0 = \sum_1^m Z_i - \frac{T}{2F_0} \sum_2^n \frac{a_k}{\text{tg}\alpha} = \sum_1^m Z_i - \frac{T \cdot u}{2F_0 \text{tg}\alpha} \quad (\text{D.11})$$

$$M = \sum_1^m Z_i \cdot z_i - \frac{T}{2F_0} \sum_2^n \frac{a_k z_k}{\text{tg}\alpha} = \sum_1^m Z_i \cdot z_i - \frac{T}{2F_0 \text{tg}\alpha} \sum_2^n a_k z_k \quad (\text{D.12})$$

Setzt man zunächst $\text{tg}\alpha$ als bekannt voraus, so wird nach Gl. (D.12):

$$M_u(\kappa) = \frac{\sum_1^m Z_i \cdot z_i}{1 + \frac{\kappa \sum_2^n a_k z_k}{2F_0 \text{tg}\alpha}} \quad (\text{D.13})$$

Aus Gl. (D.10) wird ebenfalls

$$T_u(\kappa) = \kappa \cdot M_u(\kappa) = \frac{2F_0 B_f}{s \cdot \text{tg}\alpha} \quad (\text{D.14})$$

Ein Gleichsetzen von $M_u(\kappa)$ nach Gl. (D.13) und (D.14) ergibt die quadratische Gleichung für $\text{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{2F_0 B_f}{\kappa s \sum_1 Z_i \cdot z_i} - \frac{B_f \sum_2 a_k z_k}{s \sum_1 Z_i \cdot z_i} = 0$$

woraus

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_0 B_f}{\kappa s \sum_1 Z_i \cdot z_i} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{\kappa^2 s \sum_2 a_k z_k \sum_1 Z_i \cdot z_i}{F_0^2 B_f^2}} \right) \quad (\text{D.15})$$

Für eine bestimmte Drehachse lässt sich $\operatorname{tg} \alpha$ mit Gl. (D.15) ausrechnen und in Gl. (D.13) oder (D.14) einsetzen, womit $M_u(\kappa)$ oder $T_u(\kappa)$ erhalten wird.

Nimmt man z.B. an, dass die unteren Längseisen beim Bruch ins Fließen kommen (Drehachse $Z_o - Z_o$) und legt man das Koordinatensystem wie in Bild 35(a), so wird $\sum Z_i \cdot z_i = 2Z_{fu}h$ und $\sum a_k z_k = h(b+h)$ und

$$\operatorname{tg} \alpha_u = \frac{\lambda_u}{2\kappa} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{u\kappa^2}{b\lambda_u}} \right) \quad (\text{D.16})$$

mit

$$\lambda_u = \frac{B_f b}{Z_{fu} s} \quad (\text{D.17})$$

Damit wird nach Gl. (D.13):

$$M_u(\kappa) = \frac{2Z_{fu}h}{1 + \frac{u\kappa}{4b \cdot \operatorname{tg} \alpha_u}} \quad (\text{D.18})$$

und $T_u(\kappa) = \kappa \cdot M_u(\kappa)$, oder direkt mit Gl. (D.14).

Man überzeugt sich leicht davon, dass diese Beziehungen mit den in 2.3 abgeleiteten Gl. (51) und (61) für einen quadratischen Querschnitt übereinstimmen.

Als Plastizitätskontrolle dient Gl. (D.11) oder auch Gl. (D.7). Ist $M_u(\kappa) > M_u(A)$, wobei

$$M_u(A) = (Z_{fu} - Z_{fo})h$$

so stimmt die angenommene Drehachse $Z_o - Z_o$. Ist $M_u(\kappa) < M_u(A)$, so kommen die oberen Längseisen beim Bruch ins Fließen (Drehachse $Z_u - Z_u$). Legt man in Bild 35(a) die y-Axe durch die Drehachse $Z_u - Z_u$, so werden die analogen Beziehungen mit $\sum z_i \cdot z_i = -2Z_{fo}h$ und $\sum a_k z_k = -h(b+h)$ zu:

$$\operatorname{tg} \alpha_o = \frac{\lambda_o}{2\kappa} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{u\kappa^2}{b\lambda_o}} \right) \quad (D.19)$$

$$\lambda_o = \frac{B_f b}{Z_{fo} s} \quad (D.20)$$

$$M_u(\kappa) = \frac{2Z_{fo} h}{-1 + \frac{u\kappa}{4b \cdot \operatorname{tg} \alpha_o}} \quad (D.21)$$

$$T_u(\kappa) = \kappa \cdot M_u(\kappa)$$

Diese Beziehungen stimmen für einen quadratischen Querschnitt mit den in 2.3 abgeleiteten Gl. (54) und (62) überein.

Für den Fall reiner Biegung ($\kappa=0$) wird nach Gl. (D.16) $\operatorname{tg} \alpha_u(\kappa=0) = \infty$ und $M_u(\kappa=0) = 2Z_{fu}h$, was mit Gl. (D.3) übereinstimmt. Für den Fall reiner Torsion ($\kappa=\infty$) wird nach Gl. (D.19):

$$\operatorname{tg} \alpha_o(\kappa=\infty) = \sqrt{\frac{u\lambda_o}{4b}}$$

und nach Gl. (D.14):

$$T_u(\kappa=\infty) = 4F_0 \sqrt{\frac{z_{fo}}{u} \frac{B_f}{s}}$$

in Uebereinstimmung mit Gl. (D.2).

In den Gl. (D.16) und (D.19) kommt besonders schön zum Ausdruck, wie $tg\alpha$ vom Verhältnis der Bügel und Längseisen abhängig ist. Ueberschreitet $tg\alpha$ die zulässigen Werte nach Gl. (174), so wird $T_u(\kappa)$ durch Gl. (D.14) begrenzt. Auch sei an die Kontrolle der Sprödbbruchgefahr nach 5.3 erinnert.

3. Vergleich mit Versuchsergebnissen

Da die überwiegende Zahl von Torsions-Biege-Versuchen an Rechteckbalken durchgeführt wurde, soll die vorliegende Theorie anhand von Versuchen überprüft werden, von denen bekannt war, dass die Armierung beim Bruch ihre Fließspannung erreichte. Voraussetzung dafür ist vor allem ein enger Bügelabstand, der nicht zulässt, dass sich auf der Schmalseite Risse entwickeln können, die keinen Bügel schneiden.

