Einfluss nichtkonservativer Belastungen auf die Stabilität von Tragwerken

Working Paper**Author(s):**

Pozzi, Angelo

Publication date:

1971

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000747230>

Rights / license:

In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

Originally published in:

Bericht / Institut für Baustatik ETH Zürich 40

W. Badt

**Einfluss nichtkonser-
vativer Belastungen
auf die Stabilität
von Tragwerken**

Angelo Pozzi

Dezember 1971
Bericht Nr. 40

Einfluss nichtkonservativer Belastungen auf die Stabilität von Tragwerken

von

Dr. sc. techn. Angelo Pozzi

**Institut für Baustatik
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich**

**Zürich
Dezember 1971**

VORWORT

In jüngerer Zeit sind eine Reihe theoretischer Arbeiten veröffentlicht worden, in denen die Auswirkung nicht-konservativer Kräfte auf die Stabilität von mechanischen Systemen untersucht wurde.

In der vorliegenden als Dissertation ausgearbeiteten Studie (Referent: Prof. Dr. Ch. Wehrli, Korreferent Prof. Dr. B. Thürlimann) untersucht Herr Pozzi diesen Problemkreis im Hinblick auf die Stabilität von Bauwerken. Zur Beruhigung der Bauingenieure stellt er abschliessend fest, dass zur Beurteilung der Stabilität von Bauwerken das bisher allgemein übliche statische Kriterium meistens genügt. Nur in Fällen, wo Kräfte vorhanden sind, die dem System Energie zuführen, muss das kinetische Kriterium in Betracht gezogen werden. Für diese Systeme wurden Bedingungen entwickelt, aus denen untere Schranken für die kleinste kritische Last auf einfache Art berechnet werden können. Sind die nicht-konservativen Kräfte relativ klein gegenüber den Schwerelasten, so ist eine kinetische Analyse nur notwendig, wenn die Dämpfung des Systems schwach ist.

Eidgenössische Technische
Hochschule - Zürich

Prof. Dr. Bruno Thürlimann

Dezember 1971

INHALTSVERZEICHNIS

	<u>Seite</u>
Kapitel 1: Ueberblick über den Problemkreis	7
1.1 Einleitung	7
1.2 Spezieller Problemkreis	11
1.3 Ziel der Arbeit	13
 Kapitel 2: Bedeutung des Stabilitätsproblems in der Mechanik der Schwingungen	 15
2.1 Mechanik der Schwingungen	15
2.2 Gedanken zum Modell	18
2.21 Stabmodelle	22
2.22 Lastmodelle	25
2.3 Energiehaushalt mechanischer Systeme	29
2.31 Arbeit-Energie-Beziehungen	31
2.32 Klassifikation der Systeme	33
2.4 Stabilitätsproblem und Stabilitäts- kriterium	 36
 Kapitel 3: Allgemeines Beurteilungsschema für lineare stationäre diskrete Systeme	 39
3.1 Lineare autonome Systeme	39
3.2 Kriterien für stabile Lastbereiche diskreter Systeme	 43
3.21 Ueber die Art der Eigenbewegungen	43
3.22 Eine Umformung der charakteristischen Determinante	 46
3.3 Herleitung eines Schemas für die Beurteilung der Stabilität	 49

	<u>Seite</u>
Kapitel 4: Stabile Bereiche diskreter Systeme, eine qualitative Beurteilung	57
4.1 Ungedämpfte Systeme	58
4.11 Ungedämpfte Systeme ohne Einfluss von gyroskopischen Lasten	60
4.12 Ungedämpfte Systeme mit Einfluss von gyroskopischen Lasten	64
4.2 Gedämpfte Systeme	66
4.21 Gedämpfte Systeme ohne Einfluss von gyroskopischen Lasten	66
4.22 Gedämpfte Systeme mit Einfluss von gyroskopischen Lasten	70
4.3 Spezielle Systeme	73
Kapitel 5: Praktische Grenzen der Stabilität	77
5.1 Untere Schranke für die kritische Last	77
5.2 Bedeutung der kinetischen Stabilität für Tragwerke	83
Kapitel 6: Beurteilung der stabilen Bereiche an einem einfachen Beispiel	87
6.1 Herleitung der algebraischen Stabilitätsbedingungen	90
6.2 Systeme, bei denen die geschwindigkeits- abhängigen Kräfte vernachlässigt werden	94
6.3 Einfluss der Dämpfung	105
6.4 Schranken für die kritischen Lasten	110
6.5 Weitere Einflüsse auf die Grenze der stabilen Bereiche	113
Kapitel 7: Schlussbemerkungen	116
Zusammenfassung	118
Literatur	124

BEZEICHNUNGEN

i, j, k	: Laufindizes von 1 bis n
x_i, φ	: Koordinaten
q_i	: verallgemeinerte Koordinaten
$\dot{q}_i$	: verallgemeinerte Geschwindigkeiten
t	: Zeit
λ	: Eigenwert einer Matrix
α, γ	: Koeffizienten
ϵ	: Wurzel der charakteristischen Gleichung
σ	: Realteil von ϵ
ω	: Imaginärteil von ϵ
δ	: beliebig kleine Grösse
p	: Koeffizienten der charakteristischen Gleichung
P_E	: Kritische Knicklast am Eulerstab
P_{KR}	: Kritische äussere Last
P_{KR}^S	: Statisch kritische Last
P_{KR}^K	: Kinetisch kritische Last
$P_{KR,B}$	: Kritische Last für Biege-Stabmodell
$P_{KR,S}$	: Kritische Last für Schub-Stabmodell
ΔW^L	: Von allen äusseren Lasten im Intervall Δt geleistete Arbeit
ΔT^S	: Aenderung der Bewegungsenergie des Stabmodells
ΔV^S	: Aenderung der potentiellen Energie des Stabmodells

ΔR^S	: Verlust durch Reibung im Stabmodell im Intervall Δt
ΔA_I	: Im Intervall Δt durch äussere Kräfte zugeführte Energie
ΔD	: Im Intervall Δt dissipierte Energie
ΔA_Q	: Im Intervall Δt durch quasikonervative Lasten geleistete Arbeit
ΔT	: Aenderung der Bewegungsenergie des Systems im Intervall Δt
ΔV	: Aenderung der potentiellen Energie des Systems im Intervall Δt
L_{KR}^S	: Lastparameter für statisch kritische Last
L_{KR}^K	: Lastparameter für kinetisch kritische Last
A	: Massenträgheitsmatrix
B	: Matrix der geschwindigkeitsabhängigen Einflüsse
C	: Matrix der statischen Einflüsse
M	: Systemmatrix
a_{ik}	: Koeffizienten der Matrix A
b_{ik}	: Koeffizienten der Matrix B
c_{ik}	: Koeffizienten der Matrix C
x_j	: Eigenvektor der Systemmatrix M
x_j^*	: konjugiert transponierter Eigenvektor der Systemmatrix M
$R[x_j]$	: normierter Rayleigh-Quotient der Matrix M

a	: Wert der quadratischen Form der Matrix A mit x_j
b_s	: Wert der quadratischen Form der Matrix B_s mit x_j
b_A	: Wert der quadratischen Form der Matrix B_A mit x_j
c_s	: Wert der quadratischen Form der Matrix C_s mit x_j
c_A	: Wert der quadratischen Form der Matrix C_A mit x_j
v, w	: Hilfsgrößen

1. UEBERSICHT UEBER DEN PROBLEMKREIS

1.1 Einleitung

In der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts hat L. Euler [1] für einen Stab mit linear elastischem Werkstoffgesetz die massgebende vertikale Druckkraft für das Ausknicken berechnet. Dabei wurde eine ausgebogene Lage des idealen Stabes untersucht, die zugehörige Differentialgleichung gelöst und mittels der Randbedingungen (Bild 1.1) die entsprechenden kritischen Lasten errechnet.

Bild 1.1: EULERSCHE KNICKFÄLLE

Die möglichen Gleichgewichtslagen sind in Bild 1.2 dargestellt, wobei die ausgezogene Kurve die stabilen Lastbereiche abgrenzt. Durch die gestrichelte Linie sind die möglichen labilen Gleichgewichtslagen dargestellt. Das Ermitteln der kritischen Lasten P_{KR} basierte auf dem Aufsuchen von nicht-trivialen Ruhelagen des Stabes. Dieses "statische Stabilitätskriterium" bildete die Grundlage für die Entwicklung einer Stabilitätstheorie ideal-elastischer Stäbe.

Bild 1.2 : STABILITÄTSBEREICH BEI GROSSEN DEFORMATIONEN

Beschränkt man sich bei der Stabilitätsuntersuchung auf kleine Verschiebungen, also auf die nächste Umgebung der trivialen Gleichgewichtslage, so erhält man infolge des vereinfachten Ausdruckes für die Krümmung des Stabes eine lineare Differentialgleichung. Die kritische Last P_{KR} ändert sich dabei nicht (Bild 1.3), eine Beurteilung des überkritischen Bereiches $P > P_{KR}$ entfällt aber.

Bild 1.3 : STABILITÄTSBEREICH BEI KLEINEN DEFORMATIONEN

Ihrem Verwendungszweck entsprechend sind für die meisten Bauwerke nur kleine Verformungen zulässig. Das Auftreten grosser Verformungen kann daher als eine Grenze für die Brauchbarkeit dieser Bauwerke angesehen werden. Grosse Verformungen treten beim Erreichen der Tragfähigkeit (Festigkeitsproblem) einerseits und in der Nähe der kritischen Last P_{KR} (Stabilitätsproblem) andererseits auf. In den meisten Fällen überwiegen die statischen Anteile der Belastungen an einem Bauwerk derart, dass die nichtstatischen Anteile als Störkräfte vernachlässigt oder durch statische Ersatzlasten ersetzt werden. Wenn alle diese Lasten zudem nichtzirkulatorischen Charakter haben, kann das dann konservative System mit dem einfachen "statischen Stabilitätskriterium" beurteilt werden. Die Bedeutung der Stabilitätsüberlegungen in der Elastostatik im Sinne Euler's ist wohl dadurch begründet, dass die Voraussetzungen kleiner Verformungen und konservativer Belastungen für viele Probleme

des Bau- und Maschinenwesens mindestens für den Gebrauchszustand mit guter Näherung zutreffen. Die Werkstoffgesetze der für Tragkonstruktionen verwendeten Baustoffe sind aber nur in bestimmten beschränkten Bereichen linear-elastisch. Ende des letzten Jahrhunderts sind dann auch die ersten theoretischen Arbeiten zur Behandlung des elastisch-plastischen Stabknickens erschienen. Erst mit den Arbeiten von Shanley [2] vor ca. 20 Jahren gewann man aber einen korrekten Einblick in dieses Stabknickproblem.

Die Berechnung der kritischen Belastung eines axial tordierten und gedrückten Stabes ergab für bestimmte Lagerungen merkwürdige Resultate. Die Anwendung des "kinetischen Stabilitätskriteriums" (Beurteilung der kleinen Schwingungen um die Gleichgewichtslage) führte auf Ergebnisse, die mit den Resultaten aus einer statischen Betrachtungsweise nicht übereinstimmten. Obwohl Nicolai und Reut schon in den dreissiger Jahren solche Probleme bearbeiteten, war es das Verdienst von Ziegler [3], grundsätzlich den Fragenkomplex neu überarbeitet zu haben. Eine Ueberprüfung des belastenden Torsionsmomentes zeigte, dass ein axiales Moment nichtkonservativ ist und damit die mit dem statischen Stabilitätskriterium erhaltenen Resultate mindestens zum Teil nicht richtig waren. Die Arbeiten von Beck [4], Troesch [5] und Wehrli [6] u.a. einschliessend, brachte Ziegler [3] mit seiner Arbeit "On the concept of elastic stability" Uebersicht in dieses Gebiet, indem er die mechanischen Systeme entsprechend ihrer Belastungsart klassifizierte und die Anwendbarkeit der Stabilitätskriterien in verschiedenen Klassen überprüfte.

Wirken nun auch instationäre Lasten auf ein mechanisches System ein, so wird dieses im allgemeinen in Schwingung versetzt. Um die Stabilität des Einschwingvorganges, speziell aber der Schwingung selbst, beurteilen zu können, bedarf es

einer kinetischen Behandlung des Problems. Diese Untersuchung gibt aber nur Auskunft über den eigentlichen Schwingungsablauf des Systems. Erst eine Untersuchung des Verlaufs irgendwelcher einmaliger Störungen des schwingenden Systems gibt Auskunft über das Stabilitätsverhalten. Allerdings kann die erzwungene Schwingung selbst schon instabilen Charakter haben, z.B. im Resonanzfall. Die Stabilität der gestörten Schwingung wurde von Mettler [7] anfangs der vierziger Jahre für den beidseitig gelenkig gelagerten Stab unter einer axial pulsierenden Last behandelt. Seither sind in diesem mit "kinetischer Stabilität" umschriebenen Gebiet viele Einzelarbeiten entstanden. Eine erste Uebersicht über die Literatur zur kinetischen Stabilität mechanischer Systeme ist im Buch von Bolotin [8] gegeben.

1.2 Spezieller Problemkreis

Bei Tragwerken des Bauwesens handelt es sich im allgemeinen um ruhende Systeme. Grosse Bewegungen und Schwingungen führen entweder zu unerwünschten Schäden oder stören den Benützer des Bauwerkes. Es gehört also mit zur Aufgabe des Bauingenieurs, schon im Entwurf auf das kinetische Verhalten des Bauwerkes Rücksicht zu nehmen. Da normalerweise grössere Bewegungen und Schwingungen unter den Gebrauchslasten nicht auftreten dürfen und somit für deren Auftreten eine bestimmte Sicherheitsmarge eingeführt wird, geht es weniger um das genaue Erfassen des Bewegungs- oder Schwingungsverlaufes, sondern vielmehr darum, die Bedingungen festzustellen unter denen unzulässige Bewegungen vorkommen können. Es genügt daher, die kinetischen Untersuchungen für solche Bauwerke auf die Umgebung der Ruhelage zu beschränken.

Im Rahmen dieser Problemstellung könnten wir eigentlich für unsere Betrachtungen mit dem Begriff der "Stabilität einer Gleichgewichtslage" auskommen. Um den Anwendungsbereich der folgenden Ueberlegungen nicht unnötig einzuschränken, werden wir die Stabilität einer Bewegung nach Ljapunow [9] als Grundlage übernehmen. Die Stabilität einer ungestörten Bewegung wird dann im Hinblick auf Störungen der Anfangsbedingungen untersucht; es handelt sich also um momentan wirkende Störungen. Wir nehmen deshalb an, dass wir keine Kräfte als nicht erfassbare, ständig wirkende Grössen berücksichtigen müssen. Auch das Problem der zulässigen Grösse der Anfangsstörungen, das sich in diesem Zusammenhang stellt, werden wir nicht weiterverfolgen.

Die inneren wie die äusseren an einem System wirkenden Kräfte können entsprechend ihrer Abhängigkeit in drei Klassen unterteilt werden. Mit P bezeichnen wir die allgemeine Last, mit t die Zeit, mit q die verallgemeinerten Koordinaten und mit $\dot{q}$, $\ddot{q}$ die entsprechenden zeitlichen Ableitungen.

$$P = f(q, \dot{q}, t) : \text{instationäre Kräfte} \quad (1.1)$$

$$P = f(q, \dot{q}) : \text{stationäre Kräfte} \quad (1.2)$$

$$P = f(q) : \text{statische Kräfte} \quad (1.3)$$

Wirken instationäre Kräfte auf ein System ein, so wird man den komplizierten Weg der kinetischen Analyse benutzen müssen, um das Stabilitätsverhalten beurteilen zu können. Sind alle Kräfte statischer Natur und zugleich konservativ, dann genügt eine rein statische Betrachtungsweise für die Beurteilung des Stabilitätsverhaltens. Für den Zwischenbereich genügt nun manchmal eine rein statische Behandlung des Problems; vielfach ist aber schon eine kinetische Untersuchung notwendig, wenn nur statische Kräfte allein am System angreifen. Im all-

gemeinen interessiert bei der Behandlung der Stabilität von Bauwerken nur die kleinste kritische Last P_{KR} , im Gegensatz dazu sind bei einer Welle im Maschinenbau alle kritischen Drehzahlen von Interesse. Es geht deshalb darum, vom unbelasteten Zustand des Tragwerkes ausgehend den stabilen Bereich unter dem Einfluss der äusseren und inneren Kräfte abzugrenzen. Das Verhalten im überkritischen Bereich ist für die meisten Tragwerke eher eine akademische Frage.

Vor allem im Bereich der linearen Systeme stehen heute eine Vielzahl von Lehrsätzen für die Beurteilung der Stabilität zur Verfügung. In einer Arbeit von Magnus [10] sind die heute bekannten Sätze systematisch geordnet und deren gegenseitiger Zusammenhang übersichtlich dargestellt. Es sind vor allem die allgemeinen qualitativen Aussagen über das Stabilitätsverhalten von Systemen, die beim Entwurf von Tragwerken nützlich sind. Mit den vorhandenen algebraischen Kriterien und den modernen Rechenhilfsmitteln kann heute die Stabilität eines gegebenen Systems genügend genau beurteilt werden.

1.3 Ziel der Arbeit

Die vorliegende Arbeit hat zum Ziel, die Bedeutung der kinetischen Stabilität mechanischer Systeme bei stationärer Belastung darzustellen. Ein für den allgemeinen Fall entwickeltes Beurteilungsschema lässt eine qualitative Beurteilung der möglichen Lastfälle zu. Es soll zudem zeigen, unter welchen Bedingungen das wesentlich einfachere "statische Stabilitätskriterium" im konkreten Fall angewendet werden darf. Muss das allgemeinere "kinetische Kriterium" zur Beurteilung der Stabilität eines Systems benutzt werden, ist es wichtig, diejenigen Grössen zu kennen, die auf die Grenze der stabilen

Bereiche einen Einfluss haben. Es werden grundsätzlich nur linear elastische Systeme behandelt.

Neben den qualitativen Ueberlegungen sollen aber auf dem Beurteilungsschema aufbauend auch praktisch verwendbare Näherungen für die stabilen Lastbereiche eines Systems erarbeitet werden. Verschiedenste Einflüsse bringen es mit sich, dass auch schlanke Tragwerke vielfach schon im Gebrauchszustand, sicher aber nahe der Grenze der Stabilität teilweise plastifizierte Zonen aufweisen. Ein Zweck dieser Arbeit liegt deshalb auch darin, Verständnis für die Verhältnisse im idealen Bereich und damit eine Grundlage zu schaffen, um das Stabilitätsverhalten elastisch-plastischer mechanischer Systeme bei stationärer Belastung später klären zu können.

2. BEDEUTUNG DES STABILITÄTSPROBLEMS IN DER MECHANIK DER SCHWINGUNGEN

Schlanke Tragwerke, bei denen die Stabilität in der Bemessung von einzelnen Stäben oder im Entwurf des ganzen Bauwerkes einen Einfluss hat, können im allgemeinen als schwingungsfähige, mechanische Systeme aufgefasst werden. Schon einfachste praktische Probleme führen aber bei der Formulierung des Schwingungsvorganges auf nichtlineare Differentialgleichungen, die eigentlich nur in ganz speziellen Fällen geschlossene Lösungen zulassen. Auch wenn wir die folgenden Überlegungen auf die Untersuchungen von diskretisierten Stabwerken beschränken, so handelt es sich in der Anwendung doch meistens um Systeme mit sehr vielen Freiheitsgraden. Wir werden uns dabei auf holonome Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden beschränken. Bei einem holonomen System mit dem Freiheitsgrad n sind nicht nur die Lagekoordinaten q_i , sondern auch ihre Differentiale voneinander unabhängig.

2.1 Aus der Mechanik der Schwingungen

Die allgemeine Bewegung eines holonomen Systems lässt sich durch n nichtlineare Differentialgleichungen der Form

$$\ddot{q}_i = f_i(q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_i, \dots, \dot{q}_n; t) \quad (2.1)$$

darstellen, wobei q_i die verallgemeinerten Lagekoordinaten, $\dot{q}_i$ die entsprechenden verallgemeinerten Geschwindigkeiten, t die Zeit und n den Freiheitsgrad darstellen. Das System der n Gleichungen beschreibt die heteronomen Bewegungen; sie werden zur Klasse der parametererregten Schwingungen gezählt.

Tritt in jeder der n Gleichungen die Zeit t nur noch in einem additiven Zusatzglied $z(t)$ auf, so spricht man von Zwangsschwingungen,

$$\ddot{q}_i = f_i (q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_i, \dots, \dot{q}_n) + z_i(t) \quad (2.2)$$

Tritt die Zeit t in diesen Differentialgleichungen zweiter Ordnung nicht explizit auf, dann stellen sie die Schwingungen eines autonomen diskreten Systems dar,

$$\ddot{q}_i = f_i (q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_i, \dots, \dot{q}_n) \quad (2.3)$$

Der in der Technik wichtige Spezialfall eines autonomen Systems wird durch das zeit- und geschwindigkeitsunabhängige Gleichungssystem

$$\ddot{q}_i = f_i (q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n) \quad (2.4)$$

dargestellt.

