Formänderungen von Stahlbetonstützen unter exzentrischer Druckkraft

Working Paper**Author(s):**

Oelhafen, Urs Hans

Publication date:

1970

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000747221>

Rights / license:

In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

Originally published in:

Bericht / Institut für Baustatik ETH Zürich 31

**Formänderungen von
Stahlbetonstützen unter
exzentrischer Druckkraft**

Urs Hans Oelhafen

Oktober 1970
Bericht Nr. 31

Institut für Baustatik ETH Zürich

**Formänderungen von Stahlbetonstützen
unter exzentrischer Druckkraft**

von

Dr. sc. techn. Urs Hans Oelhafen

**Institut für Baustatik
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich**

**Zürich
Oktober 1970**

Leer - Vide - Empty

VORWORT

Zur Berechnung der Traglast und der Verformung von zentrisch und exzentrisch belasteten Stützen sind die Gleichgewichtsbedingungen am deformierten System zu formulieren (Theorie 2. Ordnung). Dabei spielt der Zusammenhang zwischen den Schnittkräften und den Verformungen eine entscheidende Rolle.

Die vorliegende Untersuchung wurde von Herrn U. Oelhafen als Dissertation (Referent Prof. Dr. B. Thürlimann, Korreferent Prof. Dr. A. Linder) ausgearbeitet. Zuerst wird als zentrale Beziehung für alle weiteren Berechnungen der Zusammenhang zwischen Axialkraft, Moment und Krümmung von Stahlbetonstützen hergeleitet. Für Beton und Stahl werden nichtlineare Spannungs-Dehnungsfunktionen verwendet. Das Kriechen des Betons wird durch eine nichtlinear-spannungsabhängige Kriechfunktion berücksichtigt, die für alle Belastungsgrade eine wirklichkeitsnahe Erfassung der Kriechverformungen erlaubt. Die Zuverlässigkeit einer Verformungsprognose wird durch die unvermeidlichen Streuungen der Materialeigenschaften und Querschnittswerte begrenzt. Bei einer Beschränkung auf stochastische Abweichungen gelingt es, mit Hilfe statistischer und wahrscheinlichkeitstheoretischer Betrachtungen sowohl auf die Vertrauensgrenzen der Momenten-Krümmungsbeziehungen als auch des Verlaufes der Biegelinie zu schliessen. Die entsprechenden numerischen Verfahren sind aufwendig und erfordern den Einsatz eines Computers.

Eidgenössische Technische
Hochschule - Zürich

Prof. Dr. Bruno Thürlimann

September 1970

Leer - Vide - Empty

Leer - Vide - Empty

Leer - Vide - Empty

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
1. Einleitung	9
2. Begriff der Krümmung	13
2.1 Lokale Krümmung und nominelle Krümmung	13
2.2 Dehnungsmessungen an Versuchsstützen - Streuungen der Messwerte	15
2.3 Nominelles Krümmungselement	21
2.4 Hypothese der linearen Dehnungsverteilung	21
2.5 Durchbiegungsberechnungen mit gemessenen Krümmungen - Vergleich mit gemessenen Durchbiegungen	24
3. Verformungseigenschaften von Beton und Stahl	27
3.1 Beton	27
3.1.1 Allgemeines	27
3.1.2 Spannungs-Dehnungsverhalten unter Kurzzeitbelastung	28
3.1.3 Spannungs-Dehnungsverhalten unter Langzeitbelastung	30
3.1.4 Einfluss wichtiger Parameter auf das Kriechverhalten	38
3.2 Stahl	39
4. Grundbeziehungen zwischen Moment und Krümmung	44
4.1 Generelle Voraussetzungen	44
4.2 Gleichgewichtsbedingungen	44
4.3 Elemente der Gleichgewichtsbedingungen für Kurzzeitbelastungen	47
4.3.1 Neutralaxe im Querschnitt	47
4.3.2 Neutralaxe ausserhalb des Querschnitts	50
4.4 Einfluss von Dauerbelastungen auf die Momenten-Krümmungsbeziehung	53
4.4.1 Zeitliche Aenderung der Spannungen und Dehnungen	53
4.4.2 Berechnungsvorschlag für Kriech- verformungen	55
4.5 Abschätzung der Schwindverformungen	71
4.6 Elemente der Gleichgewichtsbedingungen für Dauerbelastungen	77
4.6.1 Neutralaxe im Querschnitt	77
4.6.2 Neutralaxe ausserhalb des Querschnitts	79
4.7 Berechnung der Grundbeziehungen zwischen Moment und Krümmung	81
5. Nominelle Beziehungen zwischen Moment und Krümmung	84
5.1 Mitwirkung der Betonzugzone	84
5.1.1 Rissmoment	84
5.1.2 Korrektur der Grundbeziehungen durch Berücksichtigung der Betonzugzone	88

	Seite
5.2 Ueberprüfung der vorgeschlagenen Berechnungs- methoden für ϵ_{bon} , ϵ_{en} und ϕ_n anhand von Versuchsergebnissen	92
6. Streuungen in den Beziehungen zwischen Moment und Krümmung	103
6.1 Teilaufgabe des Sicherheitsproblems	103
6.2 Schwankungen der Materialeigenschaften und der Querschnittsabmessungen	105
6.2.1 Betonfestigkeit	105
6.2.2 Weitere Materialeigenschaften	115
6.2.3 Ungenauigkeiten der Querschnitts- abmessungen	115
6.3 Einflüsse einzelner Parameter auf die M - ϕ - Beziehung	116
6.4 Vertrauensbereich der M - ϕ - Beziehung	121
6.5 Einfluss einer Korrelation zwischen Moment und Krümmung	130
6.6 Ungewollte Auslenkung der Stützenaxe, ungewollte Lastexzentrizität	134
6.7 Ausblick	136
7. Berechnung von Biegelinien	138
7.1 Theoretische Grundlagen	138
7.1.1 Biegelinien infolge kurzzeitiger Lasteinwirkung	138
7.1.2 Biegelinien infolge Dauerlast	142
7.1.3 Vertrauensbereiche für Biegelinien	144
7.2 Gemessene und theoretische Biegelinien	147
7.2.1 Kurzzeitversuche	147
7.2.2 Langzeitversuche	150
Zusammenfassung	158
Summary	160
Anhang A: Momenten-Krümmungsdiagramme	162
Anhang B: Interaktionsbeziehungen	172
Anhang C: Parametereinflussfunktionen	174
Bezeichnungen	179
Literaturverzeichnis	189

1. EINLEITUNG

Baustatik und Festigkeitslehre sollen dem Ingenieur die Planung von wirtschaftlichen und sicheren Tragwerken ermöglichen. Diese Aufgabe kann mit den konventionellen Berechnungsmethoden nur unbefriedigend gelöst werden. Die im allgemeinen einfache Handhabung dieser Verfahren wird durch weitgehende Idealisierungen erkauft, die das tatsächliche Tragverhalten nur unvollständig - oder überhaupt nicht - zu beschreiben vermögen.

Die konventionelle Bemessungspraxis im Stahlbetonbau beruht im wesentlichen auf folgenden Voraussetzungen:

1. Die Formänderungen und Schnittkräfte werden mit den Steifigkeitswerten des ungerissenen Betonquerschnittes (Stadium I) berechnet. Für das ganze System wird elastisches Verhalten angenommen.
2. Die Bemessung der Querschnitte erfolgt für den gerissenen Zustand (Stadium II). Für Stahl und Beton wird elastisches Verhalten angenommen. Die Bemessung erfolgt auf zulässige Spannungen.

Die Risslast wird oft schon im Gebrauchszustand erheblich überschritten. Dabei bewirkt der teilweise Ausfall der Betonzugzone eine bedeutende Steifigkeitsabnahme. Diese Tatsache allein genügt, die erste Voraussetzung aufzugeben, wenn es sich um die Berechnung von Formänderungen handelt.

Um die Sicherheit einer Bemessung gegen ein Versagen des Tragwerks zuverlässig abschätzen zu können, ist eine rechnerische Ermittlung der tatsächlichen Tragfähigkeit des Systems erforderlich. Unter den genannten Voraussetzungen

ist ein Tragfähigkeitsnachweis jedoch nicht möglich. Das Einbeziehen der plastischen Berechnungsverfahren in die Bemessungspraxis bedeutete daher eine wesentliche Erweiterung der elastischen Bemessungsverfahren (z.B. [1]).

Die Berechnungsmethoden der Plastizitätstheorie setzen im allgemeinen einen elastisch-ideal-plastischen Zusammenhang zwischen Moment und Krümmung voraus. Trotz dieser Idealisierung des tatsächlichen Verhaltens ist in vielen Fällen (Durchlaufträger, Platten) eine zuverlässige Traglastberechnung möglich. Dabei ist unwichtig, ob der idealplastische Zustand über die elastische Gerade oder über eine nichtlineare Beziehung erreicht wird. Für die Traglast ist in diesen Fällen nur die Tatsache von Bedeutung, dass sich plastische Verformungen (plastische Gelenke, Bruchlinien) und damit Schnittkraftumlagerungen überhaupt einstellen können.

Für die Berechnung der Traglast von Stützen ist die Annahme einer elastisch-ideal-plastischen Momenten-Krümmungscharakteristik nicht mehr zulässig. Besonders bei schlanken Stützen sind die Schnittkräfte von den Formänderungen abhängig (Theorie zweiter Ordnung). Nur mit wirklichkeitsnahen Beziehungen zwischen Deformationen und Schnittkräften ist es möglich, die Traglast von Stützen mit einer vernünftigen Genauigkeit zu berechnen. In den Formänderungsbeziehungen müssen daher neue Erkenntnisse der Materialtechnologie berücksichtigt werden. Streuungen der Materialeigenschaften, nichtlinearer Spannungs-Dehnungs-Zusammenhang, durch Rissbildung bedingtes diskontinuierliches Formänderungsverhalten sowie Zeitabhängigkeit der Verformungen sind einige Aspekte, die bisher oft zu wenig oder überhaupt nicht berücksichtigt wurden.

Bild 1.1 zeigt ein Stabelement der Länge Δl , das durch die Schnittkräfte M und P beansprucht und verformt wird.

Bild 1.1 : Geometrischer Zusammenhang zwischen Dehnungen ϵ_{bo} , ϵ_e und Krümmungsradius ρ am Stabelement.

Zwischen der Krümmung $\frac{1}{\rho}$ und den Dehnungen ϵ_{bo} und ϵ_e besteht nach Bild 1.1 ein geometrischer Zusammenhang:

$$\frac{\Delta l}{\rho + \Delta \rho} \cong \frac{\Delta l}{\rho} = \frac{\Delta l (\epsilon_{bo} - \epsilon_e)}{h} \quad (1.1)$$

Mit $\phi = \frac{1}{\rho}$ folgt aus (1.1) :

$$\phi = \frac{\epsilon_{bo} - \epsilon_e}{h} \quad (1.2)$$

Die Krümmung ϕ ist von den Schnittkräften M und P abhängig:

$$\phi = f (M, P, k) \quad (1.3)$$

Der Parameter k deutet stellvertretend die Abhängigkeit der Krümmung von den geometrischen Querschnittswerten und den teilweise zeitabhängigen Materialeigenschaften an.

Der Momenten-Krümmungs-Zusammenhang ($M - \phi$ - Beziehung) darf als die wesentlichste Grundlage einer Theorie zweiter Ordnung für Stahlbetonkonstruktionen betrachtet werden. Die Entwicklung einer Methode zur Bestimmung zuverlässiger theoretischer $M - \phi$ - Beziehungen ist das Ziel dieser Arbeit. Versuchsmässig bestimmte Formänderungsgesetze dienen dabei als Grundlage. An einigen Versuchsstützen wird die Uebereinstimmung der theoretischen mit den gemessenen Krümmungen und Durchbiegungen untersucht.

Der Einfluss einer Querkraft auf die Krümmung ist ein komplexes Problem und wird in dieser Arbeit nicht untersucht. Bei Stützen darf dieser Einfluss sicher vernachlässigt werden, da keine oder nur unbedeutende Querbelastungen auftreten. Bei Balken jedoch können die Verformungen durch Querkräfte wesentlich beeinflusst werden (siehe [2], [3]).

2. BEGRIFF DER KRUEMMUNG

2.1 Lokale Krümmung und nominelle Krümmung

Bei gerissenen Stahlbetonelementen sind die Deformationen hauptsächlich auf die Riss-Bereiche konzentriert. Die Stauchungen am Betondruckrand und vor allem die Stahldehnungen steigen in der Umgebung der Rissquerschnitte stark an (Bild 2.1).

Bild 2.1: Dehnungs- und Krümmungsverlauf im Bereich von Biegerissen.

Die üblichen Rechenannahmen für das Stadium II vernachlässigen eine Mitwirkung des Betons auf Zug. Diese Voraussetzung ist aber nur im Rissquerschnitt annähernd erfüllt. Zwischen den Rissen überträgt die Zugarmierung

durch Haftspannungen einen grossen Teil der Stahlkraft auf den Beton. Das Mitwirken des Betons zwischen den Rissen hat in diesem Bereich eine Vergrösserung der Querschnittssteifigkeit zur Folge. Die Dehnungen $|\epsilon_e(x)|$ und die Stauchungen $\epsilon_{bo}(x)$ erreichen daher in der Mitte zwischen zwei Rissen ein Minimum.

Die Probleme der Rissbildung und des Zusammenwirkens von Beton und Stahl sind verwickelt. Sie wurden bis heute noch nicht restlos geklärt. Wesentliche Beiträge zu diesen Fragen sind in den Arbeiten [2][3][4][5] und [6] zu finden. Die Frage der Mitwirkung der Betonzugzone wird in Abschnitt 5.1 noch eingehender behandelt.

Nach der Beziehung (1.2) wird die Krümmung ϕ aus der Differenz der Dehnungen ϵ_e und ϵ_{bo} ermittelt. Aus Bild 2.1 ist ersichtlich, dass dieser Wert im Bereich zwischen zwei Rissen stark variiert, obwohl das angreifende Moment M konstant ist. Es ist offensichtlich, dass zwischen dem Moment und der Krümmung - berechnet aus den lokalen Dehnungen - kein einfacher Zusammenhang besteht. Der Begriff der Krümmung wurde jedoch mit der Absicht eingeführt, eine Grundlage für Verformungsberechnungen (Durchbiegungen, Knotendrehungen) zu schaffen. Von Interesse sind daher nicht die Lokalwerte der Krümmungen, sondern ihr Integral über grössere Bereiche der Stabaxe. Mit bekannten Dehnungsmittelwerten ϵ_{bon} und ϵ_{en} über die Länge einiger Rissabstände ist es dann möglich, eine mittlere Krümmung ϕ_n zu definieren, deren Integral mit jenem der lokalen, tatsächlichen Krümmung übereinstimmt und die mit dem Moment in einem direkten Zusammenhang steht:

$$\phi_n = \frac{\epsilon_{bon} - \epsilon_{en}}{h} = f(M, P, k) \quad (2.1)$$

Diese nominelle Krümmung darf dann selbstverständlich nicht dazu verwendet werden, eine Aussage über den Lokalwert irgendeiner Krümmung oder Dehnung zu machen.

2.2 Dehnungsmessungen an Versuchsstützen - Streuungen der Messwerte

Am Institut für Massivbau an der ETH wurden in den letzten Jahren Langzeit-Versuche an einunddreissig Stahlbetonstützen durchgeführt [7]. Das Ziel dieser Versuche war, den Einfluss des Kriechens auf die Traglast und die Verformungen zu ermitteln. Im Rahmen dieses Versuchsprogramms wurden auch sechs Kurzzeitversuche durchgeführt.

Bild 2.2 zeigt den am häufigsten verwendeten Stützentyp (Schlankheitsgrad $\lambda = l_k/i = 100$) und die Positionen der Messpunkte. Die Stützen waren statisch bestimmt gelagert und wiesen eine gleichseitige konstante Endexzentrizität der angreifenden Last auf (Bild 2.3).

Für die folgenden Untersuchungen wurden vier Kurzzeitversuche (Abmessung wie Bild 2.2) herangezogen. Die Exzentrizität e wurde in den einzelnen Versuchen variiert ($\frac{e}{d} = 0.0333, 0.10, 0.25, 1.0$).

In diesen Versuchen wurde die Last P in mehreren Stufen, bei konstanter Endexzentrizität e , bis zum Bruch gesteigert. Auf jeder Laststufe wurden während ungefähr 30 bis 45 Minuten die Durchbiegungen der Stützenaxe konstant gehalten. Diese Massnahme ermöglichte zuverlässige Dehnungsmessungen. Durch Relaxation des Betons und des Stahles bei höheren Laststufen trat ein deutlicher Abfall der Last P während der Messzeit auf. Die Dehnungsmessungen erfolgten mit mechanischen Deformometern über Messstrecken von 10 und 20 cm Länge. Die Ablese-

Bild 2.2: Versuchsstütze mit Abmessungen und Positionen der Messpunkte. Dieser Stützentyp wurde für 25 Versuche verwendet [7].

Bild 2.3: Belastungsschema der Versuchsstützen [7].

genauigkeit betrug 1/1000 mm. Der Mittelbereich der Stützen umfasste, sowohl auf der Zug- als auch auf der Druckseite, je 12 Messstrecken von 10 cm Länge zur Messung der Betondehnungen und je 4 Messstrecken von 20 cm Länge zur Messung der Stahldehnungen. Da in sämtlichen Fällen das Moment in diesem Bereich praktisch konstant war, musste auch die nominelle Krümmung konstant sein.

Für die kleinste Exzentrizität (Fall 1 : $\frac{e}{d} = 0.0333$) war der ganze Querschnitt bis kurz vor dem Erreichen der Bruchlast $P_{\max}$ vollständig gedrückt (keine Zugdehnungen). Bei der Exzentrizität $\frac{e}{d} = 0.10$ (Fall 2) traf dies ebenfalls bis ca. $0.75 \cdot P_{\max}$ zu. Für grössere Exzentrizitäten (Fall 3 und 4) traten Betonzugspannungen schon bei Belastungsbeginn auf, so dass sich der Mittelbereich hauptsächlich im Stadium II befand.

Bei vollkommener Homogenität des Betons wäre zu erwarten gewesen, dass im Fall des völlig gedrückten Betonquerschnitts keine Streuungen der Dehnungsmesswerte auftreten würden. Die Versuchsmessungen zeigten jedoch bedeutende Streuungen *).

- *) Der Durchschnitt oder Mittelwert einer Gruppe von n Einzelwerten $x_1, x_2, \dots x_n$ wird definiert als

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Die Streuung oder Standardabweichung oder mittlere quadratische Abweichung von n Einzelwerten $x_1, x_2, \dots x_n$ wird definiert als

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

(oft wird auch s^2 als Streuung bezeichnet)

Unvermeidliche Inhomogenitäten und ausführungstechnisch bedingte Schwankungen bei der Herstellung und Verarbeitung des Betons, könnten die Ursache dieser Streuungen sein. Die gemessenen Streuungen lagen wesentlich über der Streuung des Messverfahrens. Der Einfluss der Messgenauigkeit auf die Streuungsmessungen war daher unbedeutend. Aus den Grössenordnungen der Streuungen können jedoch einige Schlussfolgerungen gezogen werden:

In Abschnitt 2.1 wurde der Einfluss der Rissbildung auf die lokale Dehnungsverteilung beschrieben. Es ist daher zu vermuten, dass dieser Effekt eine starke Vergrösserung der Streuungen beim Uebergang vom ungerissenen zum gerissenen Querschnitt zur Folge hat. Diese Streuungszunahme müsste mit abnehmender Länge der Messstrecken immer deutlicher werden.

Aus Bild 2.4 ist dagegen zu erkennen, dass bezüglich der Grössenordnung der Streuungen zwischen dem ungerissenen (ausgezogene Linien) und dem gerissenen Querschnitt (gestrichelte Linien) kein offensichtlicher Unterschied besteht. Erst wenn die Dehnungen der Zugbewehrung (kaltverformter Stahl) die Proportionalitätsgrenze wesentlich überschreiten, nehmen sowohl die Streuungen der Betonstauchungen (Bild 2.4a) als auch der Stahldehnungen (Bild 2.4c) stark zu. Diese Erscheinung kann damit erklärt werden, dass die Zugarmierung lokal in einem Riss zu fliessen beginnt. Dadurch kann sich die Krümmung in einem kleinen Bereich um ein Mehrfaches vergrössern.

Diese Beobachtungen können wie folgt zusammengefasst werden:

1. Die über eine Basislänge von 10 cm bzw. 20 cm gemessenen Dehnungen (ϵ_{bo} , ϵ_e , ϵ'_e) weisen über einen grösseren Stützenabschnitt teilweise beträchtliche Streuungen auf.

Bild 2.4: Streuungen der gemessenen Stauchungen und Dehnungen in Abhängigkeit des Mittelwertes (Stütze Nr. 24, 31, 41, 53 nach [7])

2. Die Streuungen liegen für völlig gedrückte, wie für gerissene Stützenquerschnitte in derselben Grössenordnung, solange die Zugarmierung in keiner Messstrecke fliesst. Dies bedeutet, dass der Einfluss der Rissbildung auf die Variation der Dehnungen - schon für kleine Messstrecken - unbedeutend gegenüber dem Einfluss der Inhomogenität des Materials ist (10 cm entsprechen ungefähr dem doppelten minimalen Rissabstand).
3. Sobald die Zugarmierung zu fließen beginnt, ist eine starke Zunahme der Streuungen infolge grosser lokaler Deformationen in wenigen Rissen zu erkennen.

Die Abweichungen der Dehnungsmessungen vom Mittelwert, die aus Inhomogenitäten des Betons und Stahles resultieren, sind als zufällige Abweichungen zu betrachten, d.h. sie sind die Folge einer grossen Zahl von Ursachen deren Wirkung nicht vorausbestimmt werden kann. Die durchgeführten Dehnungsmessungen auf jeder Laststufe können daher als Zufallsstichprobe aus einer Grundgesamtheit aufgefasst werden. Die Grundgesamtheit im Sinne der Statistik [8] wäre in diesem Fall die Gesamtheit der Dehnungsmessungen an einer unendlichen Anzahl Stützen, die mit denselben Materialien und unter den gleichen Bedingungen hergestellt, belastet und gemessen würden.

Ein theoretisches Verformungsgesetz muss natürlich auf die Grundgesamtheit - in diesem speziellen Fall auf unendlich viele Stützen derselben Art - angewendet werden können. Die Werte ϵ_{bon} und ϵ_{en} sollen theoretische Ergebnisse der Verformungsgesetze sein. Sie müssen daher möglichst gute Näherungen der Mittelwerte der Grundgesamtheit sein. Diese Werte sind an sich unbekannt. Nach der Stichprobentheorie ist aber der Mittelwert einer Stichprobe die beste Schätzung für den Mittelwert der Grundgesamtheit. Aus dem Umfang und

der Streuung der Stichprobe kann zudem die Qualität dieser Schätzung beurteilt werden. Der Vergleich zwischen den theoretischen Werten ϵ_{bon} , ϵ_{en} und ϵ'_{en} mit den Versuchsergebnissen wird in Abschnitt 5.2 durchgeführt.

2.3 Nominelles Krümmungselement

Nach der Beziehung (2.1) wird die nominelle Krümmung aus den mittleren Dehnungen berechnet, die eine Funktion des Moments, der Normalkraft sowie der Material- und Querschnittsparameter sind.

Um die nominelle Krümmung in einfacher Weise für die numerische und besonders für die elektronische Berechnung von Biegelinien verwenden zu können, denken wir uns die Stablänge in Abschnitte der Länge Δl unterteilt. Ueber die Intervalllänge Δl wird das Moment, vereinfachend, als konstant angenommen. Unter dieser Voraussetzung ist auch die Krümmung ϕ_n über die Intervalllänge Δl konstant. Das Element der Länge Δl kann als nominelles Krümmungselement bezeichnet werden. Für das Element wird eine lineare Dehnungsverteilung über die Querschnittshöhe angenommen (vgl. Abschnitte 2.4 und 2.5).

Das Element in Bild 1.1 entspricht direkt dem nominellen Krümmungselement, wenn für ϵ_{bo} und ϵ_e die Werte ϵ_{bon} und ϵ_{en} gesetzt werden.

2.4 Hypothese der linearen Dehnungsverteilung

Die Krümmung $\phi = \frac{1}{\rho}$ wurde allgemein durch die Beziehung (1.2) definiert. Um die Berechnung der Durchbiegungen $w(x)$ aus den Krümmungen ϕ durchführen zu können, ist es notwendig, das

tinuitäten, über grössere Strecken, besteht.

Die Versuchsmessungen der Dehnungsverteilung über die Querschnittshöhe sind in Bild 2.6 für verschiedene Exzentrizitäten und Laststufen dargestellt.

Bild 2.6 : Dehnungsverteilung über die Querschnittshöhe, gemessen auf verschiedenen Laststufen über eine Messstrecke von 20cm (Stütze Nr. 24, 31, 41, 53 nach [7]).

Die Messungen bestätigen, dass sowohl für kleine wie für grosse Lastexzentrizitäten und für alle Laststufen der Ansatz einer linearen Dehnungsverteilung gerechtfertigt erscheint. Die Abweichungen von der Geraden sind sehr gering, obwohl die Messlänge nur 20 cm betrug.

2.5 Durchbiegungsberechnungen mit gemessenen Krümmungen - Vergleich mit gemessenen Durchbiegungen

Aus Abschnitt 2.2 geht hervor, dass die Dehnungsmessungen über grössere Strecken praktisch nur noch zufällige Streuungen (infolge Inhomogenitäten) aufweisen. Mit dieser Erkenntnis und der Bestätigung der linearen Dehnungsverteilung nach Abschnitt 2.4 muss eine zuverlässige Nachrechnung der Durchbiegungen aus den Dehnungsmessungen möglich sein.

In Tabelle 2.1 sind die gemessenen (w_M) und die aus den Dehnungen berechneten (w_R) Durchbiegungen in Stützenmitte für einzelne Laststufen dargestellt. (Vollständige Sätze von Dehnungsmessungen wurden nicht auf allen Laststufen durchgeführt.)

Tabelle 2.1

Vergleich zwischen gemessenen Durchbiegungen w_M und gerechneten Durchbiegungen w_R

Stütze Nr. nach [7]	$\frac{e}{d}$	w_M [cm]	w_R [cm]	$w_R - w_M$ [cm]	Stütze Nr. nach [7]	$\frac{e}{d}$	w_M [cm]	w_R [cm]	$w_R - w_M$ [cm]
31	1.0	.39	.43	.04	53	.10	1.15	1.23	.08
		.63	.71	.08			1.32	1.36	.04
		2.12	2.19	.07			1.50	1.55	.05
		1.22	1.27	.05			1.67	1.74	.07
		2.20	2.28	.08			1.85	1.96	.11
24	.25	.53	.51	-.02			1.84	1.87	.03
		10.49	10.64	.15			2.03	2.14	.11
53	.10	.24	.29	.05			2.47	2.57	.10
		.47	.50	.03			2.92	3.00	.08
		.63	.69	.06					
		.82	.82	0					
		.97	1.00	.03					
53	.0333				41		.09	.12	.03
							.64	.66	.02
							1.33	1.35	.02

In der vorstehenden Auswertung der Versuchsergebnisse macht sich ein systematischer Fehlereinfluss bemerkbar. Die aus den gemessenen Dehnungen berechneten Durchbiegungen übertreffen die gemessenen Durchbiegungen in 23 von 24 Fällen. Der Grund dafür liegt in der Art der Versuchsdurchführung. Auf jeder Laststufe wurde versucht, die Durchbiegung in Stützenmitte während der für die Dehnungsmessungen benötigten Zeit konstant zu halten. Eine zusätzlich eintretende Kriechdurchbiegung musste daher ständig durch eine Reduktion der äusseren Last rückgängig gemacht werden. Diese wurde aber erst reduziert, nachdem bereits eine Kriechdurchbiegung beobachtet werden konnte. Die tatsächlich vorhandenen Durchbiegungen lagen daher im Mittel etwas über den in der Tabelle 2.1 eingetragenen Sollwerten w_M .

Trotz diesem systematischen Fehlereinfluss ist die Uebereinstimmung ausserordentlich gut. Selbst bei grossen plastischen Verformungen von Stahl und Beton sind nur geringe Abweichungen zwischen Rechnungswerten und Messwerten zu verzeichnen. Die mittlere Abweichung beträgt nur 0.57 mm.

Die Krümmung - nach Definition (1.2) - darf daher als zuverlässige Grundlage für Durchbiegungsberechnungen von Stahlbetonstützen betrachtet werden.

3. VERFORMUNGSEIGENSCHAFTEN VON BETON UND STAHL

3.1 Beton

3.1.1 Allgemeines

Das Spannungs-Dehnungsdiagramm eines Betonprobekörpers zeigt einen gekrümmten Verlauf. Für eine konstante Spannungszunahme ist eine ständige Vergrößerung des Dehnungszuwachses festzustellen. Bei einer Erstbelastung ist ein Teil des nichtlinearen Verhaltens darauf zurückzuführen, dass einzelne, ungünstig gelagerte Gefügeteilchen zerstört werden. Diese irreversiblen Verformungen wachsen mit zunehmender Belastung. Der Anstieg der Spannungs-Dehnungskurve ist zudem stark zeitabhängig. Bild 3.1 wurde aus [9] entnommen und zeigt deutlich, dass die $\sigma_b - \epsilon_b$ - Kurve für grosse Dehngeschwindigkeiten viel steiler verläuft und höher ansteigt als für kleine Dehngeschwindigkeiten.

Bild 3.1: $\sigma_b - \epsilon_b$ -Kurven nach [9], gemessen an Probekörpern bei unterschiedlicher Dehngeschwindigkeit $\dot{\epsilon}_b$.

Längere Zeit einwirkende Belastungen bewirken also zusätzliche Verformungen. Diese Kriechverformungen setzen sich aus irreversiblen, plastischen Verformungen und aus reversiblen (nach der Entlastung wieder verschwindenden), anelastischen Verformungen zusammen. Zusätzlich treten Schwindverformungen auf, welche sich im Laufe der Zeit lastunabhängig entwickeln (Volumenverkleinerung). Die Ursachen für das Kriech- und Schwindverhalten des Betons sind die Porenwasserspannungen und die plastischen Eigenschaften der mehrmolekularen Wasserschichten der Gelpartikelchen um den Zementstein [10].