In Bild 36(a) sind die in [12] zusammengestellten Versuche anhand der Interaktionskurven mit der vorliegenden Theorie verglichen. Die Auswertung ist in Tabelle II zu sehen. Da $M_u^B < M_{u0}$ wurden nach 5.2 die Versuchswerte M_u^{Ex} auf M_u^B bezogen. Die theoretischen Werte wurden im Versuch nirgends unterschritten. Die Werte für $tg\alpha = 2F_0 B_f / T_u s$ schwanken zwischen 0,56 und 1,07.

In Bild 36(b) wurden die in [13] beschriebenen Versuche analog behandelt. In Tabelle III ist ersichtlich, dass hier $M_u^B > M_{u0}$ wird, da der Abstand der Neutralachse vom

Druckrand sehr klein ist. Die Versuchswerte werden nach 5.2 in diesem Fall auf M_{u0} bezogen, wobei der günstige Einfluss des grösseren inneren Hebelarmes vernachlässigt wird. Entsprechend weichen die Versuchspunkte bei hohem Biegeanteil ein wenig mehr von der Theorie ab, doch liegen sie stets ausserhalb der theoretischen Interaktionskurven. Der generelle Verlauf der Interaktion, wie auch die Vorhersage des Bruchmechanismus werden jedoch bestätigt. Es ist daran zu denken, dass bei grösseren Querschnitten, und solche sind zur Aufnahme von Torsion auch anzustreben, dieser Effekt nicht mehr ins Gewicht fällt. Die Werte $tg\alpha$ schwanken zwischen 0,61 und 2,50, wenn von den reinen Biegeversuchen mit $tg\alpha = \infty$ abgesehen wird.

Schliesslich sei noch auf die eigenen Versuche verwiesen ([2], [3]), die an grösseren Querschnitten (50x50 cm) vorgenommen wurden. Ihr Vergleich zur Theorie wurde in Bild 9 bereits angestellt. Die Werte von $tg\alpha$ liegen zwischen 0,77 und 2,83. Neueste Versuche an Balken mit verschiedenen Querschnittsformen, an Balken mit pro Querschnittswand verschieden starker Bügelarmierung (Modell des Kastenquerschnitts einer Brücke) und an vorgespannten Balken [4] bestätigen die Gültigkeit dieser allgemeinen Theorie ebenfalls.

Damit konnte die aufgestellte Theorie des räumlichen Fachwerkmodells mit variabler Diagonalenneigung für Rechtecke in einem Bereich von $b/h = 1$ bis 0,5 und $Z_{fu}/Z_{fo} = 1$ bis 6,5 mit Werten für $tg\alpha$ zwischen 0,56 und 2,83 überprüft werden.

Tabelle II : Auswertung Versuche [12]

Serie	BxH cm	b x h cm	F ₀ cm ²	n	F ₁	F ₀	Z ₀ ⁿ¹⁾ t	Z ₀ ¹⁾ t	$\frac{Z_{f1})}{Z_{f0}}$	B _f t	s cm	M _{u0} Gi(D3) mt	M _u [12] mt	T _{u0} Gi(D2) mt	M _u ^{Ex} mt	T _u ^{Ex} mt	$\frac{M_u^{Ex}}{M_u}$	$\frac{T_u^{Ex}}{T_{u0}}$
QT 2,1															22,0	2,7	1,03	1,17
2,2		19,2 x 38,5	740	115,4	2 Ø 20 + 1,5 Ø 6	3 Ø 6	30,0	4,62	6,5	1,54	10	23,1	21,3	2,3	16,4	4,1	0,77	1,78
2,3		24 x 44													10,7	4,2	0,50	1,82
QT 3,1															21,9	3,2	0,99	0,91
3,2		19,2 x 38,5	740	115,4	2 Ø 20 + 2,5 Ø 6	4,5 Ø 6	31,6	6,95	4,5	1,54	6,7	24,4	22,1	3,5	20,1	5,0	0,91	1,43
3,3		24 x 44													12,6	5,0	0,57	1,43
QT 4,1															22,0	4,4	0,96	0,95
4,2		19,2 x 38,5	740	115,4	2 Ø 20 + 3,5 Ø 6	6 Ø 6	33,1	9,26	3,6	1,54	5	25,5	22,9	4,65	14,0	5,5	0,61	1,18

1) Ø 20: Z_f = 3,156 cm² · 4,39 t/cm² = 13,85 t Ø 6: Z_f = 0,306 cm² · 5,04 t/cm² = 1,54 t

Tabelle III : Auswertung Versuche [13]

Serie	BxH cm	b x h cm	F ₀ cm ²	n cm	F ₀ cm ²	F ₀ cm ²	Z _{f0} t	Z _{f0} t	Z _{f0} t	B _f t	s cm	M _{u0} Gi(D,3) mt	M _u ^B mt	T _{u0} Gi(D,2) mt	M _u ^{Ex} mt	T _u ^{Ex} mt	M _{u0} ^{Ex} mt	T _{u0} ^{Ex} mt
RE 1 ²⁾		79x173	137	50,4										0,87	0,07	0,94	0,05	1,08
RE 2						1,27				0,71 · 3,44 = 2,44	7,62				0,37	0,96	0,27	0,92
RE 3				54,4					1,0				1,38	1,04	0,52	0,94	0,38	0,90
RE 4		9,9 x 17,3	171					1,27 · 3,13 = 3,98							0,97	0,86	0,70	0,83
RE 5															1,24	0,76	0,90	0,73
RE 4 ¹⁾		16,5 x 25,4													1,54	0,44	1,11	0,42
RE 2 ¹⁾															1,84	0	1,33	0
RU 1															0,07	0,84	0,02	1,29
RU 3A ¹⁾															0,07	0,87	0,02	1,34
RU 2															0,59	0,98	0,19	1,51
RU 3															0,97	1,21	0,32	1,86
RU 3A															1,63	1,03	0,53	1,59
RU 4		94 x 16,4	154	51,6	2,85	0,71	0,71 · 3,44 = 2,44		3,84	0,71 · 3,44 = 2,44	10,15	3,08	3,54	0,65	1,67	0,98	0,54	1,51
RU 5								2,85 · 3,29 = 9,38							2,88	0,87	0,93	1,34
RU 5A															3,08	0,79	1,00	1,21
RU 6															3,24	0,68	1,05	1,05
RU 7															3,50	0	1,14	0