Die Behandlung der beschriebenen Systeme ist mathematisch sehr anspruchsvoll. Es ist daher verständlich, dass man durch Vereinfachungen am behandelten Modell oder durch Linearisierung des mathematischen Systems die Probleme so darzustellen versucht, dass sie mit einfacheren und übersichtlicheren Methoden behandelt werden können. Dabei darf man aber nicht vergessen, dass Eigenschaften spezifisch nichtlinearer Natur verloren gehen.

Die allgemeine Bewegung eines linearen diskreten Systems mit n Freiheitsgraden, dessen verallgemeinerte Lagekoordinaten wieder mit q_i bezeichnet werden, lässt sich durch ein lineares Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung darstellen. Dessen i -te Gleichung

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik} \ddot{q}_k + b_{ik} \dot{q}_k + c_{ik} q_k + d_{ik}) = 0; \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.5)$$

enthält die Koeffizienten a_{ik} , b_{ik} , c_{ik} und d_{ik} , sie sind im allgemeinen Fall Funktionen der Zeit t . Bezeichnen wir mit A , B , C , D die quadratischen Matrizen der entsprechenden Koeffizientenschema, so lässt sich das lineare Differentialgleichungssystem in der bekannten einfachen Form

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq + D = 0 \quad ; \quad q = (q_1 \cdots q_n) \quad (2.6)$$

darstellen.

Sind die Koeffizienten Funktionen der Zeit, so werden durch (2.6) parametererregte Schwingungen eines linearen diskreten Systems beschrieben. Sind nur die Koeffizienten der Matrix D Funktionen der Zeit t , alle anderen Koeffizienten Konstanten, so werden durch

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = f(t) \quad ; \quad \begin{matrix} q = (q_1 \cdots q_n) \\ f = (f_1 \cdots f_n) \end{matrix} \quad (2.7)$$

zwangserregte, oder erzwungene Schwingungen eines linearen Systems beschrieben. Die allgemeine Lösung erhält man durch Ueberlagern einer partikulären Lösung mit der allgemeinen Lösung des homogenen Teils.

Sind alle Matrizen konstant, so lässt sich (2.6) mittels einer Koordinatentransformation immer in der Form

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = 0 \quad ; \quad q = (q_1 \cdots q_n) \quad (2.8)$$

darstellen. Dieses Differentialgleichungssystem beschreibt die autonomen Bewegungen eines linearen diskreten Systems.

Im folgenden werden wir uns mit der Stabilität von Systemen beschäftigen, die sich durch Linearisierung auf (2.8) zurückführen lassen.

2.2 Gedanken zum Modell

Mit einer Analyse eines Systems verfolgt man das Ziel, sein Verhalten unter dem Einfluss der angenommenen äusseren Einwirkungen vorhersagen zu können. Das wirkliche System, in unserem Fall handelt es sich um Bauwerke, muss aber vorerst durch physikalische Grössen definiert werden. Naturbedingte Ungenauigkeiten, äussere und innere Störungen sind in diesem physikalischen System miteingeschlossen. Messungen und Beobachtungen ermöglichen, dass das physikalische System möglichst gut mit dem wirklichen System übereinstimmt. Das mathematische Erfassen des physikalischen Systems, die für die Lösung notwendigen Vereinfachungen miteingeschlossen, führen auf das mathematische System. Die Grundlage für diese Systeme sind die entsprechend gewählten Modelle. Stimmen die Beobachtungen und Messungen am wirklichen System mit dem durch die Analyse des mathematischen Systems gegebenen Verhalten gut überein, dann liegen der Behandlung des Problems genügend gute Modelle zu Grunde. Ist die Uebereinstimmung schlecht, dann müssen die Modelle entsprechend verbessert werden. Der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Systemen ist in Bild 2.1 dargestellt.

Wir werden im folgenden den Systemen zwei Arten Modelle zu Grunde legen, die Tragwerkmodelle und die Belastungsmodelle. Dem physikalischen System liegen die entsprechenden physikalischen Modelle zu Grunde, dem mathematischen System die entsprechenden mathematischen Modelle. Der Einfachheit halber werden wir bei den mathematischen Modellen von Stabmodellen und Lastmodellen sprechen. In Bild 2.2 ist der Zusammenhang zwischen Modellen und Systemen dargestellt.

Bild 2.1 : ZUSAMMENHANG ZWISCHEN BAUWERK UND SYSTEM FÜR ANALYSE

Um den mathematischen Aufwand in einer Analyse klein zu halten, wird man immer versuchen, mit möglichst einfachen Modellen arbeiten zu können. Die möglichen Vereinfachungen hängen oft auch von der Problemstellung selbst ab. Für Bauwerke sind vor allem drei Aspekte von Bedeutung:

- Die Verformungen unter den mutmasslichen Gebrauchslasten sollen in engen bestimmten Grenzen gehalten werden.
- Es dürfen keine für den Verwendungszweck störende Schwingungen auftreten.
- Das durch die Gebrauchslasten beanspruchte Tragwerk soll eine vorgeschriebene Sicherheit gegenüber dem Bruchzustand aufweisen.

Im allgemeinen Fall wird man für jede Problemstellung separat die passenden Modelle suchen. Wenn wir uns mit der Frage der Stabilität eines Bauwerkes beschäftigen, dann haben alle drei vorher beschriebenen Aspekte eine Bedeutung.

Bild 2.2 : ZUSAMMENHÄNGE ZWISCHEN SYSTEM UND MODELL

2.21 Stabmodelle

Das physikalische Tragwerksmodell erfasst die Geometrie, die Massenverteilung und die Materialeigenschaften des wirklichen Tragwerkes. Darauf aufbauend wird man versuchen, wegen der späteren mathematischen Behandlung möglichst einfache Stabmodelle zu definieren. Diskrete Stabmodelle sind nicht nur übersichtlich, sie sind auch relativ einfach mechanisch nachzubilden. Das Stabmodell besteht aus einer dem physikalischen Tragwerksmodell möglichst gut entsprechenden Anordnung von idealen Stäben mit entsprechenden Massen, die durch Federn und Dämpfungselemente miteinander verbunden sind. Die geometrische Anordnung der Massen und die Charakteristik der Federn und Dämpfer lassen eine mathematische Formulierung des Stabmodelles zu. Besonders dann, wenn Eigenschaften mit rheonomem Charakter zu berücksichtigen sind, müssen für die mathematische Behandlung oft starke Vereinfachungen vorgenommen werden, so dass ein Vergleich zwischen der mathematischen Lösung und dem Verhalten des idealen Stabmodelles notwendig wird.

Sind alle inneren Kräfte konservativ, so nennen wir das Stabmodell selbst konservativ. Im anderen Fall werden wir von nichtkonservativen Stabmodellen sprechen. Beruht die Nichtkonservativität ausschliesslich auf der durch die materialtechnologischen und konstruktiven Eigenschaften der Tragwerke bedingten inneren Dämpfung, handelt es sich um dissipative Stabmodelle.

Wir beschränken uns auf lineare, diskrete und stationäre Systeme. Die Geometrie des Tragwerkes wird durch die diskreten starren Stabteile dargestellt, wobei die Federn als Verbindungselemente die Steifigkeit wiedergeben. Eine zutreffende Massenverteilung ist vor allem dann wichtig, wenn

das Stabmodell für dynamische Untersuchungen benützt wird. Lineare Dämpfer an den Verbindungsstellen der diskreten Stabteile simulieren die innere Dämpfung des Tragwerkes.

Dass im konkreten Fall die Wahl der Stabmodelle mit der notwendigen Sorgfalt getroffen werden muss, zeigt das einfache Beispiel des Bildes 2.3. Wir ersetzen das turmartige Tragwerk durch zwei verschiedene einfachste Stabmodelle, das Biegestabmodell mit den Federkonstanten g_1 und g_2 , das Schubstabmodell mit den Federkonstanten $\bar{g}_1$ und $\bar{g}_2$. Wir errechnen nun in beiden Modellen die kleinste kritische vertikale Last P_{KR} unter zwei verschiedenen Annahmen. Wenn wir annehmen, dass die Endauslenkung δ_H in beiden Modellen dieselbe sein soll und zudem die Modelle je gleiche Federkonstanten aufweisen ($g_1 = g_2$; $\bar{g}_1 = \bar{g}_2$), dann findet man, dass die kleinste kritische Last $P_{KR,B}$ des Biegestabmodells immer kleiner ist als die kleinste kritische Last $P_{KR,S}$ des Schubmodells. Ersetzen wir die Forderung nach gleichen Federkonstanten durch die Voraussetzung, dass die Auslenkungen der Stabmodelle überall identisch sein sollen, so ergibt sich, dass die kleinste Last $P_{KR,B}$ des Biegestabmodells immer grösser ist als die kleinste Last $P_{KR,S}$ des Schubstabmodells. Wenn also zwei verschiedene Stabmodelle sich durch die geschickte Wahl der charakteristischen Parameter so definieren lassen, dass sie für eine bestimmte Untersuchung identische dem physikalischen System entsprechende Resultate liefern, so gilt diese Gleichwertigkeit der Stabmodelle für andere Untersuchungen nicht.

Bild 2.3 : EINFACHES BEISPIEL

2.22 Lastmodelle

Ein Lastmodell beschreibt in mathematischer Form die Einwirkung von Belastungen auf das Stabmodell. Sie sind durch das physikalische Belastungsmodell definiert. Durch ein Lastmodell kann ein einzelne Kraft, aber auch ein ganzes System von Kräften repräsentiert werden.

Im Bild 2.4 wird durch den Vektor $\mathbf{u}$ der Massenpunkt M über die verallgemeinerten Koordinaten q_i im Raum fixiert.

Bild 2.4 : ARBEIT W INFOLGE $\mathbf{P}$

W stellt die auf einem Weg s durch den Vektor $\mathbf{P}$ geleistete Arbeit dar:

$$W = \int_s \mathbf{P} d\mathbf{u} \quad (2.9)$$

Im allgemeinen Fall hat dieses Integral (2.9) verschiedene Werte für verschiedene Wege s zwischen zwei festen Punkten 1 und 2 im Raum. In diesem Fall spricht man von einem nicht-konservativen Kraftfeld, und der Vektor $\mathbf{P}$ definiert dann ein nichtkonservatives Lastmodell. Ist die geleistete Arbeit W aber vom gewählten Weg s unabhängig, so spricht man von einem konservativen Kraftfeld und der Vektor $\mathbf{P}$ definiert ein konservatives Lastmodell. In diesem Fall ist die geleistete Arbeit W auf einem einfach geschlossenen Weg s null:

$$W = \oint_s \mathbf{P} du = 0 \quad (2.10)$$

Konservative Kraftfelder haben die spezielle Eigenschaft, dass $\mathbf{P}$ nur eine Funktion der Lagekoordinaten q_i ist. Der Vektor $\mathbf{P}$ lässt sich im konservativen Kraftfeld immer von einer Funktion V , dem skalaren Potential des Kraftfeldes, herleiten:

$$\mathbf{P} = \text{grad } V \quad (2.11)$$

Allgemein gilt, dass

$$\text{rot grad } V \equiv 0 \quad (2.12)$$

Deshalb genügt auch die Beziehung

$$\text{rot } \mathbf{P} = 0 \quad (2.13)$$

für die Beurteilung der Konservativität eines Kraftfeldes. Sie sagt aus, dass konservative Kraftfelder immer wirbelfrei sind.

Wir haben im stillen vorausgesetzt, dass die Kraft $\mathbf{P}$ überhaupt Arbeit leistet. Ist zum Beispiel der Vektor $\mathbf{P}$ so definiert, dass er immer senkrecht zur infinitesimalen Verschiebung $d\mathbf{u}$ steht, so wird die geleistete Arbeit immer null sein, unabhängig der Beziehung (2.13). Solche Kräfte verhalten sich dann wegen diesen besonderen Bedingungen wie konservative Kräfte. Die entsprechenden Modelle werden wir quasikonserervative Lastmodelle nennen.

Wir haben damit die Lastmodelle in drei Gruppen gegliedert:

- Konservative Lastmodelle
- Quasikonserervative Lastmodelle
- Nichtkonservative Lastmodelle

Einer Darstellung von Ziegler folgend, sind die Kräfte auf Grund ihrer mathematischen Abhängigkeit und ihrer Fähigkeit, Arbeit zu leisten, in Bild 2.5 klassiert. Unter den Begriff des Lastmodells soll nun nicht nur eine Kraft, sondern auch ein Drehmoment fallen, womit die Gesamtheit der Lastmodelle mechanischer Systeme klassiert ist.

Dabei haben wir zudem angenommen, dass es immer möglich ist, die Grenze des zu behandelnden Systems so zu legen, dass alle äusseren Reaktionen konservativ sind.

INSTATIONÄRE KRÄFTE	$P = f(q_i, \dot{q}_i, t)$			NICHTKONSER- VATIV
STATIONÄRE KRÄFTE	GESCHWINDIG- KEITSABHÄNGIGE LASTMODELLE $P = f(q_i, \dot{q}_i)$	$W \equiv 0$	GYROSKOPISCH	QUASI - KONSERVATIV
		$W_s < 0$	DISSIPATIV	NICHTKONSER- VATIV
		$W_s > 0$	INDUZIEREND	NICHTKONSER- VATIV
	GESCHWINDIGKEITS- UNABHÄNGIGE LASTMODELLE "STATISCH" $P = f(q_i)$	$W_s = 0$	NICHTZIRKULA- TORISCH	KONSERVATIV
		$W_s > 0$	ZIRKULATORISCH	NICHTKONSER- VATIV
$W_s < 0$				
REAKTIONEN	SYSTEMSGRENZE SO DEFINIERT, DASS $W_s = 0$ und $R = f(q_i)$			KONSERVATIV

Bild 2.5: KLASSIFIKATION DER LASTMODELLE

2.3 Energiehaushalt mechanischer Systeme

Um über den Energiehaushalt eines mechanischen Systems Aussagen machen zu können, müssen vorerst die Grenzen des zu analysierenden mathematischen Systems definiert sein. In Bild 2.6 ist in schematischer Form die Definition der Systemsgrenze festgehalten. Zudem ist der Energiehaushalt zwischen Umwelt, Stabmodell und Lastmodellen hier einfach dargestellt. Zum mathematischen System gehört das Stabmodell und die Lastmodelle. Die Grenze des Stabmodells soll immer so gezogen werden, dass die äusseren Reaktionen des Systems nicht-arbeitleistende Kräfte und Momente sind. Die im System wirkenden Kräfte können positive oder negative Arbeit leisten und damit dem System Energie zu- oder abführen. Da unsere Systeme Bauwerke darstellen, die nicht wie eine Maschine Nutzarbeit leisten, bedeutet die negativ geleistete Arbeit im allgemeinen Dissipation von Energie durch Reibungskräfte.

Bild 2.6: SYSTEMSGRENZE IM MATHEMATISCHEN SYSTEM

2.31 Arbeit - Energie - Beziehungen

Der allgemeine Bewegungszustand des zu analysierenden Systems wird durch die zugehörigen Bewegungsdifferentialgleichungen dargestellt. In einem geschlossenen System bleibt das Total der Energie erhalten, die Anteile, die auf einzelne Energieträger fallen, können aber ändern. Durch die willkürlich gelegte Grenze für unsere Systeme ist es möglich, dass das Total der Energie des Systems für zwei Bewegungszustände verschieden ist. Mit Δ bezeichnen wir den Unterschied zwischen zwei fest definierten Bewegungszuständen. Bezieht sich Δ auf einen Energieanteil, soll damit im definierten Intervall die Änderung des "Vermögens, Arbeit zu leisten" zum Ausdruck kommen; bezieht sich Δ auf einen Arbeitsanteil, so meinen wir damit die effektiv positiv oder negativ geleistete Arbeit im Intervall Δt .

Die gesamte geleistete Arbeit aller äusseren Kräfte ΔW^L in einem bestimmten Zeitintervall ist gleich der Summe aus der Änderung der Bewegungsenergie ΔT^S , der Änderung der potentiellen Energie der inneren Kräfte ΔV^S und dem Verlust an Energie in der Form von Wärme durch die geleistete Arbeit der inneren Reibungskräfte ΔR^S . Dieser Zusammenhang wird durch

$$\Delta W^L = \Delta T^S + \Delta V^S + \Delta R^S \quad (2.14)$$

dargestellt. ΔW^L setzt sich seinerseits zusammen aus der geleisteten Arbeit ΔA_V^L der konservativen Kräfte, der geleisteten Arbeit der quasikonservativen Kräfte ΔA_Q^L und der Arbeit der nichtkonservativen Kräfte. Die letztgenannte Arbeit ergibt sich aus der Differenz der Energiezufuhr durch induzierte Arbeit ΔA_I^L und des irreversiblen Energieverlustes durch die Arbeit der äusseren Reibungskräfte ΔA_R^L . Die Beziehung (2.14) lässt sich deshalb mit

$$\Delta W^L = \Delta A_V^L + \Delta A_Q^L + \Delta A_I^L - \Delta A_R^L \quad (2.15)$$

$$\Delta A_V^L = -\Delta V^L \quad (2.16)$$

neu formulieren,

$$\Delta A_I^L + \Delta A_Q^L = \Delta T^S + \Delta V^S + \Delta V^L + \Delta R^S + \Delta A_R^L \quad (2.17)$$

und mit

$$\Delta R^S + \Delta A_R^L = \Delta D \quad (2.18)$$

auf die einfache Beziehung

$$\Delta A_I + \Delta A_Q - \Delta D = \Delta T + \Delta V \quad (2.19)$$

bringen. Sie stellt den qualitativen Zusammenhang zwischen den Energie- und Arbeitsanteilen eines mechanischen Systems dar.

Diese Beziehung umschreibt anschaulich den Energiehaushalt des Systems, reicht aber für das Aufstellen der Bewegungsdifferentialgleichungen nicht aus. Wendet man das Prinzip der virtuellen Arbeiten auf die n passenden virtuellen Verschiebungen δq_i des Systems an, so erhält man bekanntlich die Lagrange'schen Gleichungen, wobei Z_i eine verallgemeinerte Kraft darstellt.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) = Z_i^K + Z_i^{QK} + Z_i^{NK} = Z_i; \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.20)$$

$Z_i \delta q_i$ gibt den Wert der virtuellen Arbeit an, die alle im System wirkenden Kräfte bei der virtuellen Verschiebung δq_i leisten. Mit der Aufspaltung von Z_i in Anteile konservativer, quasikonservativer und nichtkonservativer Kräfte, wobei Z_i^K von einem Potential V hergeleitet werden kann, lässt sich (2.20) neu schreiben:

$$Q_i^K = - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad ; (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.21)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) + \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right) = Z_i^{QK} + Z_i^{NK}; (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.22)$$

Die Gleichungen (2.20) und (2.22) gestatten nun ein einfaches Aufstellen der Bewegungsdifferentialgleichungen für ein diskretes mechanisches System mit n Freiheitsgraden.

2.32 Klassifikation der Systeme

Auf Grund der Beziehung (2.19) lassen sich die mathematischen Systeme in drei Gruppen zusammenfassen. Systeme, bei denen nur konservative Lastmodelle auftreten und ausserdem das Stabmodell auch konservativ ist, nennen wir konservative Systeme. Die Beziehung (2.19) lässt sich wegen $\Delta A_I = 0$, $\Delta D = 0$ und $\Delta A_Q = 0$ auf die für konservative Systeme bekannte Beziehung

$$\Delta T + \Delta V = 0 \quad (2.23)$$

vereinfachen.

Sind im mathematischen System auch nichtkonservative Lastmodelle vorhanden, so sprechen wir von nichtkonservativen Systemen. Dasselbe gilt auch, wenn das Stabmodell nichtkonservative innere Kräfte berücksichtigt. Im Spezialfall, wo die Nichtkonservativität des Systems nur durch Dissipation entsteht, spricht man von "dissipativen Systemen". In "zirkulatorischen Systemen" sind ausser den konservativen nur noch zirkulatorische Lastmodelle zugelassen. Zudem muss in diesem Fall das Stabmodell konservativ sein. Von "instationären Systemen" spricht man, wenn mindestens ein Lastmodell des Systems instationär ist oder das Stabmodell instationären Charakter hat. Alle diese speziell aufgeführten Systeme gehören im allgemeinen zur Gruppe der nichtkonservativen Systeme.

