Beitrag zur Berechnung von Flächentragwerken nach der Methode der Finiten Elemente

Working Paper**Author(s):**

Walder, Ulrich

Publication date:

1977

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000747259>

Rights / license:

In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

Originally published in:

Bericht / Institut für Baustatik und Konstruktion ETH Zürich 77

Baier

**Beitrag zur Berechnung von
Flächentragwerken nach der
Methode der Finiten Elemente**

Ulrich Walder

November 1977
Bericht Nr. 77

**Beitrag zur Berechnung von Flächentragwerken
nach der Methode der Finiten Elemente**

von

Dr. sc. techn. Ulrich Walder

Institut für Baustatik und Konstruktion
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

Zürich
November 1977

VORWORT

Arbeiten über elastische Berechnungen mit finiten Elementen sind heute so zahlreich, dass eine weitere Veröffentlichung geradezu eine Rechtfertigung verlangt.

Die vorliegende Veröffentlichung wurde von Herrn U. Walder als Dissertation ausgearbeitet. Sie behandelt verschiedene theoretische Probleme, welche sich bei der Entwicklung des praxisorientierten Schalenprogrammes FLASH (Finite Element Analysis of SHells) stellten. Im besonderen galt es, kombinierbare Scheiben- und Plattenelemente zu entwickeln, welche sich zu Schalenelementen zusammensetzen lassen. Ferner wurden spezielle Elemente zur vereinfachten Berechnung rippenförmiger Aussteifungen an Platten und Schalen studiert.

Die praktische Bedeutung dieser Arbeit wird durch die Verwendung des Programmes FLASH zur Berechnung von Flächentragwerken sowohl in der Schweiz als auch in verschiedenen andern Ländern Europas angezeigt. Für ein Hochschulinstitut ist es immer eine grosse Genugtuung festzustellen, dass seine Forschungsarbeiten auch praktische Anwendung finden.

Zürich, November 1977

Prof. Dr. B. Thürlimann

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Vorwort	
1. EINLEITUNG	1
1.1 Nomenklatur	2
2. VARIATIONSPRINZIPIEN DER ELASTOSTATIK	8
2.1 Klassische Variationsprinzipien	8
2.1.1 Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie	8
2.1.2 Prinzip vom Minimum der komplementären Energie	10
2.2 Erweiterte Variationsprinzipien	11
3. FINITES ELEMENTMODELL	14
3.1 Das standard-hybride Spannungsmodell	16
3.2 Hybride dreieckige und viereckige Scheibenelemente	21
3.2.1 Anzahl Verschiebungsfreiheitsgrade	21
3.2.2 Ansatzfunktionen	23
3.2.3 Eigenschaften der Scheibenelemente im Programm FLASH	26
3.2.3.1 Die Elemente SV3LL und SD3LL	34
3.2.3.2 Die Elemente SV3LQ und SD3LQ	39
3.2.3.3 Die Elemente SV3KL und SD3KL	41
3.2.3.4 Die Elemente SV3KQ und SD3KQ	45
3.2.4 Vorgeschriebene Randspannungen	47
3.2.5 Anwendungsbeispiel	49
3.3 Hybride dreieckige und viereckige Plattenelemente	51
3.3.1 Ansatzfunktionen	51
3.3.2 Eigenschaften der FLASH-Plattenelemente	55
3.3.3 Vorgeschriebene Randspannungen	63
3.4 Hybride dreieckige und viereckige elastisch gebettete Plattenelemente	66
3.4.1 Erweitertes Hellinger-Reissner-Prinzip für die elastische Bettung	66
3.4.2 Ansatzfunktionen und Stützendruckberechnung	67
3.4.3 Eigenschaften der Elemente und numerische Beispiele	69
3.4.4 Linienlagerung mit elastisch gestützten Elementen	79
4. DIE BERECHNUNG VON RAEUMLICHEN FLAECHENTRAGWERKEN MIT EBENEN HYBRIDEN ELEMENTEN	83
4.1 Die dreieckigen und viereckigen Schalenelemente von FLASH	83