¹⁾ Versuchswiederholung mit anderem Belastungsverhältnis

²⁾ Grössere seitliche Ueberdeckung

4. Bemessung

Für die Bemessungsgleichungen werden die Resultate des Anhangs C verwendet, insbesondere auch die Tatsache, dass das Stahlvolumen für $\tan \alpha = 1$ minimal wird. Wie in Gl. (C.27) bestimmen sich die Bügelflächen aller vier Seiten mit

$$\frac{F_{Bk}}{s_k} = \frac{T}{2F_0 \sigma_{Bk}} \quad (D.22)$$

und die Summe der Längseisenflächen über den Querschnitt nach Gl. (C.28) zu

$$\frac{\Sigma F_L}{u} = \frac{T}{2F_0 \sigma_L} \quad (D.23)$$

was für reine Torsion bereits die Lösung darstellt. Für kombinierte Beanspruchung wird die Fläche der unteren Längseisen-Stringer nach Gl. (C.30) zu

$$F_u = \frac{M}{2h\sigma_L} + \frac{T \cdot u}{8F_0 \sigma_L} \quad (D.24)$$

und diejenige der oberen Längseisen-Stringer nach Gl. (C.31):

$$F_o = - \frac{M}{2h\sigma_L} + \frac{T \cdot u}{8F_0 \sigma_L} \quad (D.25)$$

Für M und T sind in obigen Beziehungen die Gebrauchts- resp. die mit dem Sicherheitsfaktor multiplizierten Gebrauchsmomente, für σ_{Bk} und σ_L die zulässigen resp. die Fließspannungen einzusetzen.

Die Längseisenflächen setzen sich aus 2 Anteilen zusammen, einem Biege- und einem Torsionsanteil. Wird der innere Hebelarm nach der plastischen Biegetheorie klei-

ner als h , so ist der Biegeanteil in Gl. (D.24) nach der Biegetheorie zu berechnen. Die obere Längsbewehrung kann gemäss Gl. (D.25) für Lastfälle, bei denen T und M gleichzeitig wirken, reduziert werden. Die Kontrolle des Betonversagens ist in 5.3 zusammengestellt (minimaler, maximaler Armierungsgehalt, obere Schubspannungsgrenze).

ANHANG E: Lastfall Vorspannung

Da in der Herleitung die Normalkraft mitberücksichtigt wurde, ist der Lastfall Vorspannung ebenfalls lösbar. Die bedeutend höhere Dehnung des Spannstahles an der Streckgrenze wirft die Frage auf, ob die Fliessspannung erreicht wird, bevor die Verformungen so gross werden, dass ein Schiebungs- oder Stauchungsbruch eintritt. In Bild 37(a) ist ersichtlich, dass bei der üblichen Vorspannung von etwa $0,65 \cdot \beta_z$ die schlaaffe und die Vorspannarmierung ihre Fliess- resp. Streckgrenze bei ähnlichen Dehnungswerten erreichen werden. Voraussetzung dazu ist allerdings ein einwandfreier Verbund der Vorspannkabel durch das Injektionsgut.

In Bild 37(b) ist ein Querschnitt durch ein Kabel mit der Vorspannkraft V der Exzentrizität e gespannt. In einem zweiten Schritt zieht man am Vorspannkabel so lange, bis die Betonspannungen über den gesamten Querschnitt zu null werden (Bild 37(c)). Dazu ist eine, über V hinausgehende, Kraft ($V + \Delta V$) erforderlich, um die elastische Zusammen-drückung des Betons beim Vorspannen aufzuheben (Dekompression). Die äussere Belastung M , T (Bild 37(d)) wirkt nun auf den dekomprimierten Querschnitt mit einer Armierung, die bereits eine Kraft ($V + \Delta V$) aufnimmt. Die verbleibende

Fliesskraft in der Armierung beträgt noch $V_f - (V+\Delta V)$. Auf der Höhe des Spannstahles muss die für die Dekompression verantwortliche Kraft $(V+\Delta V)$ durch eine fiktive Normalkraft $N' = -(V+\Delta V)$ aufgehoben werden. Damit ist aber ersichtlich, dass zur Bestimmung des Bruchwiderstandes der Spannstahl, der normal vorgespannt wird vor dem Bruch seine Streckgrenze erreicht, wie eine schlaaffe Armierung mit der Fliesskraft V_f betrachtet werden kann.

Ein Unterschied zwischen einem vorgespannten und einem schlaff armierten Träger gleicher Fliesskraft besteht jedoch, abgesehen von der verschiedenen Risslast, darin, dass die Gefahr eines Betonversagens vor dem Fliessen der Armierung bei vorgespannten Trägern zunimmt. Dies rührt von der Normalkraft N' her, wie dies in Bild 37(e) qualitativ illustriert wird. Der Verlauf der Interaktion T-N im Druckbereich, zwischen dem Stauchungsbruch B und dem schiefen Druckbruch C, wurde linear angenommen. Der Bildpunkt eines vorgespannten Querschnitts in diesem Diagramm sei E. Setzt man nun vereinfachend die gesamte Fliesskraft der Spannarmerung mit $N=0$ ein, so erhält man nach obigem Abschnitt dasselbe Torsionsbruchmoment (Punkt G). Es ist aber in Bild 37(e) klar zu erkennen, dass der Bildpunkt E näher beim spröden Betonversagen liegt als der Bildpunkt G ($\overline{EF} < \overline{CG}$).

Bild 1 : Räumliches Fachwerkmodell mit variabler Diagonalenneigung

Bild 2 : Idealisiertes räumliches Fachwerkmodell

Bild 3 : Spannungs-Dehnungs-Diagramm Stahl (idealisiert)

Bild 4 : Räumliches, quadratisches Fachwerkmodell

Bild 5 : Interaktion am Fachwerkmodell mit 45°-Diagonalen

Bild 6 : Schubwandelement (a) mit Gleichgewichtsdiagramm (b) und Interaktion Schub- Horizontalkraft (c)

(a)

	1	ω	Z	$B_f \frac{a}{s}$
$\omega =$		1		
O =		-H	1	$-\frac{1}{\tan^2 \alpha}$
O =		-V		$\frac{1}{\tan \alpha}$
$y_L =$	Z_f		-1	
$y_B =$	$B_f \frac{a}{s}$			-1

→ Max

(b)

	1	ω	Z	$B_f \frac{a}{s} \frac{1}{\tan^2 \alpha}$
$\omega =$		1		
O =		-H	1	-1
$y_L =$	Z_f		-1	
$y_B =$	$B_f \frac{a}{s} \frac{1}{\tan^2 \alpha}$			-1

→ Max

(c)