Es gibt nichtkonservative Lastmodelle, die bei einem speziell ausgewählten geschlossenen Prozess keine Arbeit leisten. Fällt dieser Prozess mit der Bewegung zusammen, die das System tatsächlich ausführt, dann ist $\Delta_S A_i = 0$. Sind in einem System nur solche nichtkonservativen neben quasikonservativen und konservativen Lastmodellen vorhanden, und ist zudem auch das Stabmodell konservativ, sprechen wir von quasikonservativen Systemen. Im Spezialfall, wo die Quasikonservativität nur durch gyroskopische Lastmodelle entsteht, spricht man auch von "gyroskopischen Systemen". In Bild 2.7 sind die drei wesentlichen Systemgruppen mit den charakteristischen Energie-Arbeits-Beziehungen dargestellt.

ART DES SYSTEMS	CHARAKTERISTIK
NICKTKONSERVATIVES SYSTEM	$\Delta A_I \neq 0$ und oder $\Delta D \neq 0$
QUASIKONSERVATIVES SYSTEM	$\Delta_s A_I = 0$, $\Delta D = 0$
KONSERVATIVES SYSTEM	$\Delta A_I = 0$, $\Delta A_Q = 0$, $\Delta D = 0$

MASSGEBENDE BEZIEHUNG	$\Delta A_I + \Delta A_Q - \Delta D = \Delta T + \Delta V$
-----------------------	--

Bild 2.7 : KLASSIFIKATION DER MATHEMATISCHEN SYSTEME

2.4 Stabilitätsproblem und Stabilitätskriterium

Grundsätzlich stellt sich das Problem der Stabilität eines Systems in zweifacher Form. Im allgemeinen Fall ist das System in Bewegung und das Interesse gilt der "Stabilität dieser Bewegung"; als Spezialfall ist das System in Ruhe und man fragt dann nach der "Stabilität der Ruhelage". Wir werden uns auf das Problem der "Stabilität der Ruhelage" beschränken. Bauwerke, wie sie idealisiert hier zur Diskussion stehen, haben gerade das typische gemeinsame Merkmal, dass sie auf Grund ihres Verwendungszweckes eine stabile Ruhelage einnehmen sollen. Die Gleichungen

$$f_i(0, \dots; 0, \dots; t) = 0; \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.24)$$

stellen den ungestörten Gleichgewichtszustand eines sich in Ruhe befindenden mathematischen Systems dar. Wenn wir diesem System zum Zeitpunkt $t = 0$ beliebig kleine Auslenkungen und Anfangsgeschwindigkeiten aufzwingen und sich dann selbst überlassen, wird das Verhalten in einem Zeitpunkt $t > 0$ Aussagen über die Stabilität der Ruhelage zulassen. In Wirklichkeit ist ein Bauwerk ständig kleinen Störungen ausgesetzt, so dass die Frage nach dessen Verhalten für $t > 0$ unter diesen geänderten Anfangsbedingungen zur Kernfrage wird. Durch die dann leicht veränderten Anfangsbedingungen wird das System in eine Bewegung versetzt. Bleibt diese Bewegung auf die nächste Umgebung der Ruhelage beschränkt, oder strebt sie gar mit zunehmender Zeit zu dieser zurück, so sprechen wir von einem stabilen Verhalten des Systems. Die Ruhelage heisst stabil. Im andern Fall spricht man von instabilem Verhalten des Systems, die untersuchte Ruhelage ist instabil. Es ist nun das Ziel der Stabilitätsuntersuchungen, die Grenzen zwischen stabilem und instabilem Verhalten angeben zu können.

Autonome Systeme diskreter mechanischer Verbände sind im allgemeinsten Fall immer durch die Gleichungssysteme (2.3) beschrieben. In diesen Systemen sind nicht nur die Bindungen zeitunabhängig, sondern es wirken auch keine Kräfte mit, die explizit von der Zeit abhängen. Im allgemeinen Fall wird es sich dann um ein autonomes nichtlineares System handeln. Um die Frage der Stabilität dieser Systeme beantworten zu können, müssten wir das System der nichtlinearen Differentialgleichungen lösen können. Als ersten Schritt zu dieser Lösung wollen wir das entsprechende linearisierte System ansehen. Es kann durch die Gleichungen (2.8) dargestellt werden. Sie beschreiben die Bewegungen des Systems in der engeren Umgebung der gestörten Ruhelage. Für die Beurteilung der Stabilität eines linearen Systems stehen Stabilitätskriterien zur Verfügung. Die allgemeine Lösung der autonomen Bewegung des diskreten linearen Systems setzt sich aus den einzelnen bekannten Eigenbewegungsformen zusammen. Sie sind bestimmt durch die Wurzeln der charakteristischen Gleichung des Systems. Die Grenze zwischen stabilem und instabilem Verhalten ist durch bestimmte Wurzelarten und Eigenbewegungsformen gekennzeichnet. Eine gute Darstellung des Zusammenhanges zwischen Eigenbewegungsart und Natur der Wurzel der charakteristischen Gleichung findet sich bei Forbat [11]. Wenn man weiss, dass die Grenze der Stabilität eines Systems ausschliesslich durch Nullwurzeln definiert ist, dann genügt für die Bestimmung der Grenzwerte selbst das "statische Stabilitätskriterium". Es handelt sich hier um die Bestimmung des kritischen Zustandes durch die Berechnung von nichttrivialen Gleichgewichtslagen. In allen anderen Fällen muss für die Beurteilung das "kinetische Stabilitätskriterium" herangezogen werden. Hier handelt es sich dann um die Beurteilung der kleinen Schwingungen um die Gleichgewichtslage. Das kinetische Kriterium ist natürlich das allgemeinere der beiden, es schliesst das statische Kriterium mit ein.

Seine Anwendung für die Beurteilung der Stabilität von linearen Systemen erfordert aber einen erheblichen Mehraufwand an Arbeit als das einfachere statische Kriterium. Es ist deshalb von Interesse zu wissen, in welchen Fällen für die Beurteilung das statische Kriterium allein genügt.

3. ALLGEMEINES BEURTEILUNGSSCHEMA FÜR LINEARE STATIONÄRE DISKRETE SYSTEME

Da wir uns für die folgenden Untersuchungen auf stationäre Systeme beschränken, sind Stabmodelle wie Lastmodelle nicht explizit von der Zeit t abhängig, man bezeichnet solche Systeme als skleronom. Das mathematische diskrete System besitzt n Freiheitsgrade und sein Zustand ist durch die voneinander unabhängigen verallgemeinerten Lagekoordinaten q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) und ihrer zeitlichen Ableitungen $\dot{q}_i$, $\ddot{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) bestimmt. Entsprechend der Klassierung von Abschnitt 2.1 spricht man dann von autonomen diskreten Systemen, deren Bewegungen im allgemeinen Fall durch ein System von n nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (Gl. 2.3) dargestellt werden können. Für das Aufstellen der Differentialgleichungen benutzt man am besten die Lagrange'schen Gleichungen (Gl. 2.20), wenn es sich wie hier, ausschliesslich um diskrete Systeme handeln soll. Weiter setzen wir voraus, dass das System im unbelasteten Zustand als Ganzes eine Ruhelage einnehme und die dazugehörige triviale Gleichgewichtslage $\dot{q}_i = \ddot{q}_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) stabil sei.

Wir behandeln das linearisierte Problem und setzen voraus, dass ein solcher Linearisierungsprozess zulässig sei. Man darf dabei nicht vergessen, dass dadurch konservative wie nichtkonservative Eigenschaften eines Systems verlorengehen können.

3.1 Lineare autonome Systeme

Autonome Systeme werden durch homogene Differentialgleichungen beschrieben. Das System der linearisierten homogenen Differentialgleichungen (2.5) kann man auch in einer Matrixengleichung

(2.8) darstellen. Die quadratischen n -reihigen Matrizen A, B, C sind die Schemata der konstanten Koeffizienten a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} .

Die Elemente q_k des Vektors q sind die verallgemeinerten Lagekoordinaten des Systems. Sind alle Komponenten des Vektors q identisch null, so nimmt das System die triviale Gleichgewichtslage und damit auch seine Ruhelage ein. Durch die Matrizen A, B, C der Gleichung (3.2) wird der Aufbau des mathematischen linearen Systems vollständig beschrieben. Wir haben im Abschnitt 2.1 bereits vorausgesetzt, dass die Koeffizienten der Matrizen konstant sein sollen, wir beschränken uns deshalb auf die Behandlung von skleronomen linearen Systemen. Die Koeffizienten dieser Matrizen sind reell.

Die Matrix A stellt die Massenträgheit des Systems dar, deren Koeffizienten a_{ik} die Massenverteilung. Die Massenträgheit des Systems lässt sich auch aus dem Ausdruck für die kinetische Energie herleiten.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = \frac{1}{2} \dot{q}' A \dot{q} \quad (3.1)$$

Die kinetische Energie T eines diskreten Massensystems lässt sich immer als quadratische Form (3.1) der reell symmetrischen Matrix A darstellen. Diese Form und damit die Matrix selbst ist naturbedingt immer eigentlich positiv definit, die Matrix A daher nichtsingulär [12, Seite 127 ff].

In der Matrix B sind alle geschwindigkeitsabhängigen Anteile der inneren und äusseren Kräfte des Systems zusammengefasst. Diese Matrix ist im allgemeinen nicht symmetrisch. Der symmetrische Teil B_s der Matrix B stellt die Dämpfungseinflüsse,

der antimetrische Teil B_A die gyroskopischen Kraftwirkungen dar. Da die Koeffizienten der Matrizen als Konstante vorausgesetzt sind, muss zwischen Dämpfung und Geschwindigkeit ein linearer Zusammenhang bestehen. Man spricht in diesem Fall von viskoser Dämpfung. Die dem Stabmodell eigene innere Dämpfung wird durch die Matrix $B_{S,S}$ dargestellt, die durch Lastmodelle definierten äusseren dämpfenden Einflüsse durch $B_{S,L}$. Handelt es sich in beiden Fällen um echte Dissipation, so ist die Matrix $B_S = B_{S,S} + B_{S,L}$ positiv definit. Wenn das Lastmodell für den Anteil $B_{S,L}$ eine Energiequelle für das System bedeutet, dem System also proportional der Geschwindigkeit Energie zugeführt wird, muss die Matrix B_S trotz positiv definitem $B_{S,S}$ nicht mehr positiv definit sein. Der Anteil $B_{S,L}$ ist in diesem Fall sogar negativ definit.

Die in den Federn des Stabmodells gespeicherte potentielle Energie lässt sich als quadratische Form der Matrix $C_{S,S}$ darstellen, die als Koeffizienten die Federkonstanten g_{ik} enthält.

$$V_g = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n g_{ik} q_i q_k = \frac{1}{2} q' C_{S,S} q \quad (3.2)$$

Die Form und damit auch die Matrix $C_{S,S}$ ist naturbedingt positiv definit. Die nichtzirkulatorischen, konservativen Lastmodelle sowie die symmetrischen Anteile der zirkulatorischen Lastmodelle beeinflussen das System durch die Matrix $C_{S,L}$, die antimetrischen Anteile der zirkulatorischen Lastmodelle durch die Matrix C_A .

Die Gleichung (2.8) lässt sich deshalb neu schreiben

$$A_S \ddot{q} + [B_{S,S} + B_{S,L} + B_A] \dot{q} + [C_{S,S} + C_{S,L} + C_A] q = 0. \quad (3.3)$$

Die zum Stabmodell gehörenden Matrizen A_s , $B_{s,s}$, $C_{s,s}$ sind alle positiv definit. Die Einflüsse der Lastmodelle auf das System kommen durch die Matrizen $B_{s,L}$, B_A , $C_{s,L}$, C_A zum Ausdruck.

Die allgemeine Lösung dieser linearisierten Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten wird durch den Exponentialansatz

$$q_i = y_i e^{\epsilon t} \quad ; \quad (i = 1 \dots n) \quad (3.4)$$

beschrieben, wobei y_i die Elemente des Amplitudenvektors y , und ϵ eine zum System gehörende Wurzel darstellt. Dieser Ansatz führt auf das Gleichungssystem

$$(A\epsilon^2 + B\epsilon + C) y e^{\epsilon t} = 0 \quad (3.5)$$

Nichttriviale Lösungen dieses Systems sind dann vorhanden, wenn

$$\det |M| = \det |(A\epsilon^2 + B\epsilon + C)| = 0 \quad (3.6)$$

ist. Die Systemmatrix M ist durch die Matrizen A, B, C für die Bewegungsart des Systems verantwortlich. Das charakteristische Polynom der $\det |M|$

$$\det |M| = m_0 \epsilon^{(2n)} + m_1 \epsilon^{(2n-1)} + \dots + m_{(2n-1)} \epsilon + m_{(2n)} = 0 \quad (3.7)$$

besitzt im allgemeinen $2n$ Lösungen in ϵ . Bei der Abgrenzung der stabilen Lastbereiche eines Systems ist nicht die Wurzel ϵ selbst, sondern das Vorzeichen des Realteils massgebend. Für stabiles Verhalten ist hinreichend, wenn alle Wurzeln negative Realteile besitzen. Ein Kriterium hierfür stammt von Routh-Hurwitz [13].

3.2 Kriterien für stabile Lastbereiche diskreter Systeme

Bei Systemen mit vielen Freiheitsgraden wird der Rechenaufwand für die Beurteilung der Stabilität auf Grund der bekannten algebraischen Kriterien enorm gross. Zudem ist vielfach im praktischen Fall nicht das exakte Resultat, sondern vielmehr die qualitative Beurteilung genügend. Wir werden in diesem Abschnitt ein Schema für die qualitative Beurteilung der Stabilität herleiten.

3.21 Ueber die Art der Eigenbewegungen

Die Wurzeln ϵ der Gleichung (3.6) sind für die Art der Eigenbewegungen des Systems verantwortlich. Die allgemeine Bewegung erhält man durch eine Linearkombination der $2n$ Partikulärlösungen

$$q^{(j)} = y^{(j)} e^{\epsilon_j t}, \quad (j = 1, 2, \dots, 2n) \quad (3.8)$$

Für die Beurteilung der Stabilität des Systems ist eine Analyse aller Bewegungsarten nicht notwendig. Ist nämlich in der allgemeinen Lösung eine einzige Partikulärlösung enthalten, dessen Amplitude mit zunehmender Zeit t ins Unendliche wächst, so gilt das Verhalten des Systems als instabil. Für die stabilen Lastbereiche eines Systems müssen daher alle Partikulärlösungen so beschaffen sein, dass ihre Auslenkungen aus der Ruhelage mit zunehmender Zeit immer beliebig klein bleiben oder sogar abnehmen. Zählt man mehrfach auftretende Wurzeln entsprechend ihrer Anzahl, so existieren für ein System mit n Freiheitsgraden $2n$ Wurzeln ϵ_j . Es handelt sich im allgemeinen um komplexe Zahlen, etwa der Form

$$\epsilon_j = \sigma_j + \omega_j i \quad (3.9)$$

Die Partikulärlösung (3.8) lässt sich mit

$$q^{(j)} = y^{(j)} e^{\zeta_j t} \cdot e^{i\omega_j t} \quad (3.10)$$

neu anschreiben.

$e^{\zeta_j t}$ ist nun dafür verantwortlich, ob mit zunehmender Zeit t die Intensität der Bewegung zu- oder abnimmt, je nachdem ob $\zeta_j > 0$ oder $\zeta_j < 0$ ist. Der Grenzfall liegt offenbar dann vor, wenn $\zeta_j = 0$ ist. Mit $\omega_j \neq 0$ stellt Gleichung (3.10) dann eine Superposition von harmonischen Schwingungen dar. Ist auch $\omega_j = 0$, so liegt der Spezialfall der Nullwurzeln vor. Jede ähnliche Vergrößerung des Amplitudenvektors $y^{(j)}$ stellt dann eine Gleichgewichtslage dar. Eine Anfangsstörung führt hier dazu, dass das System sich gleichförmig von der Ursprungsgleichgewichtslage entfernt. Wir haben bisher stillschweigend angenommen, dass bei mehrfach auftretenden Wurzeln auch dann noch die Gleichung (3.8) alle Partikulärlösungen darstellt. Man weiss aus der Theorie der Differentialgleichungen, dass das nur dann der Fall ist, wenn der Rangabfall s der Polynommatrix M gleich der Vielfachheit p der entsprechenden Wurzel ist. Dies ist gerade dann der Fall, wenn die Matrix M n linear unabhängige Eigenvektoren besitzt [11, Seite 26 ff]. Ist diese Voraussetzung nicht mehr erfüllt, so gibt es eine neue Form einer Partikulärlösung,

$$q^{(j)} = y^{(j)} P(t) \cdot e^{\zeta_j t} \cdot e^{i\omega_j t}, \quad (3.11)$$

wobei $P(t)$ ein Polynom in t darstellt, dessen Grad höchstens gleich der Differenz aus der Vielfachheit der Wurzel und dem Rangabfall der Matrix M ist. Für den Fall $\zeta_j \neq 0$ kann man zeigen, dass in Gleichung (3.11) das Vorzeichen von ζ_j allein darüber entscheidet, ob die Komponenten des Vektors $q^{(j)}$ mit zunehmender Zeit t beschränkt bleiben oder nicht.

$$G_j > 0 \text{ bedeutet } q_i \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty \quad (3.12)$$

$$G_j < 0 \text{ bedeutet } q_i \rightarrow \infty \text{ für } t \rightarrow \infty \quad (3.13)$$

Daraus kann man schliessen, dass für den Fall $G_j \neq 0$ mehrfach auftretende Wurzeln keinen Einfluss auf die Grenze zwischen stabilem und instabilem Verhalten des Systems haben. Handelt es sich bei den mehrfach auftretenden Wurzeln um imaginäre oder Nullwurzeln mit $G_j = 0$, so reduziert sich die Gleichung (3.11) auf

$$q^{(j)} = y^{(j)} P(t) e^{i\omega_j t} \quad \text{wenn } \epsilon_j = i\omega_j \quad (3.14)$$

$$q^{(j)} = y^{(j)} P(t) \quad \text{wenn } \epsilon_j = 0 \quad (3.15)$$

Ist der Rangabfall s der Polynommatrix M kleiner als die Vielfachheit p der betrachteten Wurzel ϵ_j mit $G_j = 0$, so wachsen die Polynome vom Grad $\leq (p-s)$ für $t \rightarrow \infty$ unbeschränkt. In diesen Fällen handelt es sich somit um instabiles Verhalten des Systems. Die Grenze der stabilen Bereiche linearer sklonomer Systeme wird durch Nullwurzeln oder rein imaginäre Wurzeln bestimmt. Ist für solche Wurzeln der Rangabfall s der Matrix M gleich der Vielfachheit p der Wurzel, dann gehört dieser Grenzpunkt eigentlich noch zum stabilen, im anderen Fall eben bereits zum instabilen Bereich.

Um nicht durch unwesentliche Spezialfälle das Problem mathematisch unnötig zu komplizieren, schliessen wir diejenigen Systeme von unseren Betrachtungen aus, bei denen mehrfache Wurzeln ϵ_j mit $G_j = 0$ mit unvollständigem Rangabfall der Matrix M auftreten. Zudem werden wir der Einfachheit halber alle Systeme im Grenzbereich bereits als instabil betrachten, wenn die Grenze

selbst durch eine Wurzel mit $G_j = 0$ beschrieben wird. Vom Standpunkt der Stabilität nach der ersten Näherung aus betrachtet (Linearisierung der Bewegungsdifferentialgleichungen) handelt es sich dabei ohnehin um sogenannte kritische Fälle, die nur nichtlinear behandelt zu sinnvollen Lösungen führen.