3.1.2 Spannungs-Dehnungsverhalten unter Kurzzeitbelastung

Die in der Stahlbetontheorie üblichen und häufig verwendeten Begriffe "Kurzzeitversuch" und "Kurzzeitbeanspruchung" sind zu wenig präzise. Als "Kurzzeitversuch" werden praktisch alle Versuche bezeichnet, deren Durchführung einige Minuten bis mehrere Stunden in Anspruch nimmt. Bild 3.1 zeigt aber deutlich, dass sich z.B. die Spannungs-Dehnungslinien, aufgenommen mit den Dehnungsgeschwindigkeiten $\dot{\epsilon}_b = 0,1 \text{ \%/Min.}$ und $\dot{\epsilon}_b = 0,1 \text{ \%}/100 \text{ Min.}$, deutlich voneinander unterscheiden. Eine sinnvolle Spannungs-Dehnungs-Definition muss daher mit einer präzisen Aussage über die Zeit der Lasteinwirkung verbunden sein.

Versuche an Kriechkörpern [11] über sehr kurze Zeitintervalle (1, 5 und 30 Minuten) zeigen eindrucklich, dass die Kriechdehnungsgeschwindigkeit, unmittelbar nach dem Aufbringen der Last, ausserordentlich gross ist. Die Versuche zeigen weiter, dass eine Linearität zwischen Kriechdehnungen und Spannungen nur bis ca. 40 % der Bruchfestigkeit besteht. Darüber hinaus nehmen die Kriechdehnungen stärker zu. Diese Beobachtung wird durch weitere Versuche anderer Autoren bestätigt. Eine ausführliche Zusammenstellung dieser Untersuchungen ist in [12] enthalten.

In Bild 3.2 sind beispielsweise Kriechverformungen ϵ_k nach 30 Minuten Dauerlast in Abhängigkeit von der Belastung dargestellt (aus [12]).

Bild 3.2: Abhängigkeit der Kriechdehnungen $\epsilon_k (t=30')$ vom Belastungsgrad G_b/β (aus [12]). Für $G_b/\beta > 0,4$ nehmen die Kriechdehnungen stark überlinear zu.

Die Richtlinien zur SIA-Norm Nr. 162 [13] empfehlen für statische Druckbeanspruchung das in Bild 3.3 dargestellte Diagramm mit der Einschränkung, dass für dynamische sowie für langdauernde Belastungen wesentliche Abweichungen vom dargestellten Diagramm zu erwarten sind.

Bild 3.3: G_b - ϵ_b -Diagramm, den Richtlinien zur SIA-Norm Nr.162 [13]entnommen. Diese Kurve wird annähernd bei einer Belastungsgeschwindigkeit von 0,1 % pro 30 Minuten erreicht.

$$\epsilon_{b1} = \frac{2\beta}{E_b} \quad (3.1)$$

Für $0 < \epsilon_b < \epsilon_{b1}$ gilt

$$\sigma_b = E_b \epsilon_b - \frac{E_b^2}{4\beta} \epsilon_b^2 \quad (3.2)$$

und für $\epsilon_{b1} < \epsilon_b < \epsilon_{Br}$

$$\sigma_b = \beta \quad (3.3)$$

Dieses Diagramm darf als gute Näherung einer $\sigma_b - \epsilon_b$ - Kurve betrachtet werden, wie sie bei einer Dehnungsgeschwindigkeit von ca. 0,1 % pro 30 Minuten aufgenommen werden kann. In den CEB-Empfehlungen [14] wird ein ähnliches Diagramm vorgeschlagen.

Für den Wert des E-Moduls empfehlen sowohl die SIA-Norm wie die CEB-Empfehlungen den Wert $E_b = 19'000 \sqrt{\beta_w}$. Da die Prismendruckfestigkeit β ca. 80 % von β_w beträgt, kann auch

$$E_b = 21'000 \sqrt{\beta} \quad (E_b, \beta \text{ in kg/cm}^2) \quad (3.4)$$

gesetzt werden.

Der $\sigma_b - \epsilon_b$ - Zusammenhang nach Bild 3.3 wird in dieser Arbeit als grundlegende Beziehung verwendet. Die Dehnungszunahmen infolge Kriechen werden als Abweichung von dieser Grundkurve formuliert.

3.1.3 Spannungs-Dehnungsverhalten unter Langzeitbelastung

Im Zusammenhang mit den beschriebenen Langzeitversuchen [7] wurde an 22 Prismen das Kriechverhalten des nichtarmierten zentrisch gedrückten Betons untersucht. An gleichzeitig hergestellten, aber unbelasteten Betonkörpern wurden

Schwindmessungen durchgeführt. Alle Prismen, sowie auch eine Anzahl Würfel zur Bestimmung der Betondruckfestigkeit, wurden aus denselben Betonmischungen wie die Versuchsstützen hergestellt. Die mittlere Prismenfestigkeit β der Kriechkörper betrug - bei einer Streuung von 43 kg/cm^2 - rund 260 kg/cm^2 . Praktisch alle Kriechkörper wurden im Alter von 28 Tagen unter Last gesetzt.

Die zur Zeit t gemessene Dehnung $\epsilon_b(t)$ setzt sich aus einer Kurzzeitdehnung ϵ_b (nach Bild 3.3), einer Kriechdehnung $\epsilon_k(t)$ und einer Schwinddehnung $\epsilon_s(t)$ zusammen. Die Kurzzeitdehnung ist gegeben durch

$$\epsilon_b = \epsilon_{b1} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\sigma_b}{\beta}} \right). \quad (3.5)$$

Aus den Kurzzeitdehnungen ϵ_b und den gemessenen Dehnungen $\epsilon_b(t)$ und $\epsilon_s(t)$ kann die Kriechdehnung berechnet werden:

$$\epsilon_k(t) = \epsilon_b(t) - \epsilon_b - \epsilon_s(t) \quad (3.6)$$

Die Kriechzahl $\varphi(t)$ wird definiert als Verhältnis von Kriechdehnung ϵ_k zur (nicht elastischen!) Kurzzeitdehnung ϵ_b

$$\varphi(t) = \frac{\epsilon_k(t)}{\epsilon_b} \quad (3.7)$$

In Bild 3.4 ist die Kriechzahl $\varphi(t)$, für verschiedene Belastungszeiten, als Funktion des Belastungsgrades $\frac{\sigma_b}{\beta}$ dargestellt.

In Anbetracht der grossen Streuungen und der wenigen zur Verfügung stehenden Proben, ist es leider nicht möglich, eine stark gesicherte Regressionskurve zwischen den Variablen $\varphi(t)$ und $\frac{\sigma_b}{\beta}$ zu bestimmen. Da mit zunehmendem Belastungsgrad eine relativ gleichmässige Zunahme der Kriechzahl festzustellen ist, wurde als Regressionsfunktion eine Gerade der Form

$$\varphi(t) = C_1(t) + C_2(t) \cdot \frac{\sigma_b}{\beta} \quad (3.8)$$

festgelegt.

Die Konstanten C_1 und C_2 wurden so bestimmt, dass die Summe der Quadrate der Abweichungen zwischen den gemessenen $\varphi(t)$ -Werten und der Regressionsgeraden minimal wird.

Bild 3.4: Kriechmass $\varphi(t)$ in Abhängigkeit des Belastungsgrades $\frac{\sigma_b}{\beta}$. Messwerte [7] mit zugehörigen Regressionsgeraden (7, 28 und 84 Tage nach Belastungsbeginn).

In Abschnitt 3.1.2 wurde auf die Schwierigkeiten hingewiesen,

die sich bei der Definition einer Kurzzeitdehnung ergeben. Unmittelbar nach dem Aufbringen der Belastung werden sehr grosse Kriechgeschwindigkeiten festgestellt. Das starke Anfangskriechen dauert einige Stunden. Es kann als abgeschlossen betrachtet werden, sobald die Kriechgeschwindigkeit ungefähr auf jene Grössenordnung abgesunken ist, die man nach einem Tag Dauerlast feststellen kann (Bild 3.5).

Bild 3.5: Verlauf der Kriechgeschwindigkeit $\dot{\epsilon}_k(t)$ in den ersten Tagen nach dem Aufbringen der Belastung (ausgeglichene Versuchsergebnisse[7]).

Um dieses starke Anfangskriechen erfassen zu können, wurde der folgende Weg beschritten:

1. Aus den gemessenen Dehnungen der ersten Tage konnte die Kriechdehnungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon}_k(t) = \frac{\Delta \epsilon_k(t)}{\Delta t}$ bestimmt werden. Dabei wurde der Zeitraum vom 1. bis zum 15. Tag berücksichtigt.
2. Die Beziehung $\dot{\epsilon}_k(t)$ wurde rückwärts, bis zum Zeitpunkt t_0 der Lastaufbringung, extrapoliert (Bild 3.5).

3. Mit der aus der ersten Dehnungsmessung $\epsilon_b(t_1)$ bestimmten Kriechdehnung $\epsilon_k(t_1)$ (zwischen dem 1. und dem 5. Tag nach der Belastung) und der bekannten Funktion der Kriechdehnungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon}_k(t)$, kann der Anfangskriechwert $\epsilon_k(t_0)$ bestimmt werden (Bild 3.5):

$$\epsilon_k(t_0) = \epsilon_k(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\epsilon}_k(t) \cdot dt \quad (3.9)$$

4. Für die Anfangskriechwerte $\epsilon_k(t_0)$ wurde ebenfalls eine Regressionsgerade der Form $\varphi(t) = C_1(t) + C_2(t) \cdot \frac{\sigma_b}{\beta}$ berechnet.

Bild 3.6 zeigt die Parameter C_1 und C_2 in Funktion der Zeit. Für $t \rightarrow \infty$ dürfte der Grenzwert von C_2 etwa bei 7.0 und von C_1 etwa bei 1.0 liegen.

Bild 3.6: Parameter $C_1(t)$ und $C_2(t)$ zur Bestimmung der Kriechfunktion $\varphi(t)$.
Versuchsmässig bestimmte Werte und ausgeglichener Verlauf derselben.

Die Qualität einer linearen Regression kann durch das Bestimmtheitsmass B charakterisiert werden [8]. B kann Werte zwischen 0 und 1 annehmen. $B = 0$ bedeutet, dass zwischen

zwei Veränderlichen x und y keinerlei lineare Abhängigkeit besteht. Die beiden möglichen Regressionsgeraden verlaufen parallel zu den entsprechenden Koordinatenachsen und verlieren somit ihre Bedeutung. Wenn $B = 1$ ist, fallen beide Regressionsgeraden zusammen, alle Punkte liegen auf einer Geraden; dadurch entsteht eine strenge lineare funktionale Beziehung. Das Bestimmtheitsmass gibt also den Anteil der Streuung von y an, der sich aus der Veränderung von x durch lineare Regression erklären lässt.

In den hier untersuchten Fällen betrug das Bestimmtheitsmass 0.59. Es darf angenommen werden, dass dieser Wert mit zunehmender Probenzahl noch ansteigen wird. Auf eine Wiedergabe der Prüfung der Regressionsgeraden wird hier verzichtet. Sie erfolgte nach den in [8] dargestellten statistischen Methoden und ergab, dass die lineare Regression in allen Fällen gerechtfertigt ist, dass die Neigungen aller Regressionsgeraden statistisch gesichert von null abweichen und dass die zeitliche Zunahme der Neigung ebenfalls statistisch gesichert ist.

Die Beziehungen (3.7) und (3.8) erlauben die Formulierung einer zeitabhängigen Spannungs-Dehnungsfunktion:

$$\epsilon_b(t, \frac{\sigma_b}{\beta}) = \epsilon_b(\frac{\sigma_b}{\beta}) \cdot [1 + \varphi(t)] + \epsilon_s(t) \quad (3.10)$$

oder mit (3.5) und (3.8)

$$\epsilon_b(t, \frac{\sigma_b}{\beta}) = \epsilon_{b1} [1 - \sqrt{1 - \frac{\sigma_b}{\beta}}] \cdot [1 + C_1(t) + C_2(t) \cdot \frac{\sigma_b}{\beta}] + \epsilon_s(t) \quad (3.11)$$

Bild 3.7 zeigt diese Spannungs-Dehnungs-Beziehung für einzelne ausgewählte Zeiten. Für $C_1(t)$ und $C_2(t)$ wurden die ausgeglichenen Werte aus Bild 3.6 verwendet. $\epsilon_s(t)$ bewirkt nur eine Horizontalverschiebung der einzelnen Kurven und wurde nicht berücksichtigt.

Versuche haben ganz allgemein ergeben, (z.B. [15]), dass die Grenze der Bruchfestigkeit für Dauerlasten deutlich tiefer liegt als für Kurzzeitbelastungen. Unter konstanter Belastung kann ein Versagen des Betons nur während einer gewissen Zeitperiode eintreten, da die Grenze der Bruchfestigkeit relativ bald in die Horizontale übergeht (Bild 3.7). Diese Zeitperiode ist um so kürzer, je jünger der Beton bei der Lastaufbringung ist. Das Verhältnis der Langzeit- zur Kurzzeitfestigkeit scheint ziemlich unabhängig vom Alter des Betons bei Belastungsbeginn zu sein. Die Belastungsgeschwindigkeit dagegen hat einen gewissen Einfluss auf dieses Verhältnis (Variation von β_{∞}/β zwischen 0.75 und 0.85).

Als Berechnungsgrundlage wird - nach Bild 3.7 - bei der SIA-Kurve $\sigma_{bmax} = \beta$, bei allen übrigen Kurven $\sigma_{bmax} = 0.8 \beta$ gesetzt.

Die Spannungs-Dehnungskurven in Bild 3.7 stimmen in der Größenordnung gut mit den CEB-Kurven [14] überein. Die t_0 - Kurve liegt zwischen den CEB-Kurven für 100 Minuten und 3 Tagen. Sie erfasst somit das Anfangskriechen in befriedigender Weise.

Bild 3.7: Spannungs-Dehnungsfunktion des Betons in Abhängigkeit der Zeit, nach Formel (3.11). Für $C_1(t)$ und $C_2(t)$ wurden die ausgeglichenen Werte aus Bild 3.6 eingesetzt.

3.1.4 Einfluss wichtiger Parameter auf das Kriechverhalten

Die in Bild 3.7 dargestellten Spannungs-Dehnungslinien wurden in den folgenden theoretischen Berechnungen verwendet. Sie wurden unter speziellen Bedingungen ermittelt und besitzen deshalb nur eine beschränkte Gültigkeit. Einzelne Parameter, die das Kriechverhalten wesentlich beeinflussen, wurden in den Versuchen möglichst konstant gehalten, so dass keine eindeutige Beeinflussung des Kriechverhaltens durch diese Parameter festzustellen war.

Wichtige, nicht untersuchte Einflussparameter sind:

Für das Schwinden: - relative Luftfeuchtigkeit
- Form und Grösse des Betonquerschnittes
(Austrocknungsmöglichkeiten)
- Wasserzementfaktor

Für das Kriechen: - Belastungsalter
- relative Luftfeuchtigkeit
- Form und Grösse des Betonquerschnittes
- Wasserzementfaktor

In [10] und [14] wird der Vorschlag gemacht, eine Grundkriechzahl, bzw. ein Grundschrindmass mit einzelnen Faktoren $k_1, k_2 \dots k_n$ zu multiplizieren, die je einen Einflussparameter berücksichtigen. Um die Anzahl der in der Praxis erforderlichen Momenten-Krümmungsdiagramme nicht unnötig zu vergrössern, wird in Abschnitt 6 vorgeschlagen, den Einfluss einzelner Parameter durch eine Korrektur der $M - \phi$ - Kurven zu berücksichtigen.

3.2 Stahl

Die in der Schweiz hauptsächlich verwendeten Stahleinlagen gehören nach der SIA-Norm 162 [13] entweder zur Gruppe IIIa (naturharte Stähle) oder zur Gruppe IIIb (kaltverformte Stähle). Beim naturharten Stahl genügen im allgemeinen die Fließ-Spannung σ_f und der E-Modul zur Definition einer idealisierten $\sigma - \epsilon$ - Beziehung.

$$\text{Für } \epsilon_e \leq \frac{\sigma_f}{E_e} \text{ gilt } \sigma_e = E_e \epsilon_e \quad (3.12)$$

$$\text{Für } \epsilon_e > \frac{\sigma_f}{E_e} \text{ gilt } \sigma_e = \sigma_f \quad (3.13)$$

Für σ_f fordert die SIA-Norm einen Nennwert von 4.6 t/cm^2 und für die Zugfestigkeit β_z einen Mindestwert von 5.6 t/cm^2 . Von der Gesamtproduktion dürfen höchstens 5 % den Nennwert unterschreiten.

Beim kaltverformten Stahl ist keine ausgesprochene Fließgrenze vorhanden. Es ist ein allmählicher Uebergang vom elastischen in den plastischen Bereich feststellbar. Für die Streckgrenze $\sigma_{0.2}$ fordert die SIA-Norm einen Nennwert von 4.6 t/cm^2 und für die Zugfestigkeit β_z einen Mindestwert von 4.8 t/cm^2 . Die Proportionalitätsgrenze σ_p liegt oft tiefer als 3.0 t/cm^2 ; sie wird von der SIA-Norm nicht festgelegt.

Im linearen Bereich $0 < \sigma_e \leq \sigma_p$ gilt die Beziehung (3.12). Im Bereich $\sigma_p < \sigma_e < \beta_z$ wird versucht, eine nichtlineare Spannungs-Dehnungsfunktion der folgenden Form anzusetzen:

$$\sigma_e = \beta_z - \frac{\Delta\sigma_1^2}{\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2} \quad (3.14)$$

Darin bedeuten (Bild 3.8):

$$\Delta\sigma_1 = \beta_z - \sigma_p \quad (3.15)$$

$$\Delta\sigma_2 = E_e \epsilon_e - \sigma_p \quad (3.16)$$

Bild 3.8: Idealisertes Spannungs-Dehnungsdiagramm für kaltverformte Stähle. Linearer Ansatz (3.12) im Bereich $0 \leq \sigma_e \leq \sigma_p$, nichtlinearer Ansatz (3.14) im Bereich $\sigma_p < \sigma_e \leq \beta_z$.

Die Beziehung (3.14) wird durch die Parameter σ_p , β_z und E_e vollständig bestimmt. Da kaltverformte Stähle üblicherweise durch die Streckgrenze $\sigma_{0.2}$ und nicht durch die - versuchsmässig schlecht bestimmbare - Proportionalitätsgrenze σ_p charakterisiert werden, ist es vorteilhafter, die nichtlineare Beziehung (3.14) durch die Größen $\sigma_{0.2}$, β_z und E_e festzulegen. Durch diese 3 Parameter wird auch der Wert von σ_p bestimmt.

Die Stahldehnung unter der Spannung $\sigma_{0.2}$ beträgt:

$$\epsilon_{0.2} = \frac{\sigma_{0.2}}{E_e} + 0.002 \quad (3.17)$$

Wird in den Beziehungen (3.14) und (3.16) $\epsilon_e = \epsilon_{0.2}$ und $\sigma_e = \sigma_{0.2}$ gesetzt, so kann nach σ_p aufgelöst werden:

$$\sigma_p = \sigma_{0.2} - \sqrt{0.002 \cdot E_e \cdot (\beta_z - \sigma_{0.2})} \quad (3.18)$$

Die Funktion (3.14) erweist sich als sehr anpassungsfähig. Für $\Delta\sigma_1 \rightarrow 0$ degeneriert die Hyperbel zur Geraden $\sigma_e = \beta_z$ und beschreibt somit das ideal-plastische Verhalten.

Versuche an kaltverformten Armierungsstählen ergeben, dass mit zunehmendem Stabdurchmesser eine Erhöhung der Festigkeit verbunden ist. Bild 3.9 zeigt ein Spannungs-Dehnungsdiagramm von TOR-Stahl für verschiedene Stabdurchmesser.

Bild 3.9: Spannungs-Dehnungsdiagramm für TOR-Stahl, ermittelt im Zusammenhang mit den Stützenversuchen [7].

Durch Einsetzen der versuchsmässig bestimmten Werte $\sigma_{0.2}$ und β_z in die oben formulierten Beziehungen, ergibt sich ein theoretischer Spannungs-Dehnungsverlauf. Der Vergleich zwischen den berechneten Werten σ_{eR} und den versuchsmässig ermittelten Werten σ_{eM} ist aus Tabelle 3.1 ersichtlich.

Tabelle 3.1

Vergleiche zwischen gemessenen Stahlspannungen σ_{eM} (Versuche [7]) und gerechneten Stahlspannungen σ_{eR} im plastischen Bereich.

	$\emptyset$ 6 mm			$\emptyset$ 10 mm			$\emptyset$ 16 mm		
$\epsilon_{0.2}$	0.411 % nach (3.17)			0.419 % nach (3.17)			0.448 % nach (3.17)		
β_z	5.34 t/cm ²			5.54 t/cm ²			5.74 t/cm ²		
$\sigma_{0.2}$	4.43 t/cm ²			4.60 t/cm ²			5.21 t/cm ²		
σ_p	2.49 t/cm ² nach (3.18)			2.62 t/cm ² nach (3.18)			3.70 t/cm ² nach (3.18)		
E_e	2100 t/cm ²			2100 t/cm ²			2100 t/cm ²		
ϵ_e	σ_{eM} [t/cm ²]	σ_{eR} [t/cm ²]	$\frac{\sigma_{eR}}{\sigma_{eM}}$	σ_{eM} [t/cm ²]	σ_{eR} [t/cm ²]	$\frac{\sigma_{eR}}{\sigma_{eM}}$	σ_{eM} [t/cm ²]	σ_{eR} [t/cm ²]	$\frac{\sigma_{eR}}{\sigma_{eM}}$
0.3 %	4.13	4.12	1.00	4.25	4.25	1.00	4.55	4.84	1.06
$\epsilon_{0.2}$	4.43	4.43	1.00	4.60	4.60	1.00	5.21	5.21	1.00
0.6 %	4.63	4.71	1.02	4.88	4.88	1.00	5.35	5.36	1.00
1.0 %	4.80	4.96	1.03	5.10	5.14	1.01	5.62	5.53	.98
2.0 %	5.05	5.15	1.02	5.35	5.34	1.00	5.70	5.64	.99
4.0 %	5.32	5.24	.98	5.52	5.44	.99	5.74	5.69	1.01

Zwischen theoretischen und versuchsmässigen Ergebnissen besteht eine gute Uebereinstimmung. Das Spannungs-Dehnungsverhalten im nichtlinearen Bereich wird demnach durch die Beziehung (3.14) mit genügender Genauigkeit beschrieben.

Die beachtliche Variation der Streckgrenze in Bild 3.9 ist auf eine stärkere Verwindung der grösseren Stabdurchmesser und damit auf einen erhöhten Einfluss der Kaltverformung zurückzuführen. Belastungsgeschwindigkeit und Herstellungsqualität beeinflussen die Festigkeit ebenfalls. Den theoretischen Momenten-Krümmungsberechnungen wurde jedoch - wie für den Beton - ein einheitliches $\sigma - \epsilon$ - Diagramm zugrunde gelegt. Bei Abweichungen von dieser Grundbeziehung wird in Abschnitt 6 ein Verfahren zur entsprechenden Korrektur der $M - \phi$ - Kurven empfohlen.

4. GRUNDBEZIEHUNGEN ZWISCHEN MOMENT UND KRUEMMUNG

4.1 Generelle Voraussetzungen

Alle Ableitungen und Berechnungen werden der Einfachheit halber für den Rechteckquerschnitt (häufigster Stützenquerschnitt) durchgeführt. Sie können aber sinngemäss auch bei andern Querschnittsformen angewendet werden.

Die Grundbeziehungen werden unter folgenden generellen Voraussetzungen berechnet:

1. Die Dehnungsverteilung über den Querschnitt ist linear.
2. Die Betondruckspannungen werden entsprechend den Beziehungen des Abschnitts 3.1 angesetzt.
3. Das Mitwirken des Betons im Zugbereich wird vernachlässigt.
4. Die Stahlspannungen werden entsprechend den Beziehungen des Abschnitts 3.2 angesetzt.
5. Für Stahlzugspannungen wie für Stahldruckspannungen wird die gleiche Spannungs-Dehnungscharakteristik verwendet.

Die Dehnungen der Grundbeziehungen werden mit ϵ_{bo} , ϵ_{bu} , ϵ'_e und ϵ_e ; die Krümmung mit ϕ bezeichnet (Bild 4.1).

4.2 Gleichgewichtsbedingungen

Bild 4.1 zeigt den durch eine exzentrische Druckkraft beanspruchten Rechteckquerschnitt sowie die zugehörige Dehnungs- und Spannungsverteilung. Die Beton- und Stahlspannungen müssen mit der exzentrisch wirkenden Kraft P im Gleichgewicht sein.

Bild 4.1: Verteilung der Spannungen und Dehnungen im gerissenen, exzentrisch gedrückten Stahlbetonquerschnitt. Der Einfluss der mitwirkenden Betonzugzone wird hier vernachlässigt. In Abschnitt 5 wird ein entsprechender Korrekturvorschlag zur Berücksichtigung dieses Einflusses gemacht.

Die Gleichgewichtsbedingungen werden bezüglich der Betonschwerachse formuliert.

Die Komponentenbedingung lautet:

$$P = \int_{F_b} \sigma_b \, dF_b + \sigma'_e F'_e + \sigma_e F_e \quad (4.1)$$

und die Momentenbedingung:

$$M = P \cdot e = \int_{F_b} \sigma_b (x - x_o) \, dF_b + \sigma'_e F'_e \left(\frac{d}{2} - h' \right) + \sigma_e F_e \left(\frac{d}{2} - h \right) \quad (4.2)$$

Um die $M - \phi$ - Diagramme unabhängig von den Absolutwerten der Querschnittsabmessungen darstellen zu können, werden die dimensionslose Druckkraft

$$p = \frac{P}{\beta b d} \quad (4.3)$$

und das dimensionslose Moment

$$m = \frac{M}{\beta b h^2} \quad (4.4)$$

eingeführt.

Die Gleichgewichtsbedingungen können damit umgeschrieben werden:

$$p = p_b + p_e + p'_e \quad (4.5)$$

$$m = m_b + m_e + m'_e \quad (4.6)$$

Mit den Abkürzungen $\gamma = \frac{d}{h}$, $\gamma' = \frac{d}{h'}$, $\delta = \frac{h'}{h}$, $\mu = \frac{F_e}{bh}$ und $\mu' = \frac{F'_e}{bh}$ lassen sich die einzelnen Summanden wie folgt darstellen:

$$p_b = \frac{1}{\beta b d} \int_{F_b} \sigma_b dF_b \quad (4.7)$$

$$p_e = \frac{\sigma_e}{\beta} \cdot \frac{\mu}{\gamma} \quad (4.8)$$

$$p'_e = \frac{\sigma'_e}{\beta} \cdot \frac{\mu'}{\gamma} \quad (4.9)$$

$$m_b = \frac{1}{\beta b h^2} \int_{F_b} \sigma_b (x - x_0) dF_b \quad (4.10)$$

$$m_e = \frac{\sigma_e}{\beta} \cdot \mu \left(\frac{\gamma}{2} - 1 \right) \quad (4.11)$$

$$m'_e = \frac{\sigma'_e}{\beta} \cdot \mu' \left(\frac{\gamma}{2} - \delta \right) \quad (4.12)$$

Die Grössen p und m sind Funktionen der Dehnungen:

$$p = p_b(\epsilon_{bo}, \epsilon_e) + p_e(\epsilon_e) + p'_e(\epsilon_{bo}, \epsilon_e) \quad (4.13)$$

$$m = m_b(\epsilon_{bo}, \epsilon_e) + m_e(\epsilon_e) + m'_e(\epsilon_{bo}, \epsilon_e) \quad (4.14)$$

Da p und m im allgemeinen gegebene Grössen sind, sollte dieses Gleichungssystem nach den Unbekannten ϵ_{bo} und ϵ_e aufgelöst werden, was sich jedoch als zu kompliziert erweist. Die Auflösung erfolgte daher durch ein Iterationsverfahren und wurde elektronisch durchgeführt. Die entsprechenden Blockdiagramme sind in Bild 4.14 und Bild 4.15 dargestellt.

4.3 Elemente der Gleichgewichtsbedingungen für Kurzzeitbelastungen

4.3.1 Neutralaxe im Querschnitt

Bezüglich der Dehnungen ϵ_{bo} , ϵ_e und ϵ'_e sind folgende Fälle möglich:

Für den Beton 1. $\epsilon_{bo} \leq \epsilon_{b1}$

2. $\epsilon_{bo} > \epsilon_{b1}$

Für den Stahl 3. $|\epsilon_e| \leq |\epsilon_p|$

4. $|\epsilon_e| > |\epsilon_p|$

5. $\epsilon'_e \leq \epsilon'_p$

6. $\epsilon'_e > \epsilon'_p$

Für die Spannungsverteilung im Beton wird die $\sigma - \epsilon$ - Kurve nach Bild 3.3, für die Stahlspannungen wird die $\sigma - \epsilon$ - Kurve nach Bild 3.8 verwendet. ϵ_{b1} ist durch Formel (3.1) gegeben, ϵ_p und ϵ'_p werden aus σ_p (Formel (3.18)) berechnet.