	Seite
5. EINE VEREINFACHTE BEHANDLUNG RIPPENFOERMIGER AUSSTEIFUNGEN AN PLATTEN UND SCHALEN	92
5.1 Die Berechnung von Rippenplatten als ebenes Problem	93
5.2 Schalenaussteifungen	99
6. SCHLUSSBEMERKUNG	101
ANHANG: DAS COMPUTERPROGRAMM FLASH	102
1. Programmaufbau und Datenorganisation	102
2. Numerische Besonderheiten	104
3. Problemformulierung und Datenaufbereitung	105
4. Resultatausgabe	107
5. Liste der Standardelemente in FLASH	108
ZUSAMMENFASSUNG	109
SUMMARY	111
LITERATURVERZEICHNIS	113

1. EINLEITUNG

Parallel zur Entwicklung digitaler Rechenautomaten hat sich in den letzten Jahren mit der Einführung computergerechter Berechnungsmethoden auch in der Baustatik eine rasche Wandlung vollzogen. Dem immer mühsamer und aufwendiger werdenden Suchen nach analytischen Lösungen für ausgefallene Spezialfälle der Tragwerksberechnung hat sich die Frage nach dem Erfassen des prinzipiellen Verhaltens im Kleinen und nach der Möglichkeit einer daraus folgenden approximativen Berechnung beliebiger Tragwerke entgegengestellt.

Die Einführung der dieser Betrachtungsweise entsprechenden Methode der finiten Elemente hat sich als derart effizient und befriedigend erwiesen, dass man sie heute mit der modernen Computerstatik schlechthin identifizieren darf. Bereits vor, insbesondere jedoch nach der sauberen theoretischen Verankerung der zuerst intuitiv, ingenieurmässig gefundenen Methode, entstand eine Vielzahl von darauf basierenden Computerprogrammen. Die zumeist an Hochschulen entwickelten Finite-Element-Programme blieben aber in ihrer Anwendung sehr oft nur Spezialisten vorbehalten, sei es weil es sich um unübersichtbare Mammutprogramme oder mehr der Forschung dienende Spezialprogramme handelte.

Am Institut für Baustatik und Konstruktion der ETH Zürich wurde deshalb im Jahre 1973 beschlossen, ein Finite-Element-Programm zur linear-elastischen Berechnung von Flächentragwerken zu entwickeln, welches von Ingenieuren aus der Praxis wie auch von Studenten im Lehrbetrieb als alltägliches Hilfsmittel selbständig verwendet werden kann.

In dieser Arbeit werden einige theoretische Probleme behandelt, welche sich im Zusammenhang mit der Anwendung der Methode der finiten Elemente bei der Verwirklichung dieses Projektes ergaben. Auf die mehr computerorientierten Fragen (Programmaufbau, Eingabesprache, Rechenalgorithmen, etc.) wird nur sehr kurz eingegangen.

Nach der Festsetzung der Nomenklatur folgt im nächsten Kapitel als Grundlage der weiteren Untersuchungen eine Zusammenstellung der klassischen und erweiterten Variationsprinzipien der Elastostatik.

Im Kapitel 3 wird das im Anwendungsprogramm FLASH (Finite Element Analysis of SHells) verwendete finite Elementmodell vorgestellt. Es handelt sich um ein hybrides Spannungsmodell. Aufgrund der schlechten bis heute erreichten Resultate wird zuerst eine neue Elementfamilie von 8 Scheibenelementen mit drei Verschiebungsfreiheitsgraden pro Knoten vorgestellt und diskutiert.

Die erhaltenen Resultate werden mit bekannten analytischen und approximativen Lösungen verglichen. In einem weiteren Abschnitt werden die in FLASH enthaltenen Plattenelemente betrachtet. Für das Problem der elastisch gebetteten Flächentragwerke wird eine neue Lösung angegeben, und die darauf basierenden elastisch gestützten hybriden Plattenelemente werden anhand einiger Beispiele mit komplizierten Lagerungsbedingungen getestet.