3.22 Eine Umformung der charakteristischen Determinate

Für die Beurteilung der Stabilität der Systeme sind die Eigenschaften der Polynommatrix M massgebend. Wir bezeichnen mit x_j einen der n Eigenvektoren dieser Matrix M und mit x_j^* den dazu konjugiert transponierten Vektor. Mit $R[x_j]$ bezeichnen wir den zu x_j gehörenden Rayleigh-Quotienten der Matrix M , wobei wir x_j mit $x_j^* \cdot x_j = 1$ normiert voraussetzen:

$$R[x_j] = x_j^* M x_j = \lambda_j \quad (3.16)$$

Da x_j einen Eigenvektor der Matrix M darstellt, ist der dazugehörige normierte Rayleigh-Quotient $R[x_j]$ gerade gleich dem entsprechenden Eigenwert λ_j der Matrix M . Wir nehmen nun an, wir kennen alle Eigenvektoren x_j der Systemmatrix M . Es lassen sich dann n Rayleigh-Quotienten bilden, die gerade die n Eigenwerte der Systemmatrix M darstellen. Das Produkt dieser n Eigenwerte λ_j ist gleich der Determinante von M .

$$\det |M| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdots \lambda_n = 0 \quad (3.17)$$

Nichttriviale Lösungen der Gleichung (3.5) mit $y \neq 0$ existieren gerade dann, wenn die Gleichung (3.6) erfüllt ist. Aus (3.6) und (3.17) ergibt sich, wenn man die Eigenwerte gemäss (3.6) ersetzt

$$\det |M| = R[x_1] \cdot R[x_2] \cdots R[x_j] \cdots R[x_n] = 0 \quad (3.18)$$

Mit der Gleichung (3.18) erhält man somit eine Bedingung für die Ermittlung der zum System zugehörenden Eigenbewegungsarten. Da jeder der n Rayleigh-Quotienten identisch null sein kann, erhält man somit gerade n Bestimmungsgleichungen für die Wurzeln ϵ , die ja letzten Endes für die Eigenbewegungsart und damit für die Stabilität des Systems massgebend sind.

$$R [x_j] = 0 ; (j = 1, 2, 3 \dots n). \quad (3.19)$$

Ersetzen wir in diesen Gleichungen die Matrix M auf Grund der Gleichungen (3.6) und (3.3), so erhält man anstelle von (3.19)

$$(x_j^* A x_j \epsilon^2 + x_j^* B_S x_j \epsilon + x_j^* B_A x_j \epsilon + x_j^* C_S x_j + x_j^* C_A x_j) = 0 ; \quad (3.20)$$

$$(j = 1, 2, \dots n)$$

Dabei ist x_j für die Matrizen A, B, C im allgemeinen kein Eigenvektor mehr. Wegen der reellen Koeffizienten der Matrizen A, B, C sind auch die Teilmatrizen der Gleichungen (3.20) reell. Ob dann die Systemmatrix M selbst reelle oder komplexe Koeffizienten hat, entscheidet die Art der Wurzel ϵ . In den Gleichungen (3.20) stellen die Rayleigh-Quotienten der symmetrischen reellen Matrizen A, B_S und C_S quadratische Formen dar. Gemäss einem Satz aus der Matrizenrechnung sind diese Formen auch bei komplexen Vektoren x_j immer reelle Zahlen [12, Seite 160 ff], also

$$x_j^* A x_j = a \quad ; \quad a > 0 \quad (3.21)$$

$$x_j^* B_S x_j = b_S = b_{S,L} + b_{S,S} \quad ; \quad b_{S,S} \geq 0 \quad (3.22)$$

$$x_j^* C_S x_j = c_S = c_{S,L} + c_{S,S} \quad ; \quad c_{S,S} \geq 0 \quad (3.23)$$

Wenn zudem die betreffende Matrix noch positiv definit ist, so ist die zugehörige quadratische Form eine nicht negative reelle Zahl, somit sind a , $b_{s,s}$ und $c_{s,s}$ immer reelle nicht negative Zahlen. Die Grössen $c_{s,L}$ und $b_{s,L}$ sind dann sicher positiv, wenn ihre entsprechenden Matrizen positiv definit sind, andernfalls können sie positiv oder negativ sein, je nach Wahl des Eigenvektors x_j .

Der Rayleigh-Quotient ist für reelle antimetrische Matrizen eine imaginäre Zahl, wenn x_j komplex ist; aber identisch null, wenn x_j reell oder rein imaginär ist.

$$\left. \begin{aligned} x_j^* B_A x_j &= 0 \\ x_j^* C_A x_j &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{wenn } x_j \text{ reell oder} \\ \text{rein imaginär ist} \end{array} \quad (3.24)$$

$$\left. \begin{aligned} x_j^* B_A x_j &= i b_A \\ x_j^* C_A x_j &= i c_A \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{wenn } x_j \text{ komplex ist} \end{array} \quad (3.25)$$

Unter Beachtung der Aussagen (3.21) bis (3.25) lassen sich die n Gleichungen (3.20) in algebraischer Form schreiben.

$$\left[a\epsilon^2 + (b_S + i b_A)\epsilon + (c_S + i c_A) \right]_j = 0 ; (j = 1, 2, \dots, n). \quad (3.26)$$

Diese n Gleichungen enthalten gerade die $2n$ Wurzeln ϵ . Wenn wir also diejenigen Eigenvektoren x_j kennen würden, für die der Rayleigh-Quotient der Matrix M verschwindet, hätten wir sogar n Bestimmungsgleichungen für die $2n$ Wurzeln ϵ des Systems. Wir interessieren uns aber im Rahmen dieser Untersuchungen nicht explizit für die Eigenbewegungen des Systems, sondern für gewisse Eigenschaften der Eigenbewegungen, die auf Instabilität oder Stabilität des Systems schliessen lassen und gerade dafür eignen sich die Gleichungen (3.26).

3.3 Herleitung eines Schemas für die Beurteilung der Stabilität

Die Lasten, die den stabilen Bereich eines Systems abgrenzen, nennt man die kritischen Lasten P_{KR} , die dazugehörenden Wurzeln der charakteristischen Gleichung die kritischen Wurzeln ϵ_{KR} . Für die Herleitung eines Beurteilungsschemas stützen wir uns auf die Kenntnis der zu den verschiedenen Wurzeltypen gehörenden Eigenbewegungsarten und auf die Gleichung (3.26). Im allgemeinsten Fall sind alle Teilmatrizen von null verschieden, und deshalb bei komplexem Eigenvektor x_j ebenfalls die Koeffizienten der Gleichung (3.26). Die Lösungen für die $2n$ Wurzeln ergeben sich durch Auflösen von (3.26) zu

$$\left\{ \epsilon_{1,2} = \frac{1}{2a} \left[-(b_S + ib_A) \pm \sqrt{(b_S^2 - b_A^2 - 4ac_S) + (2b_S b_A - 4ac_A) i} \right] \right\}_j \quad (3.27)$$

($j = 1, 2, \dots, n$).

Hier sind die Real- und Imaginärteile bereits je zusammengefasst. Mit dem komplexen Radikand

$$\sqrt{(b_S^2 - b_A^2 - 4ac_S) + (2b_S b_A - 4ac_A) i} = \sqrt{(w + vi)^2}; \quad (3.28)$$

und den als reell vorausgesetzten Grössen w und v kann man (3.27) neu schreiben,

$$\left\{ \epsilon_{1,2} = \frac{1}{2a} \left[-(b_S + ib_A) \pm (w + vi) \right] \right\}_j; \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (3.29)$$

Es ist nach Gleichung (3.28)

$$w^2 - v^2 = b_S^2 - b_A^2 - 4ac_S \quad (3.30)$$

$$wv = b_S b_A - 2ac_A \quad (3.31)$$

Auf den Gleichungen (3.9) und (3.29) aufbauend, lassen sich Real- und Imaginärteile der gesuchten Wurzeln einzeln darstellen.

$$\left\{ \sigma = \frac{1}{2a} [-b_s \pm w] \right\}_j ; \quad (j = 1, 2, \dots, u) \quad (3.32)$$

$$\left\{ \omega = \frac{1}{2a} [-b_A \pm v] \right\}_j ; \quad (j = 1, 2, \dots, u) \quad (3.33)$$

Wir haben am Schluss des Abschnittes 3.2 für diese Arbeit die Grenze der Stabilität festgelegt. Mit den Bezeichnungen der Gleichung (3.9) kann man diese Aussagen in einem einfachen Beurteilungsschema darstellen (Bild 3.1).

Bild 3.1 : ERSTES BEURTEILUNGSSCHEMA FÜR STABILITÄT

Für stabiles Verhalten eines Systems müssen alle Lösungen die Bedingungen des Bildes 3.1 erfüllen. Die Matrix A_s ist immer eigentlich positiv definit, also $a > 0$. Man kann dann das Schema des Bildes 3.1 unter Berücksichtigung der Gleichungen (3.32) und (3.33) neu darstellen. In Gleichung (3.32) können wir zwei Fälle unterscheiden. Mit $b_s < 0$ führt die Gleichung (3.32) immer auf eine Lösung ϵ_j des Systems mit positivem Realteil σ . Die Bedingung (3.36) beschreibt diesen Fall.

Mit $b_s \geq 0$ ergibt sich aus Bedingung (3.34) und Beziehung (3.32) die Bedingung (3.37). Die Gleichung (3.33) und die Bedingung (3.35) führen auf die Bedingung (3.38). Das Bild 3.2 gibt das umgeformte Beurteilungsschema wieder.

Bild 3.2 : GROBES BEURTEILUNGSSCHEMA FÜR STABILITÄT

Die Gleichungen (3.30) und (3.31) werden nach w und v aufgelöst. Dann lässt sich das Beurteilungsschema des Bildes 3.2 so umformen, dass die massgebenden Bedingungen für Stabilität nur noch von den Grössen a , b , c abhängen. Die Ausdrücke für w und v lauten für den Fall $wv \neq 0$

$$w^2 = \frac{1}{2} \left[(b_s^2 - b_A^2 - 4ac_s) \pm \sqrt{(b_s^2 - b_A^2 - 4ac_s)^2 + 4(b_s b_A - 2ac_A)^2} \right] > 0 \quad (3.40)$$

$$v^2 = \frac{1}{2} \left[-(b_s^2 - b_A^2 - 4ac_s) \pm \sqrt{(b_s^2 - b_A^2 - 4ac_s)^2 + 4(b_s b_A - 2ac_A)^2} \right] > 0 \quad (3.41)$$

und für den Spezialfall $wv = 0$

$$w^2 = b_s^2 - b_A^2 - 4ac_s > 0, \text{ wenn } v = 0, w \neq 0 \quad (3.43)$$

$$v^2 = +b_s^2 + b_A^2 + 4ac_s > 0, \text{ wenn } v \neq 0, w = 0 \quad (3.44)$$

$$b_s^2 - b_A^2 - 4ac_s = 0, \text{ wenn } v = 0, w = 0. \quad (3.45)$$

Damit wir die Beziehungen (3.40) und (3.41) in den Bedingungen (3.37) und (3.38) verwenden können, müssen diese vorerst quadriert werden. Wegen (3.36) ist in (3.37) $b_s \geq 0$, und ein Quadrieren ändert deshalb die Grenzen der Bedingung nicht. In der Bedingung (3.38) handelt es sich auf beiden Seiten, wie in (3.37), um reelle Grössen. Ein Quadrieren dieser Bedingung ändert deshalb den Gültigkeitsbereich ebenfalls nicht. Das Schema des Bildes 3.2 lässt sich deshalb in neuer Form anschreiben.

Bild 3.3: VERFEINERTES BEURTEILUNGSSCHEMA FÜR STABILITÄT

Der linke Ast des Bildes 3.3 stellt den Fall mit $wv \neq 0$ dar. In den dann gültigen Beziehungen (3.40) und (3.41) hat nur die positive Wurzel eine Bedeutung, da $w^2 > 0$ und $v^2 > 0$ sein müssen. Wenn wir sie in die Beziehungen (3.46) und (3.47) einsetzen, erhält man

$$b_S^2 + b_A^2 + 4ac_S \geq \left| \sqrt{(b_S^2 - b_A^2 - 4ac_S)^2 + 4(b_S b_A - 2ac_A)^2} \right|; \quad (3.48)$$

$$b_S^2 + b_A^2 - 4ac_S \neq \left| \sqrt{(b_S^2 - b_A^2 - 4ac_S)^2 + 4(b_S b_A - 2ac_A)^2} \right|; \quad (3.49)$$

Die Bedingung (3.48) lässt sich unter der Voraussetzung, dass $(b_S^2 + b_A^2 + 4ac_S) \geq 0$ ist, quadrieren und entsprechend vereinfachen auf

$$b_S b_A c_A + b_S^2 c_S - ac_A^2 \geq 0. \quad (3.50)$$

Ist die Bedingung $(b_S^2 + b_A^2 + 4ac_S) \geq 0$ nicht erfüllt, dann ist die Grundbedingung (3.46) nicht erfüllt. In diesem Fall ist das System dann sicher instabil. Im Schema 3.4 ist diese Bedingung durch die Beziehung (3.53) gegeben.

Die Bedingung (3.49) lässt sich ebenfalls vereinfachen durch Quadrieren und ergibt

$$b_S b_A c_A - ac_A^2 - b_A^2 c_S \neq 0. \quad (3.51)$$

Dabei ist allerdings der Spezialfall, wenn die linke Seite von (3.51) null ist, zusätzlich zu untersuchen. Es ergibt sich dabei eine Zusatzbedingung. Wenn $(b_S^2 + b_A^2 + 4ac_S) < 0$ ist, so ist das System stabil, im andern Fall instabil. Wenn wir nun folgerichtig (3.46) und (3.47) durch die entsprechenden Bedingungen (3.50) und (3.51) samt ihren Zusatzbedingungen ersetzen, erhalten wir das Beurteilungsschema für den Fall $wv \neq 0$ (Bild 3.4).

Bild 3.4: SCHEMA FÜR FALL $WV \neq 0$

Der rechte Ast des Bildes 3.3 stellt den Fall mit $wv = 0$ dar. Die massgebenden Beziehungen sind durch die drei Fälle (3.43), (3.44), (3.45) gegeben. Entwickelt man jeden der drei Fälle in den Beziehungen (3.46) und (3.47), so erhält man das gesuchte Beurteilungsschema für den Spezialfall $wv = 0$ (Bild 3.5).

Bild 3.5: SCHEMA FÜR FALL $WV = 0$

In den Schemata 3.4 und 3.5 lassen sich noch Vereinfachungen einführen. Für (3.54) ist $b_s b_A c_A + b_s^2 c_s - ac_A^2 = 0$ und deshalb für (3.55) dann $(b_s^2 + b_A^2) c_s = 0$. Für (3.58) ist $b_A^2 + 4ac_s = 0$ und für (3.60) $b_s^2 = 0$. Mit diesen Vereinfachungen erhalten wir nun ein Schema für die Beurteilung der Stabilität linearer diskreter Systeme, dessen Bedingungen nur von den Rayleigh-Quotienten der massgebenden Matrizen abhängen. Das Schema des Bildes 3.6 stellt die Bedingungen in den folgerichtigen Zusammenhang, der eine Beurteilung des Zustandes eines Systems für jede Lösung ϵ_j zulässt.

Bild 3.6 : SCHEMA FÜR DIE BEURTEILUNG DER STABILITÄT LINEARER DISKRETER SYSTEME

4. STABILE BEREICHE DISKRETER SYSTEME, EINE QUALITATIVE BEURTEILUNG

Mit der mathematischen Formulierung eines Problems werden zugleich auch die mathematischen Stab- und Lastmodelle definiert. Dadurch und über den entsprechenden Linearisierungsprozess sind dann die Matrizen A , B , C bestimmt. In diesem Kapitel werden wir versuchen, unabhängig von physikalischen Modellen auf Grund des Schema 3.6 Aussagen über die Stabilität allgemeiner und spezieller linearer, diskreter, sklonomer Systeme zu machen. In Bild 4.1 sind die behandelten Fälle gegliedert.

FALL	B_s	C_A	B_A	C_s	A	BEMERKUNGEN
OD 1	0	0	0	X	X	$b_s \equiv 0 ; a > 0$ UNGEDÄMPFTE SYSTEME
OD 2	0	0	X	X	X	
OD 3	0	X	X	X	X	
OD 4	0	X	0	X	X	
MD 4	X	X	0	X	X	$b_s > 0 ; a > 0$ GEDÄMPFTE SYSTEME
MD 3	X	X	X	X	X	
MD 2	X	0	X	X	X	
MD 1	X	0	0	X	X	

Bild 4.1 : Einteilung der linearen diskreten Systeme

Wir nehmen an, dass bei den hier zur Diskussion stehenden Systemen immer eine Matrix $C_s \neq 0$ vorhanden sein muss. Die mit MD bezeichneten Fälle repräsentieren gedämpfte Systeme, die mit OD bezeichneten Fälle ungedämpfte Systeme.

Wir werden in diesem Abschnitt mehrmals auf eine Arbeit von Magnus [10] über "die Stabilität linearer Systeme" verweisen. Darin sind die bisher bekannten Ergebnisse systematisch geordnet.

4.1 Ungedämpfte Systeme

Im praktischen Fall wird ein wirkliches System immer dämpfende Eigenschaften aufweisen. Wenn wir also vorerst den Dämpfungseinfluss null setzen, so handelt es sich dabei um ein Idealisieren des Systems. Die Resultate, die man am ungedämpften idealen System erhält, sind daher nur dann von praktischer Bedeutung, wenn die Grenze des stabilen Bereichs eines gedämpften Systems mit dem ungedämpften identisch ist.

Das Schema des Bildes 3.6 lässt sich nun für den ungedämpften Fall, also $B_s \equiv 0$, stark vereinfachen. Gleichung (3.61) ist mit $b_s \equiv 0$ immer erfüllt und (3.62) reduziert sich wegen $\alpha > 0$ auf $c_A = 0$. Mit $b_s \equiv 0$ vereinfacht sich die Bedingung (3.64) auf $-c_A^2 \geq 0$. Der linke Ast des Schemas 3.6 führt wegen $c_A \neq 0$ unabhängig von (3.63) immer auf den instabilen Bereich. Die Bedingungen (3.63) bis (3.66) können somit durch die vereinfachte Bedingung (3.62) ersetzt werden. Der linke Ast des Bildes 3.6 führt dann direkt zum instabilen Bereich. Der rechte Ast führt mit den entsprechenden Vereinfachungen auf die beiden Bedingungen (4.2) und (4.3). Diese Vereinfachungen führen auf das Beurteilungsschema (Bild 4.2) für Systeme ohne Dämpfung.

Bild 4.2: SCHEMA FÜR SYSTEME OHNE DÄMPFUNG, OD3

Ein ungedämpftes lineares System ist gemäss Bild 4.2 nur dann stabil, wenn $c_A = 0$, $(b_A^2 + 4ac) \geq 0$ und $c_s \neq 0$ sind. Die allgemeine Lösung für die Wurzel ϵ_j lautet unter Berücksichtigung dieser Bedingungen für den stabilen Bereich gemäss (3.27)

$$\epsilon_{1,2} = \frac{1}{2a} \left[-ib_A \pm \sqrt{-(b_A^2 + 4ac_s)} \right] \quad (4.4)$$

Wegen $(b_A^2 + 4ac_s) \geq 0$ ist dann der Radikand immer eine negative reelle Zahl und somit die Lösung ϵ immer eine rein imaginäre Grösse. Für ungedämpfte lineare Systeme kann man über die Wurzeln ϵ_j deshalb den Satz (vergleiche [10], Satz 7) formulieren:

Satz 1: Alle Wurzeln ϵ_j eines linearen, stationären, diskreten Systems sind rein imaginär, wenn das System stabil und ungedämpft ist.

4.11 Ungedämpfte Systeme ohne Einfluss von gyroskopischen Lasten; "Statische Systeme"

Systeme, auf die weder innere noch äussere geschwindigkeitsabhängige Kräfte einwirken, werden wir "statische Systeme" nennen. Wir setzen also bei diesen Systemen voraus, dass neben $B_S \equiv 0$ auch $B_A \equiv 0$ sein soll. Gemäss der Aufstellung in Bild 4.1 behandeln wir also die Fälle OD 1 und OD 4. Das Schema 4.2 lässt sich weiter vereinfachen, wobei im Fall OD 1 eben zusätzlich noch $C_A \equiv 0$ ist.

Bild 4.3: SCHEMA FÜR $B_S = B_A \equiv 0$; OD 4

Bild 4.4: SCHEMA FÜR $B_S = C_A = B_A \equiv 0$; OD 1

Auf Grund des Schemas 4.3 lässt sich folgender Satz über die Stabilität dieser Systeme formulieren:

Satz 2: Ein lineares, statisches System mit $B_S \equiv 0$, $B_A \equiv 0$ ist immer dann stabil, wenn für alle Eigenvektoren der Systemmatrix M die Rayleigh-Quotienten $c_S > 0$ und $c_A = 0$ sind. Erfüllt ein einziger Quotient diese Bedingungen nicht, so ist das System instabil.