	1	ω	Z	$\frac{V_f^2 \cdot s}{B \cdot a}$
$\omega =$		1		
O =		-H	1	-1
$y_L =$	Z_f		-1	
$y_B =$	$\frac{V_f^2 \cdot s}{B \cdot a}$			1

→ Max

(d)

	1	ω	y_L	y_B
$\omega =$		1		
O =	$Z_f - \frac{V_f^2 \cdot s}{B_f \cdot a}$	-H	-1	-1
Z =	Z_f		-1	
$\frac{V_f^2 \cdot s}{B \cdot a} =$	$\frac{V_f^2 \cdot s}{B_f \cdot a}$			1

→ Max

(e)

	1	O	y_L	y_B
$\omega =$	$\frac{1}{H} [Z_f - \frac{V_f^2 \cdot s}{B_f \cdot a}]$	$-\frac{1}{H}$	$-\frac{1}{H}$	$-\frac{1}{H}$
Z =	Z_f		-1	
$\frac{V_f^2 \cdot s}{B \cdot a} =$	$\frac{V_f^2 \cdot s}{B_f \cdot a}$			1

→ Max

Bild 7: Matrizen - Tableaux für Schubwandelement

Bild 8: Verschiebungsplan (a), Matrizen-Tableau für kinematische Methode(b)

Bild 9: Interaktion am Fachwerkmodell mit variabler Diagonalenleigung

Bild 10 : Schnittkräfte in einem Schnitt senkrecht zur Stabachse

Bild 11: Schnittkräfte an einem ECKelement der Länge Δx

	1	ω	Z_1	...	Z_i	...	Z_m	$B_2 \cdot \frac{a_2}{s_2}$	...	$B_k \cdot \frac{a_k}{s_k}$	...	$B_n \cdot \frac{a_n}{s_n}$	Max →
$\omega =$		1											
$O =$		$-N$	1	...	1	...	1	$-\frac{1}{\text{tg}^2 \alpha_2}$	...	$-\frac{1}{\text{tg}^2 \alpha_k}$	...	$-\frac{1}{\text{tg}^2 \alpha_n}$	
$O =$		$-M_y$	z_1	...	z_i	...	z_m	$-\frac{z_2}{\text{tg}^2 \alpha_2}$	...	$-\frac{z_k}{\text{tg}^2 \alpha_k}$	...	$-\frac{z_n}{\text{tg}^2 \alpha_n}$	
$O =$		$-M_z$	$-y_1$	...	$-y_i$	...	$-y_m$	$\frac{y_2}{\text{tg}^2 \alpha_2}$	...	$\frac{y_k}{\text{tg}^2 \alpha_k}$	...	$\frac{y_n}{\text{tg}^2 \alpha_n}$	
$O =$		$-T$						$\frac{r_2}{\text{tg} \alpha_2}$	...	$\frac{r_k}{\text{tg} \alpha_k}$	...	$\frac{r_n}{\text{tg} \alpha_n}$	
$O =$		0						$-\frac{\sin \delta_2}{\text{tg} \alpha_2}$	...	$-\frac{\sin \delta_k}{\text{tg} \alpha_k}$	...	$-\frac{\sin \delta_n}{\text{tg} \alpha_n}$	
$O =$		0						$\frac{\cos \delta_2}{\text{tg} \alpha_2}$	...	$\frac{\cos \delta_k}{\text{tg} \alpha_k}$	...	$\frac{\cos \delta_n}{\text{tg} \alpha_n}$	
$y_{L1} =$	Z_{f1}		-1										
$\cdot$	$\cdot$												
$y_{Li} =$	Z_{fi}				-1								
$\cdot$	$\cdot$												
$y_{Lm} =$	Z_{fm}						-1						
$y_{B2} =$	$B_{r2} \frac{a_2}{s_2}$							-1					
$\cdot$	$\cdot$												
$\cdot$	$\cdot$												
$y_{Bk} =$	$B_{rk} \frac{a_k}{s_k}$									-1			
$\cdot$	$\cdot$												
$y_{Bn} =$	$B_{rn} \frac{a_n}{s_n}$											-1	

Bild 13: Tableau der Gleichgewichts- und Plastizitätsbedingungen

	1	ω	$Z_1 \dots\dots$	$Z_i \dots\dots$	Z_m	$S^2 \frac{a_2 s_2}{B_2} \dots$	$S^2 \frac{a_k s_k}{B_k} \dots$	$S^2 \frac{a_n s_n}{B_n}$	
$\omega =$		1							Max →
$O =$		$-N$	$1 \dots\dots$	$1 \dots\dots$	1	$-1 \dots\dots$	$-1 \dots\dots$	-1	Min →
$O =$		$-M_y$	$z_1 \dots\dots$	$z_i \dots\dots$	z_m	$-z_2 \dots\dots$	$-z_k \dots\dots$	$-z_n$	
$O =$		$-M_z$	$-y_1 \dots\dots$	$-y_i \dots\dots$	$-y_m$	$y_2 \dots\dots$	$y_k \dots\dots$	y_n	
$y_{L1} =$	Z_{f1}		-1						
	$\vdots$								
	$\vdots$								
$y_{Li} =$	Z_{fi}			-1					
	$\vdots$								
	$\vdots$								
$y_{Lm} =$	Z_{fm}				-1				
$y_{B2} =$	$-S^2 \frac{a_2 s_2}{B_{f2}}$					1			
	$\vdots$								
	$\vdots$								
$y_{Bk} =$	$-S^2 \frac{a_k s_k}{B_{fk}}$						1		
	$\vdots$								
	$\vdots$								
$y_{Bn} =$	$-S^2 \frac{a_n s_n}{B_{fn}}$							1	