Die bezogene Höhe der Biegedruckzone und die Stahldehnung ϵ'_e lassen sich durch die Dehnungen ϵ_{bo} und ϵ_e ausdrücken:

$$\xi = \frac{x_1}{h} = \frac{\epsilon_{bo}}{\epsilon_{bo} - \epsilon_e} \quad (4.15)$$

$$\epsilon'_e = \epsilon_{bo} - \delta(\epsilon_{bo} - \epsilon_e) \quad (4.16)$$

Im folgenden werden für die Fälle 1 bis 6 die Grössen p und m zusammengestellt:

Fall 1

$$\epsilon_{bo} \leq \epsilon_{b1}$$

Für σ_b gilt die Beziehung (3.2).

$$p_b = \frac{b}{\beta b d} \int_{x=0}^{x=x_1} \left[E_b \cdot \frac{\epsilon_{bo}}{x_1} x - \frac{E_b^2}{4\beta} \left(\frac{\epsilon_{bo}}{x_1} \right)^2 x^2 \right] dx$$

$$p_b = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\epsilon_{bo}}{\epsilon_{b1}} - \frac{\epsilon_{bo}^2}{3\epsilon_{b1}^2} \right) \xi \quad (4.17)$$

$$m_b = \frac{b}{\beta b h^2} \int_{x=0}^{x=x_1} \left[E_b \cdot \frac{\epsilon_{bo}}{x_1} x + \frac{E_b^2}{4\beta} \left(\frac{\epsilon_{bo}}{x_1} \right)^2 x^2 \right] \cdot (x - x_0) dx$$

$$m_b = p_b \cdot \frac{\gamma}{2} \left[\gamma - \frac{1}{2} \left(\frac{4\epsilon_{b1} - \epsilon_{bo}}{3\epsilon_{b1} - \epsilon_{bo}} \right) \cdot \xi \right] \quad (4.18)$$

Fall 2

$$\epsilon_{bo} > \epsilon_{b1}$$

Für σ_b gelten die Beziehungen (3.2) und (3.3).

$$p_b = \frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{\epsilon_{b1}}{3\epsilon_{bo}} \right) \cdot \xi \quad (4.19)$$

$$m_b = p_b \cdot \frac{\gamma^2}{2} + \left(\frac{\epsilon_{b1}}{3\epsilon_{bo}} - \frac{\epsilon_{b1}^2}{12\epsilon_{bo}^2} - \frac{1}{2} \right) \cdot \xi^2 \quad (4.20)$$

Fall 3

$$|\epsilon_e| \leq |\epsilon_p|$$

Für σ_e gilt die Beziehung (3.12).

$$p_e = \frac{E_e}{\beta} \cdot \frac{\mu}{\gamma} \cdot \epsilon_e \quad (4.21)$$

$$m_e = p_e \cdot \gamma \left(\frac{\gamma}{2} - 1 \right) \quad (4.22)$$

Fall 4

$$|\epsilon_e| > |\epsilon_p|$$

Für σ_e gilt die Beziehung (3.14),

(β_z und σ_p sind negativ).

$$p_e = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\mu}{\gamma} \left[\beta_z - \frac{(\beta_z - \sigma_p)^2}{E_e \epsilon_e - 2\sigma_p + \beta_z} \right] \quad (4.23)$$

m_e nach (4.22)

Fall 5

$$\epsilon'_e \leq \epsilon'_p$$

Für σ'_e gilt die Beziehung (3.12).

$$p'_e = \frac{E}{\beta} \cdot \frac{\mu'}{\gamma} \cdot \epsilon'_e \quad (4.24)$$

$$m'_e = p'_e \cdot \gamma \left(\frac{\gamma}{2} - \delta \right) \quad (4.25)$$

Fall 6

$$\epsilon'_e > \epsilon'_p$$

Für σ'_e gilt die Beziehung (3.14),

(β_z und σ_p sind negativ).

$$p'_e = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\mu'}{\gamma} \left[\frac{(\beta_z - \sigma_p)^2}{-E \epsilon'_e - 2\sigma_p + \beta_z} - \beta_z \right] \quad (4.26)$$

$$m'_e \text{ nach (4.25)}$$

4.3.2 Neutralaxe ausserhalb des Querschnitts

Der gesamte Querschnitt ist ausschliesslich durch Druckspannungen beansprucht.

Die Stauchung ϵ_{bu} am unteren Querschnittsrand beträgt:

$$\epsilon_{bu} = \epsilon_{bo} - \gamma (\epsilon_{bo} - \epsilon_e) \quad (4.27)$$

Bezüglich der Dehnungen ϵ_{bo} , ϵ_{bu} , ϵ_e und ϵ'_e sind folgende Fälle möglich:

Für den Beton 7. $\epsilon_{bo} \leq \epsilon_{b1}$ und $\epsilon_{bu} \leq \epsilon_{b1}$

8. $\epsilon_{bo} > \epsilon_{b1}$ und $\epsilon_{bu} < \epsilon_{b1}$

9. $\epsilon_{bo} > \epsilon_{b1}$ und $\epsilon_{bu} \geq \epsilon_{b1}$

Für den Stahl 10. $\epsilon_e \leq \epsilon'_p$

11. $\epsilon_e > \epsilon'_p$

5. $\epsilon'_e \leq \epsilon'_p$
6. $\epsilon'_e > \epsilon'_p$ } siehe 4.3.1

Die Grössen p_b und m_b können aus der Ueberlagerung einer Druckkraft P_{bo} und einer Zugkraft P_{bu} berechnet werden (Bild 4.2).

Bild 4.2: Berechnung von p_b und m_b aus der Superposition von p_{bo} , m_{bo} und p_{bu} , m_{bu} .

Fall 7

$$\epsilon_{bo} \leq \epsilon_{b1} \text{ und } \epsilon_{bu} \leq \epsilon_{b1}$$

Für p_{bo} gilt die Formel (4.17).

$$p_{bu} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\epsilon_{bu}^2}{3\epsilon_{b1}^2} - \frac{\epsilon_{bu}}{\epsilon_{b1}} \right) \cdot (\xi - \gamma) \quad (4.28)$$

$$p_b = p_{bo} + p_{bu} \quad (4.29)$$

Für m_{bo} gilt die Formel (4.18).

$$m_{bu} = p_{bu} \cdot \frac{\gamma}{2} \left[-\gamma - \frac{1}{2} \left(\frac{4\epsilon_{b1} - \epsilon_{bu}}{3\epsilon_{b1} - \epsilon_{bu}} \right) \cdot (\xi - \gamma) \right] \quad (4.30)$$

$$m_b = m_{bo} + m_{bu} \quad (4.31)$$

Fall 8

$$\epsilon_{bo} > \epsilon_{b1} \text{ und } \epsilon_{bu} < \epsilon_{b1}$$

Für p_{bo} gilt Formel (4.19)

$$p_{bu} \rightarrow (4.28)$$

$$p_b \rightarrow (4.29)$$

$$m_{bo} \rightarrow (4.20)$$

$$m_{bu} \rightarrow (4.30)$$

$$m_b \rightarrow (4.31)$$

Fall 9

$$\epsilon_{bo} > \epsilon_{b1} \text{ und } \epsilon_{bu} \geq \epsilon_{b1}$$

Für σ_b gilt die Beziehung (3.3).

$$p_b = 1 \quad (4.32)$$

$$m_b = 0 \quad (4.33)$$

Fall 10

$$\epsilon_e \leq \epsilon'_p$$

Für p_e gilt Formel (4.21).

Für m_e gilt Formel (4.22).

Fall 11

$$\epsilon_e > \epsilon'_p$$

Für σ_e gilt die Beziehung (3.14),

(β_z und σ_p sind negativ).

$$p_e = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\mu}{\gamma} \left[\frac{(\beta_z - \sigma_p)^2}{-E_e \epsilon_e - 2\sigma_p + \beta_z} - \beta_z \right] \quad (4.34)$$

Für m_e gilt Formel (4.22).

4.4 Einfluss von Dauerbelastungen auf die Momenten-Krümmungs- beziehung

4.4.1 Zeitliche Aenderung der Spannungen und Dehnungen

Für die Untersuchungen dieses Abschnitts wird einfachheits-
halber vorausgesetzt, dass die am Element wirkenden Schnitt-
kräfte P und M vom Zeitpunkt der Lastaufbringung $t = 0$ bis
zum betrachteten Zeitpunkt $t = t_1$ konstant sind. Auf das
Problem der Erfassung zeitlich veränderlicher Schnittkräfte
wird in Abschnitt 7.1.2 eingegangen.

Bild 4.3 zeigt die zeitlichen Veränderungen von Spannungen
und Dehnungen infolge Dauerlast. Die Zunahme der Betonstau-
nungen bewirkt eine Vergrößerung der Betondruckzone und
damit eine Verminderung der mittleren Betondruckspannung.
Der Hebelarm der inneren Kräfte wird verkleinert, während
die Stahlzugspannungen vergrößert werden.

Bild 4.3: Verteilung der Spannungen und Dehnungen im gerissenen, exzentrisch gedrückten Stahlbetonquerschnitt vor und nach dem Kriechen.

Die üblichen Ansätze zur Berechnung von Kriechverformungen beruhen im allgemeinen auf folgenden Voraussetzungen:

- Die Kriechzahl $\varphi(t) = \frac{\epsilon_k(t)}{\epsilon_b \text{ el}}$ wird als unabhängig von den Spannungen betrachtet.
- Für Stahl und Beton werden lineare Spannungs-Dehnungsbeziehungen angenommen.
- Für den zeitlichen Verlauf des Kriechens wird meistens eine Exponentialfunktion der Form $\varphi(t) = \varphi_\infty [1 - e^{-kt}]$ angesetzt.

Unter diesen Voraussetzungen ist es möglich, ein System von zwei Differentialgleichungen für die Unbekannten $\epsilon_{bo}(t)$ und $\epsilon_e(t)$ zu formulieren. Die Auflösung dieses Gleichungssystems kann für kleine Exzentrizitäten (homogener Querschnitt) noch explizit durchgeführt werden. Für grosse Exzentrizitäten (gerissener Querschnitt) ist ein Iterationsverfahren erforder-

derlich [10]. Das tatsächliche Verhalten der Baustoffe zeigt jedoch bedeutende Abweichungen von den beschriebenen Idealisierungen. In Abschnitt 3 wurde sowohl auf den nichtlinearen Spannungs-Dehnungs-Zusammenhang als auch auf die ausgeprägte Abhängigkeit der Kriechzahl von der Grösse der Spannungen hingewiesen. Die erwähnten Berechnungsmethoden ergeben daher meistens nur im Bereich der zulässigen Lasten befriedigende Resultate.

Ein Verfahren, das die tatsächlichen Verhältnisse wohl am besten zu erfassen vermag, ist die "Rate of Creep"-Methode, wie sie z.B. in [16] beschrieben wird. Bei diesem Verfahren wird der Querschnitt horizontal segmentiert. Jedem Segment wird eine eigene Spannungs-Dehnungs-Zeitfunktion zugeordnet. Damit wird die Belastungs-Vorgeschichte für jedes Segment erfasst. Dieses Rechenverfahren ist sehr aufwendig und daher ausschliesslich an die Verwendung elektronischer Rechenautomaten gebunden. Es stellt sich aber auch die Frage, ob die dabei gewonnene Genauigkeit nicht infolge der bedeutenden Streuungen der Kriechfunktion fragwürdig wird.

4.4.2 Berechnungsvorschlag für Kriechverformungen

Die im Zeitpunkt t_1 vorhandene Verformung kann in erster Näherung wie eine Kurzzeitverformung, aus der zur Zeit t_1 gültigen Spannungs-Dehnungsfunktion (nach Bild 3.7) berechnet werden. Angenommen, die Betonspannungen blieben in allen Fällen während der gesamten Belastungszeit konstant, so würden diese Verformungen mit den exakten theoretischen Werten übereinstimmen. Mit der zeitlich abhängigen Vergrösserung der Betondruckzone (gerissener Querschnitt) ist aber eine ständige Abnahme der mittleren Betondruckspannung σ_{bm} verbunden. Die gleiche Wirkung auf σ_{bm} hat

auch eine Druckarmierung. Durch die zunehmenden Stauchungen werden die Stahleinlagen der Druckzone stärker beansprucht, was zu einer Entlastung des Betons führt. Die beschriebene erste Näherungsberechnung ergibt deshalb im allgemeinen zu kleine Kriechverformungen.

Die mittlere Betondruckspannung $\sigma_{bm}(t)$ ist gegeben durch

$$\sigma_{bm}(t) = \frac{P_b(t)}{F'_b(t)} \quad (4.35)$$

In (4.35) bedeuten $P_b(t)$ und $F'_b(t)$ die zur Zeit t wirkende Betondruckkraft und die gedrückte Betonfläche. Um die Formulierung der zeitlichen Abhängigkeit von $\sigma_{bm}(t)$ - und damit der Differentialgleichung - zu umgehen, wird die Berechnung an einem Querschnitt mit reduzierter Breite b_w durchgeführt (Bild 4.4). Die Berechnung an diesem transformierten Querschnitt mit der zur Zeit t_1 gültigen Spannungs-Dehnungsfunktion soll die gesuchten Dehnungen $\epsilon_{bo}(t_1)$ und $\epsilon_e(t_1)$ ergeben. Für die wirksame, reduzierte Querschnittsbreite b_w im Zeitintervall $(0, t_1)$ wird ein empirischer Ansatz untersucht:

$$b_w(0, t_1) = \frac{2\bar{\sigma}_{bm}(t_1)}{\sigma_{bm} + \bar{\sigma}_{bm}(t_1)} \cdot b = \kappa(0, t_1) \cdot b \quad (4.36)$$

σ_{bm} wird aus (4.35) mit der zur Zeit $t = 0$ gültigen $\sigma_b - \epsilon_b$ - Funktion, $\bar{\sigma}_{bm}(t_1)$ wird in gleicher Weise aus (4.35) mit der zur Zeit t_1 gültigen $\sigma_b - \epsilon_b$ - Funktion berechnet.

Bild 4.4: Transformation des Querschnitts für die Berechnung der Kriechverformungen ($\kappa(O, t_1) < 1$).

Eine erste Ueberprüfung des Ansatzes (4.36) wird hier am Beispiel des zentrisch gedrückten, armierten Rechteckquerschnitts durchgeführt. Um einen Vergleich mit dem bekannten Verfahren von Dischinger [17] anstellen zu können, sollen im folgenden die Voraussetzungen dieses Verfahrens erfüllt sein (lineare $\sigma_b - \epsilon_b$ - Funktion, konstante Kriechzahl φ_∞ , gegebene Kriechdifferentialgleichung).

- Berechnung nach der Theorie von Dischinger -

Die Kriechdifferentialgleichung nach Dischinger hat die Form

$$\frac{d\epsilon_b(t)}{dt} = \frac{1}{E_b} \frac{d\sigma_b}{dt} + \frac{\sigma_b}{E_b} \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} + \frac{\epsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty} \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (4.37)$$

Der dritte Summand in (4.37) erfasst den Einfluss des Schwindens. Für die weiteren Betrachtungen wird dieser Anteil weggelassen. Der Einfluss des Schwindens wird im folgenden Abschnitt 4.5 untersucht. Bei linearem $\sigma_b - \epsilon_b$ - Zusammenhang gilt

$$\varphi(t) = \frac{\epsilon_k(t)}{\epsilon_b \cdot e^1} \quad (4.38)$$

Mit $\mu = \frac{F_e}{F_b}$ und der Abkürzung

$$\lambda = \frac{n\mu}{1+n\mu} \quad (4.39)$$

ergibt sich für die bezogene Umlagerungskraft Δp_b die Differentialgleichung (ausführliche Ableitung in [18]):

$$\frac{d \Delta p_b}{d\varphi(t)} + \lambda (p_b + \Delta p_b) = 0 \quad (4.40)$$

mit der Lösung (nach abgeschlossenem Kriechen)

$$\Delta p_b = - p_b (1 - e^{-\lambda \varphi_\infty}) \quad (4.41)$$

Aus (4.41) kann die mittlere Endspannung nach (4.35) berechnet werden

$$\begin{aligned} \sigma_{bm}(t_\infty) &= \frac{P_b(t_\infty)}{F_b^I(t_\infty)} = \beta \cdot (p_b + \Delta p_b) \\ &= \beta \cdot p \frac{1}{1 + n\mu} \cdot e^{-\lambda \varphi_\infty} \end{aligned} \quad (4.42)$$

- Berechnung mit vorgeschlagenem Verfahren -

Zuerst wird die mittlere Betondruckspannung im Zeitpunkt der Lastaufbringung berechnet:

$$\sigma_{bm} = \beta \cdot p_b = \beta \cdot p \frac{1}{1 + n\mu} \quad (4.43)$$

Die Kriechwirkung kann durch die Reduktion des E_b - Moduls ausgedrückt werden:

$$E_b(t_\infty) = \frac{E_b}{1 + \varphi_\infty} \quad (4.44)$$

oder mit $n(t) = \frac{E_e}{E_b(t)}$ folgt

$$n(t_\infty) = n (1 + \varphi_\infty) \quad (4.45)$$

damit ergibt sich für $\bar{\sigma}_{bm}(t_\infty)$:

$$\bar{\sigma}_{bm}(t_\infty) = \beta \cdot p \frac{1}{1 + n(1 + \varphi_\infty)\mu} \quad (4.46)$$

und für $\kappa(0, t_\infty)$ nach (4.36):

$$\kappa(0, t_\infty) = \frac{1}{1 + \lambda \frac{\varphi_\infty}{2}} \quad (4.47)$$

Die Reduktion der Querschnittsbreite bewirkt eine Vergrößerung von μ :

$$\mu_w(0, t_\infty) = \frac{1}{\kappa(0, t_\infty)} \cdot \mu = \mu (1 + \lambda \frac{\varphi_\infty}{2}) \quad (4.48)$$

Die für das Kriechen massgebende, wirksame mittlere Betonspannung $\sigma_{bw}(0, t_\infty)$ ergibt sich am transformierten Querschnitt zu

$$\begin{aligned}\sigma_{bw}(0, t_{\infty}) &= \beta \cdot p \frac{1}{\kappa(0, t_{\infty}) \cdot [1 + n(t_{\infty}) \cdot \mu_w(0, t_{\infty})]} \\ &= \beta \cdot p \frac{1 + \lambda \frac{\varphi_{\infty}}{2}}{1 + n\mu (1 + \varphi_{\infty}) (1 + \lambda \frac{\varphi_{\infty}}{2})}\end{aligned}\quad (4.49)$$

$\sigma_{bw}(0, t_{\infty})$ liegt zwischen den Spannungen σ_{bm} und $\bar{\sigma}_{bm}(t_{\infty})$.
Aus $\sigma_{bw}(0, t_{\infty})$ kann die Endspannung $\sigma_{bm}(t_{\infty})$ durch Rücktransformation berechnet werden

$$\begin{aligned}\sigma_{bm}(t_{\infty}) &= \kappa(0, t_{\infty}) \cdot \sigma_{bw}(0, t_{\infty}) \\ &= \beta \cdot p \frac{1}{1 + n\mu (1 + \varphi_{\infty}) (1 + \lambda \frac{\varphi_{\infty}}{2})}\end{aligned}\quad (4.50)$$

Bild 4.5 zeigt die Anfangsspannung σ_{bm} nach (4.43), die genäherte Endspannung $\bar{\sigma}_{bm}(t_{\infty})$ nach (4.46), die wirksame Spannung $\sigma_{bw}(0, t_{\infty})$ am transformierten Querschnitt nach (4.49), die Endspannungen nach (4.42) und (4.50). Die nach (4.50) berechneten Werte des Näherungsverfahrens stimmen gut mit den entsprechenden Werten der Theorie von Dischinger (4.42) überein.

Bild 4.5: Betonspannungen am zentrisch gedrückten Betonquerschnitt für $\varphi_\infty=3$ in Funktion von $n\mu$. Vergleich der Endspannungen $\sigma_{bm}(t_\infty)$ nach Dischinger (4.42) mit der Näherungslösung (4.50).

Wie auch die folgenden Vergleichsberechnungen zeigen werden, sind die Resultate der vorgeschlagenen Kriechberechnungsmethode sehr zufriedenstellend. Dies ist zum Teil darauf zurückzuführen, dass bereits der erste Rechnungsgang mit der zur Zeit t_1 gültigen $\sigma_b - \epsilon_b$ - Funktion eine gute Näherung der Kriechverformungen liefert. Die Reduktion der Querschnittsbreite ist im allgemeinen gering, so dass sich Ungenauigkeiten und Fehlereinflüsse bei der Berechnung

von $b_w(0, t_1)$ mit dem empirischen Ansatz (4.36) nur schwach auf das endgültige Ergebnis auswirken können.

Zusammenfassend lässt sich das Rechenverfahren wie folgt beschreiben:

1. Berechnung der Spannungsverteilung im Querschnitt mit der zur Zeit $t = 0$ (Belastungsbeginn) gültigen $\sigma_b - \epsilon_b$ - Beziehung.
Berechnung von σ_{bm} .
2. Berechnung der Spannungsverteilung im Querschnitt mit der zur Zeit t_1 gültigen $\sigma_b - \epsilon_b$ - Beziehung.
Berechnung von $\bar{\sigma}_{bm}(t_1)$.
3. Reduktion der Querschnittsbreite $b_w(0, t_1) = \kappa(0, t_1) \cdot b$
4. Berechnung der Spannungen und Dehnungen mit der zur Zeit t_1 gültigen $\sigma_b - \epsilon_b$ - Beziehung am transformierten Querschnitt der Breite $b_w(0, t_1)$. Rücktransformation der Betonspannungen.

Dieses Verfahren kann grundsätzlich bei beliebigen, axial-symmetrischen Querschnittsformen angewendet werden. Die variable Querschnittsbreite kann dabei durch eine horizontale Segmentierung numerisch berücksichtigt werden.

Im folgenden wird die Uebereinstimmung der Kriechverformungen dieses Näherungsverfahrens mit der Theorie von Dischinger geprüft. Für die Vergleichsrechnungen wird daher eine lineare Spannungs-Dehnungsfunktion und eine konstante Kriechzahl angenommen. Die Entwicklung des Näherungsverfahrens wurde aber unabhängig von der Form und der Veränderlichkeit der $\sigma_b - \epsilon_b$ - Funktion durchgeführt. Aus einer guten Uebereinstimmung der Resultate darf deshalb - trotz der einschränkenden Voraussetzungen der Vergleichsberechnung - auf eine allgemeine Gültigkeit dieses Näherungsverfahrens geschlossen werden.

Ueberprüfung des Berechnungsvorschlages

a) Stahlbetonquerschnitt unter zentrischem Druck

- Berechnung nach der Theorie von Dischinger -

Die Umlagerungskräfte Δp_b und Δp_e müssen im Gleichgewicht sein:

$$\Delta p_b + \Delta p_e = 0 \quad (4.51)$$

Die Kriechstauchung kann aus der Stahlspannungsänderung $\Delta \sigma_e$ berechnet werden:

$$\epsilon_{bk}(t_\infty) = \frac{\Delta \sigma_e}{E_e} = \frac{\Delta p_e \cdot \beta}{E_e \mu} \quad (4.52)$$

Berücksichtigt man für Δp_e die Gleichungen (4.41) und (4.51) so ergibt sich $\epsilon_{bk}(t_\infty)$ zu:

$$\epsilon_{bk}(t_\infty) = \frac{\beta \cdot p_b}{E_e \mu} (1 - e^{-\lambda \varphi_\infty}) \quad (4.53)$$

Als Kriechstauchungskoeffizient $\eta_{\epsilon_b}(t_\infty)$ wird das Verhältnis zwischen Kriechstauchung und elastischer Stauchung definiert:

$$\eta_{\epsilon_b}(t_\infty) = \frac{\epsilon_{bk}(t_\infty)}{\epsilon_{be1}} = \frac{1}{n\mu} (1 - e^{-\lambda \varphi_\infty}) \quad (4.54)$$

- Berechnung mit vorgeschlagenem Verfahren -

Die wirksame Betondruckspannung wurde bereits oben berechnet (4.49). Für die Stauchung $\epsilon_b(t_\infty)$ ergibt sich

$$\epsilon_b(t_\infty) = \frac{\sigma_{bw}(0, t_\infty)}{E_b(t_\infty)} = \frac{\beta}{E_b} \cdot p \cdot \frac{(1 + \varphi_\infty)(1 + \lambda \frac{\varphi_\infty}{2})}{1 + n\mu(1 + \varphi_\infty)(1 + \lambda \frac{\varphi_\infty}{2})} \quad (4.55)$$

Mit der elastischen Stauchung

$$\epsilon_{b \text{ el}} = \frac{\beta}{E_b} \cdot p \cdot \frac{1}{1+n\mu} \quad (4.56)$$

und der Endstauchung $\epsilon_b(t_\infty)$ nach (4.55) kann der Kriechstauchungskoeffizient $\eta_{\epsilon_b}(t_\infty)$ berechnet werden:

$$\eta_{\epsilon_b}(t_\infty) = \frac{\epsilon_b(t_\infty) - \epsilon_{b \text{ el}}}{\epsilon_{b \text{ el}}}$$

$$\eta_{\epsilon_b}(t_\infty) = \frac{(1 + n\mu)(1 + \varphi_\infty)(1 + \lambda \frac{\varphi_\infty}{2})}{1 + n\mu(1 + \varphi_\infty)(1 + \lambda \frac{\varphi_\infty}{2})} - 1 \quad (4.57)$$

Bild 4.6 zeigt den Kriechstauchungskoeffizienten $\eta_{\epsilon_b}(t_\infty)$ für verschiedene φ_∞ in Abhängigkeit von $n\mu$. Aus Bild 4.6 sind auch die Abweichungen der Näherungslösung (4.57) (ausgezogene Linien) von der Funktion (4.54) (gestrichelte Linien) ersichtlich.

Bild 4.6: Kriechstauchungskoeffizient des zentrisch gedrückten Stahlbetonquerschnitts in Funktion von $n\mu$. Vergleich von $\eta_{\epsilon_b}(t_\infty)$ nach Dischinger (4.54) mit der Näherungslösung (4.57).

b) Ungerissener Stahlbetonquerschnitt, geringe Exzentrizität der Druckkraft

- Berechnung nach der Theorie von Dischinger -

Neben der Umlagerungskraft Δp_b wird im allgemeinen Fall ($\nu' \neq 0$) auch ein Umlagerungsmoment Δm_b auftreten.

Aus den Gleichgewichtsbedingungen, dem Hook'schen Gesetz und der Hypothese der linearen Dehnungsverteilung ergeben sich für Δp_b und Δm_b zwei Bedingungsgleichungen:

$$\Delta p_b \left(1 + \frac{\varphi_\infty}{2} + \frac{1}{n(\mu + \mu')}\right) + \Delta m_b \frac{1}{n} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + p_b \varphi_\infty = 0 \quad (4.58)$$

$$\Delta p_b \alpha_1 \left(1 + \frac{\varphi_\infty}{2}\right) - \Delta m_b \left(1 + \frac{\varphi_\infty}{2} + \frac{1}{12 n \alpha_2}\right) + m_b \varphi_\infty = 0$$

darin bedeuten

$$\alpha_1 = \frac{\mu \gamma' + \mu' \gamma}{(\mu + \mu') \gamma \gamma'} - \frac{1}{2} \quad (4.59)$$

$$\alpha_2 = \mu \left(\frac{1}{\gamma} - \alpha_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \mu' \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma'} + \alpha_1\right)^2$$

Bei der Formulierung von (4.58) wurde der Näherungsansatz verwendet, dass für das Kriechen die mittlere Umlagerungskraft $\Delta p_b/2$ und das mittlere Umlagerungsmoment $\Delta m_b/2$ massgebend sind (ausführliche Herleitung in [18]).

Für den Fall $\mu = \mu'$ wird das System (4.58) linear unabhängig ($\alpha_1 = 0$), Δm_b wird direkt proportional zu m_b und Δp_b zu p_b . Für den Fall $\mu' = 0$ wird $\Delta m_b = 0$ ($\alpha_2 = 0$).

Die Krümmung ϕ zur Zeit $t = 0$ beträgt

$$\phi = \frac{128}{\gamma^2 \cdot d \cdot E_b} m_b \quad (4.60)$$

und nach abgeschlossenem Kriechen

$$\phi(t_{\infty}) = \frac{12\beta}{\gamma^2 \cdot d \cdot E_b} [m_b (1 + \varphi_{\infty}) + (\Delta p_b \alpha_1 - \Delta m_b)(1 + \frac{\varphi_{\infty}}{2})] \quad (4.61)$$

Mit (4.60) und (4.61) kann - analog zum Kriechstauchungskoeffizient - ein Kriechkrümmungskoeffizient definiert werden:

$$\eta_{\phi}(t_{\infty}) = \frac{\phi_k(t_{\infty})}{\phi} = \frac{\phi(t_{\infty})}{\phi} - 1 \quad (4.62)$$

aus (4.60) und (4.61) folgt

$$\eta_{\phi}(t_{\infty}) = \varphi_{\infty} + \frac{\Delta p_b \cdot \alpha_1 - \Delta m_b}{m_b} (1 + \frac{\varphi_{\infty}}{2}) \quad (4.63)$$

- Berechnung mit vorgeschlagenem Verfahren -

Aus je einer Spannungsberechnung am ideellen Querschnitt mit den Funktionen $\sigma_b = E_b \epsilon_b$ und $\sigma_b(t_{\infty}) = \epsilon_b E_b / (1 + \varphi_{\infty})$ kann σ_{bm} und $\sigma_{bm}(t_{\infty})$ berechnet werden. Die Reduktion der Querschnittsbreite ergibt sich aus Gleichung (4.36). Eine Spannungs- und Dehnungsberechnung am reduzierten, ideellen Querschnitt mit der Funktion $\sigma_b(t_{\infty}) = \epsilon_b E_b / (1 + \varphi_{\infty})$ ergibt die endgültigen Dehnungen. Das Verfahren ist in seiner Anwendung so einfach, dass hier auf eine ausführlichere Darstellung verzichtet wird.

Ein Vergleich der Resultate nach (4.63) mit dem vorgeschlagenen Näherungsverfahren geht aus Bild 4.7 hervor.

Bild 4.7: Kriechkrümmungskoeffizient des exzentrisch gedrückten, ungerissenen Stahlbetonquerschnitts für $\varphi_{\infty} = 3$ in Funktion von $n\mu$. Vergleich von $\eta\phi(t_{\infty})$ nach Dischinger (4.63) mit der Näherungslösung.

c) Gerissener Stahlbetonquerschnitt, reine Biegung und Biegung mit axialer Druckkraft

Für die Unbekannten $\epsilon_{b0}(t)$ und $\epsilon_e(t)$ kann ein System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung aufgestellt werden. Die darin auftretenden Koeffizienten sind Funktionen höherer Ordnung der beiden Unbekannten.

Für die Auflösung kommt praktisch nur ein elektronisch durchgeführtes Iterationsverfahren in Frage. Die entsprechenden Herleitungen und numerischen Auswertungen wurden in der Arbeit [10] durchgeführt. Aus dieser Arbeit wurden die Ergebnisse für reine Biegung übernommen und in Bild 4.8 dargestellt (gestrichelte Linien). Die entsprechenden Werte des Näherungsverfahrens (ausgezogene Linien) liegen hier durchwegs etwas höher, d.h. der Kriecheinfluss wird leicht überschätzt. (Die stärkere Zunahme von $\eta_\phi(t_\infty)$ nach der exakten Lösung für $\mu'/\mu = 0.2$ und $\mu'/\mu = 0.4$ bei $n\mu > 0.10$ ist auf das in [10] mitberücksichtigte Fließen der Druckarmierung zurückzuführen).