Wir nehmen an, dass sich alle Lasten in einem einzigen Lastparameter L zusammenfassen lassen und mit $L = 0$ das System eine stabile Ruhelage einnimmt. Von diesem stabilen unbelasteten Zustand ausgehend, wird bei einer stetigen Steigerung des Lastparameters das System die Grenze des stabilen Bereiches mit L_{KR} erreichen. Dies kann auf zwei Arten geschehen, entweder durch das Auftreten eines Quotienten $c_S = 0$ oder durch $c_A \neq 0$. Im ersten Fall handelt es sich um die statische Grenze der Stabilität mit dem kritischen Lastparameter L_{KR}^S , im andern Fall um die kinetische Grenze der Stabilität und dem entsprechenden Parameter L_{KR}^K . Die mit $b_S = 0$, $b_A = 0$ vereinfachte Gleichung (3.27)

$$\left[\epsilon_{1,2} = \pm \frac{1}{\alpha} \sqrt{-\alpha(c_S + c_A i)} \right]_j ; \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (4.8)$$

zeigt, dass der Uebergang vom stabilen zum instabilen Bereich im statischen Fall durch eine Nullwurzel, im kinetischen Fall durch das Auftreten von komplexen Wurzeln gekennzeichnet ist. Auf Grund unserer Voraussetzung (siehe Abschnitt 3.4) gehört der Grenzpunkt selbst im statischen Fall bereits zum instabilen Bereich, im kinetischen Fall noch zum stabilen Bereich. Die Gleichung

$$(A\epsilon^2 + C)y = My = 0 \quad (4.9)$$

repräsentiert die hier behandelten statischen Systeme.

Wir multiplizieren (4.9) mit der nichtsingulären Matrix A^{-1} von links her und nehmen an, dass die Matrix $(A^{-1}C)$ diagonalähnlich sei, also n linear unabhängige Eigenvektoren besitze:

$$(I\epsilon^2 + A^{-1}C) y = 0 \quad (4.10)$$

Eine Linksmultiplikation mit der nichtsingulären Eigenvektormatrix X^{-1} von $(A^{-1}C)$ [12, Seite 169 ff] und eine Transformation mit $y = Xz$ ergibt in (4.10)

$$(I\epsilon^2 + X^{-1}(A^{-1}C)X) z = (I\epsilon^2 + \Lambda) z = 0 \quad (4.11)$$

Λ stellt die Diagonalmatrix der Eigenwerte der Matrix $(A^{-1}C)$ dar. Aus (4.11) gewinnt man n Gleichungen für die Wurzeln ϵ , wobei die λ_j jetzt die Eigenwerte der diagonalähnlichen Matrix $(A^{-1}C)$ bezeichnen.

$$[\epsilon^2 + \lambda_j] z_j = 0 ; \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (4.12)$$

Aus der Matrizenrechnung entnehmen wir, dass gerade dann alle Eigenwerte einer diagonalähnlichen Matrix reell sind, wenn die Matrix symmetrisierbar ist [12, Seite 197 ff].

Gemäss Gleichung (4.12) hängen die Wurzeln ϵ direkt von den Eigenwerten der Matrix $(A^{-1}C)$ ab. Sind alle Eigenwerte $\lambda_j > 0$, so ergeben sich nur imaginäre Wurzeln ϵ und das System ist stabil. Ist ein einziger Eigenwert $\lambda_j < 0$, so erhält man trotz symmetrisierbarer Matrix mindestens eine positive Wurzel, was für das System instabiles Verhalten bedeutet. Man kann deshalb folgenden Satz formulieren:

Satz 3: Ein lineares, statisches System ist dann stabil, wenn die diagonalähnliche Matrix $(A^{-1}C)$ symmetrisierbar ist, und alle Eigenwerte dieser Matrix grösser als null sind.

Ist die diagonalähnliche Matrix $(A^{-1}C)$ nicht symmetrisierbar, dann existiert immer mindestens ein nichtreeller Eigenwert, er führt immer auf mindestens eine Wurzel mit positivem Realteil; das System ist deshalb immer instabil.

Satz 4: Lineare, statische Systeme mit diagonalähnlicher nichtsymmetrisierbarer Matrix $(A^{-1}C)$ sind immer instabil.

Ist die Symmetrisierbarkeit der Matrix $(A^{-1}C)$ unabhängig von den Lastmodellen und der Lastintensität, dann ist die Grenze der Stabilitätsbereiche allein durch das Nullwerden der Wurzeln ϵ gegeben. Das statische Kriterium genügt in diesem Fall allein für die Beurteilung der Stabilität des Systems.

Satz 5: Im Bereich der symmetrisierbaren Matrix $(A^{-1}C)$ ist das statische Kriterium für die Beurteilung der Stabilität hinreichend.

Eine Sonderstellung nehmen diejenigen Probleme ein, bei denen die Matrix C symmetrisch ist. Die Matrix $(A^{-1}C)$ besteht dann aus einem Produkt zweier reeller symmetrischer Matrizen, wobei A^{-1} gemäss Voraussetzung eigentlich positiv definit ist. Ist auch $C = C_s$ positiv definit, dann sind alle $\lambda_j > 0$ und das System deshalb stabil. Der Verlust der Stabilität wird wegen der stets symmetrisierbaren Matrix $(A^{-1}C)$ [12, Seite 197 ff] über das statische Kriterium geschehen. Alle konservativen Systeme führen im linearisierten Fall auf symmetrische Matrizen C_s . Es ist aber auch möglich, dass an und für sich nichtkonservative Systeme durch den Linearisierungsprozess auf eine symmetrische Matrix C_s führen. In beiden Fällen genügt für die Beurteilung der Grenze des stabilen Bereichs das statische Kriterium, weil die Grenze der Stabilität durch Nullwurzeln allein gegeben wird. Wir haben dann gerade den Fall des Schemas 4.4.

Für die in diesem Abschnitt behandelten statischen Systeme konnten wir nicht nur quantitative, sondern auch qualitative Aussagen über die stabilen Bereiche eines Systems machen. Nichtkonservative Systeme, bei denen das statische Kriterium allein für die Beurteilung der Stabilität massgebend ist, wollen wir zu den quasikonservativen Systemen zählen. Wir wollen damit sagen, dass bei diesen Systemen trotz des nicht-konservativen Charakters, die Stabilität nicht durch äussere Energiezufuhr verlorengeht.

4.12 Ungedämpfte Systeme mit Einfluss von gyroskopischen Lasten

Für den allgemeinsten Fall dieser Systeme gilt das Schema 4.2, für den Spezialfall mit $C_A \equiv 0$ gilt das Schema 4.5.

Bild 4.5 : SCHEMA FÜR $B_S = C_A \equiv 0$; OD2

Der Vergleich der beiden Bilder 4.4 und 4.5 zeigt, dass gyroskopische Kräfte auf die Grenze des stabilen Bereiches von konservativen Systemen einen stabilisierenden Einfluss haben. Im konservativen Fall war der Verlust der positiven Definitheit der Matrix C_S massgebend für die Grenze der Stabilität. Bei einem

gyroskopischen System, das heisst Systemen, bei denen ausser gyroskopischen nur noch konservative Kräfte auf ein System einwirken, ändert sich die kleinste kritische Last gegenüber dem entsprechenden konservativen System nicht. Man kann das durch Einsetzen einer Wurzel $\epsilon = 0$ in (3.27) leicht feststellen. Aus Bild 4.5 sieht man aber, dass bei gyroskopischen Systemen auch noch stabile Bereiche bei nicht mehr positiv definiter Matrix C_S möglich sind. Dafür verantwortlich ist der Quotient b_A^2 in der Bedingung (4.13). Man kann den bekannten Satz über gyroskopische Systeme so (vergleiche [10], Satz 8, 9, 10) formulieren:

Satz 6: Gyroskopische Kräfte haben auf ein konservatives System stabilisierenden Einfluss. Die kleinste kritische Last des konservativen Systems wird aber nicht beeinflusst.

Bei nichtdefiniter Matrix C_S hängt also die Stabilität des gyroskopischen Systems vom Einfluss der gyroskopischen Kräfte ab. Gyroskopische Kräfte leisten in einem System nie Arbeit. Gyroskopische Systeme verhalten sich deshalb ähnlich wie konservative Systeme. Da insbesondere die kleinste kritische Last unabhängig vom Einfluss der gyroskopischen Kräfte ist, und zudem die geleistete Arbeit auf einem einfach geschlossenen Weg wie bei konservativen Systemen immer null ist, werden wir diese Systeme zu den quasikonservativen Systemen zählen.

Zu einem überraschenden Resultat gelangt man bei der Analyse des Schemas von Bild 4.2. Es handelt sich hier um den Einfluss von gyroskopischen Kräften auf statische, im allgemeinen nicht-konservative Systeme. Diese Systeme sind nur dann auch bei eigentlich positiv definiter Matrix C_S stabil, wenn der Quotient $c_A = 0$ ist. Im stabilen Fall sind die Wurzeln ϵ gemäss (4.4) alle rein imaginär. Die Systemmatrix M lautet dann

$$M = A\epsilon^2 + B_A\epsilon + C_S + C_A \quad (4.15)$$

und ist für $\epsilon \neq 0$ komplex. Da die Matrix M wegen $C_A \neq 0$ auch nicht hermetisch ist, werden mindestens ein paar der Eigenwerte komplex sein, ausser wir hätten gerade den Spezialfall einer symmetrisierbaren Matrix M . Der Rayleigh-Quotient C_A ist aber für komplexe Eigenvektoren im allgemeinen verschieden von null. Gemäss Gleichung (4.1) des Bildes 4.2 sind deshalb die Systeme vom Typ OD 3 immer instabil.

Anscheinend ist es in solchen Systemen möglich, dass durch die gyroskopischen Kräfte die nichtkonservativen statischen Kräfte dem System immer Energie zuführen. Diese Feststellung hat natürlich nur akademischen Charakter. Für diese Systeme ist es offensichtlich nicht zulässig, die immer vorhandenen Dämpfungskräfte zu vernachlässigen. Wir werden bei der Behandlung der gedämpften Systeme darauf zurückkommen.

4.2 Gedämpfte Systeme

Als Grundlage für die Beurteilung dieser Systeme dient wieder das Schema 3.6, das zugleich auch den Fall MD3 der Tabelle 4.1 repräsentiert. Wir nehmen an, dass die Dämpfungsmatrix B_S eigentlich positiv definit ist und deshalb die Grösse $b_S > 0$ ist.

4.21 Gedämpfte Systeme ohne Einfluss von gyroskopischen Lasten

Wir setzen voraus, dass keine gyroskopischen Lasten auf das System wirken und somit $B_A \equiv 0$ ist. Der rechte Arm des Bildes 3.6 reduziert sich auf die einzige Bedingung $c_S > 0$, unabhängig davon, ob $(b_S^2 - 4\alpha c_S) \geq 0$ ist. Im linken Arm können die Bedingungen (3.65) und (3.66) in (3.64) eingebaut werden. Da $C_A \neq 0$, muss wegen $(b_S^2 c_S - \alpha C_A^2) = 0$ die Grösse $c_S > 0$ sein.

Die Bedingungen (3.65) und (3.66) führen somit hier immer in den stabilen Bereich. Zudem ist in diesem Fall die Bedingung (3.63) nicht mehr notwendig, da sie im Fall $b_A = 0$ in (3.47) enthalten ist. In Bild 4.6 ist das vereinfachte Schema für gedämpfte Systeme im Fall ohne gyroskopische Kräfte dargestellt.

Sind zudem nur konservative Kräfte neben den dämpfenden Einflüssen vorhanden, so vereinfacht sich das Schema des Bildes 4.6 wegen $C_A \equiv 0$ auf jenes des Bildes 4.7. Hier ist sofort ersichtlich, dass bei eigentlich positiver Matrix C_S wegen $c_s > 0$ das System stabil sein muss. Aus der Gleichung (3.27) ergibt sich für ϵ in diesem Fall mit $B_A \equiv 0$, $C_A \equiv 0$

$$\{\epsilon_{1,2} = \frac{1}{2a} [-b_s \pm \sqrt{b_s^2 - 4ac_s}]\}_{j}; \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (4.16)$$

Mit $c_s > 0$ sind reelle wie komplexe Lösungen ϵ mit negativem Realteil möglich. Mit $c_s < 0$ sind nur reelle Lösungen ϵ möglich und eine Lösung muss einen positiven Wert aufweisen. Der Uebergang von Lösungen stabiler Natur zu Lösungen mit instabilem Verhalten ist durch die Null-Lösungen $\epsilon = 0$ gekennzeichnet. Diese Lösungen grenzen zugleich den stabilen vom instabilen Bereich ab. Obwohl im idealisierten dämpfungsfreien Fall die Eigenbewegungsarten vom behandelten System verschieden sind, ändert die Grenze zwischen dem stabilen und instabilen Bereich des Systems nicht. Die Grenze selbst ist durch die Nullwurzeln ϵ gegeben. Wir können daher den bekannten Satz (vergleiche Magnus [10], Satz 11) formulieren:

Satz 7: Die Grenze der Stabilität wird durch die Dämpfung bei linearen konservativen Systemen nicht verändert. Das statische Kriterium ist hier hinreichend.

Bild 4.6 : SCHEMA FÜR GEDÄMPFTE SYSTEME MIT $B_A \equiv 0$, MD 4

Bild 4.7 : SCHEMA FÜR GEDÄMPFTE SYSTEME MIT $C_A = 0$,
 $B_A \equiv 0$, MD 1 und MD 2

In Bild 4.6 ist das Beurteilungsschema für gedämpfte statische, im allgemeinen nicht konservative Systeme dargestellt. Der rechte Ast des Schemas enthält die Grenze der statischen Stabilität mit $c_A = 0$ und $c_S = 0$, ähnlich wie im ungedämpften entsprechenden System des Bildes 4.3. Dort war die Grenze der kinetischen Stabilität durch $c_A \neq 0$ gegeben. Hier lautet das Kriterium wegen des Einflusses der Dämpfung anders. Das Vorzeichen des Ausdruckes $b_S^2 c_S - \alpha c_A^2$ entscheidet über die Stabilität im kinetischen Sinne bei diesen Systemen. Satz 3 definiert die stabilen Bereiche von idealisierten statischen Systemen. Wir vergleichen nun die Grenzen der Stabilität eines solchen Systems mit dem entsprechenden gedämpften System. In beiden Systemen ist die statische Grenze der Stabilität durch die Bedingungen $c_A = 0$ und $c_S = 0$ gegeben. Diese Bedingungen sind mit der bekannten Bedingung

$$\det |C| = \det |C_S + C_A| = 0 \quad (4.23)$$

identisch. Im idealisierten System ist die Grenze der Stabilität im kinetischen Sinne durch den Verlust der Symmetrisierbarkeit der Matrix $(A^{-1}C)$ gegeben. Im Schema des Bildes 4.3 steht dafür $c_A = 0$. Im entsprechenden gedämpften System ist die kinetische Grenze der Stabilität durch die Gleichung (4.20) im Schema des Bildes 4.6 definiert. Die kinetischen Grenzen der Stabilität der beiden Systeme sind voneinander verschieden. Die kinetische Grenze der Stabilität des einfachen idealisierten Systems ist deshalb für die Beurteilung gedämpfter statischer Systeme nicht brauchbar. Da zudem die kinetische Grenze der Stabilität oberhalb oder unterhalb der statischen Grenze liegen kann, darf man aus einer Beurteilung des idealisierten Systems keine Schlüsse für das gedämpfte System ziehen (vergleiche Magnus [10], Satz 16, 17).

Satz 8: Lineare gedämpfte Systeme mit $B_A = 0$ dürfen für die Beurteilung der Stabilität im allgemeinen nicht idealisiert werden. Die Dämpfung hat auf die kinetische Grenze der Stabilität einen direkten Einfluss.

Betrachtet man die Schemata 4.3, 4.4 und 4.6, so stellt man leicht fest, dass diese Systeme sicher dann instabil sind, wenn $c_s \leq 0$ ist. Eine negativ definite Matrix C_s erfüllt diese Forderung immer. Es lässt sich deshalb folgender Satz (vergleiche Magnus [10], Satz 17, 18) aufstellen:

Satz 9: Ein lineares stationäres System ohne Einfluss von gyroskopischen Kräften ist sicher dann instabil, wenn die Matrix C_s negativ definit ist.

Andererseits kann man auch sagen, dass bei eigentlich positiver Matrix C_s alle $c_s > 0$ sind, und somit solche Systeme nur im kinetischen Sinne instabil werden können.

4.22 Gedämpfte Systeme mit Einfluss von gyroskopischen Kräften

Wir werden hier die Fälle MD 2 und MD 3 der Tabelle 4.1 behandeln. Das Beurteilungsschema für den allgemeinen Fall MD 3 ist im Schema 3.6 dargestellt. Da wir nur wirkliche Dämpfung mit $b_s > 0$ zulassen, ist die Bedingung (3.61) immer erfüllt. Der rechte Ast des Schemas 3.6 reduziert sich wegen $b_s > 0$ auf die beiden Bedingungen (3.68) und (3.69).

Im Fall MD2 nehmen wir an, dass $C_A \equiv 0$ sei. Der rechte Ast reduziert sich auf die einzige Bedingung $c_s > 0$. Mit $c \equiv 0$ muss für diesen Teil in Gleichung (3.62) $b_A = 0$ sein. Der linke Ast führt über dieselben Ueberlegungen wie sie für das Schema des Bildes 4.7 gemacht wurden, ebenfalls auf die

einzigste Bedingung $c_s > 0$. Das Beurteilungsschema im Fall MD2 ist mit dem des Bildes 4.7 identisch. Es gelten hier deshalb auch ähnliche Ueberlegungen. Bei eigentlich positiv definiten Matrix C_s ist das System ebenfalls immer stabil. Die Grenze der statischen Stabilität, die mit dem Semidefinitwerden der Matrix C_s zusammenfällt, bleibt ebenfalls erhalten. Es ist jetzt aber möglich, wegen des Einflusses der gyroskopischen Kräfte, oberhalb der ersten Stabilitätsgrenze wieder stabile Bereiche des Systems zu finden.

Da wir nur Systeme mit wirklicher Dämpfung behandeln, stellt das Schema des Bildes 3.6 mit $b_s > 0$ den allgemeinen Fall eines stationären diskreten linearen Systems dar. In diesem allgemeinen Fall stellen wir fest, dass auch mit eigentlich positiv definiten Matrix C_s das System trotzdem instabil sein kann. Diese kinetische Grenze der Stabilität des Systems ist durch die Bedingung (3.64) gegeben. Diese Bedingung ist nur dann bei eigentlich positiver Matrix C_s sicher erfüllt, wenn $C_A \equiv 0$ ist. Es lässt sich deshalb folgender Satz formulieren:

Satz 10: Ein lineares, stationäres System mit eigentlich positiv definiten Matrix C_s ist dann sicher stabil, wenn im System keine zirkulatorischen Kräfte wirken, also $C_A \equiv 0$ ist.

Zirkulatorische Kräfte sind durch den nichtsymmetrischen Charakter der zu ihnen gehörenden Matrix C_{NK} gekennzeichnet. Diese Matrix hat auf die Grenze der statischen Stabilität einen direkten Einfluss, denn es ist ja $\det|C_K + C_{NK}| = 0$ für diese Grenze bestimmend, dabei bezeichnen wir mit C_K die Matrix der konservativen, mit C_{NK} die Matrix der nichtkonservativen Kräfte des Systems. Ausser auf die statische Stabilitätsgrenze haben zirkulatorische Kräfte auch einen Einfluss auf die kinetische Stabilitätsgrenze. Sie kann wegen Satz 10 auch unterhalb der statischen Grenze liegen. Man kann deshalb sagen

Satz 11: Zirkulatorische Kräfte können auf lineare stationäre Systeme auch destabilisierend wirken.

Wenn die Matrix C_s negativ definit ist, sind alle Grössen $c_s < 0$. In den Bedingungen (3.64) und (3.68) ist für diesen Fall nur dann sicher auf Instabilität zu schliessen, wenn $B_A \equiv 0$ und somit auch $b_A = 0$ ist. Andernfalls kann die stabilisierende Wirkung von gyrokopischen Kräften dazu führen, dass ein System auch mit negativ definiter Matrix C_s noch stabil sein kann.

Satz 12: Nur dann, wenn in einem linearen, stationären System keine gyrokopischen Kräfte mitwirken, ist dieses System bei negativ definiter Matrix C_s sicher instabil.

Neben Ziegler [14] haben auch Herrmann [15] und Leipholz [16] verschiedene Sätze über das Stabilitätsverhalten linearer stationärer Systeme aufgestellt. Ueber das Beurteilungsschema 3.6 liessen sich eine Anzahl bekannter Sätze neu formulieren und einige Aussagen dazufügen.

Bei spezieller Matrix B

$$B = (\alpha A + \gamma C) \quad (4.24)$$

wobei α und γ Konstanten sind, lässt sich bei diagonal-ähnlicher Systemmatrix M ein Beurteilungsschema analog Bild 3.6 herleiten, das quantitative Aussagen über die Grenze der Stabilität von linearen stationären Systemen zulässt. Da aber dieser Spezialfall kaum eine praktische Bedeutung haben kann, wird auf eine entsprechende Darstellung verzichtet.