Bild 14 : Modifiziertes Tableau der Gleichgewichts- und Plastizitätsbedingungen

1	$\ddot{u}$	$\dot{\phi}_y$	$\dot{\phi}_z$	$\dot{\varphi}$	$\dot{v}$	$\dot{w}$	$\dot{\epsilon}_{L1} \dots \dot{\epsilon}_{Li} \dots \dot{\epsilon}_{Lm}$	$\dot{\epsilon}_{B1} \dots \dot{\epsilon}_{Bk} \dots \dot{\epsilon}_{Bn}$	Min $\rightarrow$
$\omega =$							$Z_{f1} \dots Z_{fi} \dots Z_{fm}$	$B_{f2} \dots B_{fk} \dots B_{fn} \frac{a_k}{s_k} \dots \frac{a_n}{s_n}$	
$O =$	-1	M_y	M_z	T	O	O			
$O =$	-1	$-z_1$	y_1						
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$O =$	-1	$-z_1$	y_1						
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$O =$	-1	$-z_m$	y_m						
$O =$	$\frac{1}{tg^2 \alpha_2}$	$\frac{z_2}{tg^2 \alpha_2}$	$\frac{-y_2}{tg^2 \alpha_2}$	$\frac{-r_2}{tg \alpha_2}$	$\frac{\sin \delta_2}{tg \alpha_2}$	$\frac{-\cos \delta_2}{tg \alpha_2}$			
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$			
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$			
$O =$	$\frac{1}{tg^2 \alpha_k}$	$\frac{z_k}{tg^2 \alpha_k}$	$\frac{-y_k}{tg^2 \alpha_k}$	$\frac{-r_k}{tg \alpha_k}$	$\frac{\sin \delta_k}{tg \alpha_k}$	$\frac{-\cos \delta_k}{tg \alpha_k}$			
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$			
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$			
$O =$	$\frac{1}{tg^2 \alpha_n}$	$\frac{z_n}{tg^2 \alpha_n}$	$\frac{-y_n}{tg^2 \alpha_n}$	$\frac{-r_n}{tg \alpha_n}$	$\frac{\sin \delta_n}{tg \alpha_n}$	$\frac{-\cos \delta_n}{tg \alpha_n}$			
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$			
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$			
$O =$									

Bild 15: Tableau der kinematischen- und Leistungsbedingungen (dual zu Bild 13)

	1	$\dot{u}$	$\dot{\varphi}_y$	$\dot{\varphi}_z$	$\dot{\epsilon}_{L1} \dots$	$\dot{\epsilon}_{Li} \dots$	$\dot{\epsilon}_{Lm}$	$-\dot{\epsilon}_{B2}^{\pi} \cdot \text{tg}^2 \alpha_2 \dots - \dot{\epsilon}_{Bk}^{\pi} \cdot \text{tg}^2 \alpha_k \dots - \dot{\epsilon}_{Bn}^{\pi} \cdot \text{tg}^2 \alpha_n$	$\xrightarrow{\text{Min}} \xleftarrow{\text{Max}}$
$\omega =$					$Z_{f1} \dots$	$Z_{fi} \dots$	Z_{fm}	$-S^2 \frac{a_2 s_2}{B_{f2}} \dots - S^2 \frac{a_k s_k}{B_{fk}} \dots - S^2 \frac{a_n s_n}{B_{fn}}$	
$O =$	-1								
$O =$		-1	$-z_1$	y_1	1				
$\cdot$		$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$				
$\cdot$		$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$				
$\cdot$		$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$				
$O =$		-1	$-z_i$	y_i	1				
$\cdot$		$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$				
$\cdot$		$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$				
$O =$		-1	$-z_m$	y_m			1		
$O =$		1	z_2	$-y_2$				-1	
$\cdot$		$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$				$\cdot$	
$\cdot$		$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$				$\cdot$	
$\cdot$		$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$				$\cdot$	
$O =$		1	z_k	$-y_k$				-1	
$\cdot$		$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$				$\cdot$	
$\cdot$		$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$				$\cdot$	
$O =$		1	z_n	$-y_n$				-1	

Bild 16: Modifiziertes Tableau der kinematischen-und Leistungsbedingungen (dual zu Bild 14)

(a)

	1	$\dot{u}$	$\dot{\varphi}_z$	
$\omega =$	$\frac{c_2}{M_y}$	$c_1 - \eta c_2$	$c_3 - \rho c_2$	$\xrightarrow{\text{Min}}$
$\dot{\varphi}_y =$	$\frac{1}{M_y}$	$-\eta$	$-\rho$	
$0 \leq \dot{\epsilon}_{Li} =$	$\frac{z_i}{M_y}$	$1 - \eta z_i$	$-(y_i + \rho z_i)$	(i = 1 bis m)
$0 \leq -\dot{\epsilon}_{Bk}^{\text{II}} \cdot \text{tg}^2 \alpha_k =$	$\frac{z_k}{M_y}$	$1 - \eta z_k$	$-(y_k + \rho z_k)$	(k = 2 bis n)

(b)

	1	$-\dot{u}$	$-\dot{\varphi}_z$	
$\omega =$	$\frac{c_2}{M_y}$	$c_1 - \eta c_2$	$c_3 - \rho c_2$	$\xrightarrow{\text{Max}}$
$-\dot{\varphi}_y =$	$\frac{1}{M_y}$	$-\eta$	$-\rho$	
$0 \geq -\dot{\epsilon}_{Li} =$	$\frac{z_i}{M_y}$	$1 - \eta z_i$	$-(y_i + \rho z_i)$	(i = 1 bis m)
$0 \geq -\dot{\epsilon}_{Bk}^{\text{II}} \cdot \text{tg}^2 \alpha_k =$	$\frac{z_k}{M_y}$	$1 - \eta z_k$	$-(y_k + \rho z_k)$	(k = 2 bis n)

Bild 17 : Tableau als Grundlage für graphische Lösung

Bild 18 : Graphische Lösung der Mechanismus-Methode

Grundsystem

(a)

	1	x_1	$\dots$	x_i	$\dots$	x_m
$\omega =$	c_0	c_1	$\dots$	c_i	$\dots$	c_m
$0 \leq$	b_1	a_{11}	$\dots$	a_{i1}	$\dots$	a_{m1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
$0 \leq$	b_k	a_{k1}		A		a_{km}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
$0 \leq$	b_n	a_{n1}	$\dots$	a_{ni}	$\dots$	a_{nm}

Max

x_i, y_k nicht negative Variable

Bed.: $b_k \geq 0, c_i \leq 0$

Duales System

	1	y_1	$\dots$	y_k	$\dots$	y_n
$\omega =$	c_0	b_1	$\dots$	b_k	$\dots$	b_n
$0 \leq$	$-c_1$	$-a_{11}$	$-a_{k1}$	$-a_{n1}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$0 \leq$	$-c_i$	$-a_{i1}$	$-A'$	$-a_{ni}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$0 \leq$	$-c_m$	$-a_{1m}$	$-a_{km}$	$-a_{nm}$		

Min

Bed.: $b_k \geq 0, -c_i \geq 0$

(b)