Im Kapitel 4 wird das Verhalten der aus je einem Scheiben- und Plattenelement zusammengesetzten Schalenelemente erläutert. Im Kapitel 5 folgt eine Diskussion verschiedener Modelle zur Behandlung rippenförmiger Aussteifungen an Platten und Schalen. Im Anhang wird das Anwendungsprogramm FLASH kurz näher vorgestellt.

1.1 Nomenklatur

Die Darstellung der mathematischen Beziehungen erfolgt in dieser Arbeit in der in [A1] eingeführten Kurzschreibweise. Wie die Matrix- oder Indexschreibweise gilt sie für beliebige Tragwerkstypen (Scheiben, Platten, dreidimensionale Probleme), hat aber den Vorteil der grösseren Uebersichtlichkeit.

Da vor allem Scheiben und Platten behandelt werden, sind nachstehend die Feld-, Rand- und Kontinuitätsgleichungen der linearen Elastizitätstheorie für diese Tragwerkstypen kurz zusammengestellt. Alle Beziehungen gelten für ein kartesisches Koordinatensystem.

Voraussetzungen und Problemstellung:

Bild 1.1: Allgemeine Problemstellung

Gegeben: Massenkräfte g } in V
 initiale Dehnungen ϵ^0 }

 vorgeschriebene Randverschiebungen $\bar{v}$ auf R_v
 vorgeschriebene Randspannungen $\bar{s}$ auf R_s

Gesucht: Verschiebungsfeld v
 Dehnungsfeld ϵ
 Spannungsfeld σ

Kinematische Annahmen:

- Die Verschiebungen werden als klein vorausgesetzt, d.h. das Gleichgewicht kann am unverformten System formuliert werden.
- Querschnittssegmente senkrecht zur Scheiben- oder Plattenmittelebene bleiben nach der Verformung eben und senkrecht zur Mittelebene. Aus dem Verschiebungszustand der Mittelfläche lassen sich damit alle Verschiebungen des Körpers bestimmen.
- Verschiebungsfeld muss überall eindeutig definiert und stetig sein.

Statische Annahmen:

- Scheiben sind nur in ihrer Ebene, Platten nur senkrecht dazu belastet
- Spannungs- und Dehnungsfeld müssen nicht stetig verlaufen.

Unter der Voraussetzung der getroffenen Annahmen gelten die folgenden Grundgleichungen der Elastizitätstheorie:

$$(f_{,x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \text{ usw.})$$

a) Gleichgewicht

Scheiben: mit $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

Platten: mit $m_{xy} = m_{yx}$

(verallgemeinerte Spannungen)

$$\nabla \sigma + g = 0$$

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + g_x = 0$$

$$\sigma_{y,y} + \tau_{xy,x} + g_y = 0$$

$$q_{x,x} + q_{y,y} + g_z = 0 \quad \text{oder}$$

$$m_{x,xx} + 2m_{xy,xy} + m_{y,yy} + g_z = 0$$

Bild 1.2: Spannungskomponenten der Scheibe und verallgemeinerte Spannungen der Platte

b) Kinematik

Scheiben:

$$\epsilon = \Delta v$$

$$\epsilon_x = u_{,x}$$

$$\epsilon_y = v_{,y}$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x}$$

Platten:

$$\epsilon_x = u_{,x} = -z \cdot w_{,xx}$$

$$\epsilon_y = v_{,y} = -z \cdot w_{,yy}$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} = -2z \cdot w_{,xy}$$

$$\epsilon_x = \frac{dx' - dx}{dx} \approx u_{,x}$$

$$u = -z \cdot w_{,x} ; \quad \epsilon_x = u_{,x}$$

Bild 1.3: Verschiebungen und Dehnungen bei Scheiben und Platten

c) Hooke'sches Gesetz

$$\sigma = D \cdot (\epsilon - \epsilon^0)$$

$$\epsilon = D^{-1} \cdot \sigma + \epsilon^0$$

D = Elastizitätsmatrix

isotrope Scheiben: (ebener Spannungszustand)

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$$

$$\epsilon = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}\}$$

isotrope Platten: (verallgemeinerte Dehnungen und Spannungen)