4.3 Spezielle Systeme

Wir haben bei unseren bisherigen Betrachtungen nie etwas ausgesagt über die relative Grösse, sowie Art und Weise des Auftretens verschiedener Kräfte. In vielen praktischen Fällen wird es so sein, dass das System unter dem Einfluss der ständig wirkenden, konservativen äusseren Kräfte stabil sein muss. Die nichtständig wirkenden Kräfte können dann als Störkräfte aufgefasst werden. Wir setzen voraus, dass das konservative System ohne Störkräfte stabil sei und die Matrix C_s des gestörten Systems eigentlich positiv definit bleibe. Es sind dann in den Beurteilungsschemata alle $c_s > 0$ vorauszusetzen. Im Schema des Bildes 3.6 reduziert sich der rechte Ast damit auf die Feststellung, dass diese Systeme mit $b_s b_A - 2\alpha c = 0$ stabil sind. Wir haben somit die weitere Untersuchung auf die Beurteilung der kinetischen Stabilität dieser Systeme beschränkt, denn mit $c_s > 0$ kann das System im statischen Sinne nicht instabil sein. In Bild 3.6 sind die Bedingungen (3.63), (3.65) und (3.66) mit $c_s > 0$ immer erfüllt. Der linke Ast reduziert sich daher auf die einzige Bedingung (3.64). Mit $b_s b_A - 2\alpha c_A = 0$ führt aber die Bedingung (3.64) auch zum stabilen Bereich, so dass sich für $c_s > 0$ und wirkliche Dämpfung $b_s \geq 0$ das Schema des Bildes 3.6 auf die einzige Bedingung des Bildes 4.8 reduziert.

Bild 4.8: SCHEMA FÜR FALL C_s POSITIV DEFINIT MIT $b_s \geq 0$

Kennzeichnet δ eine beliebig kleine, aber konstante Grösse, so können wir mit δB_S , δB_A oder δC den Einfluss von beliebig kleinen entsprechenden Kräften darstellen. Damit werden aber auch die Rayleigh Quotienten $\delta |b_S|$, $\delta |b_A|$ und $\delta |c_A|$ kleine Grössen. Wir werden nun die Bedingung des Bildes 4.8 systematisch auf alle möglichen Kombinationen von Störkräften anwenden und erhalten dann die massgebenden algebraischen Kriterien für die Beurteilung der Stabilität von Systemen bei eigentlich positiv definiter Matrix C_S . Sie sind in Bild 4.9 zusammengestellt. Dabei wurden Glieder höherer Ordnung vernachlässigt. In den speziell bezeichneten Fällen (1) und (2) der Tabelle 4.9 wurde von der Annahme Gebrauch gemacht, dass

$$\delta |b_A c_A| \ll b_S c_S \quad (4.25)$$

also vernachlässigbar klein sei. In dieser Tabelle kann man auch sofort die bekannte Feststellung machen, dass ein System mit eigentlich positiv definiter Matrix C_S , also $c_S > 0$ nie instabil werden kann, wenn keine zirkulatorischen Kräfte vorhanden sind und das System zudem stark gedämpft ist. In der Tabelle sind all diese Fälle durch den vertikal schraffierten Bereich dargestellt. Die Grenze der Stabilität ist hier durch das Semidefinitwerden der Matrix C_S gegeben. Alle anderen Fälle sind durch den doppelt schraffierten Bereich markiert. Hier gelten die in der Tabelle 4.9 angegebenen algebraischen Kriterien für die Beurteilung der Stabilität des Systems. Es handelt sich um die je nach Fall vereinfachte Bedingung des Bildes 4.8, die eigentlich die kinetische Grenze der Stabilität definiert.

Wir haben somit eine Grenze der Anwendbarkeit des statischen Stabilitätskriteriums für lineare stationäre Systeme gefunden. Wir können deshalb folgenden Satz formulieren

VORAUSSETZUNGEN : A_S UND C_S POSITIV DEFINIT				
	C_S	C_A	B_A	$B_S \neq 0, b_S > 0$
				$\delta B_S \neq 0, \delta b_S > 0$
				$B_S = 0, b_S \equiv 0$
KEINE ZIRKULAT- TORISCHE KRÄFTE	X	O	O	STABIL
	X	O	S	STABIL
	X	O	X	STABIL
KLEINE ZIRKULAT- TORISCHE KRÄFTE	X	S	O	$b_S^2 C_S - a C_A^2 \geq 0$
	X	S	S	$b_S^2 C_S - a C_A^2 \geq 0$
	X	S	X	$b_S b_A C_A + b_S^2 C_S - a C_A^2 \geq 0$
GROSSE ZIRKULAT- TORISCHE KRÄFTE	X	X	O	$C_A = 0$
	X	X	S	$C_A = 0$
	X	X	X	$\delta b_S b_A C_A - a C_A^2 = 0$

Bild 4.9: BEURTEILUNGSKRITERIEN FÜR GRENZE KINETISCHER STABILITÄT STATIONÄRER
UNRRER SYSTEME, WENN C_S POSITIV DEFINIT

Satz 13: Bei linearen, stationären Systemen ist für die Beurteilung der Stabilität das statische Kriterium auch in nichtkonservativen Fällen hinreichend, wenn mit positiv definiter Matrix C_s folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

- die zirkulatorischen Kräfte müssen im Vergleich zu den konservativen Kräften klein sein,
- die Dämpfung des Systems darf nicht zugleich schwach sein.

5. PRAKTISCHE GRENZEN DER STABILITÄT

Die im vorangehenden Kapitel behandelten Beurteilungsschemata waren Anlass für die Formulierung von Sätzen, die ausser in den Sonderfällen nur qualitative Aussagen über die Grenzen der Stabilität eines linearen stationären Systems enthalten. Sie sind nun aber auch zugleich Grundlage für die Herleitung von Näherungen für die kritischen Lasten stationärer linearer Systeme. Immer dann, wenn die Grenze der stabilen Bereiche durch das statische Kriterium bestimmt ist, kann der Grenzwert durch $\det |C| = 0$ exakt bestimmt werden. Es geht somit in diesem Fall darum, die Grenze der Anwendbarkeit des statischen Kriteriums für die Bestimmung der kritischen Lasten stationärer linearer Systeme möglichst genau zu definieren. Für alle anderen Fälle muss für die exakte Bestimmung der kritischen Lasten eine aufwendige dynamische Analyse durchgeführt werden. Dann muss das umfassendere kinetische Kriterium für die Beurteilung der Stabilität verwendet werden. Für diesen allgemeineren Fall lässt sich nun in einfacher Form für den kleinsten kritischen Wert eine untere Schranke angeben.

5.1 Untere Schranke für die kritische Last

Lineare stationäre Systeme verhalten sich sicher dann stabil, wenn die Belastungen kleiner als die kleinsten kritischen Lasten sind. Wir nehmen nun vorerst an, dass für ein System das statische Kriterium hinreichend sei. Für den stabilen Bereich des Systems genügt dann auch die Forderung, dass der Wertebereich der reellen Matrix C [12, Seite 161 ff] als Ganzes auf der positiven Hälfte der komplexen Zahlenebene in Bezug auf die Realteile liegt. Dann haben alle Rayleigh-Quotienten c einen positiven Realteil c_s . Mit allen Werten $c_s > 0$,

ist die symmetrische Matrix C_s gerade eigentlich positiv definit. Wir können deshalb für die unterste Grenze der Stabilität im statischen Sinne ($\epsilon = 0$) einen Grenzwert angeben, der auch für nichtkonservative Systeme Gültigkeit hat. In einem linearen stationären System ist die Stabilität im statischen Sinne sicher dann garantiert, wenn mindestens die Matrix C_s eigentlich positiv definit ist.

Wir betrachten nun das allgemeine Beurteilungsschema des Bildes 3.6 unter der Voraussetzung, dass in unserem System die Dämpfungsmatrix positiv definit und die Stabilität im statischen Sinne garantiert ist; also C_s eigentlich positiv definit sein muss. Der rechte Ast im Bild 3.6 führt mit $c_s > 0$ immer auf den stabilen Bereich. Im linken Ast sind die Bedingungen (3.63) und (3.66) mit $c_s > 0$ immer erfüllt. Entscheidend für die Stabilität des Systems im kinetischen Sinne ist deshalb die Bedingung (3.64).

$$b_s b_A c_A + b_s^2 c_s - a c_A^2 \geq 0 \quad (5.1)$$

Ist diese Bedingung erfüllt, dann verhält sich das System sicher stabil; ist sie nicht erfüllt, dann ist das System im kinetischen Sinne instabil.

Aus der Matrizenrechnung [12, Seite 161 ff] wissen wir, dass die Grenzen der Wertebereiche von reellen symmetrischen oder antimetrischen Matrizen durch die entsprechenden Extremwerte ihrer Eigenwerte λ_j gegeben sind.

Bild 5.1: WERTEBEREICHE EINER ANTIMETRISCHEN UND EINER SYMMETRISCHEN REELLEN MATRIX

Diese extremen Eigenwerte sind aber auch zugleich mögliche Extremwerte der Rayleigh-Quotienten der Bedingung (5.1). Für die einzelnen Summanden in (5.1) lassen sich mit diesen extremen Eigenwerten der entsprechenden Matrizen des Systems Grenzwerte formulieren. Die Ersatzwerte für die Summanden der Bedingung (5.1) in den folgenden Ungleichungen (5.2), (5.3) und (5.4) sind zudem die kleinsten möglichen Werte, die die Summanden überhaupt je annehmen können.

$$\lambda_{BS}^{\max} \cdot \lambda_{BA}^{\max} \cdot \lambda_{CA}^{\max} \leq b_S b_A c_A \quad (5.2)$$

$$(\lambda_{BS}^{\min})^2 \cdot \lambda_{CS}^{\min} \leq b_S^2 c_S \quad (5.3)$$

$$\lambda_{AS}^{\max} \cdot (\lambda_{CA}^{\max})^2 \leq -\alpha_{CA}^2 \quad (5.4)$$

Ersetzen wir nun alle Summanden auf der linken Seite von (5.1) durch jene von (5.2), (5.3) und (5.4) und verlangen

$$\lambda_{BS}^{\max} \cdot \lambda_{BA}^{\max} \cdot \lambda_{CA}^{\max} + (\lambda_{BS}^{\min})^2 \cdot \lambda_{CS}^{\min} + \lambda_{AS}^{\max} \cdot (\lambda_{CA}^{\max})^2 \geq 0, \quad (5.5)$$

so ist auf jeden Fall (5.1) stets erfüllt. Das System ist dann auch im kinetischen Sinne stabil.

Wir haben also mit (5.5) eine neue Bedingung gewonnen, die die Stabilität des Systems garantiert. Die Bedingung (5.1) macht nur qualitative Aussagen, da wir die Werte der Rayleigh-Quotienten nicht kennen. Die Bedingung (5.5) liegt bezüglich der Grenze der Stabilität auf der sicheren Seite und gestattet zudem qualitative Aussagen.

Wenn sämtliche Lastparameter verschwinden, sind die Matrizen C_A und B_A identisch null. Die Bedingungen (5.1) und (5.5) sind dann wegen der eigentlich positiv definiten Matrizen A , B_S und C_S immer erfüllt und somit das lineare stationäre System im kinetischen wie statischen Sinne stabil. Wenn wir nun die Belastungen oder die Lastparameter von null an steigern, so sind vorerst im allgemeinen die Bedingungen für Stabilität noch erfüllt. Bei weiterer Laststeigerung gilt für einen bestimmten Lastwert P_{GR} die Gleichung (5.5) erstmals mit dem Gleichheitszeichen. Wenn wir nun die Last noch weiter steigern, so werden wir mit P_{KR}^S die statische oder mit P_{KR}^K die kinetische Grenze der Stabilität erstmals erreichen. Im allgemeinen Fall eines linearen stationären Systems ist es nun möglich, dass bei weiterer Erhöhung der Lasten das System nach einem instabilen wieder einen stabilen Bereich aufweisen kann. Gyroskopische und zirkulatorische Kräfte können einen solchen Einfluss auf ein System ausüben.

Der Lastwert P_{GR} liegt nicht höher als die kinetische kritische Last P_{KR}^K wegen den Bedingungen (5.2), (5.3) und (5.4) und ist höchstens gleich hoch wie die statische kritische Last P_{KR}^S wegen der Voraussetzung, dass für die Bedingungen (5.1) und (5.5) die Matrix C_s eigentlich positiv definit, also $\lambda_{CS}^{\min} > 0$ sein muss.

Der Wert der Grenzlast P_{GR} ist durch die Bedingung (5.5) gegeben. Sie ist in den Eigenwerten implizite enthalten. Es lässt sich deshalb folgender Satz aufstellen:

Satz 14: Für ein lineares stationäres System lässt sich aus den extremen Eigenwerten der entsprechenden Matrizen A , B_s , B_A und C_s , C_A eine untere Schranke P_{GR} für die kritische Last des Systems angeben. Die Schranke P_{GR} erhält man über die Beziehung

$$\lambda_{BS}^{\max} \cdot \lambda_{BA}^{\max} \cdot \lambda_{CA}^{\max} + (\lambda_{BS}^{\min})^2 \lambda_{CS}^{\min} + \lambda_{AS}^{\max} \cdot (\lambda_{CA}^{\max})^2 = 0, \quad (5.6)$$

wobei vorausgesetzt wird, dass ausser $\lambda_A > 0$, $\lambda_{BS} \geq 0$ auch $\lambda_{CS} > 0$ sein muss.

Die Anwendung dieses Satzes ist natürlich nur dann von Interesse, wenn man nicht schon von vornherein weiss, dass für ein spezielles System die kleinste kritische Last durch das statische Kriterium gegeben ist. In diesen Fällen, sie sind in Bild 4.9 durch die Bedingung $C_s > 0$ gekennzeichnet, ist es einfacher direkt die statisch kritische Last P_{KR}^S über

$$\lambda_{CS}^{\min} = 0 \quad (5.7)$$

zu errechnen. Wenn im System keine zirkulatorischen Kräfte mitwirken, ist diese kritische Last P_{KR}^S dann gerade identisch mit der Grenzlast P_{GR} . Dies gilt auch näherungsweise dann noch, wenn bei grosser Dämpfung nur kleine zirkulatorische Kräfte mitwirken.

Bei Systemen mit sehr vielen Freiheitsgraden wird auch das Errechnen der extremen Eigenwerte sehr aufwendig. Die Bedingung (5.6) hängt nun ausschliesslich von den extremen Eigenwerten der reell symmetrischen und antimetrischen Matrizen des Systems ab. Für diese Eigenwerte gibt es Näherungen, die sehr einfach zu ermitteln sind. Auf Grund von Sätzen, die S. Gerschgorin aufgestellt hat [12, Seite 211 ff] lässt sich folgende Aussage machen:

Die Eigenwerte einer reellen symmetrischen oder reellen antimetrischen Matrix $M = (m_{ik})$ liegen alle innerhalb oder auf dem Rande eines Gebietes der komplexen Eigenwertebene, gebildet aus den n Kreisen K_i mit den Mittelpunkten m_{ii} und den Radien $r_i = \sum_{k \neq i} |m_{ik}|$, also den Zeilensummen der Beträge der entsprechenden Nichtdiagonalelemente.

Der grösste und kleinste Wert

$$m_{ii} \pm r_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.8)$$

sind deshalb Näherungen für die extremen Eigenwerte der entsprechenden Matrix. Diese Näherung für den grössten Eigenwert einer Matrix ist sicher grösser als der exakte Wert; für den kleinsten Eigenwert gilt das Analoge. Die Näherungen sind die Extremwerte des Gebietes G , in dem die Eigenwerte liegen müssen. Wenn wir diese Näherung für die extremen Eigenwerte mit l bezeichnen, lässt sich für die Berechnung einer unteren Schranke für die kritische Last die Bedingung (5.6) neu schreiben.

$$l_{BS}^{\max} \cdot l_{BA}^{\max} \cdot l_{CA}^{\max} + (l_{BS}^{\min})^2 \cdot l_{CS}^{\min} + l_{AS}^{\max} \cdot (l_{CA}^{\max})^2 = 0 \quad (5.9)$$

Dabei muss für die extremen Eigenwerte der antimetrischen Matrizen der mit i multiplizierte Wert als Näherung eingesetzt werden. Der aus dieser Bedingung ermittelte Wert für die kritische Last eines Systems ist eine untere Schranke für den Wert P_{GR} aus (5.6).

Aus beiden Gleichungen (5.6) und (5.9) lässt sich für ein bestimmtes System je eine untere Schranke für die kritische Last P_{KR} angeben. P_{GR} aus der Gleichung (5.6) ermittelt, erfordert mehr Arbeit für die Berechnung, ergibt aber im allgemeinen eine bessere Näherung für die Stabilitätsgrenze als der von (5.9) gelieferte Wert.

5.2 Bedeutung der kinetischen Stabilität für Tragwerke

Die Belastungen eines Tragwerkes sind im allgemeinen durch Normen definiert. Diese Normlasten beruhen auf der Erfahrung und sind Lastmodelle für bekannte Kräfte. Die Vorgänge in der Wirklichkeit sind aber weit komplizierter als dies durch die Modelle zur Darstellung kommt. Auch wenn man annimmt, dass wir die Belastungszukunft gut definiert haben, und die durch die Umwelt gegebenen Krafteinwirkungen auf ein Bauwerk alle erkannt und in Lastmodellen definiert haben, so ist das mathematische System des Bauwerkes doch nur ein idealisiertes Bild der Wirklichkeit. Mit ihr verglichen, wird das System ständig noch zusätzlichen Einflüssen unterworfen sein; auf das System bezogen, sprechen wir dann von kleinen Störungen. Sie müssen klein sein, da wir ja annehmen, dass alle grösseren Einflüsse erkannt und in Modellen definiert sind. Diese Störungen können entweder als beliebig kleine Anfangsverschiebungen oder als ein beliebig kleines Mass an Zufuhr von kinetischer Energie auftreten. Werden mit der Zeit diese Störungen durch das System verdaut, ohne dass grosse Deformationen oder gar Schwingungen mit zunehmender Amplitude auftreten, verhält sich das gestörte mathematische System stabil. Die Störungen selbst können von sonst beliebiger Herkunft und Richtung sein. Für die hier behandelten stationären Systeme sind instationäre kleine Krafteinflüsse als Störungen aufzufassen.

Im Normalfall werden für den Entwurf eines Bauwerkes die wirklichen Krafteinflüsse durch statische Ersatzlasten konservativer Natur dargestellt. Dies gilt nicht nur für die Nutzlasten, sondern auch für die Belastung aus Wind und Erdbeben. Diese Vorstellung ist für die eigentliche Bemessung sicher in den meisten Fällen gerechtfertigt. Wenn wir aber die Frage nach der Stabilität stellen, so muss für jede Belastungsart im gegebenen Fall die Frage nach der Richtigkeit des gewählten Lastmodells gestellt werden. Im wesentlichen sind es doch drei Arten Kräfte, die es zu berücksichtigen gilt:

- Kräfte, die ihrer Natur nach als konservativ betrachtet werden dürfen (z.B. Eigengewicht, Schwerelasten)
- Kräfte, die ihrer Natur nach dem System Energie zuführen könnten (z.B. Wind, Erdbeben, Wellen)
- Kräfte, die ihrer Natur nach Energie aus dem System abführen können (z.B. Dämpfung).

In den behandelten stationären Systemen stehen die zirkulatorischen Lastmodelle stellvertretend für die Kräfte da, durch die einem System Energie zugeführt werden kann. Ebenso stehen die Resultate unserer Untersuchungen für diese Fälle stellvertretend da. Lassen sich diese Kräfte durch ein zirkulatorisches Lastmodell darstellen, dann dienen die beiden Grenzwertbedingungen (5.6) und (5.9) dazu, eine untere Schranke für die kritische Last anzugeben. Wir haben bisher immer nur von einem bestimmten System, das einer bestimmten Lastkonfiguration entsprach, gesprochen. Wir haben dabei immer stillschweigend angenommen, dass wir gerade die massgebende Konfiguration für die entsprechende kleinste kritische Last kennen. Die Kenntnis des qualitativen Einflusses eines solchen Lastmodells auf die Stabilität eines Systems hilft die massgebende Lastkonfiguration für die Beurteilung der Stabilität eines Systems zu finden.