	1	x_1	$\dots$	x_i	$\dots$	x_m
$\omega =$	c_0	c_1	$\dots$	c_i	$\dots$	c_m
$0 \leq$	b_1	a_{11}	$\dots$	a_{i1}	$\dots$	a_{m1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
$0 \leq$	b_k	a_{k1}		A		a_{km}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
$0 \leq$	b_n	a_{n1}	$\dots$	a_{ni}	$\dots$	a_{nm}

Min

x_i, y_k nicht negative Variable

Bed.: $b_k \geq 0, c_i \geq 0$

	1	y_1	$\dots$	y_k	$\dots$	y_n
$\omega =$	c_0	$-b_1$	$\dots$	$-b_k$	$\dots$	$-b_n$
$0 \leq$	c_1	$-a_{11}$	$-a_{k1}$	$-a_{n1}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$0 \leq$	c_i	$-a_{i1}$	$-A'$	$-a_{ni}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$0 \leq$	c_m	$-a_{1m}$	$-a_{km}$	$-a_{nm}$		

Max

Bed.: $-b_k \leq 0, c_i \geq 0$

(c) Duale Form (b)

nach Vorzeichenwechsel

	1	$-y_1$	$\dots$	$-y_k$	$\dots$	$-y_n$
$\omega =$	c_0	b_1	$\dots$	b_k	$\dots$	b_n
$0 \geq$	$-c_1$	$-a_{11}$	$-a_{k1}$	$-a_{n1}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$0 \geq$	$-c_i$	$-a_{i1}$	$-A'$	$-a_{ni}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$0 \geq$	$-c_m$	$-a_{1m}$	$-a_{km}$	$-a_{nm}$		

Max

Bild 19 : Dualitätsregeln

Bild 20 : Bruchmodell (a) und Drehachsen (b)

Bild 21: Beispiel

Bild 22 : Umformung für Interaktion Torsion - Biegung

Bild 23 : Umformung für Interaktion Torsion - Normalkraft

Bild 24 : Beispiel Interaktion Torsion - Biegung

Bild 25 : Beispiel Interaktion Torsion - Normalkraft

Bild 26 : Querschnittsformen

Bild 27 : Längsseiten im Druckbereich, Näherungslösung

Bild 28 : Begrenzung der Interaktion T-N im Druckbereich
(Versagen des Betons)

Bild 29 : Begrenzung des Umlagerungswinkels $\text{tg} \alpha_k$

	1	ω	$y_{L1} \cdot \cdot \cdot y_{Li} \cdot \cdot \cdot y_{Lm}$	$y_{B2} \cdot \cdot \cdot y_{Bk} \cdot \cdot \cdot y_{Bn}$	
$\omega =$		1			Max Min
$O =$	c_1	$-\eta M_y$	$-1 \cdot \cdot \cdot -1 \cdot \cdot \cdot -1$	$-1 \cdot \cdot \cdot -1 \cdot \cdot \cdot -1$	
$O =$	c_2	$-M_y$	$-z_{i1} \cdot \cdot \cdot -z_{im} \cdot \cdot \cdot -z_{in}$	$-z_{21} \cdot \cdot \cdot -z_{kn} \cdot \cdot \cdot -z_{nn}$	
$O =$	c_3	$-\rho M_y$	$y_{11} \cdot \cdot \cdot y_{1m} \cdot \cdot \cdot y_{1n}$	$y_{21} \cdot \cdot \cdot y_{kn} \cdot \cdot \cdot y_{nn}$	
$Z_1 =$	Z_{f1}		$-1.$		
	$\vdots$		$\cdot$		
	$\vdots$		$\cdot$		
$Z_i =$	Z_{fi}		$-1.$		
	$\vdots$		$\cdot$		
	$\vdots$		$\cdot$		
$Z_m =$	Z_{fm}		-1		
$S^2 \frac{a_2 s_2}{B_2} =$	$S^2 \frac{a_2 s_2}{B_{f2}}$			$1.$	
	$\vdots$			$\cdot$	
$S^2 \frac{a_k s_k}{B_k} =$	$S^2 \frac{a_k s_k}{B_{fk}}$			1	
	$\vdots$			$\cdot$	
$S^2 \frac{a_n s_n}{B_n} =$	$S^2 \frac{a_n s_n}{B_{fn}}$			1	

$$\eta = \frac{N}{M_y} \quad \rho = \frac{M_z}{M_y}$$

$$c_1 = \sum_1^m Z_{fi} - S^2 \sum_2^n \frac{a_k s_k}{B_{fk}} \quad c_2 = \sum_1^m Z_{fi} \cdot z_i - S^2 \sum_2^n \frac{a_k s_k z_k}{B_{fk}}$$

$$c_3 = -\sum_1^m Z_{fi} \cdot y_i + S^2 \sum_2^n \frac{a_k s_k y_k}{B_{fk}}$$

Bild 30: Tableau nach Austausch der freien und beschränkten Variablen

(a)

	1	0	$y_{Li} (i = 1 \text{ bis } n)$	$y_{Bk} (k = 2 \text{ bis } n)$	
$\omega =$	$\frac{c_2}{M_y}$	*	$-\frac{z_i}{M_y}$	$-\frac{z_k}{M_y}$	Max Min
$O =$	$c_1 - \eta c_2$	*	$-1 + \eta z_i$	$-1 + \eta z_k$	
$\omega =$	$\frac{c_2}{M_y}$	*	$-\frac{z_i}{M_y}$	$-\frac{z_k}{M_y}$	
$O =$	$c_3 - \rho c_2$	*	$y_i + \rho z_i$	$y_k + \rho z_k$	

Pivot : $-M_y$

	1	$y_{Li} (i = 3 \text{ bis } m)$	y_{Bk}	
$\omega =$	$\frac{c_2}{M_y} - \frac{(c_3 - \rho c_2)(\frac{z_1}{M_y})}{p}$	$-\frac{z_i}{M_y} - \frac{(y_i + \rho z_i)(\frac{z_1}{M_y})}{p}$	$-\frac{z_k}{M_y} - \frac{(y_k + \rho z_k)(\frac{z_1}{M_y})}{p}$	Max Min
$O =$	$c_1 - \eta c_2 - \frac{(c_3 - \rho c_2)(-1 + \eta z_1)}{p}$	$-1 + \eta z_i - \frac{(y_i + \rho z_i)(-1 + \eta z_1)}{p}$	$-1 + \eta z_k - \frac{(y_k + \rho z_k)(-1 + \eta z_1)}{p}$	
$y_{L1} =$	$\frac{-(c_3 - \rho c_2)}{p}$	$\frac{-(y_i + \rho z_i)}{p}$	$\frac{-(y_k + \rho z_k)}{p}$	