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{12}{Et^3} & -\frac{\nu}{Et^3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{Et^3} & \frac{12}{Et^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{Gt^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Gat} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Gat} \end{bmatrix}$$

$\epsilon = \{\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \gamma_{x, id}, \gamma_{y, id}\}$
 $\sigma = \{m_x, m_y, m_{xy}, q_x, q_y\}$
 α = Schubverformungsparameter
 $(\alpha = 5/6 \text{ bei Rechteck})$

wobei:

$$\kappa_x = -w_{,xx} ; \quad \kappa_y = -w_{,yy} ; \quad \kappa_{xy} = -2w_{,xy}$$

$$m_x = \int_{-t/2}^{t/2} z \cdot \sigma_x \cdot dz ; \quad m_y = \int_{-t/2}^{t/2} z \cdot \sigma_y \cdot dz ; \quad m_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} z \cdot \tau_{xy} \cdot dz$$

$$q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} \cdot dz ; \quad q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} \cdot dz$$

d) Randbedingungen

$$v = \bar{v} ; \quad s = \bar{s}$$

kinematisch:

Scheiben: $u = \bar{u}$

$$v = \bar{v}$$

Platten: $w = \bar{w}$

$$w_{,n} = \bar{w}_{,n}$$

$n = \begin{Bmatrix} \cos\lambda \\ \cos\mu \end{Bmatrix}$ Aussenormalenvektor zum Rand R

statisch:

$s = \sigma \cdot n$

Scheiben: $s_x = \sigma_x \cdot \cos\lambda + \tau_{xy} \cdot \cos\mu = \bar{s}_x$

$s_y = \sigma_y \cdot \cos\mu + \tau_{xy} \cdot \cos\lambda = \bar{s}_y$

Platten: $m_n = \bar{m}_n$

$q_n^* = \bar{q}_n$

$q_n^* = q_n + m_{nt,t} = m_{n,n} + 2m_{nt,t}$

(Kirchhoff'sche Ersatzscherkraft)

$\bar{s}$ und $\bar{v}$ müssen entlang des Randes R eindeutig definiert sein, dürfen aber in der gleichen Richtung nicht beide zusammen vorgeschrieben werden.

e) Kontinuitätsbedingungen

Kontinuität wenn:

$v^+ = v^-$

$s^+ = s^-$

$n =$ Aussenormalenvektor auf der Plusfläche

Bild 1.4: Definition von Diskontinuitätsflächen

Bei der Approximation eines Tragwerks mit finiten Elementen, können entlang der Seiten je nach Wahl der Ansatzfunktionen Diskontinuitäten zwischen den Elementen in den Spannungen sowohl als auch in den Verschiebungen auftreten. In der gleichen Richtung zu D dürfen aber nur je entweder die Spannungen oder die Verschiebungen diskontinuierlich verlaufen.

$$\left. \begin{array}{l}
 v^+ \neq v^- \rightarrow s^+ = s^- \quad \text{auf } D_v \\
 \text{oder} \\
 s^+ \neq s^- \rightarrow v^+ = v^- \quad \text{auf } D_s
 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{falls } v \text{ und } s \text{ in die} \\ \text{gleiche Richtung weisen} \end{array}$$

$$D = D_v + D_s$$

2. VARIATIONSPRINZIPIEN DER ELASTIZITÄTSTHEORIE

Das linear-elastische Verhalten eines Körpers oder Tragwerks kann als Randwertproblem in Form von Differentialgleichungen oder Variationsgleichungen mathematisch beschrieben werden. Genaue Lösungen existieren nur für wenige Spezialfälle, in denen die Geometrie, die Belastungen und Randbedingungen des Körpers auf einfache Weise geschlossen dargestellt werden können. Für die Berechnung komplizierter Tragwerke sind Näherungslösungen entwickelt worden, von denen sich vor allem die Methode der finiten Elemente als sehr effizient erwiesen hat.