Bild 4.8: Kriechkrümmungskoeffizient des gerissenen Stahlbetonquerschnitts, unter reiner Biegung für $\varphi_\infty = 3$ in Funktion von $n\mu$. Vergleich von $\eta_\phi(t_\infty)$ nach der Arbeit [10] - beruhend auf dem Ansatz von Dischinger - mit dem vorgeschlagenen Näherungsverfahren.

Allgemeines Ergebnis

In allen untersuchten Fällen ist eine genügende Uebereinstimmung zwischen den Lösungen nach dem Ansatz von Dischinger und der hier vorgeschlagenen Methode festzustellen. Die Abweichungen sind durchwegs kleiner als 15 %.

Die grosse Anzahl Parameter, die das Kriechen beeinflussen, können in einer praktischen Berechnung nur teilweise mitberücksichtigt werden; zudem weisen Kriechverformungen im allgemeinen grosse, zufällige Streuungen auf (siehe Abschnitt 3.1.3). Aus diesen Gründen darf das vorgeschlagene Kriechberechnungsverfahren als eine, für die praktische Anwendung, genügend genaue Methode gewertet werden.

Die besonderen Vorteile dieses Verfahrens können in den folgenden Punkten zusammengefasst werden:

- Möglichkeit zur Berücksichtigung nichtlinearer Spannungs-Dehnungs-Funktionen für Beton und Stahl.
- Möglichkeit zur Berücksichtigung spannungsabhängiger Kriechfunktionen.
- Möglichkeit zur Berücksichtigung beliebiger Querschnittsformen.
- Geringer Rechenaufwand.

4.5 Abschätzung der Schwindverformungen

a) Schwindverkürzung des symmetrisch armierten, ungerissenen Betonguerschnitts

Die Stahleinlagen wirken der Schwindverkürzung des Betons entgegen. Die Behinderung wächst mit zunehmendem Armierungsgehalt. Für die Schwindumlagerungskraft Δp_{bs} kann, analog zu (4.40), die Differentialgleichung

$$\frac{d \Delta p_{bs}}{d\varphi(t)} + \lambda(p_{bs} + \Delta p_{bs}) = 0 \quad (4.64)$$

aufgestellt werden.

In (4.64) ist p_{bs} eine bezogene, fiktive Schwindkraft

$$p_{bs} = \frac{\epsilon_s E_b}{\beta} \quad (4.65)$$

Wird für $(1 - e^{-\lambda\varphi_\infty})$ der Näherungswert $\frac{\lambda\varphi_\infty}{1 + \frac{\lambda\varphi_\infty}{2}}$ verwendet (vgl. [18]) so ergibt sich die Lösung von (4.64) zu

$$\Delta p_{bs} = - p_{bs} \frac{\lambda\varphi_\infty}{1 + \frac{\lambda\varphi_\infty}{2}} \quad (4.66)$$

Die Schwindverkürzung beträgt:

$$\epsilon_{bs}(t_\infty) = \epsilon_{s_\infty} - \frac{\Delta p_{bs} \beta}{E_b} \left(1 + \frac{\varphi_\infty}{2}\right) \quad (4.67)$$

Durch Einsetzen von (4.65) und (4.66) in (4.67) ergibt sich nach einigen Umformungen:

$$\epsilon_{bs}(t_{\infty}) = \epsilon_{s\infty} \cdot \frac{1}{1 + n\nu(1 + \frac{\varphi_{\infty}}{2})} \quad (4.68)$$

Dieses Resultat kann physikalisch sehr einfach interpretiert werden:

Im Schwerpunkt der gesamten Armierungsstahlfläche wirkt eine fiktive Kraft

$$P_s = \epsilon_{s\infty} \cdot E_e \cdot F_e \quad (4.69)$$

auf die Stahlfläche (Bild 4.9).

Bild 4.9: Schwindverkürzung eines symmetrischen Stahlbetonquerschnitts, berechnet mit einer fiktiven Schwindkraft $-P_s$ am ideellen Querschnitt mit der Wertigkeit $n_s = n(1 + \varphi_{\infty}/2)$.

Um die Gleichgewichtsbedingung zu erfüllen, muss dieselbe fiktive Kraft in umgekehrter Richtung auf den ideellen Querschnitt wirken. Da die fiktive Kraft P_s von null ($t = 0$) auf einen bestimmten Endwert anwächst, kann man die Verformung - näherungsweise - mit einem mittleren E_b -Modul berechnen:

$$n_s = n \left(1 + \frac{\varphi_\infty}{2} \right) \quad (4.70)$$

Damit kann $\epsilon_{bs}(t_\infty)$ berechnet werden (Bild 4.9)

$$\epsilon_{bs}(t_\infty) = \epsilon_{s\infty} - \epsilon_{s1} \quad (4.71)$$

$$\epsilon_{bs}(t_\infty) = \epsilon_{s\infty} - \frac{P_s n_s}{bd (1 + n_s \mu) E_e} \quad (4.72)$$

mit (4.69) ergibt sich

$$\epsilon_{bs}(t_\infty) = \epsilon_{s\infty} \left(1 - \frac{n_s \mu}{1 + n_s \mu} \right) \quad (4.73)$$

Die Lösungen (4.68) und (4.73) sind identisch.

b) Schwindkrümmung

Das Schwinden verursacht bei unsymmetrisch armierten, gerissenen und ungerissenen Querschnitten - aber auch bei symmetrisch armierten, gerissenen Querschnitten - eine Schwindkrümmung ϕ_s . Diese Schwindkrümmung kann - analog zur Schwindverkürzung - aus der fiktiven Schwindkraft P_s berechnet werden (Bild 4.10).

Bild 4.10: Schwindkrümmung eines gerissenen Stahlbetonquerschnitts, berechnet am ideellen Querschnitt mit der Wertigkeit $n_s = n(1 + \varphi_{\infty}/2)$. Die fiktive Kraft $-P_s$ wirkt im Schwerpunkt der Gesamtstahlfläche.

Für elastisches Verhalten von Stahl und Beton gilt:

$$\phi_s(t_{\infty}) = \frac{(P_{so} + P_{su}) e_s n_s}{E_e I_{is}} \quad (4.74)$$

n_s wird nach (4.70) berechnet.

e_s ist die Differenz zwischen der ideellen Querschnittsaxe und der Schweraxe der gesamten Armierungsstahlfläche. Für die in Bild 4.10 dargestellten Grössen gelten folgende Beziehungen:

$$a_i = h \frac{\frac{\xi^2}{2} + n_s(\mu + \delta\mu')}{\xi + n_s(\mu + \mu')} \quad (4.75)$$

$$a_s = h \frac{\mu + \delta\mu'}{\mu + \mu'} \quad (4.76)$$

$$e_s = a_s - a_i = \xi h \left[\frac{\mu + \delta\mu'}{\xi + n_s(\mu + \mu')} - \frac{\xi}{2} \right] \quad (4.77)$$

Für das ideelle Trägheitsmoment gilt:

$$I_{is} = bh^3 \cdot \left[\frac{\xi^3}{12} + \xi \left(\frac{a_i}{h} - \frac{\xi}{2} \right)^2 + \right. \\ \left. + n_s \mu' \left(\frac{a_i}{h} - \delta \right)^2 + n_s \mu \left(\frac{a_i}{h} - 1 \right)^2 \right] \quad (4.78)$$

Die Formel (4.74) kann durch Einführen eines dimensionslosen Schwindkrümmungskoeffizienten $\eta_{\phi_s}(t)$ auf folgende einfache Form gebracht werden:

$$\phi_s(t_\infty) = \frac{\epsilon_{s\infty}}{h} \cdot \eta_{\phi_s}(t_\infty) \quad (4.79)$$

$\eta_{\phi_s}(t_\infty)$ ist von den bezogenen geometrischen Querschnittswerten sowie von n_s und ξ abhängig.

Bild 4.11 zeigt die Abhängigkeit des Schwindkrümmungskoeffizienten $\eta_{\phi_s}(t_\infty)$ von $n_s \mu$, ξ und vom Verhältnis μ'/μ . Der günstig wirkende Einfluss einer Druckarmierung macht sich bereits bei $\mu'/\mu = 0,2$ deutlich bemerkbar. Auffallend ist auch die starke Abhängigkeit der Schwindkrümmung von der Lage der neutralen Axe.

Bild 4.11: Schwindkrümmungskoeffizient $\eta_{\phi s}(t_{\infty})$ in Funktion von $n_s \mu$, ξ und μ'_i/μ .
Für kleine Werte von $n_s \mu$ hängt die Schwindkrümmung hauptsächlich von der Lage der neutralen Axe und für grosse Werte von $n_s \mu$ hauptsächlich vom Druckarmierungsgehalt ab ($h'_i/h = 0,1$).

Die Dehnungen am Druckrand ϵ_{bos} und auf der Höhe der Zugarmierung ϵ_{es} infolge Schwinden ergeben sich aus (4.73) und (4.79):

$$\epsilon_{bos}(t_{\infty}) = \epsilon_{s\infty} \left(\frac{1}{1 + n_s u} + \frac{a_i}{h} \eta_{\phi s}(t_{\infty}) \right) \quad (4.80)$$

$$\epsilon_{es}(t_{\infty}) = \epsilon_{s\infty} \left(\frac{1}{1 + n_s u} + \frac{a_i - h}{h} \eta_{\phi s}(t_{\infty}) \right) \quad (4.81)$$

Die Krümmung infolge äusserer Belastung (inkl. Kriechen) überwiegen die Schwindkrümmungen in den meisten Fällen sehr stark. Zudem treten bei kleineren Krümmungen aus äusserer Belastung (grosse Axialkraft, grosses ξ) im allgemeinen auch kleinere Schwindkrümmungen auf (vgl. Bild 4.11). Aus diesen Gründen sind die Idealisierungen dieses Abschnitts gerechtfertigt.

4.6 Elemente der Gleichgewichtsbedingungen für Dauerbelastungen

4.6.1 Neutralaxe im Querschnitt

Da eine explizite Formulierung der Betondruckkraft zu umständlich ist, muss ein anderes Vorgehen gewählt werden. Die Betondruckkraft $P_b(t)$ kann als Funktion der wirksamen Betondruckfläche, der Betonfestigkeit und des Völligkeitskoeffizienten $k_v(t)$ dargestellt werden:

$$P_b(t) = k_v(t) \beta b_w(0, t) \cdot x_1(t) \quad (4.82)$$

und die bezogene Druckkraft:

$$p_b(t) = k_v(t) \cdot \frac{\xi(t)}{\gamma} \cdot \kappa(0,t) \quad (4.83)$$

Der Koeffizient $k_v(t)$ kann aus der $\sigma_b - \epsilon_b$ - Beziehung berechnet werden:

$$k_v(t, \epsilon_{bo}) = \frac{1}{\beta} \int_{\epsilon_b=0}^{\epsilon_b=\epsilon_{bo}} \sigma_b(t, \epsilon_b) \cdot d\epsilon_b \quad (4.84)$$

Eine numerische Auswertung des Integrals (4.84) für die $\sigma_b - \epsilon_b$ - Kurven in Bild 3.7 ergibt die in Bild 4.12 dargestellten Funktionen $k_v(t, \epsilon_{bo})$.

Das von der Betondruckkraft erzeugte Moment $m_b(t)$ um die Betonschwerachse beträgt:

$$m_b(t) = k_v(t, \epsilon_{bo}) \cdot \xi(t) \cdot \left[\frac{1}{2}\gamma - k_s(t, \epsilon_{bo}) \cdot \xi(t) \right] \cdot \kappa(0,t) \quad (4.85)$$

Der Koeffizient $k_s(t, \epsilon_{bo})$ kann ebenfalls aus der $\sigma_b - \epsilon_b$ - Beziehung berechnet werden:

$$k_s(t, \epsilon_{bo}) = \frac{1}{\epsilon_{bo}} \frac{\int_{\epsilon_b=0}^{\epsilon_b=\epsilon_{bo}} \sigma_b(t, \epsilon_b) \cdot (\epsilon_{bo} - \epsilon_b) \cdot d\epsilon_b}{\int_{\epsilon_b=0}^{\epsilon_b=\epsilon_{bo}} \sigma_b(t, \epsilon_b) \cdot d\epsilon_b} \quad (4.86)$$

Die, den $\sigma_b - \epsilon_b$ - Kurven in Bild 3.7 zugehörenden, ebenfalls numerisch berechneten Funktionen $k_s(t, \epsilon_{bo})$ sind in Bild 4.13 dargestellt. Für den Einfluss des Stahls gelten, unverändert, die in Abschnitt 4.3.1 hergeleiteten Beziehungen.

4.6.2 Neutralaxe ausserhalb des Querschnitts

Wie in Abschnitt 4.3.2 können auch hier die Grössen p_b und m_b aus der Ueberlagerung einer Druckkraft p_{bo} und einer Zugkraft p_{bu} berechnet werden (vgl. Bild 4.2).

Für $p_b(t)$ und $m_b(t)$ ergeben sich somit die Beziehungen:

$$p_b(t) = \left[k_v(t, \epsilon_{bo}) \frac{\xi(t)}{\gamma} - k_v(t, \epsilon_{bu}) \cdot \left(\frac{\xi(t)}{\gamma} - 1 \right) \right] \kappa(0, t) \quad (4.87)$$

$k_v(t, \epsilon_{bo})$ und $k_v(t, \epsilon_{bu})$ können demselben Diagramm entnommen werden.

$$m_b(t) = k_v(t, \epsilon_{bo}) \cdot \xi(t) \left[\frac{1}{2}\gamma - k_s(t, \epsilon_{bo}) \cdot \xi(t) \right] \kappa(0, t) + \\ k_v(t, \epsilon_{bu}) \cdot (\xi(t) - \gamma) \left[\frac{1}{2}\gamma + k_s(t, \epsilon_{bu}) \cdot (\xi(t) - \gamma) \right] \kappa(0, t) \quad (4.88)$$

$k_s(t, \epsilon_{bo})$ und $k_s(t, \epsilon_{bu})$ können demselben Diagramm entnommen werden.

Für den Einfluss des Stahls gelten die Beziehungen des Abschnitts 4.3.2.

$$k_v(t, \epsilon_{b0}) = \frac{P_b(t)}{\beta b x_1(t)} = \frac{P_b(t)}{\xi(t)} \cdot \gamma$$

Bild 4.12 : Völligkeitskoeffizient $k_v(t, \epsilon_{b0})$ der Betondruckzone in Funktion der Randstauchung ϵ_{b0} . Berechnungsgrundlage: $\sigma_b - \epsilon_b$ -Kurven in Bild 3.7.

Bild 4.13 : Schwerpunktskoeffizient $k_s(t, \epsilon_{b0})$ der Betondruckkraft in Funktion der Randstauchung ϵ_{b0} . Berechnungsgrundlage: $\sigma_b - \epsilon_b$ -Kurven in Bild 3.7.

4.7 Berechnung der Grundbeziehungen zwischen Moment und Krümmung

Im Abschnitt 4.2 wurden die Schnittkräfte p und m als Funktionen der Verformungen ϵ_{bo} und ϵ_e formuliert (Gleichungen (4.13) und (4.14)). Eine Auflösung nach ϵ_{bo} und ϵ_e ist nur iterativ möglich.

Die elektronische Berechnung der $M - \phi$ - Grundbeziehungen erfolgte daher nach dem in Bild 4.14 und Bild 4.15 dargestellten, stark vereinfachten Blockschema.

Einige Beispiele von $m - \phi h$ - Funktionen und $\epsilon_{bo} - \phi h$ - Funktionen, die nach diesem Programm berechnet wurden, sind im Anhang dargestellt. Der Einfluss des Schwindens wurde in diesen Beispielen nicht berücksichtigt; er kann jedoch nach Abschnitt 4.5 leicht abgeschätzt werden.

Bild 4.14: Blockscheema des Hauptprogramms zur Berechnung des $m - \phi h - \epsilon_{b0}$ -Zusammenhangs bei gegebenem Querschnitt, gegebenen Formänderungsgesetzen und gegebener Druckkraft.

Bild 4.15: Blockschema des Unterprogramms "K+S" zur Berechnung der Kriechverformungen infolge der aus dem Hauptprogramm gegebenen Schnittkräfte p und $m[i]$ sowie zur Berechnung der Schwindverformungen.

5. NOMINELLE BEZIEHUNGEN ZWISCHEN MOMENT UND KRUEMMUNG

Die aus den Grundbeziehungen berechneten Krümmungen werden im allgemeinen etwas zu gross, da die Mitwirkung der Betonzugzone nicht berücksichtigt wurde.

Die nominellen Beziehungen, welche in Abschnitt 2 definiert wurden, können als korrigierte Grundbeziehungen aufgefasst werden:

$$\epsilon_{bon} = \epsilon_{bo} - \Delta\epsilon_{bo} \quad (5.1)$$

$$\epsilon_{en} = \epsilon_e - \Delta\epsilon_e \quad (5.2)$$

$$\phi_n = \phi - \Delta\phi \quad (5.3)$$

Die Korrekturen berücksichtigen den Einfluss der Betonzugzone.

5.1 Mitwirkung der Betonzugzone

5.1.1 Rissmoment

Unter dem Rissmoment M_R wird am Zugrand des Querschnitts gerade die Betonzugfestigkeit σ_{bz} erreicht. Diese schwankt in ziemlich weiten Grenzen und ist von verschiedenen Parametern abhängig. Als wichtigste Einflussgrössen können genannt werden:

- Einfluss des Betonalters
(Zunahme der Betonzugfestigkeit)

- Einfluss der Querschnittshöhe
(Zunahme der Querschnittshöhe → Abnahme der Betonzugfestigkeit)
- Einfluss der Austrocknung des Querschnitts
(Abnahme der Betonzugfestigkeit durch Entstehen von Eigenspannungen aus Schwinden)
- Einfluss der Belastungsgeschwindigkeit
(grössere Belastungsgeschwindigkeit → grössere Betonzugfestigkeit)

Qualitative und quantitative Untersuchungen dieser Einflussparameter sind in der Arbeit [10] enthalten.

Der Mittelwert der Betonzugfestigkeit liegt im allgemeinen im Bereich

$$|1.3 \cdot \sqrt{\beta}| < |\sigma_{bz}| < |1.7 \cdot \sqrt{\beta}|$$

Für die weiteren numerischen Berechnungen wird

$\sigma_{bz} = -1.5 \cdot \sqrt{\beta}$ angenommen.

Die Berechnung der Rissmomente und Risskrümmungen kann mit den Beziehungen von Abschnitt 4.3.1 und 4.6.1 erfolgen. Zusätzlich ist die Betonzugkraft P_{bz} zu berücksichtigen.

Bei linearer Zugspannungsverteilung ergibt sich:

$$P_{bz} = \frac{1}{2} \sigma_{bz} b d \left(1 - \frac{\epsilon_{bo}}{\epsilon_{bo} - \epsilon_{bu}} \right) \quad (5.4)$$

darin ist

$$\epsilon_{bu} = \frac{\sigma_{bz}}{E_b(t)} \quad (5.5)$$

und die bezogene Betonzugkraft:

$$p_{bz} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{bz}}{\beta} \left(1 - \frac{\epsilon_{bo}}{\epsilon_{bo} - \epsilon_{bu}} \right) \quad (5.6)$$

Anteil der Betonzugkraft am Rissmoment

$$m_{bz} = -\frac{1}{12} \frac{\sigma_{bz}}{\beta} \left(1 - \frac{\epsilon_{bo}}{\epsilon_{bo} - \epsilon_{bu}} \right) \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{\epsilon_{bo}}{\epsilon_{bo} - \epsilon_{bu}} \right) \cdot \gamma^2 \quad (5.7)$$

Die Berechnung des Rissmoments m_R erfolgte nach dem in Bild (5.1) dargestellten, vereinfachten Blockschema. Wegen den oben erwähnten starken Schwankungen des Rissmoments wurde hier auf eine verfeinerte Berechnung, z.B. mit der Methode der reduzierten Querschnittsbreite verzichtet.

Bild 5.1: Blockschema des Programms zur Berechnung des Rissmoments m_R und der Risskrümmung ϕ_R bei gegebenem Querschnitt, gegebenen Formänderungsgesetzen und gegebener Druckkraft.

5.1.2 Korrektur der Grundbeziehungen durch Berücksichtigung der Betonzugzone

Bild 5.2 zeigt schematisch den Einfluss der Betonzugzone auf die $M - \phi$ - Beziehung.

Bild 5.2: Charakteristische $M - \phi$ -Kurven für reine Biegung $P=0$ und für Biegung mit konstanter Druckkraft $P > 0$. Die nominellen $M - \phi$ -Beziehungen berücksichtigen – im Gegensatz zu den $M - \phi$ -Grundbeziehungen – den Einfluss der Betonzugzone.

Für $0 < M < M(\epsilon_{bu}=0)$ treten nur Stauchungen auf. Die $M - \phi$ -Grundbeziehung ist in diesem Bereich identisch mit der nominellen $M - \phi$ -Beziehung. Dieses Intervall existiert nur für $P > 0$. Für $P = 0$ ist $M(\epsilon_{bu}=0) = 0$.

Für $M(\epsilon_{bu}=0) < M < M_R$ treten kleine Dehnungen auf (Querschnitt noch ungerissen).

Die nominelle $M - \phi$ -Beziehung lässt sich in einfacher Weise aus der Grundbeziehung berechnen:

$$\epsilon_{bon} = \epsilon_{bo} - \Delta \epsilon_{boR} \cdot \frac{m - m(\epsilon_{bu}=0)}{m_R - m(\epsilon_{bu}=0)} \quad \left. \vphantom{\epsilon_{bon}} \right\} \begin{array}{l} \text{für} \\ m(\epsilon_{bu}=0) < m < m_R \end{array} \quad (5.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{en} &= \epsilon_e - \Delta\epsilon_{eR} \cdot \frac{m - m(\epsilon_{bu}=0)}{m_R - m(\epsilon_{bu}=0)} \\ \phi_n &= \phi - \Delta\phi_R \cdot \frac{m - m(\epsilon_{bu}=0)}{m_R - m(\epsilon_{bu}=0)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{für} \\ &m(\epsilon_{bu}=0) < m < m_R \end{aligned} \quad \begin{aligned} (5.9) \\ (5.10) \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen bedeuten:

$$\Delta\epsilon_{boR} = \epsilon_{bo}(m=m_R) - \epsilon_{boR} \quad (5.11)$$

$$\Delta\epsilon_{eR} = \epsilon_e(m=m_R) - \epsilon_{eR} \quad (5.12)$$

$$\Delta\phi_R = \phi(m=m_R) - \phi_R \quad (5.13)$$

Diese Näherungsansätze (Gleichungen (5.8) (5.9) (5.10)) dürfen nur dann angewendet werden, wenn in den Grundbeziehungen keine plastischen Stahldehnungen im Intervall $M(\epsilon_{bu}=0) < M < M_R$ auftreten. Diese Bedingung ist jedoch praktisch immer erfüllt.

Für $M > M_R$ ist der Einfluss der Betonzugzone vom Zusammenwirken zwischen Beton und Zugarmierung und von der Rissbildung abhängig. Diese Probleme sind in [3] eingehend untersucht worden. In dieser Arbeit wird der Einfluss der Betonzugzone ebenfalls durch eine Korrektur der im gerissenen Stadium berechneten Stahldehnung berücksichtigt. Aufgrund einer grossen Zahl von Versuchsauswertungen wird in [3] eine einfache empirische Formel angegeben, die - sinngemäss - mit (5.14) übereinstimmt:

$$\epsilon_{en} = \epsilon_e - k \cdot \frac{\sigma_e(m_R)}{\sigma_e(m)} \quad (5.14)$$

$\sigma_e(m_R)$: Stahlspannung beim Rissmoment, berechnet aus den Grundbeziehungen (d.h. am gerissenen Querschnitt).

$\sigma_e(m)$: Stahlspannung beim betrachteten Moment, ebenfalls aus den Grundbeziehungen berechnet.

Der Faktor k ist eine Funktion verschiedener Einflüsse.
Die wichtigsten sind:

- Grösse der Betonzugfestigkeit und des Armierungsgehalts.
- Grösse und Verteilung der Verbundspannungen zwischen Beton und Stahl im Bereich zwischen zwei Rissen.
- Mitwirkende Betonzugfläche in der Mitte zwischen zwei Rissen.
- Grösse und Verteilung der Betonzugspannungen in dieser Fläche.

Die Versuchsstreuung von k ist ziemlich gross. Nach [3] besteht kein wesentlicher Unterschied zwischen Rippenstählen und glatten Stahleinlagen. Die besseren Verbundeigenschaften der Rippenstähle verursachen kleinere Rissabstände; dadurch verkleinert sich aber die mitwirkende Betonzugfläche.

Um die nominellen Beziehungen direkt aus den Grundbeziehungen und dem Rissmoment berechnen zu können, wird der folgende Ansatz untersucht:

$$\epsilon_{en} = \epsilon_e - \Delta\epsilon_{eR} \cdot \frac{m_R - m(\epsilon_e=0)}{m - m(\epsilon_e=0)} \quad \text{für } m > m_R \quad (5.15)$$

Die Formeln (5.14) und (5.15) ergeben für $m = m_R$ (bei $\beta_{bz}/\sigma_{bz} = 1.5$) ziemlich gut übereinstimmende Werte. Damit die Formel (5.14) durch die Formel (5.15) ersetzt werden kann, muss das Moment eine lineare Funktion der Stahlspannungen sein. In Bild 5.3 wurde für verschiedene Werte von p das Moment m in Funktion der Stahlspannung σ_e aufgetragen.

Für kleinere Werte von p ist die Annahme eines linearen Zusammenhangs zwischen M und σ_e - selbst bei plastischen Stahlverformungen - sehr zutreffend. Für grössere Werte der Druckkraft sind Abweichungen von der Linearität feststellbar. Der Einfluss der mitwirkenden Betonzugzone verliert aber mit zunehmender Druckkraft an Bedeutung, so dass sich diese Abweichungen kaum auswirken können.

Bild 5.3: Zusammenhang zwischen dem Moment m und der Stahlzugspannung σ_e .
Die Funktionen verlaufen sowohl für $t=0$ wie für $t=\infty$ annähernd linear.
Die Berechnung erfolgte nach Abschnitt 4, mit den Grössen $\beta = 0,3 \text{ t/cm}^2$,
 $\sigma_{02} = 4,6 \text{ t/cm}^2$, $\beta_2 = 5,5 \text{ t/cm}^2$, $\mu = \mu' = 1\%$ und $h'/h = 0,2$.

Der aus Balkenversuchen (reine Biegung, $p = 0$) gewonnene Ausdruck für ϵ_{en} (Formel (5.14)) ergibt auch im Fall von Biegung mit Axialkraft gute Resultate [3].

Analog zu Gleichung (5.15) kann für ϵ_{bon} und ϕ_n geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{bon} &= \epsilon_{bo} - \Delta \epsilon_{boR} \cdot \frac{m_R - m(\epsilon_e=0)}{m - m(\epsilon_e=0)} \\ \phi_n &= \phi - \Delta \phi_R \cdot \frac{m_R - m(\epsilon_e=0)}{m - m(\epsilon_e=0)} \end{aligned} \right\} \text{ für } m > m_R \quad (5.16)$$

Die Resultate der Ansätze (5.15) (5.16) und (5.17) stimmen gut mit den in [3] dargestellten, theoretischen und experimentellen Ergebnissen überein.

5.2 Ueberprüfung der vorgeschlagenen Berechnungsmethoden

für ϵ_{bon} , ϵ_{en} und ϕ_n anhand von Versuchsergebnissen

Die in Abschnitt 2.2 beschriebenen Stützenversuche [7] dienen als Grundlage für die Ueberprüfung der vorgeschlagenen Methoden zur Berechnung nomineller Beziehungen zwischen Schnittkräften und Deformationen. Tabelle 5.1 enthält eine Zusammenstellung der Versuchsparameter der vier untersuchten Kurzzeitversuche.

Tabelle 5.1

Kurzzeitversuche [7]. Versuchsparameter

Abmessungen und Armierung gemäss Bild 2.2 Belastungsanordnung gemäss Bild 2.3				
Versuch Nr. (nach [7])	41	53	24	31
Endexzentrizität e/d	0.0333	0.10	0.25	1.00
<u>Beton</u>				
Festigkeiten zur Zeit der Versuchsdurchführung:				
Würfeldruckfestigkeit β_w [kg/cm ²]	307	474	321	273
Biegezugfestigkeit β_{bz} [kg/cm ²]	-59		-45	-48
Querzugfestigkeit β_{qz} [kg/cm ²]		-38		
<u>Stahl</u>				
Eigenschaften gemäss Tabelle 3.1				

Die nominellen Stauchungen, Dehnungen und Krümmungen wurden mit den Werten der Tabelle 5.2 berechnet.

Tabelle 5.2

Rechnungswerte

Versuch Nr. (nach [7])	41	53	24	31
<u>Beton</u>				
$\beta = 0.75 \beta_w$ [kg/cm ²]	230	356	241	205
$\sigma_{bz} = -1.5 \sqrt{\beta}$ [kg/cm ²]	-23	-28	-23	-21
$E_b = 21'000 \sqrt{\beta}$ [kg/cm ²]	318'000	396'000	326'000	300'000
<u>Stahl</u>				
$ \beta_z = 5'500 \text{ kg/cm}^2$ $ \sigma_{0.2} = 4'600 \text{ kg/cm}^2$				
$E_e = 2.1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$				

Die Abhängigkeit der Betonrandstauchungen ϵ_{bon} von der Druckkraft P geht aus den Bildern 5.4a, b, c, d hervor. Entsprechend ist in den Bildern 5.5a, b, c, d der Zusammenhang zwischen P und den Stahldehnungen ϵ_{en} dargestellt. Die Bilder 5.6a, b, c, d zeigen den Zusammenhang zwischen P und $\phi_n \cdot h$. Die gestrichelten Linien stellen die Versuchsmessungen dar. Der in Abschnitt 2.2 beschriebene Relaxationseinfluss (Abnahme von P bei konstanter Durchbiegung) ist deutlich zu erkennen. Die gemessenen Dehnungen stellen Mittelwerte über eine Messlänge von 40 cm, in Stützenmitte, dar.