Pivot : $p = y_1 + \rho z_1$

	1	$y_{Li} (i = 5 \text{ bis } m)$	y_{Bk}	
$\omega =$	$\frac{c_2}{M_y} - \frac{(c_3 - \rho c_2)(\frac{z_1}{M_y})}{p} - \frac{1}{q} \left[\frac{z_3}{M_y} - \frac{(y_3 + \rho z_3)(\frac{z_1}{M_y})}{p} \right]$	$-\frac{z_i}{M_y} - \frac{(y_i + \rho z_i)(\frac{z_1}{M_y})}{p} - \frac{1}{q} \left[\frac{z_3}{M_y} - \frac{(y_3 + \rho z_3)(\frac{z_1}{M_y})}{p} \right]$	$-\frac{z_k}{M_y} - \frac{(y_k + \rho z_k)(\frac{z_1}{M_y})}{p} - \frac{1}{q} \left[\frac{z_3}{M_y} - \frac{(y_3 + \rho z_3)(\frac{z_1}{M_y})}{p} \right]$	Max Min
$y_{L3} =$	$\left[c_1 - \eta c_2 - \frac{(c_3 - \rho c_2)(-1 + \eta z_1)}{p} \right] \cdot \frac{-1}{q}$	$\left[-1 + \eta z_i - \frac{(y_i + \rho z_i)(-1 + \eta z_1)}{p} \right] \cdot \frac{-1}{q}$	$\left[-1 + \eta z_k - \frac{(y_k + \rho z_k)(-1 + \eta z_1)}{p} \right] \cdot \frac{-1}{q}$	
$y_{L1} =$	$\left[\frac{-(c_3 - \rho c_2)}{p} - \frac{1}{q} \left[\frac{-(y_3 + \rho z_3)}{p} \right] \right]$	$\left[\frac{-(y_i + \rho z_i)}{p} - \frac{1}{q} \left[\frac{-(y_3 + \rho z_3)}{p} \right] \right]$	$\left[\frac{-(y_k + \rho z_k)}{p} - \frac{1}{q} \left[\frac{-(y_3 + \rho z_3)}{p} \right] \right]$	

Pivot : $q = -1 + \eta z_3 - \frac{(y_3 + \rho z_3)(-1 + \eta z_1)}{p}$

Bild 31 : Tableaux der drei Austauschschritte der Nullen

	1	$\ddot{u}$	$\dot{\varphi}_y$	$\dot{\varphi}_z$	$\dot{\varphi}_z$	0	...	0	...	0	...	0	...	0	...	0	...	0	Min → (Max)
$\omega =$		c_1	c_2	c_3	c_3	$Z_{f1} \dots \dots \dots Z_{fi} \dots \dots \dots Z_{fm}$				$S^2 \frac{Q_2 S_2}{B_{f2}} \dots \dots \dots S^2 \frac{Q_k S_k}{B_{fk}} \dots \dots \dots S^2 \frac{Q_n S_n}{B_{fn}}$									
$O =$	-1	ηM_y	M_y	ρM_y	ρM_y														
$\dot{\epsilon}_{L1} =$		1	z_1	$-y_1$	$-y_1$	1													
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$													
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$													
$\dot{\epsilon}_{Li} =$		1	z_i	$-y_i$	$-y_i$	1													
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$													
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$													
$\dot{\epsilon}_{Lm} =$		1	z_m	$-y_m$	$-y_m$	1													
$-\dot{\epsilon}_{B2}^{\text{II}} \cdot \text{tg}^2 \alpha_2 =$		1	z_2	$-y_2$	$-y_2$														
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$														
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$														
$-\dot{\epsilon}_{Bk}^{\text{II}} \cdot \text{tg}^2 \alpha_k =$		1	z_k	$-y_k$	$-y_k$														
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$														
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$														
$-\dot{\epsilon}_{Bn}^{\text{II}} \cdot \text{tg}^2 \alpha_n =$		1	z_n	$-y_n$	$-y_n$														

Bild 32: Tableau nach Austausch der Nullen und beschränkten Variablen (dual zu Bild 30)

	1	$\dot{u}$	0	$\dot{\varphi}_z$	
$\omega =$	$\frac{c_2}{M_y}$	$c_1 - \eta c_2$	*	$c_3 - \rho c_2$	Min $\rightarrow$ $\leftarrow$ Max
$\dot{\varphi}_y =$	$\frac{1}{M_y}$	$-\eta$	*	$-\rho$	
$\dot{\epsilon}_{L1} =$	$\frac{z_1}{M_y}$	$1 - \eta z_1$	*	$-y_1 - \rho z_1$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$\epsilon_{Li} =$	$\frac{z_i}{M_y}$	$1 - \eta z_i$	*	$-y_i - \rho z_i$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$\epsilon_{Lm} =$	$\frac{z_m}{M_y}$	$1 - \eta z_m$	*	$-y_m - \rho z_m$	
$-\epsilon_{B2}^{II} \cdot \text{tg}^2 \alpha_2 =$	$\frac{z_2}{M_y}$	$1 - \eta z_2$	*	$-y_2 - \rho z_2$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$-\epsilon_{Bk}^{II} \cdot \text{tg}^2 \alpha_k =$	$\frac{z_k}{M_y}$	$1 - \eta z_k$	*	$-y_k - \rho z_k$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$-\epsilon_{Bn}^{II} \cdot \text{tg}^2 \alpha_n =$	$\frac{z_n}{M_y}$	$1 - \eta z_n$	*	$-y_n - \rho z_n$	

Bild 33: Tableau nach Austausch aller Nullen (dual zu Bild 31)

(a)

(b)

(c)

Bild 34 : Trapez - Querschnitt

(a)

(b)

Bild 35 : Rechteck – Querschnitt

Bild 36 : Vergleich der Theorie mit Versuchsergebnissen

(a)

(b) Vorspannung

(c) Dekompression

(d) Äussere Belastung

(e)