Die Formulierung der Methode der finiten Elemente geschieht meist in der Form von Variationsgleichungen und wird im weiteren auch in dieser Arbeit so dargestellt. Das Variationsverfahren ersetzt die Lösung der differentiellen Grundgleichungen durch die approximative Lösung einer entsprechenden Extremalforderung. Die partiellen Differentialgleichungen werden dadurch in ein System algebraischer Gleichungen übergeführt. Neben den direkten Variationsmethoden (Ritz, Finite Elemente) beruhen auch andere Näherungsverfahren (Galerkin, Kollokation, Differenzenmethode) auf diesem Vorgehen, das auch als Diskretisierung bezeichnet wird.

2.1 Klassische Variationsprinzipien der Elastostatik

Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie sowie das Prinzip vom Minimum der komplementären Energie, bzw. die allgemeineren Arbeitsaussagen der Prinzipien der virtuellen Verschiebungen und virtuellen Spannungen, bilden die Grundlage der direkten Variationsverfahren.

2.1.1 Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie

"Von allen kinematisch zulässigen Verschiebungszuständen sind für den tatsächlichen Zustand die inneren Spannungen und äusseren Lasten im Gleichgewicht. Er minimalisiert die potentielle Energie des Systems."

$$\pi(v) = U(v) + V(v) \quad \rightarrow \quad \text{Minimum } (\delta\pi = 0)$$

$$\pi(v) = \underbrace{\frac{1}{2} \int_V \epsilon \cdot D \cdot (\epsilon - \epsilon^0) \cdot dV}_{U(v)} \quad - \quad \underbrace{\int_V v \cdot g \cdot dV - \int_{R_s} v \cdot \bar{s} \cdot dF}_{V(v)}$$

elastisches Potential Potential der äusseren Lasten
(Formänderungsenergie)

Dabei müssen die folgenden kinematischen Bedingungen sowie das Hooke'sche Gesetz erfüllt sein:

$$v = \text{kontinuierlich in } V$$

$$v = \bar{v} \text{ auf } R_V$$

$$\epsilon = \Delta v$$

$$\sigma = D \cdot (\epsilon - \epsilon^0)$$

Führt man zu jeder Verschiebungsfunktion v benachbarte Scharen von Funktionen $v^* = v + \delta v$ ein, kommt man zur ersten Variation von v , die auch als virtuelle Verschiebung δv bezeichnet werden kann. Gehorcht v^* den gleichen kinematischen Bedingungen wie v , dann gilt für die erste Variation der wirklichen Verschiebungen:

$$\delta \epsilon = \delta \Delta v \text{ in } V$$

$$\delta v = 0 \text{ auf } R_V$$

Der Beweis, dass das Gesamtpotential ein Minimum darstellt, ergibt sich aus der zweiten Variation. Setzt man v^* in den Ausdruck für π ein, erhält man

$$\pi(v^*) = \pi(v) + \delta \pi(v) + \delta^2 \pi(v)$$

$\delta^2 \pi(v)$ erscheint nur im Anteil, den die inneren Kräfte liefern, und welcher eine quadratische Form von ϵ ist.

Da die Elastizitätsmatrix D aus physikalischen Gründen positiv definit ist, folgt

$$\delta^2 \pi(v) = \int_V \delta \epsilon \cdot D \cdot \delta \epsilon \cdot dV \geq 0$$

und mit $\delta \pi(v) = 0$

$$\pi(v^*) \geq \pi(v).$$

Das Energieprinzip

$$\delta \pi(v) = \delta \int_V \frac{1}{2} \epsilon \cdot D \cdot (\epsilon - \epsilon^0) \cdot dV - \delta \int_V v \cdot g \cdot dV - \delta \int_{R_S} v \cdot \bar{s} \cdot dF = 0$$

lässt sich allgemeiner ausdrücken

$$\delta A(v) = \int_V \delta \epsilon \cdot \sigma \cdot dV - \int_V \delta v \cdot g \cdot dV - \int_{R_S} \delta v \cdot \bar{s} \cdot dF = 0$$

und stellt so das Prinzip der virtuellen Verschiebungen dar:

"Die von den äusseren Belastungen mit virtuellen Verschiebungen geleistete Arbeit ist von gleichem Betrag wie die innere virtuelle Arbeit. Diese wird geleistet durch die Spannungen mit den virtuellen Dehnungen infolge der virtuellen Verschiebungen, wenn die Spannungen mit den äusseren Belastungen im Gleichgewicht sind."