Eine Nachrechnung der Versuche - ohne Berücksichtigung eines Kriecheinflusses - mit den Beziehungen der Abschnitte 4.3, 4.7 und 5.1 ergibt durchwegs zu kleine Deformationen (ausgezogene Linien). Die Abweichungen nehmen mit zunehmender Belastungshöhe und Belastungsdauer zu.

Bei einer Berücksichtigung des Anfangskriechens ($\sigma_b - \epsilon_b(t_0)$ - Kurve nach Bild 3.7) mit den Methoden der Abschnitte 4.4, 4.6, 4.7 und 5.1 ergeben sich im allgemeinen etwas bessere Resultate, obwohl die berechneten Deformationen in der Regel etwas zu gross sind (strich-punktierte Linien). Man kann daraus schliessen, dass das verstärkte Anfangskriechen noch nicht ganz zum Abschluss gekommen ist. Die zeitliche Dauer des Anfangskriechens kann aus der Grössenordnung der Kriechgeschwindigkeit abgeschätzt werden. In [12] wurden Versuchsergebnisse verschiedener Forscher zusammengestellt. In diesen Versuchen wurden für verschiedene Lasteinwirkungszeiten (1 Minute, 30 Minuten, 1 Tag) die Kriechverformungen gemessen. Aus diesen Kriechverformungen können die mittleren Kriechgeschwindigkeiten $\dot{\epsilon}_{km}$ in den verschiedenen Zeitintervallen (0 - 1 Min., 1 Min. - 30 Min., 30 Min. - 1 Tag) berechnet werden (Tabelle 5.3).

Tabelle 5.3

Mittlere Kriechgeschwindigkeit in einzelnen Zeitintervallen (nach verschiedenen Forschern, zusammengestellt in [12]).

σ_b / β	$\dot{\epsilon}_{km}$ 0 - 1 Min.	$\dot{\epsilon}_{km}$ 1 Min.-30 Min.	$\dot{\epsilon}_{km}$ 30 Min.-1 Tag
0.2	0.4	0.4	0.4
0.3	0.6	0.7	0.6
0.4	0.8	1.0	0.9
0.5	1.3	1.6	1.2
0.6	2.2	3.0	1.6
0.7	3.8	5.2	2.1

Die Abnahme der Kriechgeschwindigkeit von einem Zeitintervall zum nächsten liegt in der Grössenordnung einer Zehnerpotenz. Mit den in Abschnitt 3.1.3 beschriebenen Kriechversuchen [7] wurde die Länge des nächstfolgenden Intervalls berechnet,

das wiederum eine zehnmal kleinere Kriechgeschwindigkeit aufweist (Tabelle 5.4).

Tabelle 5.4

Abschätzung des Zeitintervalls in dem die mittlere Kriechgeschwindigkeit um eine weitere Zehnerpotenz absinkt, d.h. auf ca. 1/1000 der mittleren Kriechgeschwindigkeit der ersten 60 Sekunden nach dem Aufbringen der Belastung (Versuchsergebnisse [7]).

σ_b / β	$\dot{\epsilon}_{km}$	Zeitintervall
0.2	0.4	1. Tag - 25. Tag
0.3	0.6	1. Tag - 28. Tag
0.4	0.9	1. Tag - 38. Tag
0.5	1.2	1. Tag - 46. Tag
0.6	1.6	1. Tag - 49. Tag
0.7	2.1	1. Tag - 50. Tag

Aus diesen Betrachtungen können folgende Schlüsse gezogen werden:

1. Die mittlere Kriechgeschwindigkeit in der ersten Minute nach der Lastaufbringung liegt um rund drei Zehnerpotenzen über dem Wert, den sie nach einem Tag Dauerlast erreicht.
2. Nach dem ersten Tag bleibt die Grössenordnung der Kriechgeschwindigkeit während mehreren Tagen erhalten. Nach spätestens einem Tag Dauerlast ist also das verstärkte Anfangskriechen abgeschlossen.
3. Die Durchführung eines Stützenversuchs dauerte ungefähr 8 Stunden. Während dieser Zeit wurde die Belastung stufenweise, bis zum Bruch, gesteigert. Das Anfangskriechen konnte daher noch nicht völlig abgeschlossen sein.

4. Eine Berechnung der Stützenverformungen ohne Berücksichtigung eines Kriecheinflusses ist nur bei sehr kurzer Lasteinwirkung (wenige Minuten) zulässig. Für längere Belastungszeiten, bis zu 24 Stunden, ist das Anfangskriechen zu berücksichtigen.
5. Bei Kriechverformungen und Kriechgeschwindigkeiten können im allgemeinen grosse Streuungen der Messwerte festgestellt werden. Beim heutigen Stand der Kenntnisse auf dem Gebiet der Betontechnologie wäre daher die Formulierung "exakter", zeitabhängiger Berechnungsverfahren für die ersten Minuten und Stunden nach Belastungsbeginn höchst unrealistisch.

Bild 5.4a: Stütze Nr. 41: Vergleich zwischen gemessenen Betonrandstauchungen [7] und entsprechenden Rechnungswerten.

Bild 5.4b: Stütze Nr. 53: Vergleich zwischen gemessenen Betonrandstauchungen [7] und entsprechenden Rechnungswerten.

Bild 5.4c: Stütze Nr. 24: Vergleich zwischen gemessenen Betonrandstauchungen[7] und entsprechenden Rechnungswerten.

Bild 5.4d: Stütze Nr. 31: Vergleich zwischen gemessenen Betonrandstauchungen[7] und entsprechenden Rechnungswerten.

Bild 5.5a: Stütze Nr. 41: Vergleich zwischen gemessenen Stahlstauchungen [7] und entsprechenden Rechnungswerten.

Bild 5.5b: Stütze Nr. 53: Vergleich zwischen gemessenen Stahldehnungen [7] und entsprechenden Rechnungswerten.

Bild 5.5c: Stütze Nr.24: Vergleich zwischen gemessenen Stahldehnungen [7] und entsprechenden Rechnungswerten.

Bild 5.5d: Stütze Nr. 31: Vergleich zwischen gemessenen Stahldehnungen [7] und entsprechenden Rechnungswerten.

Bild 5.6a: Stütze Nr. 41: Vergleich zwischen gemessenen Krümmungen [7] und entsprechenden Rechnungswerten.

Bild 5.6b: Stütze Nr. 53: Vergleich zwischen gemessenen Krümmungen [7] und entsprechenden Rechnungswerten.

Bild 5.6c: Stütze Nr. 24: Vergleich zwischen gemessenen Krümmungen [7] und entsprechenden Rechnungswerten.

Bild 5.6d: Stütze Nr. 31: Vergleich zwischen gemessenen Krümmungen [7] und entsprechenden Rechnungswerten.

6. STREUUNGEN IN DEN BEZIEHUNGEN ZWISCHEN MOMENT UND KRUEMMUNG

6.1 Teilaufgabe des Sicherheitsproblems

Das Problem der Sicherheit von Tragwerken war in den letzten Jahren oft Gegenstand sehr eingehender Untersuchungen [19] [20] [21]. Nach [20] kann ein Bemessungsproblem in einzelne Teilaufgaben zerlegt werden:

- a) Ermittlung der Lasten
- b) Ermittlung der Festigkeitswerte
- c) Durchführung der statischen Untersuchung

Die statische Untersuchung dient zur Transformation von gegebenen Lasten und Festigkeiten in geeignete vergleichbare Grössen.

Verschiedene Unsicherheitsquellen vermögen die Sicherheit einer Bemessung zu beeinflussen. Im allgemeinen werden die tatsächlich auftretenden Lasten sowie die tatsächlich vorhandenen Festigkeiten von den, der Berechnung zugrunde gelegten, nominellen Werten abweichen (Differenz = Fehler). Die Gauss'sche Fehlertheorie unterscheidet zwischen groben, systematischen und zufälligen Fehlern. Grundsätzlich können in allen drei Teilaufgaben alle Fehlerarten auftreten. Das Ziel dieser Arbeit - die Ermittlung des Zusammenhangs zwischen Moment und Krümmung - gehört zur Teilaufgabe b). Im folgenden werden daher nur die Fehlereinflüsse dieser Phase behandelt.

Die groben Fehler sind praktisch ausschliesslich auf menschliches Versagen zurückzuführen. Sie sind die Hauptursache der meisten Bauunfälle. Statistisch können diese Fehler nicht erfasst werden. Durch ein konsequentes Ueberwachungssystem bei der Projektierung und Ausführung der Bauwerke können gro-

be Fehler jedoch weitgehend vermieden werden.

Die systematischen Fehler ergeben Abweichungen in einer bestimmten Richtung. Diese Fehler können durch verfeinerte Baumethoden und durch wirklichkeitsnähere Berechnungsverfahren zu einem grossen Teil eliminiert werden. Für die Bemessung ist oft schon die Feststellung wertvoll, dass ein evtl. vorhandener systematischer Fehler auf der "sicheren", bzw. auf der "unsicheren" Seite liegt [20] .

Bei den zufälligen Fehlern (stochastische Abweichungen) handelt es sich um willkürliche Streuungen. Die einzelnen Abweichungen sind durch verschiedene Ursachen bedingt, deren Auswirkungen im einzelnen nicht vorausgesehen werden können. Zufällige Fehler können mit den Methoden der Statistik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung untersucht werden. Schwankungen der Materialeigenschaften und Ungenauigkeiten der Abmessungen können in der Regel als willkürliche Streuungen betrachtet werden. Der Einfluss dieser Streuungen auf die Momenten-Krümmungsbeziehung soll in diesem Abschnitt untersucht werden. Ihr Einfluss auf die Biegelinien wird in Abschnitt 7 untersucht. Die Biegelinien werden aus den nominellen Momenten-Krümmungsbeziehungen berechnet und stellen Erwartungswerte des wahrscheinlichsten Biegelinienverlaufes dar. Da die Biegelinien von den nominellen Krümmungen abhängig sind, werden die Biegelinienvertrauensgrenzen aus den Vertrauensgrenzen der nominellen Krümmungen berechnet. Diese Vertrauensgrenzen stellen einen oberen, bzw. einen unteren Grenzwert dar, der mit einer bestimmten (grossen) Wahrscheinlichkeit nicht über- bzw. unterschritten wird. Da die nominellen Krümmungen mittlere Verformungswerte darstellen, sind die zugehörigen Vertrauensgrenzen von den Streuungen der Mittelwerte der einzelnen Parameter abhängig.

6.2 Schwankungen der Materialeigenschaften und der Querschnittsabmessungen

Von besonderer Wichtigkeit für das Tragvermögen sind die Festigkeitseigenschaften der Baustoffe. Diese können erhebliche Schwankungen aufweisen. Ein Bild von der Grösse und Verteilung dieser Schwankungen vermittelt die statistische Qualitätskontrolle [19]. Aus der Gesamtheit der durchgeführten Beobachtungen werden geeignete Masszahlen errechnet. Die Grössenordnung einer zufällig veränderlichen Grösse wird am besten durch den Mittelwert $\bar{x}$ beschrieben. Als Streumass eignet sich vor allem die Standardabweichung s . Unter dem Variationskoeffizienten v versteht man das Verhältnis $\frac{s}{\bar{x}}$. Dieser Koeffizient kann in Prozenten ausgedrückt werden und vermittelt im allgemeinen ein gutes Bild von der Qualität einer streuenden Grösse.

6.2.1 Betonfestigkeit

Durch Festigkeitsmessungen an Prüfkörpern, die laufend aus den Mischerchargen des Bauwerkbetons entnommen werden (Qualitätskontrolle), versucht man sich ein Bild von der wirklichen Beschaffenheit der Bauwerksfestigkeit zu machen. Es stellt sich hier die Frage, welcher Zusammenhang zwischen Messwerten von Prüfkörpern und den tatsächlichen Bauwerkeigenschaften besteht.

Zwischen den Mittelwerten der Bauwerksfestigkeit und der Festigkeit der Prüfkörper bestehen im allgemeinen gewisse Unterschiede, die auf Grösse, Form und spezielle Lagerungsbedingungen der Probekörper wie auch auf das Prüfverfahren zurückzuführen sind. Da es sich hier vorwiegend um systematische Einflüsse handelt, ist es leicht möglich, das nahezu konstante Verhältnis zwischen mittlerer Bauwerkbetonfestigkeit und mittlerer Prüfkörperfestigkeit zu bestimmen. Untersuchungen in [22] ergaben,

dass ebenfalls aus der Streuung der Ergebnisse von Würfelproben auf die Streuung der Betonfestigkeit im Bauwerk geschlossen werden kann. Ein Vergleich der Streuungen von 254 Bohrkernproben aus einer Fundamentplatte von über 17000 m^3 Volumen mit 122 regulär hergestellten Probewürfeln ergab Standardabweichungen von 43 kg/cm^2 , bzw. 45 kg/cm^2 .

Um gesicherte, allgemeingültige Gesetzmässigkeiten formulieren zu können, sind weitere Untersuchungen in dieser Richtung notwendig. Aus Mangel an Versuchsergebnissen wird für die weiteren Betrachtungen die Annahme getroffen, dass die Festigkeitsstreuungen von Prüfkörpern mit den entsprechenden Streuungen des Bauwerkbetons identisch sind.

Eine weitere Frage betrifft die Art der Streuungsverteilung. Bild 6.1 zeigt eine typische Häufigkeitsverteilung wie sie aus 72 Würfelproben im Zusammenhang mit den Stützenversuchen [7] ermittelt wurde.

Im Wahrscheinlichkeitsnetz wird diese Verteilung durch einen Polygonzug charakterisiert. In den meisten Fällen kann sie durch eine Gauss'sche Normalverteilung angenähert werden (gestrichelte Linie). Im Wahrscheinlichkeitsnetz erscheint eine Normalverteilung als Gerade. Theoretisch ist die Annahme einer Normalverteilung für Festigkeiten unzulässig, da die Normalverteilung auch negative Werte zulässt (Bereich von $-\infty$ bis $+\infty$). Aus diesem Grunde wird oft die normale Verteilung der Logarithmen der Festigkeiten untersucht (Bereich von 0 bis $+\infty$). Wegen der besonders einfachen mathematischen Handhabung verzichtet man jedoch nicht gerne auf die Annahme einer Normalverteilung. Wie in [19] nachgewiesen wird, kann die Normalverteilung in den meisten Fällen als ein hinreichend zutreffendes Modell verwendet werden. Es wird empfohlen, nur für sehr grosse Streuungen ($v > 25 \%$) mit einer gestutzten oder einer logarithmischen Normalverteilung zu rechnen.

Bild 6.1 : Häufigkeitsverteilung und Summenhäufigkeiten der Betondruckfestigkeiten von 72 Würfelproben im Alter von 7 Tagen.

Hauptsächliche Streuungsursachen sind:

- Abweichungen in der Betonzusammensetzung
- Schwankungen in der Verdichtung
- Unterschiede in der Nachbehandlung

Durch ständige Qualitätsüberwachung und Qualitätssteuerung kann das Streumass beeinflusst werden. Bei guter Qualitätskontrolle sind Variationskoeffizienten von weniger als 10 % möglich (z.B. bei der industriellen Herstellung von Fertigelementen), während bei schlechter oder fehlender Qualitätskontrolle Variationskoeffizienten von mehr als 20 % oder 25 % auftreten können.

Der Informationswert einer Streuungsangabe kann durch eine hierarchische Streuungszerlegung wesentlich erhöht werden. Sie bildet ein wirkungsvolles Hilfsmittel zur Bestimmung des Anteils bestimmter Ursachen an der Gesamtstreuung (theoretische Grundlagen in [8]).

Die einzelnen Streuungskomponenten können beispielsweise nach folgendem Schema ermittelt werden:

Stufe	Element und Herkunft	Anzahl
1	<u>Bauwerke</u> einer bestimmten Kategorie (z.B.: Strassenbrücken ungefähr derselben Grösse mit gleicher nomineller Betonfestigkeit, Betonherstellung auf der Baustelle)	n_1
2	<u>Mischerchargen</u> von jeder Baustelle	n_2
3	<u>Probekörper</u> aus jeder Mischung	n_3

Die Gesamtheit einer solchen Erhebung hat den Charakter einer

Stichprobe aus einer unendlich grossen Grundgesamtheit. Die berechneten Streuungskomponenten sind somit identisch mit den Erwartungswerten, der - an sich unbekannten - Streuungen der Grundgesamtheit.

In der Tabelle 6.1 sind die Grundlagen für eine dreistufige Streuungszerlegung zusammengestellt. Aus der Streuungszerlegung ist unmittelbar zu erkennen, welche Ursachen grossen, bzw. kleinen Einfluss auf die Gesamtstreuung haben. Diese Methode ist an folgende Voraussetzungen gebunden (vgl. [8]):

1. Die Einzelwerte x_{ijk} müssen gemäss

$$x_{ijk} = \alpha + \beta_i + \gamma_{ij} + \delta_{ijk}$$

zusammengesetzt sein. α ist eine Konstante, β_i , γ_{ij} und δ_{ijk} sind normalverteilte, zufällige Grössen mit dem Durchschnitt null.

2. Die Grössen β_i , γ_{ij} und δ_{ijk} müssen je unter sich stochastisch unabhängig sein.
3. Die Grössen β_i , γ_{ij} und δ_{ijk} müssen gegenseitig stochastisch unabhängig sein.

Bei der Auswertung von Stichprobenerhebungen muss jeweils geprüft werden, ob diese Voraussetzungen erfüllt sind.

Bei der in Bild 6.1 dargestellten Verteilung wurden aus 18 unabhängigen Mischerchargen je 4 Probewürfel geprüft. Eine zweistufige Streuungszerlegung gibt in diesem Fall Aufschluss über die Grösse der Streuungen zwischen den Probekörpern innerhalb einer Mischung sowie über die Streuungen zwischen den Mischungen (Tabelle 6.2).

Tabelle 6.1

Dreistufige Streuungszerlegung

<u>Bezeichnungen:</u>			
Messwerte :	x_{ijk}	$i = 1, 2, 3, \dots, n_1$ (1. Stufe)	
		$j = 1, 2, 3, \dots, n_2$ (2. Stufe)	
		$k = 1, 2, 3, \dots, n_3$ (3. Stufe)	
Gesamtanzahl	$n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$		
Mittelwerte der Elemente 3. Stufe in der 2. Stufe :			
	$\bar{x}_{ij} = \frac{\sum_k x_{ijk}}{n_3}$		
Mittelwerte der Elemente 2. Stufe in der 1. Stufe :			
	$\bar{x}_i = \frac{\sum_j \sum_k x_{ijk}}{n_2 \cdot n_3} = \frac{\sum_j \bar{x}_{ij}}{n_2}$		
Mittelwert der gesamten Stichprobe :			
	$\bar{x} = \frac{\sum_i \sum_j \sum_k x_{ijk}}{n} = \frac{\sum_i \sum_j \bar{x}_{ij}}{n_1 \cdot n_2} = \frac{\sum_i \bar{x}_i}{n_1}$		
<u>Schema der Streuungszerlegung:</u>			
Streuung	Freiheitsgrad	Summe der Quadrate	Erwartungswerte der Streuungskomponenten
zwischen Elementen 1. Stufe	$f_1 = n_1 - 1$	$q_1 = n_2 n_3 \sum_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$	$\bar{s}_1^2 = \frac{q_1}{f_1} = s_3^2 + n_3 s_2^2 + n_3 n_2 s_1^2$
zwischen Elementen 2. Stufe	$f_2 = n_1 (n_2 - 1)$	$q_2 = n_3 \sum_i \sum_j (\bar{x}_{ij} - \bar{x}_i)^2$	$\bar{s}_2^2 = \frac{q_2}{f_2} = s_3^2 + n_3 s_2^2$
zwischen Elementen 3. Stufe	$f_3 = n_1 n_2 (n_3 - 1)$	$q_3 = \sum_i \sum_j \sum_k (x_{ijk} - \bar{x}_{ij})^2$	$\bar{s}_3^2 = \frac{q_3}{f_3} = s_3^2$
zwischen sämtlichen Elementen	$f = n_1 n_2 n_3 - 1$	$q = \sum_i \sum_j \sum_k (x_{ijk} - \bar{x})^2$	—

Tabelle 6.2

Streuungszerlegung in zwei Stufen: Würfeldruckfestigkeit β_w nach 7 Tagen.

Mittelwert $\bar{\beta}_{w7} = 227 \text{ kg/cm}^2$, $n_1 = 18$, $n_2 = 4$			
Streuung	Freiheitsgrad	Summe der Quadrate	Erwartungswerte der Streuungskomponenten
zwischen den Mischungen	17	22'772	$1'340 = s_2^2 + n_2 s_1^2$ $= 140 + 4 \cdot 300$
zwischen den Probekörpern	54	7'557	$140 = s_2^2$
zwischen sämtlichen Probekörpern	71	30'329	----
Streuungskomponenten:			
		$s_1^2 = 300$	$s_1 = 17.3 \text{ kg/cm}^2$
		$s_2^2 = 140$	$s_2 = 11.8 \text{ kg/cm}^2$

Wie bereits in Abschnitt 6.1 festgestellt wurde, sind für Durchbiegungsberechnungen die Mittelwerte der einzelnen Parameter über die gesamte Stablänge massgebend. Wir fragen also beispielsweise nach dem Erwartungswert der Streuung der durchschnittlichen Betonfestigkeit oder des durchschnittlichen E - Moduls eines bestimmten Tragelements.

Der Erwartungswert für die Streuung des Durchschnitts bei der dreistufigen Stichprobenerhebung beträgt:

$$s^2(\bar{x}) = \frac{s_3^2 + n_3 s_2^2 + n_3 n_2 s_1^2}{n}$$

$$= \frac{s_3^2}{n_1 n_2 n_3} + \frac{s_2^2}{n_1 n_2} + \frac{s_1^2}{n_1} \quad (6.1)$$

Da es sich immer um die Bemessung von Tragelementen innerhalb eines bestimmten Bauwerks handelt, wird $n_1 = 1$ gesetzt.

Werden für das zu bemessende Tragelement z Mischerchargen benötigt, kann $n_2 = z$ gesetzt werden. Für kleine Werte von z (z.B. $1 < z < 5$) empfiehlt es sich, im Sinne einer praktischen Regel, für $n_2 = 1$ zu setzen. Damit wird berücksichtigt, dass einzelne Mischungen einen unverhältnismässig grossen Einfluss auf die Gesamtverformungseigenschaften ausüben können.

Aus dem Mittelwert und der Streuung des Mittelwertes lassen sich nun eine obere und eine untere Vertrauensgrenze für diesen Wert berechnen:

$$\bar{x}_{o,u} = \bar{x} \pm u_W \cdot s(\bar{x}) \quad (6.2)$$

Wird aus einer Grundgesamtheit eine Stichprobe vom Umfang n entnommen, so liegt der Mittelwert mit der Wahrscheinlichkeit $1-W$ im Intervall $(\bar{x}_o, \bar{x}_u)$. Sollen bei fortgesetzter Stichprobenentnahme höchstens 1% aller Mittelwerte ausserhalb $(\bar{x}_o, \bar{x}_u)$ liegen, muss für $u_W = u_{0.01}$ der Wert 2.576 eingesetzt werden.

Wenn $\bar{x}$ und $s(\bar{x})$ aus einer relativ kleinen Stichprobe berechnet werden, liegen die Vertrauensgrenzen für den Mittelwert weiter auseinander. Anstelle von Formel (6.2) muss die Formel (6.3) verwendet werden:

$$\bar{x}_{o,u} = \bar{x} \pm t_W \cdot s(\bar{x}) \quad (6.3)$$

Die t - Verteilung ist flacher als die Normalverteilung. Mit zunehmendem Umfang der Stichprobengrösse nähert sich der t_W - Wert jedoch ziemlich rasch dem u_W - Wert:

- für $n = 20$ beträgt $t_{0.01} = 2.861$ (10 % grösser als $u_{0.01}$)
- für $n = 100$ beträgt $t_{0.01} = 2.626$ (2 % grösser als $u_{0.01}$)

Auf die, in der Tabelle 6.2 dargestellte Stichprobenerhebung angewendet, kommt man zu folgenden Ergebnissen:

1. 1 % - Vertrauensgrenze des Mittelwertes $\bar{\beta}_{w7}$ der gesamten Betonmenge:

$$\bar{\beta}_{w7\ o,u} = \bar{\beta}_{w7} \pm t_{0.01}(n=n_1-1) \cdot \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

$$\bar{\beta}_{w7\ o,u} = 227 \pm 2.898 \cdot \sqrt{\frac{300}{18} + \frac{140}{72}} = 227 \pm 12.5 \text{ kg/cm}^2$$

Variationskoeffizient:

$$v(\bar{\beta}_{w7}) = \frac{1}{227} \cdot \sqrt{\frac{300}{18} + \frac{140}{72}} = 0.0190$$

Wenn man die Streuungen innerhalb der Mischungen vernachlässigt ($n_2 = \infty$), ergibt sich:

$$\bar{\beta}_{w7\ o,u} = \bar{\beta}_{w7} \pm t_{0.01}(n=n_1-1) \cdot \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}}$$

$$\bar{\beta}_{w7\ o,u} = 227 \pm 2.898 \cdot \sqrt{\frac{300}{18}} = 227 \pm 11.8 \text{ kg/cm}^2$$

Variationskoeffizient:

$$v(\bar{\beta}_{w7}) = \frac{1}{227} \cdot \sqrt{\frac{300}{18}} = 0.0180$$

Der Vergleich zeigt, dass der Einfluss der Streuungen innerhalb der Mischungen von untergeordneter Bedeutung ist.

2. 1 % - Vertrauensgrenzen des Mittelwertes $\bar{\beta}_{w7}^i$ einer Mischung:

$$\bar{\beta}_{w7}^i \text{ o,u} = \bar{\beta}_{w7} \pm t_{0.01}(n=n_1-1) \cdot \sqrt{\frac{s_2^2}{n_2} + s_1^2}$$

$$\bar{\beta}_{w7}^i \text{ o,u} = 227 \pm 2.898 \cdot \sqrt{\frac{140}{4} + 300} = 227 \pm 53 \text{ kg/cm}^2$$

Variationskoeffizient:

$$v(\bar{\beta}_{w7}^i) = \frac{1}{227} \cdot \sqrt{\frac{140}{4} + 300} = 0.0806$$

3. Im speziellen Fall der angeführten Stichprobenerhebung ist mit dem bekannten Durchschnitt von je 4 Stichproben aus jeder Mischung bereits ein Erwartungswert für den Mittelwert jeder Mischung gegeben. Ebenfalls ist der Erwartungswert der Streuung zwischen diesen Werten bekannt. Daraus lässt sich der Mittelwert wesentlich stärker einschränken:

$$\bar{\beta}_{w7}^i \text{ o,u} = \bar{\beta}_{w7} \pm t_{0.01}(n=n_1(n_2-1)) \cdot \frac{s_2}{\sqrt{4}}$$

$$\bar{\beta}_{w7}^i \text{ o,u} = \bar{\beta}_{w7} \pm 2.671 \cdot \sqrt{\frac{140}{4}} = \bar{\beta}_{w7} \pm 16 \text{ kg/cm}^2$$

Bei der Projektierung sind natürlich die Werte $\bar{\sigma}_{w7}^i$ noch unbekannt, so dass die Vertrauensgrenzen nur nach Punkt 2 berechnet werden können. Dabei muss für die Streuung ein Erfahrungswert aus früheren Stichprobenerhebungen eingesetzt werden.

6.2.2 Weitere Materialeigenschaften

Neben den Schwankungen der Betonfestigkeit wird die $M - \phi$ - Beziehung auch durch die Schwankungen der übrigen Materialeigenschaften, wie Elastizitätsmodul von Beton und Stahl sowie der Streckgrenze und der Zugfestigkeit des Armierungsstahls, beeinflusst.

Leider werden die Ergebnisse von Stichprobenerhebungen nur in seltenen Fällen publiziert. Meistens werden sie nur zur werkiternen Dokumentation verwendet. Umfassende, systematische Zusammenstellungen von statistischen Verteilungen sind daher nicht vorhanden. Einige Literaturhinweise sind in [20] und [21] enthalten.

6.2.3 Ungenauigkeiten der Querschnittsabmessungen

Neben den Materialeigenschaften werden die $M - \phi$ - Beziehungen auch von den Querschnittswerten b , h , d , F_e und F_e' beeinflusst. Besonders der Einfluss von h und F_e kann sehr bedeutend werden.

Es darf angenommen werden, dass die Streuungen der Querschnittsabmessungen b , h und d mit zunehmender Querschnittsgrösse nur gering ansteigen werden. Die Variationskoeffizienten werden also mit zunehmender Querschnittsgrösse abnehmen. Die Unsicherheiten können sich daher bei geringen Querschnittsabmessungen stärker auswirken. Neben den Querschnittsabmes-

sungen ist aber auch bei den Querschnittsflächen der Armierungsstähle mit gewissen Schwankungen (Walztoleranzen) zu rechnen.

Im Rahmen dieser Arbeit ist es nicht möglich, auf die zahlreichen offenen Fragen über Art, Grösse und Abhängigkeit der Streuungen näher einzugehen. Nur mit umfassenden und systematischen Stichprobenerhebungen wird es möglich sein, diese Zusammenhänge zu klären. Unabdingbare Voraussetzungen dafür sind: gute Koordination zwischen den Materialprüfungsinstituten und Vereinheitlichung der Prüfverfahren. Das Forschungsziel wäre die Aufstellung zuverlässiger Streuungsprognosen, aufgrund bekannter oder mit grosser Wahrscheinlichkeit zu erwartender Herstellungsbedingungen.

6.3 Einflüsse einzelner Parameter auf die M - ϕ - Beziehung

In diesem Abschnitt soll der Einfluss einzelner Parameter auf die M - ϕ - Beziehungen mit Hilfe des Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes untersucht werden. Dieses Gesetz formuliert den Zusammenhang zwischen den Streuungen einzelner Grössen $s(q_1)$, $s(q_2)$ $s(q_n)$ und der Streuung s_f einer linearen Funktion $f(q_1, q_2$ $q_n)$ dieser Grössen:

$$s_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\right)^2 s^2(q_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial q_2}\right)^2 s^2(q_2) + \dots \left(\frac{\partial f}{\partial q_n}\right)^2 s^2(q_n)} \quad (6.4)$$

Wenn die Einflussgrössen q_1, q_2 q_n normal verteilt und voneinander unabhängig sind, ist auch jede lineare Funktion der Einflussgrössen normal verteilt.