Die beiden Bedingungen (5.6) und (5.9) gestatten eine auf der sicheren Seite liegende Abschätzung der untersten Grenze des stabilen Lastbereiches eines stationären linearen Systems. Diese Schranke P_{GR} gehört aber zu einer bestimmten Lastkonfiguration. Damit wir die Stabilität eines Systems garantieren können, müssen wir also die ungünstigste Lastkonfiguration, die sich während der Lebensdauer eines Bauwerkes einstellen kann, kennen. Die Belastungen eines Bauwerkes können in ständig wirkende Lasten und zeitlich beschränkt wirkende Lasten unterteilt werden. In den meisten Fällen werden die ständig wirkenden Lasten Gewichte repräsentieren und somit durch konservative Lastmodelle dargestellt. Das System muss sicher primär einmal für diese Lasten allein stabil sein. Für diese Beurteilung genügt das statische Kriterium allein. Da die ungünstigste Lastkonfiguration unter Mitberücksichtigung der nichtständig wirkenden Lasten nicht immer bekannt ist, müssen im praktischen Fall dann mehrere mögliche Lastkonfigurationen untersucht werden. Solange das statische Kriterium allein massgebend ist, ist die Beurteilung gegeben. Sobald aber die Grenze der Stabilität durch das kinetische Kriterium bestimmt ist, wird die Beurteilung entsprechend unübersichtlich und kompliziert. Als Beispiel hierfür sei die Möglichkeit des stabilisierenden wie destabilisierenden Einflusses bei der Aenderung der Dämpfung in einem System mit zirkulatorischen Lastmodellen erwähnt. Die Bedeutung der Bedingungen (5.6) und (5.9) liegt nun darin, dass auf einfache Art für eine bestimmte Lastkonfiguration eine untere Schranke für die Grenze der Stabilität angegeben werden kann und dazu der Einfluss einzelner Lastmodelle auf diese Grenze leicht erkennbar ist.

Das Entwerfen, Konstruieren und Bemessen eines Bauwerkes ist ein derart komplexer Vorgang, dass man immer danach trachten wird, einfachste Annahmen für das Formulieren eines mathematischen Systems zu treffen. In Bezug auf die Stabilitätsuntersuchungen ergibt sich dann der einfachste Fall, wenn alle

Modelle des mathematischen Systems und damit das System selbst konservativ sind. Hier genügt eindeutig das einfachere statische Kriterium für die Beurteilung der Stabilität. Dies gilt auch dann noch, wenn neben den konservativen auch quasi-konservative und eigentlich dissipative Modelle im System vorkommen. Im Bild 4.9 sind in der ersten Hauptzeile diese Fälle dargestellt. Geschwindigkeitsabhängige Lasten haben auf die kleinste kritische Last eines konservativen Systems keinen Einfluss. Das kinetische Kriterium ist für die Beurteilung der untersten Grenze der Stabilität für diese Fälle nicht notwendig. Die Bedingungen (5.6) und (5.9) haben natürlich auch hier Gültigkeit, wobei (5.6) auf den exakten kleinsten Wert P_{KR}^S führt und (5.9) eine Näherung $P_{GR} \leq P_{KR}^S$.

In vielen Bauwerken überwiegen die konservativen Lasten aus Eigengewicht und Nutzlast die anderen Lasteinflüsse derart, dass letztere als kleine Grössen betrachtet werden können. Wir haben früher gezeigt, dass in diesen Fällen das statische Kriterium die kleinste kritische Last liefert, wenn nur die Dämpfung nicht als eine kleine Grösse auftritt. Hier hat dann das Problem der kinetischen Stabilität keine Bedeutung. Ist die Dämpfung schwach, so kann das System auch bei kleinen zirkulatorischen Lasteinflüssen schon kinetisch instabil werden. Sind diese Lasteinflüsse gross, so muss das kinetische Kriterium zur Beurteilung der Stabilität benutzt werden, unabhängig von der Grösse des Dämpfungseinflusses.

Die Bedeutung der hier behandelten Probleme liegt in der Erkenntnis, dass für die Beurteilung der Stabilität eines Bauwerkes das statische Kriterium dann nicht genügen kann, wenn Kräfte vorhanden sind, die dem System Energie zuführen können. Wenn diese Kräfte klein sind im Vergleich mit den konservativen Kräften, dann ist allerdings die kinetische Stabilität nur dann noch wichtig, wenn das System nahezu dämpfungsfrei ist.

6. BEURTEILUNG DER STABILEN BEREICHE AN EINEM EINFACHEN BEISPIEL

Wir werden in diesem Kapitel anhand eines einfachen Beispiels das Vorstehende erläutern und dabei auf einige Randprobleme im Zusammenhang mit der Stabilität nichtkonservativer Systeme hinweisen.

In Bild 6.1 ist das Stabmodell dargestellt. Mit x und φ sind die Koordinaten, mit m die Massen, mit g die Federkonstanten und mit d die Dämpfungskonstanten des Systems bezeichnet. Als verallgemeinerte dimensionslose Koordinaten wählen wir

$$q_1 = \frac{x}{l} \quad \text{und} \quad q_2 = \varphi \quad (6.1)$$

Wir behandeln nur kleine Schwingungen um die Ruhelage $q_i = 0$. Es ist deshalb

$$q_2 = \varphi = \operatorname{tg} \varphi = \sin \varphi \quad \text{und} \quad \cos \varphi = 1.$$

Die Lastmodelle der drei behandelten Systeme sind im Bild 6.2 zusammengestellt. Es handelt sich um mitgehende konstante Lasten, deren Kraftrichtungen Funktionen der verallgemeinerten Koordinaten sind. Im einfachsten Fall mit dem Winkel $\xi = 0$ verhält sich das Lastmodell P_v wie eine konservative Last. Wenn diese Last in Wirklichkeit nichtkonservativen Charakter hätte, müsste das Lastmodell P_v als quasikonservativ bezeichnet werden. Von den anderen Lastmodellen können wir ohne weitere Untersuchungen nur festhalten, dass es sich um statische Lasten handelt. Wir müssen deshalb annehmen, dass es sich um zirkulatorische Lastmodelle handelt, und deshalb für die Beurteilung der Stabilität das kinetische Kriterium massgebend ist. Die in

Bild 6.1: STABMODELL FÜR EIN BEISPIEL

LASTMODELL	SYSTEM I	SYSTEM II	SYSTEM III

$\xi = f(q_i)$	$\xi_T = q_2$ $\xi_V = 0$	$\xi_M = kq_2$ $\xi_V = 0$	$\xi_N = \frac{1}{n}(q_1 + q_2)$

Bild 6.2 : LASTMODELLE UND ENTSPRECHENDE SYSTEME

Bild 6.2 dargestellten Kombinationen der Lastmodelle ergeben zusammen mit dem Stabmodell in Bild 6.1 die hier zur Diskussion gestellten mathematischen Systeme I, II, III.

6.1 Herleitung der algebraischen Stabilitätsbedingungen

Für die Herleitung der Bewegungsgleichungen werden die Lagrange'schen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i^{(K)} + Q_i^{(NK)} + Q_i^{(D)} \quad (6.2)$$

benutzt, wobei die verallgemeinerten Kräfte durch folgende Beziehungen dargestellt werden können

$$Q_i^{(K)} = - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad \text{für konservative Kräfte} \quad (6.3)$$

$$Q_i^{(NK)} = \frac{\delta W_{(i)}}{\delta q_i} \quad \text{für nichtkonservative Kräfte} \quad (6.4)$$

$$Q_i^{(D)} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{für dissipative Kräfte} \quad (6.5)$$

Die Energien des Stabmodells betragen

$$\text{die Bewegungsenergie} \quad T = \frac{1}{2} l^2 [m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2] ; \quad (6.6)$$

$$\text{die Dissipationsenergie} \quad D = \frac{1}{2} [d_1 \dot{q}_1^2 l^2 + d_2 \dot{q}_2^2] ; \quad (6.7)$$

$$\text{die potentielle Energie} \quad V = \frac{1}{2} [g_1 l^2 q_1^2 + g_2 q_2^2] ; \quad (6.8)$$

Die virtuelle Arbeit der äusseren Kräfte ergibt für den allgemeinen Fall der Kraftrichtung ξ

$$\delta W_{(1)} = -P\xi l \cdot \delta q_1 \quad \delta W_{(2)} = P(q_2 - \xi) l \cdot \delta q_2 \quad (6.9)$$

und damit für die verschiedenen Lasten

$$\text{für } P_V: \delta W_{(1)} = 0 \quad ; \quad \delta W_{(2)} = P_V q_2 l \cdot \delta q_2 \quad (6.10)$$

$$\text{für } P_T: \delta W_{(1)} = -P_T q_2 l \cdot \delta q_1 \quad ; \quad \delta W_{(2)} = 0 \quad (6.11)$$

$$\text{für } P_N: \delta W_{(1)} = -P_N \frac{l}{n} (q_1 + q_2) \delta q_1; \delta W_{(2)} = P_N \frac{l}{n} [q_2(n-1) - q_1] \delta q_2; \quad (6.12)$$

$$\text{für } P_M: \delta W_{(1)} = -P_M k q_2 l \cdot \delta q_1 \quad ; \quad \delta W_{(2)} = P_M (1-k) q_2 l \cdot \delta q_2 \quad (6.13)$$

Für die Matrizen **A** , **B** und **C** des linearen Systems

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (6.14)$$

ergeben sich folgende Koeffizientenschema

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2) l^2 & m_2 l^2 \\ m_2 l^2 & m_2 l^2 \end{pmatrix} ; (6.15) ; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} d_1 l^2 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} g_1 l^2 + P_N \frac{l}{n} & P_T l + P_N \frac{l}{n} + P_M k l \\ P_N \frac{l}{n} & g_2 - P_V l - P_N \frac{l}{n} (n-1) - P_M (1-k) l \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

Dabei wurden in der Matrix **C** unabhängig des zu wählenden Systems alle möglichen Lastmodelle miteinbezogen.

Wir führen folgende dimensionslose Größen ein

$$\begin{aligned}
 \theta^2 &= \frac{m_2}{g_1} \epsilon^2 \\
 \beta &= \frac{d_2}{d_1 l^2} = \frac{D_2}{D_1} ; \quad D_1 = \frac{d_1}{(m_2 g_1)^{1/2}} ; \quad D_2 = \frac{d_2}{(m_2 g_1)^{1/2} \cdot l^2} ; \\
 \mu &= \frac{m_1}{m_2} \quad \quad \quad \varsigma = \frac{g_2}{g_1 l^2} \\
 S_V &= \frac{P_V}{g_1 l} ; \quad S_T = \frac{P_T}{g_1 l} ; \quad S_N = \frac{P_N}{g_1 l} ; \quad S_M = \frac{P_1}{g_1 l} ;
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

und erhalten dann als Bedingung für nichttriviale Lösungen von (6.14) die Bedingung (vergleiche mit (3.6))

$$\det \left\| \begin{pmatrix} 1+\mu & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \theta^2 + D_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \theta + \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{n} S_N & S_T + \frac{1}{n} S_N + S_M k \\ \frac{1}{n} S_N & \varsigma - S_V - \frac{(n-1)}{n} S_N - S_M (1-k) \end{pmatrix} \right\| = 0 \tag{6.19}$$

Aus (6.19) erhalten wir nun die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung

$$p_0 \theta^4 + p_1 \theta^3 + p_2 \theta^2 + p_3 \theta + p_4 = 0 \tag{6.20}$$

für die drei Systeme I, II, III.

System I: nur S_V und S_T ; $S_N = S_M \equiv 0$

$$\begin{aligned}
 p_0 &= \mu \\
 p_1 &= D_1 (1 + \mu \beta + \beta) \\
 p_2 &= \beta D_1^2 + (1 - S_T) + (1 + \mu) (\varsigma - S_V) \\
 p_3 &= D_1 (\beta + \varsigma - S_V) \\
 p_4 &= (\varsigma - S_V)
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

System II: nur S_M ; Annahme $S_V = 0$; $S_N = S_T \equiv 0$

$$\begin{aligned} p_0 &= \mu \\ p_1 &= D_1 (1 + \mu\beta + \beta) \\ p_2 &= [\beta D_1^2 + (1 + \mu)\zeta + (1 - S_M) - \mu S_M(1 - k)] \\ p_3 &= D_1 [\beta + \zeta - S_M(1 - k)] \\ p_4 &= [\zeta - S(1 - k)] \end{aligned} \quad (6.22)$$

System III: nur S_N ; $S_M = S_T = S_V \equiv 0$

Man sieht sofort, dass in diesem Fall die Matrix C symmetrisch wird und somit das statische Kriterium allein bereits genügt für die Bestimmung der Grenze der Stabilität. Wir brauchen deshalb die Koeffizienten p_0 , p_1 , p_2 , p_3 nicht.

$$p_4 = \frac{1}{n} [n\zeta + S_N(\zeta - n + 1) - S_N^2] \quad (6.23)$$

Für die Beurteilung der stabilen Bereiche ziehen wir als algebraisches Stabilitätskriterium dasjenige von Routh-Hurwitz heran. Es ergeben sich für unser Beispiel folgende Bedingungen für die Stabilität

$$\begin{aligned} p_0 &> 0 \\ p_1 &> 0 \\ p_1 p_2 - p_0 p_3 &> 0 \\ (p_1 p_2 - p_0 p_3) p_3 - p_1 p_4^2 &> 0 \\ p_4 &> 0 \end{aligned} \quad (6.24)$$

Für das System I lauten die Bedingungen dann im speziellen

$$\mu > 0 \quad (6.25)$$

$$D_1 (1 + \mu\beta + \beta) > 0 \quad (6.26)$$

$$\left\{ \left[\beta D_1^2 + 1 + (1 + \mu)(s - S_V) \right] - \mu \frac{(\beta + s + S_V)}{(1 + \mu\beta + \beta)} \right\} > S_T \quad (6.27)$$

$$\left\{ \left[\beta D_1^2 + 1 + (1 + \mu)(s - S_V) \right] - \mu \frac{(\beta + s - S_V)}{(1 + \mu\beta + \beta)} - \frac{(1 + \mu\beta + \beta)}{(\beta + s - S_V)} (s - S_V) \right\} > S_T ; \quad (6.28)$$

$$s > S_V \quad (6.29)$$

6.2 Systeme, bei denen die geschwindigkeitsabhängigen Kräfte vernachlässigt werden

Wir werden in diesem Abschnitt alle inneren und äusseren geschwindigkeitsabhängigen Krafteinflüsse vernachlässigen. Wir haben es dann mit dämpfungsfreien idealisierten Systemen zu tun. Die Dämpfung kann auf diese Systeme einen stabilisierenden als auch destabilisierenden Einfluss haben, wenn zirkulatorische Lastmodelle im System mitwirken. Die Grenzen der stabilen Bereiche dieser idealen Systeme sind deshalb nicht zuverlässig und haben im allgemeinen keine Bedeutung für die Grösse der kinetisch kritischen Lasten. Immerhin können wir auf einfachste Art die drei gewählten Systeme für verschiedene Lastintensitäten und untereinander vergleichen. Zudem gestatten sie einen Vergleich mit den gedämpften Systemen und den Schranken für die kritischen Lasten.

Die charakteristische Gleichung vereinfacht sich auf die bi-quadratische Gleichung

$$p_0 \theta^4 + p_2 \theta^2 + p_4 = 0 \quad (6.30)$$

wobei in den Koeffizienten p der Gleichungen (6.21) und (6.22) die Grössen für die Dämpfung D_1 und β null gesetzt werden.

Im Bild 6.3 sind die Grenzen der stabilen Bereiche des idealen Systems I aufgezeichnet. Die Vertikale mit $S_V = 1$ gibt die statische Grenze, die tangierende Parabel die kinetische Grenze der stabilen Bereiche des Systems an. Wenn die tangentielle Last $S_T \equiv 0$ ist, dann ist das ideale System mindestens quasi-konservativ und für die Berechnung der kritischen Last könnte das statische Kriterium herangezogen werden. Die kritische Last ergibt für diesen Fall $S_{V,KR} = 1$.

Wenn wir nun ein festes Verhältnis von S_T / S_V mit $2/3$ annehmen, und die Lasten von null an langsam steigern, erreichen wir gemäss Bild 6.3 vorerst eine kinetische Grenze der Stabilität. Bei weiterer Laststeigerung wird das System aber plötzlich wieder stabil, um später dann noch eine statische Grenze der Stabilität zu erreichen. Bei dieser Belastungsart finden wir also zwei verschiedene stabile Lastbereiche.

In den Bildern 6.4, 6.5 und 6.6 sind die stabilen Bereiche für das System II für verschiedene feste Werte der vertikalen Last P_V dargestellt. Dabei ist die normierte Last S_M in Funktion des Winkelparameters k aufgetragen. Die stabilen Bereiche sind dadurch gekennzeichnet, dass für diese idealen Systeme die massgebenden Wurzeln alle imaginär sind. Der Bereich ist deshalb auch mit $4I$ bezeichnet, es handelt sich um vier Wurzeln. Die Grenze zwischen den Bereichen $4I$ und $2R, 2I$ ist durch das statische Kriterium definiert. Es ist dort mindestens ein Wurzelpaar gerade identisch null. Die Grenze zwischen den Bereichen $4I$ und $4K$ ist durch das kinetische Kriterium allein gegeben. Es ist bekannt, dass in Systemen mit mitgehenden Lasten Zonen vorhanden sind, in denen das statische Kriterium allein

Bild 6.3 : STABILE BEREICHE SYSTEM I OHNE DÄMPFUNG

Bild 6.4: STABILE BEREICHE SYSTEM II
MIT $S_V = 0$, OHNE DÄMPFUNG

Bild 6.5: STABILE BEREICHE SYSTEM II MIT $S_V = \frac{1}{2} S_{V,KR}$, OHNE DÄMPFUNG

Bild 6.6: STABILE BEREICHE SYSTEM I
 MIT $S_V = S_{V,KR}$, OHNE DÄMPFUNG

zuständig ist. Die Grenzen dieser Zonen sind aber im allgemeinen von der Dämpfung abhängig und deshalb eher von akademischem Wert. Im Bild 6.4 repräsentieren die Zonen Z_1 und Z_5 die Parameterbereiche, in denen das statische Kriterium die Grenzen der Stabilität beschreibt. In den anderen Zonen kann nur das kinetische Kriterium die richtigen Grenzkurven liefern. In den Zonen Z_2 und Z_4 zeigt sich, dass bei einer Laststeigerung von null beginnend das System verschiedene stabile Bereiche hat. In der Zone Z_4 ist für positive Lasten S_M der instabile Bereich nur durch das kinetische Kriterium bestimmt. Hier wäre es möglich, dass ein instabiles System z.B. mit $k = 2.5$ und $S_M = 4$ (Bild 6.4) durch weitere Laststeigerung stabilisiert wird.

Die Grenzen der Stabilität ändern stark, wenn weitere Kräfte, in diesem Fall eine mindestens quasikonservative Last S_V , zusätzlich auf das System einwirken. In Bild 6.5 sind die Bereiche für das System II dargestellt, wenn S_V gerade die Hälfte der kritischen Last $S_{V,KR}$ ausmacht. In Bild 6.6 sind die Bereiche für den Fall mit $S_V = S_{KR}$ aufgezeichnet. Ein Vergleich der stabilen Bereiche zwischen den Lastkonfigurationen der Bilder 6.4, 6.5 und 6.6 zeigt, dass mit zunehmender Lastintensität S_V der stabile Bereich 4I des Systems immer kleiner wird. Trotzdem aber das System des Bildes 6.6 bereits durch die kritische Last $S_{V,KR}$ belastet ist, sind noch stabile Bereiche vorhanden. Um zu diesen stabilen Bereichen zu gelangen, müssen mit einer bei null beginnenden Laststeigerung vorerst instabile Bereiche durchlaufen werden.

Wir können die Last P_V auch als Lastmodell des Eigengewichtes klassieren. Aus den Bildern 6.4, 6.5 und 6.6 ergibt sich dann der Einfluss des Eigengewichtes auf das Stabilitätsverhalten des sonst nur mit S_M belasteten Systems. Eine bessere Uebersicht ergibt sich aus Bild 6.7. Hier sind die stabilen Bereiche

Bild 6.7: STABILE BEREICHE SYSTEM II
MIT FESTEM WINKEL $\alpha = 2q_2$
OHNE DÄMPFUNG

des Systems II für den konstanten Winkelparameter $k = 2$ aufgetragen. S_V lässt sich wieder als Eigengewicht interpretieren. Dann zeigt Bild 6.7 direkt den Einfluss des Eigengewichtes auf die Grösse der kritischen Last $S_{M,KR}$ in Abhängigkeit der vertikalen Last S_V . Der zum stabilen Bereich gehörende Zwickel bei Punkt M in Bild 6.7 zeigt, dass es trotz $P_V > P_{V,KR}$ für bestimmte Lasten S_M stabile Bereiche gibt. Um aber einen solchen Belastungszustand zu erreichen, muss das System zusätzlich gehalten werden, wenigstens solange als die Last S_M noch nicht aufgebracht ist. Damit verliert aber dieser Teil des stabilen Bereichs im allgemeinen seine praktische Bedeutung.