Bild 37 : Lastfall Vorspannung

BEZEICHNUNGEN

Längen, Flächen, Querschnitte

a	Seitenlänge des allgemeinen Querschnitts
b	Querschnittsbreite
c_1, c_2, c_3	Abkürzungen, siehe Gl. (126)
e	Exzentrizität des Vorspannkabels; Abstand der Normalkraft von der Drehachse
h	Querschnittshöhe
l	Länge
r	Hebelarm des Schubflusses; Trägheitsradius
s	Bügelabstand
t	Wandstärke eines Kastenquerschnitts
u	Umfang
x	Koordinatenaxe in Richtung der Balkenachse
y	Koordinatenaxe; Abstand von y-Axe
z	Koordinatenaxe; Abstand von z-Axe
F_0	Fläche, die von der Verbindungslinie der Längseisen-Stringer umschlossen wird
F_b	Betonfläche
F_e	Fläche der schlaffen Armierung
F_o, F_u	Fläche der oberen resp. unteren Längseisen-Stringers
F_B	Querschnittsfläche eines Bügels
F_L	Querschnittsfläche eines Längseisen-Stringers

ΣF_L	Summe der Längseisenflächen über den Querschnitt
I	Trägheitsmoment
K	Torsionskonstante

Kräfte und Momente

B	Zugkraft in der Bügelarmierung
B_f	Fliesskraft eines Bügels
D	Druckkraft in den Betondruckstreben
D_b	Resultierende der Betondruckspannungen
D_f	Druckfliesskraft in den Längseisen-Stringern
H	Horizontalkraft auf Schubwand
L	Gesamtleistung
L_a	Leistung der äusseren Kräfte
L_d	Dissipationsleistung
M	Biegemoment
M_f	Biegefliessmoment
M_u	Biegebruchmoment
M_{u0}	Bruchmoment für reine Biegung
M_u^B	Bruchmoment für reine Biegung nach Biegetheorie
N	Normalkraft
N_u	Bruchnormalkraft
N_{u0}	Bruchkraft für reine Zugbeanspruchung
N'	Fiktive Normalkraft
Q	Querkraft
S	Schubfluss

T	Torsionsmoment
T_f	Torsionsfliessmoment
T_u	Torsionsbruchmoment
T_{u0}	Bruchmoment für reine Torsion
V	Vertikalkraft auf Schubwand; Vorspannkraft
V_f	Fliesskraft der Vorspann-Armierung
Z	Kraft in einem Längseisen-Stringer
Z_f	Fliesskraft eines Längseisen-Stringers
Z_o, Z_u	Kraft in den oberen resp. unteren Längseisen-Stringern
Z_{fo}, Z_{fu}	Fliesskraft der oberen resp. unteren Längseisen-Stringers

Festigkeitswerte und Spannungen

β_z	Zugfestigkeit des Stahles
σ_e	Stahlspannung
σ_s	Spannung im Spannkabel
σ_f	Fliessspannung des Stahles
$\sigma_{0,2}$	Streckgrenze des Stahles
σ_B	Bügelspannung
σ_D	Spannung in der Betondruckdiagonalen
σ_L	Längseisenspannung
τ	Schubspannung
E	Elastizitätsmodul
G	Schubmodul

Verformungen, Winkel

α	Neigungswinkel der Betondruckkraft zur Balkenachse
γ	Schiebung
δ	Winkel zwischen y-Axe und Seitennormaler resp. Drehachse
ϵ	Dehnung
ϵ_b	Betondehnung
ϵ_f	Fliessdehnung des Stahles
ϵ_B	Bügeldehnung
ϵ_L	Längseisendehnung
ϑ	Verdrehungswinkel
φ	Krümmungswinkel
ψ	Winkelmass zwischen zwei anstossenden Querschnittswänden
u, v, w	Verschiebungen in x-, y-, z-Richtung

Dimensionslose Parameter

β_o, β_u	Verhältnis der Bügelfliesskräfte nach Gl. (C.3)
κ	Verhältnis Torsionsmoment T / Biegemoment M_y
λ_o, λ_u	Verhältnis Bügel-/Längsarmierung nach Gl. (D.17), (D.20)
ρ	Verhältnis Biegemoment M_z / Biegemoment M_y
ω	Traglastfaktor
n	Wertigkeit: $n = E_e/E_b$

n Verhältnis Normalkraft N / Biegemoment M_y
(nicht dimensionslos)

Indices

b	Beton
e	Eisen
f	FlieSS-
i	Numerierung Querschnittsecken; ideell
k	Numerierung Querschnittsseiten
j	Numerierung der Drehachsen
o	oben
s	Steg; Spannstahl
u	unten; ultimate
x,y,z	auf x-, y-, z-Axe bezogen
B	Bügel
D	Diagonale
L	Längseisen, Stringer
0	Null; reine Biegung, reine Torsion, usw.
M	infolge Biegung
N	infolge Normalkraft
T	infolge Torsion
Th	theoretisch
Ex	experimentell
.	Ableitung nach der Zeit

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] "Torsion of Structural Concrete", Publication SP-18, American Concrete Institute, Detroit, Michigan, 1966.
- [2] Lampert P./Thürlimann B.: "Torsionsversuche an Stahlbetonbalken", Bericht Nr. 6506-2, Juni 1968, Institut für Baustatik, ETH Zürich.
- [3] Lampert P./Thürlimann B.: "Torsions-Biege-Versuche an Stahlbetonbalken", Bericht Nr. 6506-3, Januar 1969, Institut für Baustatik, ETH Zürich.
- [4] Lampert P./Lüchinger P./Thürlimann B.: "Torsionsversuche an Stahl- und Spannbetonbalken", Bericht Nr. 6506-4, Institut für Baustatik, ETH Zürich (erscheint 1970).
- [5] Prager W.: "Probleme der Plastizitätstheorie", Birkhäuser Verlag Basel, 1955.
- [6] Thürlimann B./Ziegler H: "Plastische Berechnungsmethoden", Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, 1963.
- [7] Anderheggen E.: "Optimale Bemessung von Stabtragwerken", Prom.Nr.3710, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, 1966.
- [8] Stiefel E.: "Einführung in die numerische Mathematik", Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 2. Auflage, 1963.

- [9] Künzi H.P./Krelle W.: "Nichtlineare Programmierung", Springer-Verlag, 1962.
- [10] Lampert P.: "Torsion und Biegung von Stahlbetonbalken", Schweizerische Bauzeitung (erscheint 1970).
- [11] Kollbrunner C.F./Basler K.: "Torsion", Springer-Verlag, 1966.
- [12] "Versuche an torsionsbeanspruchten Bauteilen", Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau, Technische Universität Braunschweig (Veröffentlichung in der Schriftenreihe des DAfStb in Vorbereitung)
- [13] Walsh P.F./Collins M.P./Archer F.E./Hall A.S.: "Experiments on the Strength of Concrete Beams in Combined Flexure and Torsion", UNICIV Report No. R-15, February 1966, University of New South Wales, Kensington.