Bei kleinen Streuungen kann das Fehlerfortpflanzungsgesetz in erster Näherung auch auf beliebige Funktionen von näherungsweise normal verteilten Grössen angewendet werden. In diesem

Sinn soll nun der Einfluss der einzelnen Parameter auf charakteristische Punkte der $M - \phi$ - Beziehung untersucht werden. Charakteristische Punkte sind beispielsweise der Punkt $A_1(\phi(\sigma_p), M(\sigma_p))$ beim Erreichen der Proportionalitätsgrenze in der Zugarmierung und der Punkt $A_2(\phi_{Br}, M_{Br})$ beim Erreichen einer nominellen Betonbruchstauchung ϵ_{Br} . Unterhalb $A_1(\phi(\sigma_p), M(\sigma_p))$ verlaufen die $M - \phi$ - Grundbeziehungen annähernd linear, oberhalb $A_1(\phi(\sigma_p), M(\sigma_p))$ ist eine starke Krümmungszunahme festzustellen.

Im Punkt $A_2(\phi_{Br}, M_{Br})$ kann die Normalkraft P explizit in Funktion der Variablen q_i (q_i = streuender Parameter) formuliert werden:

$$P = f(\epsilon_e, q_i) \quad (\epsilon_b = \epsilon_{Br} = \text{konst.}) \quad (6.5)$$

Eine Veränderung von q_i wird eine Veränderung von ϵ_e bewirken

$$\frac{\partial \epsilon_e}{\partial q_i} = - \frac{\frac{\partial P}{\partial q_i}}{\frac{\partial P}{\partial \epsilon_e}} \quad (6.6)$$

Daraus ergibt sich die Veränderung von ϕ_{Br}

$$\frac{\partial \phi_{Br}}{\partial q_i} = \left[\frac{\frac{\partial P}{\partial q_i}}{\frac{\partial P}{\partial \epsilon_e}} \cdot \frac{1}{h} \cdot \frac{q_i}{\phi_{Br}} \right] \cdot \frac{\phi_{Br}}{q_i} = \zeta_\phi(q_i) \cdot \frac{\phi_{Br}}{q_i} \quad (6.7)$$

Bei n streuenden Grössen $\bar{q}_i$ mit den Variationskoeffizienten $v(\bar{q}_i)$ lässt sich somit der Variationskoeffizient der Bruchkrümmung $v(\phi_{Br})$ angeben:

$$v(\phi_{Br}) = \frac{s(\phi_{Br})}{\phi_{Br}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\zeta_{\phi}(q_i) \cdot v(\bar{q}_i) \right]^2} \quad (6.8)$$

Analog zu P kann auch M_{Br} formuliert werden:

$$M_{Br} = f(\epsilon_e, q_i) \quad (6.9)$$

Die Veränderung von M_{Br} ergibt sich aus den Veränderungen von ϵ_e und q_i

$$\delta M_{Br} = \frac{\partial M_{Br}}{\partial \epsilon_e} \cdot \delta \epsilon_e + \frac{\partial M_{Br}}{\partial q_i} \cdot \delta q_i$$

oder

$$\frac{\delta m_{Br}}{m_{Br}} = \left[\frac{\partial M_{Br}}{\partial \epsilon_e} \cdot \frac{1}{M_{Br}} \right] \cdot \delta \epsilon_e + \left[\frac{\partial M_{Br}}{\partial q_i} \cdot \frac{1}{M_{Br}} \right] \cdot \delta q_i \quad (6.10)$$

oder bei Berücksichtigung von Gleichung (6.6):

$$\frac{\delta m_{Br}}{m_{Br}} = \left[\frac{q_i}{M_{Br}} \left(\frac{\partial M_{Br}}{\partial q_i} - \frac{\partial M_{Br}}{\partial \epsilon_e} \cdot \frac{\frac{\partial P}{\partial q_i}}{\frac{\partial P}{\partial \epsilon_e}} \right) \right] \frac{\delta q_i}{q_i} = \zeta_m(q_i) \cdot \frac{\delta q_i}{q_i} \quad (6.11)$$

Damit ist die partielle Ableitung der Funktion $m_{Br}(p, \epsilon_e, q_i)$ in Richtung von $p = \text{konst.}$ gegeben:

$$\frac{\partial m_{Br}}{\partial q_i} = \zeta_m(q_i) \cdot \frac{m_{Br}}{q_i} \quad (6.12)$$

Bei n streuenden Grössen $\bar{q}_i$ mit den Variationskoeffizienten $v(\bar{q}_i)$ lässt sich der Variationskoeffizient des Bruchmoments $v(M_{Br})$ angeben:

$$v(M_{Br}) = v(m_{Br}) = \frac{s(m_{Br})}{m_{Br}} = \sqrt{\frac{n}{\sum_{i=1}^n \left[\zeta_m(q_i) \cdot v(\bar{q}_i) \right]^2}} \quad (6.13)$$

Die Variationskoeffizienten $v(\phi(\sigma_p))$ und $v(m(\sigma_p))$ können in analoger Weise hergeleitet werden. Dabei ist zu beachten, dass in diesem Fall ϵ_b variabel und ϵ_e konstant ist ($\epsilon_e = \epsilon_p = \text{konst.}$).

Wenn zwischen den gegebenen Parametern und den der Berechnung von $M - \phi$ - Diagrammen (vgl. Anhang) zugrunde gelegten Werten kleinere Unterschiede bestehen, können die Funktionen $\zeta_\phi(q_i)$ und $\zeta_m(q_i)$ auch für die Berechnung einer entsprechenden Korrektur dieser Diagramme benützt werden (Hinweise in den Abschnitten 3.1.4 und 3.2).

Die Abweichungen zwischen den festen Parameterwerten eines $m - \phi$ - Diagramms und den effektiven Werten q_i sei Δq_i . Damit betragen die Abweichungen der effektiven Bruchkrümmung und des effektiven Bruchmoments von den Tafelwerten

$$\Delta \phi_{Br} = \left[\sum_{i=1}^n \zeta_\phi(q_i) \cdot \frac{\Delta q_i}{q_i} \right] \cdot \phi_{Br} \quad (6.14)$$

$$\Delta m_{Br} = \left[\sum_{i=1}^n \zeta_m(q_i) \cdot \frac{\Delta q_i}{q_i} \right] \cdot m_{Br} \quad (6.15)$$

Analog für $\Delta m(\sigma_p)$ und $\Delta \phi(\sigma_p)$.

Durch lineare Interpolation können die Abweichungen eines beliebigen Punktes der $m - \phi$ - Grundbeziehungen berechnet werden. Es ergeben sich folgende Korrekturwerte:

für $0 \leq m \leq m(\sigma_p)$

$$\Delta m = \Delta m(\sigma_p) \cdot \frac{m}{m(\sigma_p)} \quad (6.16)$$

$$\Delta \phi = \Delta \phi(\sigma_p) \cdot \frac{\phi}{\phi(\sigma_p)} \quad (6.17)$$

für $m(\sigma_p) < m \leq m_{Br}$

$$\Delta m = \Delta m(\sigma_p) + \frac{\Delta m_{Br} - \Delta m(\sigma_p)}{m_{Br} - m(\sigma_p)} (m - m(\sigma_p)) \quad (6.18)$$

$$\Delta \phi = \Delta \phi(\sigma_p) + \frac{\Delta \phi_{Br} - \Delta \phi(\sigma_p)}{\phi_{Br} - \phi(\sigma_p)} (\phi - \phi(\sigma_p)) \quad (6.19)$$

Im Anhang sind graphische Darstellungen der Funktionen $\tau_\phi(q_i)$ und $\tau_m(q_i)$ für einige Armierungsgehalte μ bzw. μ' enthalten. Die Funktionen wurden nur für $\beta = 300 \text{ kg/cm}^2$ dargestellt. Die Abhängigkeit der Funktionen $\tau_\phi(q_i)$ und $\tau_m(q_i)$ von β ist nur sehr schwach, so dass im Bereich $200 \text{ kg/cm}^2 \leq \beta \leq 400 \text{ kg/cm}^2$ dieselben Funktionswerte anwendbar sind.

Um die Anzahl der notwendigen Diagramme beschränken zu können, wurde angenommen, dass zwischen den Parametern β und E_b eine lineare Abhängigkeit besteht. Eine Streuung von β , bzw. von E_b , ist dann gleichbedeutend einer Streuung von b .

Die Einflüsse von σ_p und E_e auf $A_2(\phi_{Br}, m_{Br})$ sind vernachlässigbar klein. Der Einfluss von β_z auf $A_1(\phi(\sigma_p), m(\sigma_p))$ ist ebenfalls unbedeutend (geringer Einfluss vorhanden, wenn $\sigma'_e > |\sigma_p|$). Der Einfluss von σ_p auf $A_1(\phi(\sigma_p), m(\sigma_p))$ ist zwar bedeutend, die Korrekturwerte liegen jedoch praktisch in der Fortsetzung der ursprünglichen $m - \phi$ - Kurve und können sich daher nicht wesentlich auswirken.

Der Einfluss von E_e auf $A_1(\phi(\sigma_p), m(\sigma_p))$ kann annähernd dem Einfluss von μ gleichgesetzt werden, wenn $\sigma'_e > |\sigma_p|$ ist; für $\sigma'_e < |\sigma_p|$ ist der Einfluss von E_e auf $A_1(\phi(\sigma_p), m(\sigma_p))$ der Summe der Einflüsse von μ und μ' gleichwertig. Der Einfluss von h' ist durchwegs gering.

Aus den angeführten Gründen kann man sich für $A_1(\phi(\sigma_p), m(\sigma_p))$ auf die Einflussparameter b , h , μ , μ' und für $A_2(\phi_{Br}, m_{Br})$ auf b , h , μ , μ' und β_z beschränken.

6.4 Vertrauensbereich der M - ϕ - Beziehung

Die Streuungen $s(\phi(\sigma_p))$ und $s(m(\sigma_p))$ um den Mittelpunkt $A_1(\phi(\sigma_p), m(\sigma_p))$ sowie $s(\phi_{Br})$ und $s(m_{Br})$ um den Mittelpunkt $A_2(\phi_{Br}, m_{Br})$ wurden unter der Annahme berechnet, dass die einzelnen Parameter annähernd normal verteilt und ihre Streuungen relativ klein sind. Unter dieser Voraussetzung sind auch die Funktionen $m(\sigma_p)$, $\phi(\sigma_p)$, m_{Br} und ϕ_{Br} dieser Parameter annähernd normal verteilt. Es handelt sich hier um eine zweidimensionale normale Verteilung in der $m - \phi$ - Ebene, Punkte gleicher Häufigkeit liegen auf Ellipsen mit dem Mittelpunkt in A_1 , bzw. in A_2 ; sie sind gleichgerichtet und ähnlich. Unter der Annahme, dass zwischen den Grössen $\phi(\sigma_p)$ und $m(\sigma_p)$ sowie zwischen ϕ_{Br} und m_{Br} keine Korrelation besteht, sind die Ellipsenachsen parallel zu den Koordinatenachsen.

Die Gleichungen der Ellipsen sind gegeben durch

$$\left[\frac{\bar{\phi}}{s(\phi(\sigma_p))} \right]^2 + \left[\frac{\bar{m}}{s(m(\sigma_p))} \right]^2 = x_W^2 \quad (6.20)$$

und

$$\left[\frac{\bar{\phi}}{s(\phi_{Br})} \right]^2 + \left[\frac{\bar{m}}{s(m_{Br})} \right]^2 = x_W^2 \quad (6.21)$$

(wobei $\bar{\phi} = \phi - \phi_{Br}$ und $\bar{m} = m - m_{Br}$ ist).

Die χ^2 - Verteilung ist mit dem Freiheitsgrad $f = 2$ zu nehmen. Für die 5 % - Vertrauensgrenzen ergibt sich $\chi_{0.05}^2 = 5.991$ (nach [8]).

Aus (6.20) und (6.21) können die Halbaxen der Ellipsen bestimmt werden:

$$a_1 = x_W \cdot s(\phi(\sigma_p)) \quad (6.22)$$

$$b_1 = x_W \cdot s(m(\sigma_p)) \quad (6.23)$$

$$a_2 = x_W \cdot s(\phi_{Br}) \quad (6.24)$$

$$b_2 = x_W \cdot s(m_{Br}) \quad (6.25)$$

Die Vertrauensgrenzen a_W^o und a_W^u der $m - \phi$ - Beziehungen können nun näherungsweise als tangierende Kurven an diese beiden Ellipsen bestimmt werden. Bild 6.2 zeigt eine $m - \phi$ - Grundbeziehung mit den beiden Ellipsen in A_1 und A_2 und dem zugehörigen Vertrauensbereich. Die Koordinaten der Tangentenpunkte lassen sich aus der Neigung α_1 bzw. α_2 der $m - \phi$ - Kurve im Punkt A_1 bzw. A_2 und aus den Ellipsenhalbaxen bestimmen (Bild 6.3).

Mit den Abkürzungen

$$c_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 \quad (6.26)$$

und

$$c_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 \quad (6.27)$$

ergeben sich folgende Korrektur Elemente:

$$\Delta \phi(\sigma_p) = -a_1 \frac{c_1}{\sqrt{\frac{b_1^2}{a_1^2} + c_1^2}} \quad (6.28)$$

$$\Delta m(\sigma_p) = b_1 \frac{\frac{b_1}{a_1}}{\sqrt{\frac{b_1^2}{a_1^2} + c_1^2}} \quad (6.29)$$

$$\Delta \phi_{Br} = -a_2 \frac{c_2}{\sqrt{\frac{b_2^2}{a_2^2} + c_2^2}} \quad (6.30)$$

$$\Delta m_{Br} = b_2 \frac{\frac{b_2}{a_2}}{\sqrt{\frac{b_2^2}{a_2^2} + c_2^2}} \quad (6.31)$$

Mit diesen Korrekturwerten und den Gleichungen (6.16), (6.17), (6.18) und (6.19) lassen sich die Korrektur Elemente für einen beliebigen Punkt der $m - \phi$ - Grundbeziehungen berechnen.

Numerisches Beispiel

Gegeben sei ein Rechteckquerschnitt mit folgenden Daten:

Querschnittswerte: $\bar{\mu} = \bar{\mu}' = 1 \%$

$$\bar{\beta} = 300 \text{ kg/cm}^2$$

Alle übrigen Parameter entsprechend den
Tafelwerten des Anhangs (Seite 162).

Variationskoeffizienten der einzelnen Parameter:

$$v(\bar{b}) = 0.02$$

$$v(\bar{h}) = 0.02$$

$$v(\bar{\mu}) = v(\bar{\mu}') = 0.04$$

$$v(\bar{\beta}_z) = 0.06$$

$$v(\bar{E}_b, \bar{\beta}) = 0.07$$

$$v(\bar{E}_e) = 0.03$$

Äussere Belastung:

$$a) p = 0$$

$$b) p = 0.60$$

Gesucht sind die Vertrauensgrenzen der $m - \phi$ - Kurven.

1. Momente, Krümmungen (entnommen aus dem Anhang)

$$a) \underline{p = 0}$$

$$m_{Br} = 0.157$$

$$m(\sigma_p) = 0.0788$$

$$\phi_{Br} \cdot h = 0.0146$$

$$\phi(\sigma_p) \cdot h = 0.00177$$

$$b) \underline{p = 0.60}$$

$$m_{Br} = 0.247$$

$$m(\sigma_p) > m_{Br}$$

$$\phi_{Br} \cdot h = 0.00379$$

$$\phi(\sigma_p) > \phi_{Br}$$

2. Variationskoeffizienten $v(m_{Br})$, $v(\phi_{Br})$, $v(m(\sigma_p))$, $v(\phi(\sigma_p))$
 $(\zeta_\phi(q_i))$ und $\zeta_m(q_i)$ aus dem Anhang)

a) p = 0

Reihenfolge der Parameter: $\bar{b}$, $\bar{h}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\mu}'$, $\bar{\beta}_z$, $(\bar{\beta}, \bar{E}_b)$, $\bar{E}_e$

$$\begin{aligned} v(m_{Br})^2 &= (0.14 \cdot 0.02)^2 + (1.14 \cdot 0.02)^2 + (0.86 \cdot 0.04)^2 \\ &\quad + 0 + (0.72 \cdot 0.06)^2 + (0.14 \cdot 0.07)^2 + 0 \\ &= 10^{-4} \cdot (0.1 + 5.2 + 11.8 + 0 + 18.7 + 1.0 + 0) \end{aligned}$$

$v(m_{Br}) = 0.061$ Der Einfluss von $\bar{\beta}_z$, $\bar{\mu}$ und $\bar{h}$ ist über-
 wiegend.

$$v(m(\sigma_p))^2 = 10^{-4} \cdot (0 + 4.4 + 15.0 + 0 + 0 + 0.1 + 8.6)$$

$v(m(\sigma_p)) = 0.053$ Der Einfluss von $\bar{\mu}$, $\bar{E}_e$ und $\bar{h}$ ist über-
 wiegend.

$$v(\phi_{Br})^2 = 10^{-4} \cdot (0.7 + 0.7 + 3.2 + 0 + 4.9 + 9.1 + 0)$$

$v(\phi_{Br}) = 0.043$ Der Einfluss von $(\bar{\beta}, \bar{E}_b)$ und $\bar{\beta}_z$ ist über-
 wiegend.

$$v(\phi(\sigma_p))^2 = 10^{-4} \cdot (0.1 + 0.1 + 0.5 + 0 + 0 + 1.0 + 0.3)$$

$v(\phi(\sigma_p)) = 0.014$ Alle Parameter haben geringen Ein-
 fluss.

b) p = 0.60

$$v(m_{Br})^2 = 10^{-4} \cdot (4.8 + 17.6 + 0.1 + 1.3 + 0.2 + 59.2 + 0)$$

$v(m_{Br}) = 0.091$ Der Einfluss von $(\bar{\beta}, \bar{E}_b)$ und $\bar{h}$ überwiegt.

$$v(\phi_{Br})^2 = 10^{-4} \cdot (2.0 + 2.0 + 0.1 + 0.3 + 0 + 24.0 + 0)$$

$$v(\phi_{Br}) = 0.053 \quad \text{Der Einfluss von } (\bar{\beta}, \bar{E}_b) \text{ ist \u00fcberwiegend.}$$

3. Korrekturalemente

a) $p = 0$

Aus den $m - \phi$ - Kurven (Anhang) und den Gleichungen (6.26) und (6.27) folgt:

$$c_1 = 0.985 \cdot \frac{m(\sigma_p)}{\phi(\sigma_p)} \quad c_2 = 0.0704 \cdot \frac{m_{Br}}{\phi_{Br}}$$

Die Auswertung der Gleichungen (6.28) bis (6.31) ergibt:

$$\Delta\phi(\sigma_p) = -0.014 \cdot \phi(\sigma_p) \cdot \frac{0.985 \frac{m(\sigma_p)}{\phi(\sigma_p)}}{\sqrt{\left[\frac{0.053^2}{0.014^2} + 0.985^2 \right] \frac{m(\sigma_p)^2}{\phi(\sigma_p)^2}}} \cdot x_{0.05} = \pm 0.0035 \phi(\sigma_p) \cdot x_{0.05} \cong 0$$

$$\begin{aligned} \Delta m(\sigma_p) &= 0.053 m(\sigma_p) \cdot \frac{3.79}{\pm 3.90} \cdot x_{0.05} = \\ &= \pm 0.051 m(\sigma_p) \cdot x_{0.05} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{Br} &= -0.043 \phi_{Br} \cdot \frac{0.0704}{\pm 1.42} \cdot x_{0.05} = \\ &= \pm 0.0021 \phi_{Br} \cdot x_{0.05} \cong 0 \end{aligned}$$

$$\Delta m_{Br} = 0.061 m_{Br} \cdot \frac{1.42}{\pm 1.42} \cdot x_{0.05} = \pm 0.061 m_{Br} \cdot x_{0.05}$$

b) $\underline{p = 0.60}$

$$c_2 = 0.238 \cdot \frac{m_{Br}}{\phi_{Br}}$$

$$\Delta \phi_{Br} = - 0.053 \phi_{Br} \cdot \frac{0.238}{\pm 1.74} = \mp 0.0072 \phi_{Br} \cdot \chi_{0.05} \cong 0$$

$$\Delta m_{Br} = 0.091 m_{Br} \cdot \frac{1.72}{\pm 1.74} = \pm 0.090 m_{Br} \cdot \chi_{0.05}$$

Die $\Delta \phi$ - Korrekturen sind durchwegs vernachlässigbar klein. Man kann sich daher auf die Δm - Korrekturen beschränken:

$$\Delta m(\sigma_p) = \pm v(m(\sigma_p)) \cdot m(\sigma_p) \cdot \chi_{0.05} \quad (6.32)$$

$$\Delta m_{Br} = \pm v(m_{Br}) \cdot m_{Br} \cdot \chi_{0.05} \quad (6.33)$$

4. Vertrauensgrenzen

Mit (6.32), (6.33), (6.16) und (6.18) lassen sich die Vertrauensgrenzen $a_{0.05}^o$ und $a_{0.05}^u$ berechnen:

a) $\underline{p = 0}$

$$\text{für } 0 \leq m \leq m(\sigma_p)$$

$$\begin{aligned} a_{0.05}^{o,u} &= m \cdot (1 \pm 0.051 \cdot \chi_{0.05}) \\ &= m \cdot (1 \pm 0.125) \end{aligned}$$

$$\text{für } m(\sigma_p) < m \leq m_{Br}$$

$$\begin{aligned} a_{0.05}^{o,u} &= m \pm \chi_{0.05} \cdot \left[0.051 m(\sigma_p) + \right. \\ &\quad \left. \frac{0.061 m_{Br} - 0.051 m(\sigma_p)}{m_{Br} - m(\sigma_p)} (m - m(\sigma_p)) \right] \\ &= m \cdot (1 \pm 0.175) \mp 0.050 \cdot m(\sigma_p) \end{aligned}$$

b) $p = 0.60$

für $0 \leq m \leq m_{Br}$

$$a_{0.05}^{o,u} = m \cdot (1 \pm 0.090 \cdot x_{0.05})$$

$$= m \cdot (1 \pm 0.220)$$

Bild 6.4 zeigt die nominellen $m - \phi$ - Kurven für $p = 0$ und $p = 0.60$ mit den zugehörigen Vertrauensbereichen.

Bild 6.4: Vertrauensbereiche der Grundbeziehungen zwischen Moment und Krümmung, wie sie auf Grund der Streuungen einzelner Parameter berechnet werden können.

Mit zunehmender Druckkraft wirken sich Schwankungen der Betondruckfestigkeit und der statischen Höhe stärker auf die $m - \phi$ - Funktion aus und der Vertrauensbereich wird grösser.

6.5 Einfluss einer Korrelation zwischen Moment und Krümmung

Die Berechnung des Vertrauensbereiches zwischen Moment und Krümmung erfolgte unter der Annahme, dass zwischen m_{Br} und ϕ_{Br} sowie zwischen $m(\sigma_p)$ und $\phi(\sigma_p)$ keine Korrelation besteht. Die Berechtigung dieser Annahme müsste durch Versuche nachgewiesen werden. Wir beschränken uns hier auf die Abschätzung des extremalen Einflusses einer eventuell vorhandenen Korrelation. Diese Abschätzung wird dadurch ermöglicht, dass die Einflussfunktionen und das Gauss'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz eine Näherungsberechnung der Streuungen in den Achsenrichtungen m und ϕ zulassen.

Um das Problem möglichst einfach formulieren zu können, gehen wir auf ein Koordinatensystem mit den Achsen x und y über und untersuchen eine Häufigkeitsverteilung mit dem Durchschnitt $\bar{x} = 0$ und $\bar{y} = 0$. Die Punkte gleicher Häufigkeit liegen wiederum auf Ellipsen, deren Hauptachsenrichtungen u und v jedoch gegenüber den Achsen x und y - infolge Korrelation - um den Winkel ω gedreht sind.

Mit den Abkürzungen

$$s_{xx} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \quad (6.34)$$

$$s_{yy} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n - 1} \quad (6.35)$$

und
$$s_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n - 1} \quad (6.36)$$

sind die Ellipsengleichungen gegeben durch

$$s_{xx} y^2 + 2s_{xy} xy + s_{yy} x^2 + x_W^2 (s_{xy}^2 - s_{xx} s_{yy}) = 0 \quad (6.37)$$

Der Winkel ω zwischen den Axen x und u kann aus

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2s_{xy}}{s_{xx} - s_{yy}} \quad (6.38)$$

berechnet werden. Der Korrelationskoeffizient

$$r = \sqrt{\frac{s_{xy}^2}{s_{xx} s_{yy}}} \quad (-1 < r < 1) \quad (6.39)$$

kann Werte zwischen -1 und +1 annehmen.

Die Grössen s_{xx} und s_{yy} dürfen als bekannt vorausgesetzt werden, während s_{xy} an sich unbekannt ist, aber durch (6.39) eingeschränkt wird.

Die Extrema der Korrelationsellipsen ergeben sich aus der Ableitung von (6.37). Aus $\frac{dy}{dx} = 0$ ergeben sich die extremalen Ordinaten (horizontale Tangenten) und aus $\frac{dx}{dy} = 0$ die extremalen Abszissen (vertikale Tangenten).

Die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ von (6.37)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{s_{xy}}{s_{xx}} x \pm \frac{1}{s_{xx}} \frac{x (s_{xy}^2 - s_{xx} s_{yy})}{\sqrt{(s_{xy}^2 - s_{xx} s_{yy}) (x^2 - x_W^2 s_{xx})}} \quad (6.40)$$

wird gleich Null gesetzt. Daraus folgt:

$$x = \pm x_W \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_{yy}}} \quad (6.41)$$

Durch Einsetzen von (6.41) in (6.37) ergibt sich

$$y_{\max/\min} = \pm x_W \sqrt{s_{yy}} \quad (6.42)$$

Die Ableitung $\frac{dx}{dy}$ von (6.37)

$$\frac{dx}{dy} = - \frac{s_{xy}}{s_{yy}} y \pm \frac{1}{s_{yy}} \frac{y (s_{xy}^2 - s_{xx} s_{yy})}{\sqrt{(s_{xy}^2 - s_{xx} s_{yy}) (y^2 - x_W^2 s_{yy})}} \quad (6.43)$$

wird ebenfalls gleich Null gesetzt. Daraus folgt

$$y = \pm x_W \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_{xx}}} \quad (6.44)$$

Durch Einsetzen von (6.44) in (6.37) ergibt sich

$$x_{\max/\min} = \pm x_W \sqrt{s_{xx}} \quad (6.45)$$

Es ist bemerkenswert, dass die vier Ellipsenextrema ((6.42) und (6.45)) von s_{xy} unabhängig sind. Bei gegebenen Werten s_{xx} und s_{yy} muss die Korrelationsellipse - unabhängig von s_{xy} - im Tangentenrechteck $x = \pm x_W \sqrt{s_{xx}}$, $y = \pm x_W \sqrt{s_{yy}}$ liegen (Bild 6.5). Im Fall grösstmöglicher Korrelation ($r = \pm 1$) degenerieren die Ellipsen zu Rechteckdiagonalen.

Die Vertrauensgrenzen der $m - \phi$ - Beziehungen wurden in Abschnitt 6.4 aus Ellipsentangenten bestimmt. Werden anstelle der Tangentenpunkte die Eckpunkte des umschriebenen Rechtecks verwendet (Bild 6.6), so ergeben sich daraus direkt die möglichen Extremlagen der Vertrauensgrenzen. Das Verhältnis d/c ist ein Mass für den möglichen Einfluss einer Korrelation auf den Vertrauensbereich. Aus Bild 6.6 ergibt sich:

$$\frac{d}{c} = \pm \frac{a \sin \alpha}{b \cos \alpha} = \pm \frac{a}{b} \operatorname{tg} \alpha \quad (6.46)$$

Bild 6.5: Die Korrelation bewirkt eine Drehung ω der Ellipsenachsen gegenüber den Achsen x und y . Die Ellipsenextrema sind jedoch unabhängig von der Grösse der Korrelation.

Bild 6.6: Extremalagen der oberen Vertrauensgrenzen bei gleicher Wahrscheinlichkeit, aber unterschiedlicher Korrelation (Korrelationskoeffizient $r = \pm 1$).

In Tabelle 6.3 wurde das Verhältnis $\frac{d}{c}$ für das numerische Beispiel des Abschnitts 6.4 ausgewertet.

Tabelle 6.3

Grösstmöglicher Einfluss einer Korrelation

(Werte aus Beispiel 6.4)

$p = 0$		$p = 0.60$
$v(\phi(\sigma_p)) = 0.014$	$v(\phi_{Br}) = 0.043$	$v(\phi_{Br}) = 0.053$
$v(m(\sigma_p)) = 0.053$	$v(m_{Br}) = 0.061$	$v(m_{Br}) = 0.091$
$\text{tg } \alpha = 0.985$	$\text{tg } \alpha = 0.0704$	$\text{tg } \alpha = 0.238$
$\frac{d}{c} = \pm \frac{0.014}{0.053} \cdot 0.985$ $= \pm 0.26$	$\frac{d}{c} = \pm \frac{0.043}{0.061} \cdot 0.0704$ $= \pm 0.050$	$\frac{d}{c} = \pm \frac{0.053}{0.091} \cdot 0.238$ $= \pm 0.139$

Der mögliche Einfluss einer Korrelation ist also verhältnismässig gering, besonders wenn man bedenkt, dass die berechneten Extremwerte mit grosser Wahrscheinlichkeit nie erreicht werden.

6.6. Ungewollte Auslenkung der Stützenaxe, ungewollte Lastexzentrizität

Ungenauigkeiten bei der Ausführung können - unabhängig von der Einwirkung äusserer Lasten - zu einer Ausbiegung der Stützenaxe führen. Aus der Annahme, dass die Krümmung ϕ_u aus einer solchen ungewollten Auslenkung w_u der Stützenaxe über die Stützenlänge l konstant ist, ergibt sich

$$\phi_u = \pm 8 \frac{w_u}{l} \quad (6.47)$$

Bei der Festlegung der Grösse w_u sollte vor allem die Ueberwachung der Bauausführung und die verwendete Baumethode berücksichtigt werden.