In Bild 6.8 sind die stabilen Bereiche des Systems III dargestellt. Die Grenzen der Stabilität sind durch das statische Kriterium definiert. Die Bereiche der komplexen Wurzeln sind deshalb nicht mehr vorhanden. Auf Grund des Lastmodells des Bildes 6.2 hätte man auf einen nichtkonservativen Ursprung geschlossen. Die mathematische Formulierung führte auf eine symmetrische Matrix für diese Last. Das linearisierte System wird sich deshalb wie ein konservatives System verhalten. Würde man den Ursprung des Lastmodells kennen, könnte man von allem Anfang an entscheiden, ob es sich um ein konservatives oder quasikonservatives Lastmodell handelt. In Bild 6.9 ist für P_N ein Lastmodell dargestellt, das linearisiert dem Lastmodell des Bildes 6.2 für P_N entspricht. Das Lastmodell des Bildes 6.9 ist konservativ. Das statische Kriterium genügt, um das Stabilitätsverhalten des Systems in diesem Fall umfassend zu beschreiben. Die mathematische Formulierung eines Lastmodells lässt eben die Herkunft der Last nicht erkennen. Das Bild des Lastmodells, wie es Bild 6.9 darstellt, ist jene notwendige Ergänzung, die es zur Beurteilung des mathematischen Lastmodells braucht. Für die Last P_V können wir uns ein Lastbild vorstellen, das demjenigen des Bildes 6.9 entspricht. Dabei muss einfach n eine praktisch unendlich grosse Zahl sein. Für $n = \infty$ ergibt sich

Bild 6.8: STABILE BEREICHE SYSTEM III
OHNE DÄMPFUNG

für die kritische Last in Bild 6.8 $S_{N,KR} = 1$. Er entspricht dem Wert $S_{V,KR} = 1$ des Bildes 6.3. Für das Lastmodell P_T könnte man sich die Rückstosskraft eines mit dem Stab fest verbundenen Aggregates vorstellen. Diese Schubkraft ist dann auch die Quelle, aus der das System im kinetisch instabilen Bereich die Energie für die aufschaukelnden Bewegungen herholt. Für die linearen Systeme gelingt es nun, auch für das allgemeine Lastmodell des Bildes 6.2 ein Bild zu entwerfen. Es kann nämlich jede dieser Lasten aus zwei Komponenten zusammengesetzt werden, die den Lastbildern der Lasten P_T und P_N entsprechen.

Bild 6.9 : KONSERVATIVES LASTMODELL FÜR P_N

6.3 Einfluss der Dämpfung

In stationären linearen Systemen muss für die Beurteilung der Stabilität die Dämpfung dann mitberücksichtigt werden, wenn zirkulatorische Lastmodelle vorhanden sind. In Bild 6.10 ist das System des Bildes 6.3 dargestellt, hier allerdings unter der Annahme, dass der Dämpfungseinfluss durch $D_1 = \beta = 1$ charakterisiert sei. Die Dämpfung hat hier einen stabilisierenden Einfluss in Bezug auf die Grenzen der stabilen Bereiche des idealen Systems. In Bild 6.11 sind die Grenzen des Systems I mit anderen Annahmen für die Dämpfung dargestellt. In den Bereichen α_1 , α_2 und α_3 wird das System gegenüber dem gedämpften System des Bildes 6.10 überall destabilisiert. Wenn wir das System des Bildes 6.11 mit dem idealen System des Bildes 6.3 vergleichen, hat die Dämpfung im Bereich α_1 und α_3 einen destabilisierenden, im Bereich α_2 einen stabilisierenden Einfluss. Ob die Dämpfung auf ein System stabilisierend oder destabilisierend wirkt, hängt deshalb auch von der gegebenen Lastkonfiguration ab.

Im Bild 6.12 ist ein Grenzfall für das System I in Bezug auf die Grösse der Dämpfung dargestellt. Die gleich grossen, aber sehr kleinen Dämpfungskoeffizienten D_1 und D_2 führen auf eine Grenze der stabilen Bereiche, die unabhängig von deren Grösse wird. Der Einfluss der Dämpfung ist in diesem Fall nur noch von der Grösse des Dämpfungsverhältnisses abhängig. Die möglichen Extremfälle sind in Bild 6.13 dargestellt. Im Fall ① nehmen wir an, dass ausser den Koeffizienten D_1 und D_2 auch das Dämpfungsverhältnis β sehr klein sei. Dann muss D_2 praktisch gleich null sein und D_1 eine sehr kleine Grösse. Im Fall ② muss D_1 praktisch null sein und D_2 eine sehr kleine Grösse. In beiden Extremfällen ist die Grenze der Stabilität durch Geraden gegeben. Vergleichen wir diese Resultate mit dem idealen System 6.3, so sieht man, wie stark der Einfluss auch einer kleinen Dämpfung sein kann.

Wir sind davon ausgegangen, dass die Dämpfung in unseren Systemen linear von den Geschwindigkeiten abhängen. In Wirklichkeit wird dieser Zusammenhang viel komplizierter sein. Da die Grenzen der Stabilität im kinetischen Sinne bei Systemen mit zirkulatorischen Lastmodellen stark von den Annahmen über die Dämpfung des Systems abhängen, muss man sich in jedem Fall fragen, in welchen Grenzen sich diese Annahmen bewegen können.

Bild 6.10: STABILE BEREICHE DES GEDÄMPFTEN SYSTEM I

Bild 6.11: STABILE BEREICHE DES GEDÄMPFTEN SYSTEMS I

Bild 6.12 : STABILE BEREICHE DES SYSTEMS I BEI KLEINER DÄMPFUNG

Bild 6.13: STABILE BEREICHE DES SYSTEMS I: GRENZFÄLLE
DER DÄMPFUNG

6.4 Schranken für die kritischen Lasten

Im Abschnitt 5.1 haben wir die zwei Bedingungen (5.6) und (5.9) hergeleitet, um damit auf einfache Weise für ein bestimmtes System eine untere Schranke für die kritische Last angeben zu können. Wir wollen den Fall des Bildes 6.10 behandeln. Es geht also vorerst darum, aus den massgebenden bekannten Matrizen deren extremen Eigenwerte in Funktion der Lasten S_V und S_T darzustellen. Diese extremen Eigenwerte ergeben in die Bedingung (5.6) eingesetzt eine Beziehung, die gemäss Satz 14 eine untere Schranke für die kritischen Lasten dieses Systems darstellt. Die Grenzkurve des Bildes 6.14 wollen wir mit der effektiven Grenze der stabilen Bereiche des Bildes 6.10 vergleichen. Für den weissen Bereich in 6.14 können wir festhalten, dass das System hier sicher stabil ist. In Bild 6.14 sind auch die Grenzkurven des Bildes 6.10 eingetragen. Je kleiner der doppelt schraffierte Bereich in einem spezifischen Fall ist, desto näher liegen die Näherungen für die kritischen Lasten an der richtigen Lösung. Der sicher instabile Bereich ist durch die einfach schraffierte Fläche markiert. Der Aufwand für die Berechnung dieser Näherungen ist für Systeme mit grossen Matrizen erheblich, so dass es auf der Hand liegt, für die extremen Eigenwerte einfache Näherungswerte zu wählen, die auf der sicheren Seite liegen. So führt (5.9) im gegebenen Fall auf die Näherung des Stabilitätsgebietes des Bildes 6.15, das natürlich innerhalb von jenem des Bildes 6.14 liegt.

Bild 6.14 : NACH (5.6) ANGENÄHERTE STABILITÄTSGRENZE
FÜR SYSTEM I

Bild 6.15: NACH (5.9) ANGENÄHERTE STABILITÄTSGRENZE
FÜR SYSTEM I

6.5 Weitere Einflüsse auf die Grenze der stabilen Bereiche

Wir sind bisher in unseren Diskussionen immer von einem wohldefinierten System ausgegangen. Dabei haben wir angenommen, dass wie die Geometrie des Systems auch die Massenverteilung sowie die Steifigkeit in der Form der Federkonstanten bekannt seien. Es handelt sich dabei natürlich um Annahmen in der Form des Stabmodelles.

In Bild 6.16 ist das System I dargestellt; dabei ist die Grenze der stabilen Bereiche für zwei verschiedene Massenverteilungen bei sonst gleichen Parametern aufgetragen. Wir betrachten nun dieses System mit $\mu = 5$ und den konstanten Belastungen, die dem Punkt Y entsprechen. Er liegt im stabilen Bereich des Systems. Wenn wir uns nun vorstellen, dass diese Massenverteilung μ langsam auf den Wert $\mu = 1$ absinkt, ohne dass dabei die Lasten S_T und S_V geändert würden, dann läge der Lastpunkt Y im instabilen Bereich des Systems mit $\mu = 1$. Man kann deshalb sagen, dass durch Änderung der Massenverteilung sich die Grenze der stabilen Bereiche eines Systems verschieben kann. Der Einfluss beschränkt sich natürlich auf die kinetische Grenze.

Aehnliche Überlegungen lassen sich auch über die Annahmen in Bezug auf die Federsteifigkeiten g und deren Verhältnis $\mathfrak{g}$ machen. In Bild 6.17 ist mit $\mathfrak{g} = 1$ das System des Bildes 6.10 nochmals aufgeführt. Wenn wir nun in diesem System die Steifigkeit g_2 so ändern, dass $\mathfrak{g} = 3$ wird, dann verschieben sich die Grenzen der stabilen Bereiche. Der für das System mit $\mathfrak{g} = 1$ instabile Lastpunkt Z des Bildes 6.17 liegt dann im entsprechenden System mit $\mathfrak{g} = 3$ im stabilen Lastbereich.

Diese beiden Beispiele zeigen anschaulich, dass bei der Definition des Stabmodells eines Systems auch auf das exakte Erfassen der Steifigkeit und der Massenverteilung Rücksicht genommen werden muss. Diese beiden Größen haben auf die Grenze der stabilen Bereiche einen direkten Einfluss.

Bild 6.16 : EINFLUSS DER MASSENVERTEILUNG IM SYSTEM I

Bild 6.17: EINFLUSS DER FEDERSTEIFIGKEIT IM SYSTEM I

7. SCHLUSSBEMERKUNGEN

Wir können technische Systeme in zwei grosse Gruppen einteilen:

- in Systeme, bei denen die Umweltbedingungen für die ganze Lebensdauer bekannt sind, oder gar durch uns im wesentlichen festgelegt werden,
- in Systeme, bei denen wir auf die Umweltbedingungen nur einen kleinen Einfluss ausüben und zudem diese Bedingungen während der Lebensdauer ändern können.

In diese zweite Gruppe von Systemen gehören im allgemeinen Bauwerke. Hier ist man gezwungen, die zukünftigen Einflüsse auf ein Tragwerk auf Grund von Erfahrungswerten anzunehmen. Beim Entwurf eines Tragwerkes stehen dann meistens drei Aspekte im Vordergrund:

- das Konstruieren und Bemessen unter Berücksichtigung einer vernünftigen Sicherheit
- die Wirtschaftlichkeit und Zweckmässigkeit unter Berücksichtigung der Lebensdauer
- das Ueberprüfen der Annahmen unter Berücksichtigung der Lebensdauer

Es geht bei den beiden ersten Aspekten vor allem um quantitative Aussagen, beim letztgenannten Problem vorwiegend um qualitative Ueberlegungen. Man möchte mindestens wissen, wie sich ein Tragwerk qualitativ oder näherungsweise quantitativ unter geänderten Annahmen verhalten würde. Die vorliegende Arbeit soll ein Beitrag zum Stabilitätsverhalten von Tragwerken in diesem Sinne sein.

Wir wissen, dass die Grenze der Stabilität für lineare, stationäre Systeme dann mit dem einfachen statischen Stabilitätskriterium ermittelt werden kann, wenn dem System keine Energie über zirkulatorische oder dissipative Kräfte zugeführt werden kann. Wir haben gezeigt, dass dieses Kriterium für die Beurteilung auch dann noch genügt, wenn in gedämpften, linearen, stationären Systemen nur kleine zirkulatorische Kräfte im Vergleich zu den anderen Kräften mitwirken. Sind neben den zirkulatorischen Kräften auch die Dämpfungskräfte sehr klein, dann muss das kinetische Kriterium, wie im Fall grosser zirkulatorischer Kräfte, herangezogen werden. Für diese Fälle wurden hier einfache Näherungen entwickelt, die für ein bestimmtes System untere Schranken darstellen. Die Grenzen der stabilen Bereiche hängen aber in diesen Systemen nicht nur von den Lastmodellen selbst, sondern auch von den Annahmen über die Verteilung der Massen und der Festigkeit ab.

Tragwerke müssen primär unter den ständig wirkenden konservativen Schwerelasten eine stabile Ruhelage einnehmen. Weitere Einwirkungen auf das Tragwerk können ständiger oder auch nichtständiger Natur sein. Bei der Beurteilung der Stabilität dieser Systeme geht es eigentlich darum zu entscheiden, ob unter bestimmten Bedingungen die Ruhelage des Systems instabil werden könnte.

ZUSAMMENFASSUNG

Die Beurteilung der Stabilität von Tragwerken wird auf das Problem der Stabilität der Gleichgewichtslage eines stationären Systems mit n Freiheitsgraden überführt. In einem ersten Schritt werden Arbeitsmodelle und die damit zusammenhängenden Arbeit-Energie-Beziehungen dargestellt. Eine Umformung der massgebenden charakteristischen Determinante für diesen Problemkreis, sowie eine genaue Fallunterscheidung bei mehrfach auftretenden Wurzeln, gestattet die Herleitung eines allgemeinen Schemas für die qualitative Beurteilung der Stabilität linearer diskreter Systeme. In einem zweiten Schritt werden systematisch alle möglichen Fälle stationärer Systeme behandelt. Neben neuen ergänzenden Aussagen, findet man eine ganze Reihe bekannter Sätze auf einfachste Art bestätigt. Das Hauptergebnis dieses Schrittes ist ein Satz, in dem die Grenze der hinreichenden Anwendbarkeit des statischen Kriteriums bei der Beurteilung der Stabilität nichtkonservativer Systeme definiert wird. In einem dritten Schritt werden diejenigen Fälle behandelt, bei denen nur das kinetische Kriterium hinreichend ist. Es werden hier zwei Bedingungen hergeleitet, die untere Schranken für die kritische Last eines Systems ergeben. Die erste Bedingung beruht auf einer algebraischen Beziehung, die nur noch die extremen Eigenwerte der massgebenden Matrizen enthält. Die Bestimmung dieser Eigenwerte erfordert bei hoher Anzahl Freiheitsgrade in einem System immer noch einen grossen Rechenaufwand. Mittels der Gerschgorinschen Kreise lässt sich diese Bedingung auf eine einfachere zweite Bedingung überführen, die ebenfalls eine untere Schranke für die kritische Last darstellt. Die Bedeutung dieser Bedingungen liegt darin, dass auf einfache Art für eine bestimmte Lastkonfiguration eine untere Schranke für die kritische Last des Systems angegeben werden kann und zudem der Einfluss einzelner

Lasten auf diese Grenze leicht erkennbar ist. An einem einfachen Beispiel wird abschliessend der Problemkreis eingehend dargestellt.

Das praktische Ergebnis dieser Arbeit liegt darin, dass für die Beurteilung der Stabilität eines Tragwerkes das statische Kriterium dann nicht genügen kann, wenn Kräfte vorhanden sind, die dem System Energie zuführen können. Wenn diese Kräfte klein sind im Vergleich mit den konservativen Kräften, dann ist die kinetische Stabilität nur dann von Bedeutung, wenn das System nahezu dämpfungsfrei ist.

RESUME

L'analyse de la stabilité d'ouvrages est ramenée au problème de la stabilité de la position d'équilibre d'un système stationnaire à n degrés de liberté. Dans la première partie sont présentés des modèles de travail ainsi que les relations travail-énergie correspondantes. Dans ce genre de problème, une transformation des déterminants caractéristiques de même qu'une analyse précise des cas correspondant aux racines multiples permet d'établir un schéma général pour l'analyse qualitative de la stabilité de systèmes linéaires discrets. Dans la deuxième partie sont traités systématiquement tous les cas de systèmes stationnaires. En plus d'énoncés nouveaux et complémentaires, toute une série de théorèmes connus sont démontrés de manière simple. Le résultat principal de cette deuxième partie est un nouveau théorème qui permet de définir la limite d'application suffisante du critère statique dans l'analyse de la stabilité de systèmes ne dérivant pas d'un potentiel. Dans la troisième partie sont traités les cas où le critère cinétique est nécessaire. Dans ce but sont démontrés deux conditions qui fournissent des bornes inférieures pour la charge critique. La première condition repose sur une relation algébrique qui ne contient plus que les valeurs propres extrêmes des matrices déterminantes. La détermination de ces valeurs propres, pour le cas d'un grand nombre de degrés de liberté, nécessite toujours un calcul long et laborieux. A l'aide des cercles de Gerschgorin, cette première condition se ramène à une deuxième, plus simple, qui représente également une borne inférieure pour la charge critique. Ces deux conditions montrent qu'une borne inférieure peut être indiquée aisément pour une configuration de charge définie. En outre, l'influence de chacune des charges est facilement reconnaissable sur cette limite. Un exemple simple illustre le développement présenté d'une manière détaillée.

Le résultat pratique de ce travail est le suivant: dans l'analyse de la stabilité d'un ouvrage le critère statique est insuffisant si, par l'intermédiaire de quelque forces, il y a apport d'énergie au système. Dans le cas où ces forces sont petites en comparaison des forces conservatives, la stabilité cinétique ne sera déterminante que si le système est à peu près sans amortissement.

SUMMARY

The general stability problem of structures is treated as the stability of equilibrium with n degrees of freedom. In a first step the physical models are discussed together with the related work-energy-expressions. A transformation of the governing characteristic determinant and a complete discussion in the case of multiple roots allow the formulation of a general scheme for a qualitative analysis of the stability of linear discrete systems. In a second step stationary systems with all the special cases are investigated. Beside some new supplementary statements a set of known theorems is confirmed in a simple way. As a main result a new theorem is derived, stating the adequate use of the static stability criterion in nonconservative systems. In a third step the cases are treated, for which the kinetic criterion is necessary. Two different expressions are derived, which both lead to lower limits for the critical load of the system. The first equation is based on an algebraic relationship between the extreme eigenvalues of the relevant matrices. If the system under investigation has many degrees of freedom, the computational work is considerable. Therefore, a second equation has been developed making use of the "Gerschgorin Circles". It represents also a simple expression for the lower limit of a critical load. Hence to a given loading configuration a set of two limiting values can be calculated. In addition, the two equations indicate the influence of an individual load on the limiting value. As an illustration a simple example of a nonconservative system is finally discussed.

The practical findings in this paper can be summarized as follows: "The statical criterion for the investigation of the stability of structures may be insufficient when some

forces exist which feed energy into the system. If these forces are small in comparison with the conservative forces, the kinetic stability analysis is only necessary, if the system is almost free of damping".

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] EULER:
siehe Stüssi F.:
"200 Jahre Euler'sche Knickformel".
Schweiz. Bauzeitung Bd. 123, 1944

- [2] SHANLEY:
"The Longitudinal Bending Paradox".
J. aeronaut. Sci. 13, 678 ff, 1946

- [3] ZIEGLER:
"On the concept of elastic Stability"
Advances in Applied Mechanics 4, 351 ff, 1956

- [4] BECK:
"Knickung gerader Stäbe durch Druck und
konservative Torsion".
Ing. Archiv, Vol. 23, Nr. 4, 1955

- [5] TROESCH:
"Stabilitätsprobleme bei tordierten Stäben und Wellen".
Ing. Archiv, Vol. 20, 258 ff, 1952

- [6] WEHRLI:
"Kritische Drehzahlen von Wellen mit kurzen Lagern
unter konservativer Torsion".
Diss. ETH 1956

- [7] METTLER:
"Biegeschwingungen eines Stabes unter pulsierender
Axiallast".
Mitt. Forsch. Anst. GHH-Konzern 1940

- [8] BOLOTIN:
"Kinetische Stabilität elastischer Systeme".
Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1961

- [9] MALKIN:
"Theorie der Stabilität einer Bewegung".
Verlag Oldenburg München 1959

- [10] MAGNUS:
"Der Einfluss verschiedener Kräftearten auf die
Stabilität linearer Systeme".
ZAMP Vol. 21, 1970

- [11] FORBAT:
"Analytische Mechanik der Schwingungen".
Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1966

- [12] ZURMUEHL:
"Matrizen".
4. Auflage, Springer Verlag

- [13] FLUGGE:
"Handbook of Engineering Mechanics".
Mc Graw-Hill, 1962, 57-19 ff

- [14] ZIEGLER:
"Principles of Structural Stability".
Blaisdell Publishing Company, 1968

- [15] HERRMANN:
"Stability of the Equilibrium of Elastic Systems
Subjected to Nonconservative Forces".
Appl. Mech. Rev. 20, 1967

- [16] LEIPHOLZ:
"Stabilitätstheorie".
Teubner Verlag Stuttgart, 1968