Der qualitative Einfluss von ϕ_u auf die $m - \phi$ - Beziehung geht aus Bild 6.7 hervor: die $m - \phi$ - Kurve wird um den Betrag $\pm \phi_u$ verschoben. Dieser Einfluss kann ebenfalls den, in Abschnitt 6.4 berechneten, Vertrauensgrenzen überlagert werden.

Neben diesen Ungenauigkeiten im Verlauf der Stützenaxe sind auch die Lastexzentrizitäten e mit Abweichungen von der Wirklichkeit behaftet. Diese ungewollten Abweichungen e_u verursachen zusätzliche Momente M_u . Im günstigsten Fall dürfen wir von der Annahme ausgehen, dass die ungewollte Exzentrizität e_u unabhängig von der nominellen Exzentrizität e ist, d.h. $e_u = e_{uo} = \text{konstant}$. In diesem Fall ergibt sich eine vertikale Verschiebung der $m - \phi$ - Kurve um den Betrag

$$m_u = \pm p \gamma \frac{e_{uo}}{h} \quad (6.48)$$

(Bild 6.8, gestrichelte Linien).

Möglicherweise muss jedoch mit zunehmender Exzentrizität e ebenfalls mit einer vergrösserten ungewollten Exzentrizität gerechnet werden.

Bild 6.8 zeigt auch den Einfluss einer mit e linear zunehmenden ungewollten Exzentrizität $e_u = e_{uo} + k_e e$. Damit ergibt sich für m_u :

$$m_u = \pm p \gamma \frac{e}{h} \left(\frac{e_{uo}}{e} + k_e \right) \quad (6.49)$$

(Bild 6.8, strich-punktierte Linien).

Auch dieser Einfluss kann den Vertrauensgrenzen überlagert werden.

Bild 6.7: Einfluss einer ungewollten Auslenkung w_u der Stabaxe auf die $m-\phi$ -Grundbeziehung.

Bild 6.8: Einfluss einer ungewollten Endexzentrizität $e_u = e_{u0}$, bzw. $e_u = e_{u0} + k_e \cdot e$ der Druckkraft auf die $m-\phi$ -Grundbeziehung.

Einzelne Normen (z.B. DIN 1045) enthalten Richtwerte für die Grösse der ungewollten Exzentrizität. In diesen Richtwerten sind aber oft auch andere Einflüsse, wie z.B. ungewollte Krümmungen der Stabaxe oder sogar Ungenauigkeiten in Querschnittsform und Armierungslage eingerechnet [23]. Wegen ihrer unterschiedlichen Wirkung auf die $m-\phi$ -Beziehung müssen diese Einflüsse jedoch getrennt untersucht werden.

6.7 Ausblick

Die starke Beeinflussbarkeit der $m-\phi$ -Beziehungen durch einzelne Parameter und die daraus folgenden grossen Unsicherheiten in den $m-\phi$ -Beziehungen lassen erkennen, dass das Gauss'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz nur eine Abschätzung des Vertrauensbereichs zulässt.

Eine genauere Berechnung der Vertrauensgrenzen wäre mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode möglich [24]. Dieses Simulationsverfahren erlaubt die Berechnung der Verteilung einer beliebigen Funktion einzelner Parameter, die ebenfalls beliebig verteilt sein können. Diese Methode erfordert jedoch einen ausserordentlich grossen numerischen Rechenaufwand und kann nur mit dem Computer durchgeführt werden.

Aus Abschnitt 5 geht hervor, dass der Einfluss der Mitwirkung der Betonzugzone auf die $m - \phi$ - Beziehung im allgemeinen nicht sehr gross ist. Vereinfachend kann man also diese Streuungsquelle vernachlässigen. Um die Vertrauensgrenzen der nominalen $m - \phi$ - Beziehungen zu erhalten, genügt es daher, die Grenzkurven a_W^o und a_W^u mit den entsprechenden Korrekturen des Abschnitts 5.1 zu versehen. Bei wiederholten Belastungen wird der Einfluss der mitwirkenden Zugzone immer kleiner. In solchen Fällen ist zu empfehlen, den Einfluss der Zugzone auf die untere Vertrauensgrenze a_W^u zu vernachlässigen. Mit dieser Näherung befindet man sich auf der sicheren Seite.

Die durchgeführten Untersuchungen bezogen sich ausschliesslich auf Streuungen der $m - \phi$ - Beziehungen zur Zeit $t = 0$. Da auch die Kriechfunktion Schwankungen unterworfen ist, müsste auch dieser Einfluss noch näher untersucht werden. Ein wesentliches Ziel wäre in diesem Zusammenhang die Bestimmung der Korrelation zwischen Kurzzeit- und Langzeit-Verformungen. Aufgrund der bisherigen Untersuchungen kann folgender Näherungsvorschlag gemacht werden:

Der Kriecheinfluss bewirkt hauptsächlich eine Streckung der $m - \phi$ - Kurve in ϕ - Richtung. In Abschnitt 6.4 wurde gezeigt, dass der Einfluss der $\Delta\phi$ - Korrekturen auf die $m - \phi$ - Vertrauensgrenzen sehr gering ist. Der Vertrauensbereich ist praktisch nur durch die Δm - Korrekturen bestimmt. Näherungsweise darf daher angenommen werden, dass die Korrekturfunktionen (6.32) und (6.33) auch für die zeitabhängigen $m - \phi$ - Funktionen gelten.

7. BERECHNUNG VON BIEGELINIEN

7.1 Theoretische Grundlagen

7.1.1 Biegelinien infolge kurzzeitiger Lasteinwirkung

Die Berechnung von Biegelinien aus nominellen $M - \phi$ - Beziehungen ist ein ausschliesslich theoretisches Problem. Bei Einzelstützen mit gegebenen statischen oder geometrischen Randbedingungen ist die Biegelinienberechnung noch verhältnismässig einfach. Für eine konstante Axialkraft P können Stützenbiegelinien (Column Deflection Curves, CDC-s) als reine Gleichgewichtskurven berechnet werden (theoretische Grundlagen in [25]).

Bild 7.1 zeigt den Zusammenhang zwischen Biegelinie und $M - \phi$ - Kurve.

Bild 7.1: Biegelinienberechnung mit Hilfe der $M - \phi$ -Beziehungen.

Bei gegebener Axialkraft P und freier Wahl des Stabenddrehwinkels θ_0 ist eine Gleichgewichtskurve eindeutig bestimmt. Die Ordinaten y_i können, vom Stabende ausgehend, nach den folgenden Beziehungen berechnet werden:

$$y_1 = \Delta l \cdot \theta_0 \quad (7.1)$$

$$\theta_1 = \theta_0 - \Delta l \cdot \phi_1 \quad (7.2)$$

$$y_2 = y_1 + \Delta l \cdot \theta_1 \quad (7.3)$$

usw.

Für Durchbiegung und Stabneigung im Punkt i ergibt sich:

$$y_i = y_{i-1} + \Delta l \cdot \theta_{i-1} \quad (7.4)$$

$$\theta_i = \theta_{i-1} - \Delta l \cdot \phi_i \quad (7.5)$$

Durch eine schrittweise Veränderung von θ_0 kann eine ganze Schar von Gleichgewichtskurven berechnet werden (Bild 7.2). Die Kurven sind symmetrisch; es genügt daher, jeweils einen Viertel der Wellenlänge zu berechnen.

Bild 7.2: Schar von Gleichgewichtskurven, berechnet für $P = \text{konst.}$

Bild 7.3 zeigt, wie aus einer einzigen Gleichgewichtskurve die Biegelinien von Stützen unter verschiedenen Randbedingungen herausgelesen werden können.

Bild 7.3: Stützenbiegelinien können als Gleichgewichtskurven-Abschnitte aufgefasst werden.

Die folgenden Betrachtungen werden ausschliesslich für den Fall 1 in Bild 7.3 durchgeführt.

Aus den Gleichgewichtskurven geht hervor, dass für eine gegebene Axialkraft im allgemeinen zwei Gleichgewichtslagen der Biegelinie möglich sind. Im $M - w_m$ - Diagramm in Bild 7.4 wurde die Kurve des inneren Moments M_i , wie es sich aus den Gleichgewichtskurven ergibt, dargestellt. Die Schnittpunkte A und B der M_i - Kurve mit der Geraden M_a des äusseren Moments ergeben die zur Last P gehörenden möglichen Durchbiegungen w_{m1} und w_{m2} .

Bild 7.4: Gleichgewichtslagen der exzentrisch gedrückten Stütze.

Die Gleichgewichtslage im Punkt A ist stabil. Bei einer zusätzlichen Auslenkung Δw wächst das innere Moment M_i gegenüber dem äusseren Moment M_a stärker an. Im Punkt B herrscht ein labiles Gleichgewicht. Bei einer zusätzlichen Auslenkung wächst das äussere Moment gegenüber dem inneren Moment stärker an. Im Punkt C findet der Uebergang von der stabilen in die labile Gleichgewichtslage statt.

Im nächsten Abschnitt werden wir auf die Berechnung von Kriechdurchbiegungen eingehen. Da es sich bei Kriechdurchbiegungen um zeitlich zunehmende Auslenkungen handelt, geht aus Bild 7.4 hervor, dass sich die Punkte A und B mit der Zeit dem Punkt C nähern. Bei einer bestimmten kritischen Exzentrizität e_{cr} werden die Schnittpunkte A und B für $t \rightarrow t_\infty$ gerade den Tangentialpunkt C erreichen. Für jede Exzentrizität $e > e_{cr}$ wird C zwischen t_0 und t_∞ von A und B erreicht, d.h. die Stütze wird

zu einer bestimmten Zeit $t > t_0$ instabil. Neben den Materialeigenschaften und Querschnittswerten ist e_{cr} stark von der Grösse der Last P abhängig.

7.1.2 Biegelinien infolge Dauerlast

Die Berechnung der Kriechdurchbiegungen erfolgt in ähnlicher Weise wie bei der in [16] oder [26] beschriebenen "Rate of Creep" - Methode. Die Stütze wird in eine Anzahl Segmente (nominelle Krümmungselemente) unterteilt. Bei Belastungsbeginn ($t = 0$) kann bereits eine Schwindkrümmung (inkl. einer Krümmung aus ungewollter Auslenkung der Stützenaxe) vorhanden sein. Diese Anfangskrümmung beträgt beispielsweise für das Segment i

$$\Delta\phi_s(i, t_0) = \frac{\epsilon_s(t_0)}{h} \cdot \eta_{\phi s}(i) + \phi_u(i) \quad (7.6)$$

Mit diesen Anfangskrümmungen kann die im Zeitpunkt der Lastaufbringung vorhandene Biegelinie $w_s(t_0)$ berechnet werden. Zusammen mit der unmittelbar eintretenden Biegelinie $w_0(t_0)$, infolge äusserer Belastung, ergibt sich die resultierende Biegelinie $w(t_0)$

$$w(t_0) = w_0(t_0) + w_s(t_0) \quad (7.7)$$

$w_0(t_0)$ wird - gemäss Abschnitt 7.1.1 - aus der zur Zeit $t = 0$ gültigen $M - \phi$ - Beziehung berechnet.

Zu Beginn des Zeitintervalls (t_0, t_1) beträgt das Moment (inkl. Einfluss aus ungewollter Exzentrizität) im Segment i :

$$M(i, t_0) = P (e + e_u + w(i, t_0)) \quad (7.8)$$

Im Zeitintervall (t_0, t_1) wird eine Kriechdruckbiegung $w_k(t_0, t_1)$ und eine weitere Schwinddurchbiegung $w_s(t_0, t_1)$ eintreten. Für

die Berechnung wird angenommen, dass das Moment in jedem Segment im Zeitintervall (t_0, t_1) konstant bleibt. Aus den zur Zeit $t = 0$ und $t = t_1$ gültigen $M - \phi$ - Beziehungen kann der Kriechkrümmungszuwachs bestimmt werden. Die Kriechkrümmungszunahme für das Segment i beträgt beispielsweise

$$\Delta\phi_k(i, t_1) = \phi(i, t_1) - \phi(i, t_0) \quad (7.9)$$

Die Schwindkrümmungszunahme beträgt:

$$\Delta\phi_s(i, t_1) = \frac{\epsilon_s(t_1) - \epsilon_s(t_0)}{h} \cdot \eta_{\phi_s}(i) \quad (7.10)$$

Mit diesen Krümmungszunahmen kann die Biegelinie am Intervallende berechnet werden:

$$w(t_1) = w(t_0) + w_k(t_0, t_1) + w_s(t_0, t_1) \quad (7.11)$$

Die im Intervall (t_0, t_1) eingetretenen Kriech- und Schwinddurchbiegungen bewirken eine Zunahme des äusseren Moments und damit eine zusätzliche Durchbiegung. Für die numerische Berechnung wird angenommen, dass dieser Momentenzuwachs am Intervallende erfolgt, was zu einer Vergrösserung des Anteils der Kurzzeitdurchbiegung um $w_0(t_1)$ führt.

Zu Beginn des folgenden Zeitintervalls (t_1, t_2) beträgt somit das Moment im Segment i :

$$M(i, t_1) = P (e + e_u + w(i, t_1) + w_0(i, t_1)) \quad (7.12)$$

Unter diesem Moment wird nun der Kriechkrümmungszuwachs $\Delta\phi_k(i, t_2)$ im Intervall (t_1, t_2) berechnet. Um die endgültige Biegelinie $w(t_\infty)$ zu erhalten, muss dieses Vorgehen für sämtliche Zeitintervalle wiederholt werden.

Bei linearem Zusammenhang zwischen Moment und Krümmung konvergiert dieses Verfahren mit zunehmender Anzahl Zeitinter-

valle gegen die Lösung der - auf dem Ansatz von Dischinger beruhenden - Differentialgleichung der zeitabhängigen Biegelinie. Nach dem oben beschriebenen Vorgehen ist der Kriechkrümmungszuwachs im Intervall (t_i, t_{i+1}) nur vom Moment $M(t_i)$ und von den, aus konstanten Momenten ermittelten $M - \phi(t_i)$ - und $M - \phi(t_{i+1})$ - Beziehungen abhängig. Die Momente $M(t < t_i)$ werden also - wie in der Theorie von Dischinger - für die Berechnung von $\Delta\phi_k(t_i)$ nicht berücksichtigt. In Wirklichkeit wird jedoch die "Vorgeschichte" des Moments $M(t_i)$ auf den folgenden Kriechkrümmungszuwachs einen gewissen Einfluss ausüben. Wie in [27] festgestellt wird, ist dieser Fehler der "Rate of Creep" - Methode unbedeutend, wenn die Spannungen nicht ausgesprochen stark zeitabhängig sind. Bei den meisten Kriechproblemen sind die Spannungen jedoch nur schwach zeitabhängig. Experimentelle Untersuchungen dieses Phänomens fehlen noch weitgehend. Es dürfte auch schwierig sein, den Einfluss der "Vorgeschichte" statistisch gesichert von den starken Streuungen im Kriechmass zu trennen.

Für die numerische Berechnung wurden fünf Zeitintervalle (0. - 1. Tag, 1. - 7. Tag, 7. - 28. Tag, 28. - 112. Tag, 112. - ∞) verwendet. Eine Untersuchung der Konvergenz der "Rate of Creep" - Methode [16] ergab schon für drei und vier Zeitintervalle gute Genauigkeiten.

7.1.3 Vertrauensbereiche für Biegelinien

Die Vertrauensgrenzen der Biegelinien können direkt aus den Vertrauensgrenzen der $M - \phi$ - Beziehungen berechnet werden. Der Biegelinienbereich besitzt dann dieselbe Vertrauenswahrscheinlichkeit wie der zugrunde liegende $M - \phi$ - Bereich. Wenn sich die Kurzzeitdurchbiegung im Bereich 0 - C der M_i - Kurve (Bild 7.4) befindet (stabile Gleichgewichtslage), kommen für den Vertrauensbereich der Langzeitdurchbiegungen die in Bild 7.5 dargestellten Möglichkeiten in Betracht.

Bild 7.5a zeigt einen völlig stabilen Vertrauensbereich. Da eine Instabilität nur unter der Bedingung $w_m > w_{m0.05}^o$ eintreten kann, ist die Wahrscheinlichkeit einer dauernden Stabilität grösser als 0.975.

Bild 7.5b zeigt einen gemischten Vertrauensbereich. Während der untere Teil des Vertrauensbereiches ($w_m < \bar{w}_m$) noch völlig stabil bleibt, zeigt der obere Teil ($w_m > \bar{w}_m$) bereits ein gemischtes Verhalten. Bis zur Zeit t_3 wird die Stütze mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 0.975 stabil bleiben. Nach der Zeit t_3 nimmt die Versagenswahrscheinlichkeit stark zu. Obwohl die Wahrscheinlichkeit einer Instabilität im Bereich $t > t_3$ kleiner als 0.5 bleibt ($\bar{w}_m$ bleibt stabil), ist die Gefährdung der Stütze durch die zunehmende Versagenswahrscheinlichkeit beträchtlich. Unter einer etwas höheren Last kann auch $\bar{w}_m$ instabil werden; damit wird der obere Teil des Vertrauensbereiches vollständig instabil, der untere Teil wird ein gemischtes Stabilitätsverhalten zeigen.

Bild 7.5c zeigt einen labilen Vertrauensbereich. Bis t_1 ist die Wahrscheinlichkeit einer Instabilität noch gering. Für $t > t_1$ wird die Versagenswahrscheinlichkeit jedoch stark zunehmen. Im Zeitintervall $t_1 < t < t_3$ ist eine Instabilität mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 0.975 zu erwarten.

Bild 7.5d zeigt ebenfalls einen labilen Vertrauensbereich. Hier kann die Instabilität schon nach wenigen Sekunden eintreten. Mit einer Wahrscheinlichkeit von über 0.975 wird die Stütze vor der Zeit t_3 durch Instabilität zerstört.

Bild 7.5a: Stabiler Vertrauensbereich der Langzeitdurchbiegungen.

Bild 7.5b: Gemischter Vertrauensbereich der Langzeitdurchbiegungen. Stabiler Vertrauensbereich für $t < t_3$; für $t > t_3$ nimmt die Wahrscheinlichkeit einer Instabilität stark zu.

Bild 7.5c

Bild 7.5d

Labiler Vertrauensbereich der Langzeitdurchbiegungen. Eine Instabilität wird mit grosser Wahrscheinlichkeit im Zeitintervall $t_1 < t < t_3$ (Bild 7.5c), bzw. im Zeitintervall $0 < t < t_3$ (Bild 7.5d) eintreten.

7.2 Gemessene und theoretische Biegelinien

7.2.1 Kurzzeitversuche

Für die in Abschnitt 5.2 beschriebenen vier Kurzzeitversuche wurde eine Nachrechnung der Biegelinien vorgenommen. Nach den Ergebnissen des Abschnitts 5.2 ist zu erwarten, dass die - nach Abschnitt 7.1.1 - berechneten Kurzzeitdurchbiegungen (ausgezogene Linien) gegenüber den gemessenen Durchbiegungen (gestrichelte Linien) allgemein zu kleine Werte ergeben, da kein Anfangskriechen berücksichtigt wird. Die Bilder 7.6a, 7.7a, 7.8a und 7.9a bestätigen diese Erwartung. Ebenfalls nach Abschnitt 5.2 muss bei einer Berücksichtigung des Anfangskriechens mit einer Ueberschätzung der Durchbiegungen gerechnet werden, da das Anfangskriechen in diesen Versuchen nicht ganz zum Abschluss gekommen ist. Auch diese Erwartung wird durch die Bilder 7.6b, 7.7b, 7.8b und 7.9b bestätigt.

Ein Zusammenfassen der beiden Vertrauensbereiche (mit/ohne Anfangskriechen) zu einem einzigen Bereich zeigt, dass alle Versuchsmessungen in diesem Bereich liegen.

Aus der Berechnung ergeben sich für die Reduktion der Traglast, infolge des Anfangskriechens, folgende Werte:

$\frac{e}{d}$	Reduktion von $P_{\max}$ in %
0.0333	16.7 %
0.10	19.6 %
0.25	8.1 %
1.0	6.3 %

Der Kriecheinfluss erreicht bei $\frac{e}{d} = 0.10$ ein Maximum.

Bild 7.6a

Bild 7.6b

Stütze Nr. 41: Gemessene und theoretische Durchbiegungen in Stützenmitte. Rechnungswerte ohne Kriecheinfluss (Bild 7.6a) und nach abgeschlossenem Anfangskriechen (Bild 7.6b), d.h. nach ca. einem Tag Dauerlast.

Bild 7.7a

Bild 7.7b

Stütze Nr. 53: Gemessene und theoretische Durchbiegungen in Stützenmitte. Rechnungswerte ohne Kriecheinfluss (Bild 7.7a) und nach abgeschlossenem Anfangskriechen (Bild 7.7b).

Bild 7.8a

Bild 7.8b

Stütze Nr. 24: Gemessene und theoretische Durchbiegungen in Stützenmitte. Rechnungswerte ohne Kriecheinfluss (Bild 7.8a) und nach abgeschlossenem Anfangskriechen (Bild 7.8b).

Stütze Nr. 31: Gemessene und theoretische Durchbiegungen in Stützenmitte. Rechnungswerte ohne Kriecheinfluss (Bild 7.9a) und nach abgeschlossenem Anfangskriechen (Bild 7.9b).

Bemerkenswert ist ebenfalls die Tatsache, dass das Kriechen bei grosser Exzentrizität eine Vergrösserung, und bei kleiner Exzentrizität eine Verkleinerung des Vertrauensbereichs von $P_{\max}$ bewirkt:

$\frac{e}{d}$	Vergrösserung bzw. Verkleinerung des Vertrauensbereichs von $P_{\max}$ in %
0.0333	- 49.3 %
0.10	- 23.6 %
0.25	+ 34.6 %
1.0	+ 37.8 %

Es wurde mit folgenden Variationskoeffizienten gerechnet:

$$\begin{aligned}
 v(\bar{b}) &= 0 & v(\bar{\mu}) &= v(\bar{\mu}') = 4 \% \\
 v(\bar{h}) &= 2 \% & v(\bar{\beta}_z) &= v(\bar{\sigma}_p) = 6 \% & v(\bar{E}_e) &= 3 \%
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s(\bar{\beta}_{w28}) &= 7.7 \text{ kg/cm}^2 + v(\bar{\beta}, \bar{E}_b) = 3.8 \% \text{ für } \frac{e}{d} = 1.0 \\
 &3.2 \% \text{ für } \frac{e}{d} = 0.25 \\
 &2.2 \% \text{ für } \frac{e}{d} = 0.10 \\
 &3.4 \% \text{ für } \frac{e}{d} = 0.0333
 \end{aligned}$$

In allen Versuchen waren praktisch keine ungewollten Exzentrizitäten und auch keine ungewollten Krümmungen, im Sinn von Abschnitt 6.6, vorhanden. Diese Einflüsse wurden daher nicht berücksichtigt. Obwohl die Streuungen der Einflussparameter eher gering waren, sind zum Teil beträchtliche Unsicherheiten - sowohl in den Durchbiegungen als auch in der Traglast - festzustellen.

7.2.2 Langzeitversuche

Die Leistungsfähigkeit der vorgeschlagenen Rechenmethoden wurde ebenfalls anhand der Langzeit-Stützenversuche [7] überprüft. Die Auswertung wurde für 24 Langzeitversuche vorgenommen. Die Bilder 7.10 bis 7.16 enthalten die gemessenen Durchbiegungen in Stützenmitte in Funktion der Zeit (gestrichelte Linien). Die äussere Last wurde während der gesamten Versuchszeit konstant gehalten. Die theoretischen Durchbiegungen und die Grenzen des zugehörigen Vertrauensbereichs (ausgezogene Linien) wurden zu sechs verschiedenen Zeiten berechnet (Belastungsbeginn, 1., 7., 28., 112. Tag, t_{∞}). Da in allen untersuchten Fällen eine starke Druckarmierung ($\mu' = \mu$) vorhanden war, wurde der Einfluss der Schwindkrümmung - nach Abschnitt 4.5 - unbedeutend.

In der Tabelle 7.1 sind die wichtigsten Versuchsparameter aufgeführt. Die übrigen Parameter sind konstant (wie bei den Kurzzeitversuchen). Die Variationskoeffizienten, bzw. die Standardabweichung $s(\bar{\beta}_{w28})$ werden aus Abschnitt 7.2.1 übernommen.

In nahezu allen Fällen liegen die Messergebnisse im theoretischen Vertrauensbereich. Die hier entwickelten Rechenverfahren erlauben eine zuverlässige Erfassung der möglichen Stützendurchbiegungen. Instabilitäten infolge des Kriechens können mit grosser Sicherheit vorausbestimmt werden.

Tabelle 7.1 Versuchsparmeter der Langzeitversuche

Nr. nach [7]	$\frac{e}{d}$	$\mu = \mu'$ %	d cm	h' cm	λ	$\frac{\beta}{\text{cm}^2}$	$\frac{p}{\beta b d}$	t_0 **)	Bild
51* 54 62 43 42 44	0.0333	1.0 %	15	2.5	100	356 302 304 238 217 205	0.328 0.389 0.383 0.435 0.487 0.511 0.567	28 16 56 28 33 23	7.10
11* 12* 21* 13 15 16	0.10	1.0 %	15	2.5	100	239 262 230 252 275 208	0.169 0.238 0.308 0.330 0.339 0.422	28	7.11
52* 23* 22 25*	0.25	1.0 %	15	2.5	100	356 248 249 206	0.141 0.151 0.202 0.210	28	7.12
33* 32*	1.0	1.0 %	15	2.5	100	236 224	0.0721 0.0826 0.0832	28	7.13
74* 82* 71 65	0.0333 0.05	1.0 % 1.03 %	15 10	2.5 1.7	50 150	268 293 268 233	0.647 0.140 0.209 0.274	28 28	7.14 7.15
72 66	0.375	1.03 %	10	1.7	150	268 233	0.0925 0.115	28	7.16

* Bruch durch abschliessenden Kurzzeitversuch herbeigeführt
 **) Belastungsalter in Tagen

Den Ansätzen für die Kriechberechnung lag ein Belastungs-
alter von 28 Tagen zugrunde. Wie die Versuche Nr. 54 und
Nr. 62 zeigen, kann sich das Belastungsalter wesentlich auf
die Durchbiegungen auswirken. Die Stütze Nr. 54 wurde schon
nach 16 Tagen belastet; die gemessenen Durchbiegungen lie-
gen höher als die obere Vertrauensgrenze. Die Stütze Nr. 62
wurde erst nach 56 Tagen belastet; die gemessenen Durchbie-
gungen liegen tiefer als die untere Vertrauensgrenze. Diese
Beobachtungen bestätigen den wesentlichen Einfluss des Be-
lastungsalters auf die Durchbiegungen.

Bild 7.10: Langzeitdurchbiegungen in Stützenmitte. Relative End-Exzentrizität $\frac{e}{d} = 0,0333$, Schlankheitsgrad $\lambda = 100$.

Gemessene und theoretische Werte mit Vertrauensgrenzen.

Bei den Stützen Nr. 54 und Nr. 62 macht sich der Einfluss des früheren, bzw. späteren Belastungsalters deutlich bemerkbar.

Bild 7.11: Langzeitdurchbiegungen in Stützenmitte. Relative End-Exzentrizität $\frac{e}{d} = 0,10$, Schlankheitsgrad $\lambda = 100$. Gemessene und theoretische Werte mit Vertrauensgrenzen.

Bild 7.12: Langzeitdurchbiegungen in Stützenmitte. Relative End-Exzentrizität $\frac{e}{d} = 0,25$, Schlankheitsgrad $\lambda = 100$. Gemessene und theoretische Werte mit Vertrauensgrenzen.

Bild 7.13: Langzeitdurchbiegungen in Stützenmitte. Relative End-Exzentrizität $\frac{e}{d} = 1,0$, Schlankheitsgrad $\lambda = 100$. Gemessene und theoretische Werte mit Vertrauensgrenzen.

Bild 7.14: Langzeitdurchbiegungen in Stützenmitte. Relative End-Exzentrizität $\frac{e}{d} = 0,0333$, Schlankheitsgrad $\lambda = 50$. Gemessene und theoretische Werte mit Vertrauensgrenzen.

Bild 7.15: Langzeitdurchbiegungen in Stützenmitte. Relative End-Exzentrizität $\frac{e}{d} = 0,05$, Schlankheitsgrad $\lambda = 150$. Gemessene und theoretische Werte mit Vertrauensgrenzen.

Bild 7.16: Langzeitdurchbiegungen in Stützenmitte. Relative End-Exzentrizität $\frac{e}{d} = 0,375$, Schlankheitsgrad $\lambda = 150$. Gemessene und theoretische Werte mit Vertrauensgrenzen.

ZUSAMMENFASSUNG

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Formulierung mathematischer Ansätze, mit denen eine zuverlässige Verformungsprognose für Stahlbetonstützen bis zum Erreichen der Traglast möglich ist. Als zentrale Beziehung für Verformungsrechnungen wird der Zusammenhang zwischen Axialkraft, Moment und Krümmung untersucht. Versuchsergebnisse zeigen, dass die nominelle Krümmung für die Berechnung von Stützenbiegelineien im ungerissenen wie auch im gerissenen Zustand geeignet ist.

Die Berechnung der Momenten-Krümmungsbeziehungen für konstante Werte der Axialkraft erfolgt mit nichtlinearen Spannungs-Dehnungsfunktionen für Beton und Stahl. Für das Kriechen des Betons wird eine spannungsabhängige Kriechfunktion formuliert, die für alle Belastungsgrade eine wirklichkeitsnahe Erfassung der Kriechverformungen erlaubt. Um den zeitlichen Verlauf der Kriechverformungen berücksichtigen zu können, wird die Momenten-Krümmungsbeziehung zu sechs verschiedenen Zeiten nach Belastungsbeginn berechnet. Die Mitwirkung der Betonzugzone im gerissenen Zustand kann durch eine einfache Korrektur der Grundbeziehungen zwischen Moment und Krümmung berücksichtigt werden.

Eine eindeutige Verformungsprognose für Stahlbetonstützen ist wegen den zum Teil beträchtlichen Streuungen der Materialeigenschaften und Querschnittswerte nicht möglich. Mit Hilfe statistischer und wahrscheinlichkeitstheoretischer Betrachtungen gelingt es jedoch, aus den Grundverteilungen der Mittelwerte der einzelnen Einflussparameter auf die Vertrauensgrenzen der Momenten-Krümmungsbeziehungen zu schließen. Der entsprechende Biegelinienv vertrauensbereich kann direkt aus diesen Vertrauensgrenzen berechnet werden.

Da sowohl die Momenten-Krümmungsbeziehungen als auch die Biege-

linien iterativ berechnet werden müssen, ist der numerische Rechenaufwand gross. Bei Berücksichtigung des Kriecheinflusses muss die Iteration der Biegelinienberechnung sogar von Kriechstufe zu Kriechstufe wiederholt werden. Für eine praktische Anwendung kommen daher, neben Tafelwerken mit Gleichgewichtskurven, nur Computerprogramme in Betracht. Alle in dieser Arbeit enthaltenen numerischen Ergebnisse wurden auf dem Computer des RZETH (CDC 1604-A) berechnet. Der Vergleich zwischen den gemessenen Biegelinien aus Kurz- und Langzeitversuchen und den theoretischen Biegelinienvertrauensbereichen bestätigt sowohl die Zuverlässigkeit der vorgeschlagenen Berechnungsverfahren als auch die Zuverlässigkeit der statistischen Betrachtungsweise.

SUMMARY

The aim of this thesis is to develop computation methods which allow a reliable prediction of deformations of reinforced concrete columns up to ultimate load. As a basis of a deformation computation method the relationship between the axial force, moment and curvature is investigated. Test results show that the nominal curvature is appropriate for the evaluation of column-deflections in the cracked as well as in the non-cracked state.

The computation of the moment-curvature relationship for constant values of the axial force is carried out with non-linear stress-strain functions for steel and concrete. A stress dependent creep function is formulated which allows an accurate approach to the actual behavior of the concrete. In order to obtain the time dependent creep strains of a member, the moment-curvature relationships are computed at different times. The contribution of the concrete tensile zone in the cracked state can be included by a simple improvement of the fundamental moment-curvature relationships.

The variances of the material properties and cross-sectional properties are in part considerable; therefore a close fitting prediction of deformations for reinforced concrete columns is not feasible. A statistical analysis of the mean-distributions of the different parameters permits the evaluation of the confidence limits of the moment-curvature relationship. The application of these confidence limits leads directly to the corresponding confidence limits of the column-deflection-curve.

The moment-curvature relationships as well as the column deflections have to be computed by a trial and error procedure; the numerical effort is therefore considerable. If the creep behavior is taken into account, the trial and error procedure

has even to be repeated from creep stage to creep stage. For any practical application, therefore, computer programs or tables and graphs of column-deflection-curves are a necessity. All numerical results reported in this paper have been calculated on a CDC 1604-A computer at the RZETH. A comparison between measured short-time and long-time deflections with the theoretical confidence limits of the column-deflection-curves confirms the reliability of the proposed computation methods as well as the accuracy of the statistical conception.

ANHANG A

Graphische Darstellung der Grundbeziehungen zwischen Axialkraft, Moment, Krümmung und Betonrandstauchung. Die in den Bildern A1 bis A9 wiedergegebenen Funktionen stellen einen Teil der, für die Biegelinienberechnung von Abschnitt 7, benötigten Momenten-Krümmungsbeziehungen dar.

- $P - M - \phi - \epsilon_{bo}$ ohne Kriecheinfluss, $\beta = 200 \text{ kg/cm}^2$: Bild A1
 $P - M - \phi - \epsilon_{bo}$ ohne Kriecheinfluss, $\beta = 300 \text{ kg/cm}^2$: Bild A2
 $P - M - \phi - \epsilon_{bo}$ ohne Kriecheinfluss, $\beta = 400 \text{ kg/cm}^2$: Bild A3
 $P - M - \phi - \epsilon_{bo}$ nach Abschluss des verstärkten
 Anfangskriechens, $\beta = 200 \text{ kg/cm}^2$: Bild A4
 $P - M - \phi - \epsilon_{bo}$ nach Abschluss des verstärkten
 Anfangskriechens, $\beta = 300 \text{ kg/cm}^2$: Bild A5
 $P - M - \phi - \epsilon_{bo}$ nach Abschluss des verstärkten
 Anfangskriechens, $\beta = 400 \text{ kg/cm}^2$: Bild A6
 $P - M - \phi - \epsilon_{bo}$ nach Abschluss des
 Kriechens, $\beta = 200 \text{ kg/cm}^2$: Bild A7
 $P - M - \phi - \epsilon_{bo}$ nach Abschluss des
 Kriechens, $\beta = 300 \text{ kg/cm}^2$: Bild A8
 $P - M - \phi - \epsilon_{bo}$ nach Abschluss des
 Kriechens, $\beta = 400 \text{ kg/cm}^2$: Bild A9

Konstante Parameter

Querschnittswerte	Materialeigenschaften	
	Beton	Stahl
Bezeichnungen nach Bild 4.1 $\mu = \frac{F_e}{bh} = 0.01$ $\mu' = \frac{F'_e}{bh} = 0.01$ $\gamma = \frac{d}{h} = 1.2$ $\delta = \frac{h'}{h} = 0.2$	$\sigma_b - \epsilon_b$ nach Bild 3.7 $\beta = \begin{matrix} 200 \\ 300 \\ 400 \end{matrix} \text{ kg/cm}^2$	$\sigma_e - \epsilon_e$ nach Bild 3.8 $ \sigma_z = 5500 \text{ kg/cm}^2$ $ \sigma_{0.2} = 4600 \text{ kg/cm}^2$ $ \sigma_p = 2660 \text{ kg/cm}^2$ $E_e = 2.1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$

Bild A1: $M-\phi-\epsilon_{bo}$ Grundbeziehungen, $\beta=200\text{kg/cm}^2$, ohne Kriech Einfluss, konstante Parameter gemäss Tabelle Seite 162.

Bild A2: $M-\phi-\epsilon_{bo}$ -Grundbeziehungen, $\beta = 300 \text{ kg/cm}^2$, ohne Kriecheinfluss, konstante Parameter gemäss Tabelle Seite 162.

Bild A3: $M-\phi-\epsilon_{bo}$ -Grundbeziehungen, $\beta = 400 \text{ kg/cm}^2$, ohne Kriech Einfluss, konstante Parameter gemäss Tabelle Seite 162.

Bild A4: $M-\phi-\epsilon_{bo}$ -Grundbeziehungen, $\beta = 200 \text{ kg/cm}^2$, nach Abschluss des verstärkten Anfangskriechens, konstante Parameter gemäss Tabelle Seite 162.

Bild A5: $M-\phi-\epsilon_{b0}$ -Grundbeziehungen, $\beta=300\text{kg/cm}^2$, nach Abschluss des verstärkten Anfangskriechens, konstante Parameter gemäss Tabelle Seite 162.

Bild A6: $M-\phi-\epsilon_{bo}$ -Grundbeziehungen, $\beta = 400 \text{ kg/cm}^2$, nach Abschluss des verstärkten Anfangskriechens, konstante Parameter gemäss Tabelle Seite 162.

Bild A7: $M-\phi-\epsilon_{bo}$ -Grundbeziehungen, $\beta = 200 \text{ kg/cm}^2$, nach Abschluss des Kriechens ($t = \infty$), konstante Parameter gemäss Tabelle Seite 162.

Bild A8: $M-\phi-\epsilon_{bo}$ -Grundbeziehungen, $\beta = 300 \text{ kg/cm}^2$ nach Abschluss des Kriechens ($t = \infty$), konstante Parameter gemäss Tabelle Seite 162.

Bild A9: $M-\phi-\epsilon_{bo}$ -Grundbeziehungen, $\beta=400\text{kg/cm}^2$ nach Abschluss des Kriechens ($t=\infty$), konstante Parameter gemäss Tabelle Seite 162.

ANHANG B

Interaktionsbeziehungen (ohne Kriecheinfluss, Betonzugzone nicht berücksichtigt)

Bild B1: Beziehungen zwischen axialer Druckkraft p , Bruchmoment m_{Br} und Bruchkrümmung ϕ_{Br} . $\beta = 300 \text{ kg/cm}^2$, $\epsilon_{Br} = 0.3\%$, übrige Parameter gemäss Tabelle Seite 162.

Bild B2: Beziehungen zwischen axialer Druckkraft p , Moment $m(\sigma_e = \sigma_p)$ und Krümmung $\phi(\sigma_e = \sigma_p)$. $\beta = 300 \text{ kg/cm}^2$, übrige Parameter gemäss Tabelle Seite 162.

ANHANG C

Parametereinflussfunktionen $\zeta_m(q_i)$ und $\zeta_\phi(q_i)$

$$v(m) = \zeta_m(q_i) \cdot v(q_i)$$

$$v(\phi) = \zeta_\phi(q_i) \cdot v(q_i)$$

- Einflüsse auf m_{Br} , ϕ_{Br} : Bild C1 bis Bild C6

- Einflüsse auf $m(\sigma_p)$, $\phi(\sigma_p)$: Bild C7 bis Bild C11

Konstante Parameter gemäss Tabelle Seite 162, $\beta = 300 \text{ kg/cm}^2$.

$\zeta_m(q_i)$ und $\zeta_\phi(q_i)$ wurden ohne Berücksichtigung eines Kriech-
einflusses berechnet. Für die Berücksichtigung des Kriechens
sind die Ausführungen des Abschnitts 6.7 zu beachten.

Bild C1: Einfluss von b auf m_{Br}

Bild C2: Einfluss von h auf m_{Br}

Bild C3: Die Einflüsse von b und h auf ϕ_{Br} sind identisch

Bild C4: Einfluss von μ auf m_{Br} und ϕ_{Br}

Bild C5: Einfluss von μ' auf m_{Br} und ϕ_{Br}

Bild C6: Einfluss von β_z auf m_{Br} und ϕ_{Br}

Bild C7: Einfluss von b auf $m(\sigma_p)$

Bild C8: Einfluss von h auf $m(\sigma_p)$

Bild C9: Die Einflüsse von b und h auf $\phi(\sigma_p)$ sind identisch

Bild C10: Einfluss von μ auf $m(\sigma_p)$ und $\phi(\sigma_p)$

Bild C11: Einfluss von μ' auf $m(\sigma_p)$ und $\phi(\sigma_p)$

BEZEICHNUNGEN

Längen, Flächen und Querschnittswerte

b	Querschnittsbreite
d	Querschnittshöhe
h	statische Nutzhöhe
h'	Abstand des Schwerpunktes der Druckarmierung vom Druckrand *)
l	Stützenlänge
l_k	Knicklänge der Stütze
i	Trägheitsradius
e	Exzentrizität der aufgebrachten Last
x_1	Abstand der Nulllinie vom Druckrand
x_s	Abstand der Betondruckkraft vom Druckrand
x_o	Abstand der Nulllinie von der Mittelaxe des Querschnitts
$b_w(0, t_1)$	wirksame, reduzierte Querschnittsbreite zur Berücksichtigung des Kriecheinflusses im Zeitintervall $t = 0$ bis $t = t_1$
a_i	Abstand der ideellen Schweraxe vom Betondruckrand
a_s	Abstand des Schwerpunktes der gesamten Armierung vom Betondruckrand
e_s	Exzentrizität der fiktiven Schwindkraft (Differenz zwischen a_s und a_i)
e_u	ungewollte Exzentrizität
e_{cr}	kritische Exzentrizität zur Zeit $t = 0$, bei der infolge Kriechen unter konstanter axialer Druckkraft für $t \rightarrow t_{\infty}$ eine Instabilität eintreten wird
e_{max}	Exzentrizität beim Uebergang von der stabilen in die labile Gleichgewichtslage

I_{is}	ideelles Trägheitsmoment für die Berechnung der Schwindkrümmung
y	Ordinate der Gleichgewichtskurve (CDC)
w	Durchbiegungsordinate
w_R	Durchbiegungsordinate, Rechnungswert
w_M	Durchbiegungsordinate, Messwert
w_u	ungewollte Auslenkung der Stützenaxe
w_o	Durchbiegungsordinate unmittelbar bei der Lastaufbringung eintretend
w_k	Durchbiegungsordinate infolge Kriechen
w_s	Durchbiegungsordinate infolge Schwinden
w_m	Durchbiegungsordinate in Stützenmitte
F_b	Betonfläche
F_e	gesamte Querschnittsfläche der Zugarmierung *)
F'_e	gesamte Querschnittsfläche der Druckarmierung *)

Kräfte und Momente

P	Normalkraft
$p = \frac{P}{\beta b d}$	bezogene Normalkraft
M	Biegemoment um die Mittelaxe des Querschnitts
$m = \frac{M}{\beta b h^2}$	bezogenes Biegemoment

*) Die Bezeichnungen "Zugrand" und "Zugarmierung" werden aus praktischen Gründen auch dann beibehalten, wenn die Nulllinie ausserhalb des Querschnittes liegt. In diesem Fall bedeuten diese Bezeichnungen den schwächer gedrückten Rand, bzw. die schwächer gedrückte Armierung.

M_R	Rissmoment
$m_R = \frac{M_R}{\beta b h^2}$	bezogenes Rissmoment
P_b	Gesamtkraft der Betondruckzone
P_{bz}	Gesamtkraft der Betonzugzone
P_{bo}	ideelle Betondruckkraft der ideellen Betonfläche $b \cdot x_1$ (für $x_1 > d$)
P_{bu}	ideelle Betonzugkraft der ideellen Betonfläche $b \cdot (x_1 - d)$ (für $x_1 > d$)
P_e	Gesamtkraft der Zugarmierung
P'_e	Gesamtkraft der Druckarmierung
P_s	fiktive Schwindkraft ($= \epsilon_s E_e F_e$)
P'_s	fiktive Schwindkraft ($= \epsilon_s E_e F'_e$)
P_{bs}	fiktive Schwindkraft ($= \epsilon_s E_b F_b$)
M_b	Moment der Betondruckkraft um die Mittelaxe des Querschnitts
M_{bz}	Moment der Betonzugkraft um die Mittelaxe des Querschnitts
M_{bo}	Moment der ideellen Betondruckkraft um die Mittelaxe des Querschnitts
M_{bu}	Moment der ideellen Betonzugkraft um die Mittelaxe des Querschnitts
M_e	Moment der Gesamtkraft der Zugarmierung um die Mittelaxe des Querschnitts
M'_e	Moment der Gesamtkraft der Druckarmierung um die Mittelaxe des Querschnitts
M_{Br}	Moment beim Erreichen der Betonbruchstauchung ϵ_{br}
$M(\sigma_p)$	Moment beim Erreichen der Proportionalitätsgrenze in der Zugarmierung

M_u	Moment infolge ungewollter Exzentrizität
M_a	Moment aus äusserer Druckkraft
M_i	Moment aus inneren Kräften

p_b , p_{bz}	} bezogene Kräfte
p_{bo} , p_{bu}	
p_e , p'_e	
p_s , p'_s	
p_{bs}	

m_b , m_{bz}	} bezogene Momente
m_{bo} , m_{bu}	
m_e , m'_e	
m_{Br} , $m(\sigma_p)$	
m_u	

Festigkeitswerte und Spannungen

E_e	Elastizitätsmodul des Stahls
E_b	Elastizitätsmodul des Betons
β_w	Würfeldruckfestigkeit des Betons
$\bar{\beta}_{w7}$	Mittel der Würfeldruckfestigkeit des Betons im Alter von 7 Tagen
β	Prismendruckfestigkeit des Betons im Kurzzeit- versuch (wurde ebenfalls für die Festigkeit der Druckzone verwendet)
β_∞	Prismendruckfestigkeit des Betons im Langzeit- versuch (wurde ebenfalls für die Festigkeit der Druckzone verwendet)

β_{bz}	Biegezugfestigkeit des Betons
β_{qz}	Querzugfestigkeit des Betons ($\approx \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \beta_{bz}$)
σ_{bz}	Zugfestigkeit des Betons
σ_b	Betonspannung
σ_{bo}	Betonspannung am Druckrand
σ_{bm}	Mittelwert der Spannungen in der Betondruckzone
$\sigma_{bw}^{(0, t_1)}$	wirksame, mittlere Spannung in der Betondruckzone im Zeitintervall $t = 0$ bis $t = t_1$
σ_e	Stahlspannung in der Zugarmierung
σ'_e	Stahlspannung in der Druckarmierung
β_z	Zugfestigkeit des Stahls
σ_f, σ'_f	Fliessspannung des gezogenen, bzw. gedrückten Stahls
$\sigma_{0.2}$	Streckgrenze des Stahls (0.2 % bleibende Dehnung)
σ_p, σ'_p	Proportionalitätsgrenze des gezogenen, bzw. gedrückten Stahls
$\Delta\sigma_1$	Differenz zwischen β_z und σ_p
$\Delta\sigma_2$	Differenz zwischen $E_e \cdot \epsilon_e$ und σ_p (für $ \epsilon_e > \epsilon_p $)
σ_{eR}	Stahlspannung, Rechnungswert
σ_{eM}	Stahlspannung, Messwert

Dehnungen und Krümmungen

ϵ_b	Betondehnung bzw. Betonstauchung
ϵ_{bo}	Betonstauchung am Druckrand
ϵ_{bu}	Betondehnung bzw. Betonstauchung am Zugrand
ϵ_{bon}	nomineller Wert der Betonstauchung am Druckrand

$\epsilon_{bl} = \frac{2\beta}{E_b}$	Betonstauchung beim Erreichen der maximalen Betonspannung (nach SIA Norm Nr. 162)
ϵ_{Br}	Betonbruchstauchung
ϵ_b el	Betondehnung bzw. Betonstauchung elastisch berechnet
ϵ_{boR}	Betonrandstauchung beim Rissmoment (am ungerissenen Querschnitt berechnet)
$\Delta\epsilon_{boR}$	Differenz zwischen ϵ_{bo} beim Rissmoment (am gerissenen Querschnitt berechnet) und ϵ_{boR}
$\epsilon_k(t)$	Kriechstauchung des nichtarmierten, zentrisch gedrückten Betonprismas
$\epsilon_{bk}(t)$	Kriechstauchung des armierten, zentrisch gedrückten Betonquerschnitts
$\epsilon_{bok}(t)$	Betonrandstauchung infolge Kriechen
$\epsilon_{ek}(t)$	Stahldehnung infolge Kriechen
$\epsilon_s(t)$	Schwindverkürzung des nichtarmierten Betonprismas
$\epsilon_{bs}(t)$	Schwindverkürzung des symmetrisch armierten, ungerissenen Betonquerschnitts
$\epsilon_{bos}(t)$	Betonrandverkürzung infolge Schwinden
$\epsilon_{es}(t)$	Stahldehnung infolge Schwinden
ϵ_e	Dehnung der Zugarmierung
ϵ'_e	Stauchung der Druckarmierung
ϵ_{en}	nomineller Wert der Dehnung der Zugarmierung
ϵ'_{en}	nomineller Wert der Stauchung der Druckarmierung
$\epsilon_{0.2}$	Stahldehnung unter der Spannung $\sigma_{0.2}$
$\epsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_e}$	Stahldehnung unter der Spannung σ_p
$\epsilon_f = \frac{\sigma_f}{E_e}$	Fliessdehnung

ϵ_{eR}	Dehnung der Zugarmierung beim Rissmoment (am ungerissenen Querschnitt berechnet)
$\Delta \epsilon_{eR}$	Differenz zwischen ϵ_e beim Rissmoment (am gerissenen Querschnitt berechnet) und ϵ_{eR}
$\dot{\epsilon}_b = \frac{d\epsilon_b(t)}{dt}$	Betonstauchungsgeschwindigkeit
$\dot{\epsilon}_k = \frac{d\epsilon_k(t)}{dt}$	Kriechstauchungsgeschwindigkeit
$\dot{\epsilon}_{km}$	mittlere Kriechstauchungsgeschwindigkeit in einem Zeitintervall
ρ	Krümmungsradius
$\phi = \frac{1}{\rho}$	Krümmung
ϕ_n	nomineller Wert der Krümmung
ϕ_R	Krümmung beim Rissmoment (am ungerissenen Querschnitt berechnet)
$\Delta \phi_R$	Differenz zwischen ϕ beim Rissmoment (am gerissenen Querschnitt berechnet) und ϕ_R
ϕ_u	Krümmung aus ungewollter Auslenkung der Stützenaxe
$\phi_k(t)$	Kriechkrümmung
$\phi_s(t)$	Schwindkrümmung
ϕ_{Br}	Krümmung beim Erreichen der Betonbruchstauchung ϵ_{Br}
$\phi(\sigma_p)$	Krümmung beim Erreichen der Proportionalitätsgrenze in der Zugarmierung

Weitere dimensionslose Größen

$\gamma = \frac{d}{h}$	Querschnittsparameter
$\gamma' = \frac{d}{h'}$	Querschnittsparameter
$\delta = \frac{h'}{h}$	Querschnittsparameter

$\mu = \frac{F_e}{bh}$	Armierungsgehalt der Zugzone
$\mu' = \frac{F'_e}{bh}$	Armierungsgehalt der Druckzone
$\mu_w(0, t_1)$	wirksamer Zugarmierungsgehalt im Zeitintervall $t = 0$ bis $t = t_1$ bei Berücksichtigung des Kriecheinflusses
$\mu'_w(0, t_1)$	wirksamer Druckarmierungsgehalt im Zeitintervall $t = 0$ bis $t = t_1$ bei Berücksichtigung des Kriecheinflusses
$n = \frac{E_e}{E_b}$	Wertigkeit
n_s	reduzierte Wertigkeit für die Berechnung von Schwindverformungen
$\lambda = \frac{n\mu}{1+n\mu}$	Querschnittsfaktor zur Berechnung von Kriechverformungen
$\lambda = \frac{1_k}{i}$	Schlankheitsgrad
$\varphi(t)$	Kriechzahl (zeitabhängig)
φ_∞	Endkriechzahl
$C_1(t), C_2(t)$	Konstanten zur Bestimmung der spannungsabhängigen Kriechfunktion
$\eta_{\epsilon_b}(t)$	Kriechstauchungskoeffizient
$\eta_\phi(t)$	Kriechkrümmungskoeffizient
$\eta_{\phi_s}(t)$	Schwindkrümmungskoeffizient
$k_v = \frac{p_b}{\beta b x_1}$	Völligkeitskoeffizient der Betondruckzone
$k_s = \frac{x_s}{x_1}$	Schwerpunktskoeffizient der Betondruckkraft
$\kappa(0, t_1)$	Breitenreduktionsfaktor für das Zeitintervall $t = 0$ bis $t = t_1$

θ	Neigung der Biegelinie
θ_0	Stabenddrehwinkel

Statistische und wahrscheinlichkeitstheoretische Bezeichnungen

x_i	Einzelwert i
n	Anzahl Einzelwerte
$\bar{x}$	Durchschnitt
f	Freiheitsgrad der Stichprobe
q	Summe der Quadrate der Abweichungen der n Einzelwerte von ihrem Durchschnitt
q_i	Einflussparameter (allgemeine Bezeichnung)
s	Streuung (Standardabweichung)
s_f	Streuung einer Funktion
$s(q_i)$	Streuung des Parameters q_i
v	Variationskoeffizient
W	Wahrscheinlichkeit
u_W	Abszissenwert der Normalverteilung für die Wahrscheinlichkeit W
t_W	Abszissenwert der t - Verteilung für die Wahrscheinlichkeit W
χ_W^2	Abszissenwert der χ^2 - Verteilung für die Wahrscheinlichkeit W
$\bar{x}_{0,u}$	obere bzw. untere Vertrauensgrenze des Durchschnitts
$a_W^{0,u}$	obere bzw. untere Vertrauensgrenze einer Funktion für die Wahrscheinlichkeit W
$c_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$	Neigung der $m - \phi$ - Kurve im Zentrum $A_1(\phi(\sigma_p), m(\sigma_p))$ der Wahrscheinlichkeitsellipse

- $c_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ Neigung der $m - \phi$ - Kurve im Zentrum $A_2(\phi_{Br}, m_{Br})$
der Wahrscheinlichkeitsellipse
- a_1, b_1 grosse bzw. kleine Halbaxe der Wahrscheinlich-
keitsellipse in $A_1(\phi(\sigma_p), m(\sigma_p))$
- a_2, b_2 grosse bzw. kleine Halbaxe der Wahrscheinlich-
keitsellipse in $A_2(\phi_{Br}, m_{Br})$
- ω Neigungswinkel zwischen Korrelationsellipsen-
axe und Abszisse
- $\tau_\phi(q_i)$ Einflussfunktion für $\phi(\sigma_p)$ bzw. für ϕ_{Br} infolge
des Parameters q_i
- $\tau_m(q_i)$ Einflussfunktion für $m(\sigma_p)$ bzw. für m_{Br} infolge
des Parameters q_i

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] THUERLIMANN B., ZIEGLER H.: "Plastische Berechnungsmethoden." Autographie der Vorlesungen zum Fortbildungskurs für Bau- und Maschineningenieure, ETH, Zürich 1963.
 - [2] BACHMANN H.: "Zur plastizitätstheoretischen Berechnung statisch unbestimmter Stahlbetonbalken." Dissertation ETH, Institut für Baustatik, ETH, Zürich 1967.
 - [3] RAO P. S.: "Die Grundlagen zur Berechnung der bei statisch unbestimmten Stahlbetonkonstruktionen im plastischen Bereich auftretenden Umlagerungen der Schnittkräfte." Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft Nr. 177, Berlin 1966.
 - [4] REHM G.: "Ueber die Grundlagen des Verbundes zwischen Stahl und Beton." Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft Nr. 138, Berlin 1961.
 - [5] KUUSKOSKI V.: "Ueber die Haftung zwischen Beton und Stahl." The State Institute for Technical Research, Finland, Helsinki 1950.
 - [6] BROMS B.: "Technique for Investigation of Internal Cracks in Reinforced Concrete Members." Journal of the American Concrete Institute, January 1965.
- "Stress Distribution in Reinforced Concrete Members with Tension Cracks." Journal of the American Concrete Institute, September 1965.
- "Crack Width and Crack Spacing in Reinforced Concrete Members." Journal of the American Concrete Institute, October 1965.

"Effects of Arrangement of Reinforcement on Crack Width and Spacing of Reinforced Concrete Members." Journal of the American Concrete Institute, November 1965.

- [7] RAMU P.: "Langzeitversuche an Stahlbetonstützen." Bericht Nr. 19, Institut für Baustatik, ETH, Zürich, November 1967.

"Versuchsanlage zur Prüfung von Stützen unter Dauerlast." Bericht Nr. 16, Institut für Baustatik, ETH, Zürich, September 1968.

RAMU P., GRENACHER M., BAUMANN M., THUERLIMANN B.: "Versuche an gelenkig gelagerten Stahlbetonstützen unter Dauerlast." Bericht Nr. 6418 - 1, Institut für Baustatik, ETH, Zürich, Mai 1969.

- [8] LINDER A.: "Statistische Methoden." 4. Auflage, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart 1964.

- [9] RASCH C.: "Spannungs-Dehnungs-Linien des Betons und Spannungsverteilung in der Biegedruckzone bei konstanter Dehngeschwindigkeit." Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft Nr. 154, Berlin 1962.

- [10] MAYER H.: "Die Berechnung der Durchbiegung von Stahlbetonbauteilen." Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft Nr. 194, Berlin 1967.

- [11] JENSEN S., RICHART E.: "Short-Time Creep of Concrete in Compression." Proceedings of the American Society for Testing Materials (ASTM), Volume 38, Part II., Philadelphia 1938.

- [12] WAGNER O.: "Das Kriechen unbewehrten Betons." Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft Nr. 131, Berlin 1958.
- [13] Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein (SIA): "Norm für die Berechnung, Konstruktion und Ausführung von Bauwerken aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton." Norm Nr. 162, SIA, Zürich 1968.
- [14] Comité européen du béton (CEB): "Recommandations pratiques unifiées pour le calcul et l'exécution des ouvrages en béton armé." CEB, Paris 1964.
- [15] SELL R.: "Investigations into the strength of concrete under sustained load." RILEM Bulletin No. 5, Paris 1959.
- [16] MANUEL R. F., MAC GREGOR J. G.: "Analysis of Restrained Reinforced Concrete Columns Under Sustained Load." Journal of the American Concrete Institute, January 1967.
- [17] DISCHINGER F.: "Untersuchungen über die Knicksicherheit, die elastische Verformung und das Kriechen des Betons bei Bogenbrücken." Bauingenieur, Heft Nr. 33/34, Berlin 1937 und Bauingenieur, Heft Nr. 5/6, Berlin 1939.
- [18] THUERLIMANN B.: Vorlesung Massivbau II. Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich.
- [19] BLAUT H.: "Ueber den Zusammenhang zwischen Qualität und Sicherheit im Betonbau." Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft Nr. 149, Berlin 1962.
- [20] BASLER E.: "Untersuchungen über den Sicherheitsbegriff von Bauwerken." Dissertation ETH, Zürich 1960.

- [21] KNOLL F.: "Grundsätzliches zur Sicherheit der Tragwerke."
Dissertation ETH, Zürich 1965.
- [22] HENZEL J., GRUBE H.: "Festigkeitsuntersuchungen an Bauwerksbeton und zugehörigen Gütewürfeln." Der Bauingenieur, Heft Nr. 12, Berlin 1966.
- [23] WINDELS R.: "Graphische Hilfsmittel zur Bemessung von Stahlbetonstützen bei Knickgefahr." Beton und Stahlbetonbau, Heft Nr. 5, Berlin 1968.
- [24] WARNER R. F., KABAILA A. D.: "Monte Carlo Simulation of variable material response." UNICIV Report No. 36, University of New South Wales, Kensington, Australia 1968.
- [25] GALAMBOS T. V.: "Structural Members and Frames." Prentice-Hall Series in Structural Analysis and Design. Prentice-Hall, inc. Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1968.
- [26] HOLLEY M. J., MAUCH S. P.: "Creep Buckling of Reinforced Concrete Columns." Research Report R 63 - 7, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge 39, Massachusetts 1963.
- [27] ENGLAND G. L.: "Numerical Creep Analyses Applied to Concrete Structures." Journal of the American Concrete Institute, June 1967.