Mit Hilfe von Integralumformungen und des Gauss'schen Satzes zur Umwandlung von Volumen- in Flächenintegrale kommt man zur Variationsgleichung:

$$\delta\pi(v) = - \int_V \delta v \cdot (\nabla\sigma + g) \cdot dV + \int_{R_s} \delta v \cdot (s - \bar{s}) \cdot dF = 0$$

Nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung ist diese Gleichung dann erfüllt, wenn die Klammerausdrücke verschwinden. Die Euler'schen Gleichungen (Klammerausdrücke) der Variationsgleichung $\delta\pi = 0$ sind Gleichgewichtsbedingungen. Daraus ist auch ersichtlich, dass das Prinzip der virtuellen Verschiebungen nur eine andere Formulierung des Gleichgewichtes und der statischen Randbedingungen darstellt.

2.1.2 Das Prinzip vom Minimum der komplementären Energie

"Von allen statisch zulässigen Spannungszuständen sind für den tatsächlichen Zustand die aus den Gleichgewichtsspannungen hergeleiteten Dehnungen kinematisch zulässig. Er minimiert die komplementäre Energie des Systems."

$$\bar{\pi}(\sigma) = \bar{U}(\sigma) + \bar{V}(\sigma) \quad \rightarrow \quad \text{Minimum } (\delta\bar{\pi} = 0)$$

$$\bar{\pi}(\sigma) = \underbrace{\frac{1}{2} \int_V \sigma(D^{-1} \cdot \sigma + \epsilon^0) \cdot dV}_{\substack{\bar{U}(\sigma) \\ \text{komplementäres elastisches Potential}}} - \underbrace{\int_{R_v} s \cdot \bar{v} \cdot dF}_{\substack{\bar{V}(\sigma) \\ \text{Arbeit von } s \text{ auf } \bar{v}}}$$

Dabei müssen die folgenden statischen Bedingungen und das Hooke'sche Gesetz erfüllt sein

$$\nabla\sigma + g = 0 \quad \text{in } V$$

$$s = \bar{s} \quad \text{auf } R_s$$

$$\epsilon = D^{-1} \cdot \sigma + \epsilon^0$$

Ein duales Vorgehen wie beim Minimumprinzip der potentiellen Energie führt mit der Variation $\delta\sigma$ der statisch zulässigen Spannungen zu

$$\delta \bar{\pi}(\sigma) = \delta \int_V \frac{1}{2} \sigma \cdot D^{-1} \cdot \sigma \cdot dV - \delta \int_{R_V} s \cdot \bar{v} \cdot dF$$

Ueber das allgemeinere Arbeitsprinzip

$$\delta \bar{A}(\sigma) = \int_V \delta \sigma \cdot \epsilon \cdot dV - \int_{R_V} \delta s \cdot \bar{v} \cdot dF = 0$$

kommt man mit Hilfe von Integraltransformationen und unter Berücksichtigung der statischen Bedingungen

$$\delta \nabla \sigma = 0 \quad \text{in } V$$

$$\delta s = 0 \quad \text{auf } R$$

zur Variationsgleichung:

$$\delta \bar{\pi}(\sigma) = \int_V \delta \sigma (\epsilon - \Delta v) \cdot dV - \int_{R_V} \delta s (v - \bar{v}) \cdot dF = 0$$

Die Euler'schen Gleichungen der Variationsgleichung $\delta \bar{\pi} = 0$ stellen kinematische Gleichungen dar, und die natürlichen Randbedingungen sind die geometrischen Randbedingungen.

2.2 Erweiterte Variationsprinzipien

Ausgehend von den klassischen Energieprinzipien sind allgemeinere Variationsprinzipien formuliert worden.

Ein Prinzip, das als Unbekannte die drei Felder σ, v, ϵ einführt, ist das Washizu-Prinzip. Die Variationsgleichung enthält als Euler'sche Gleichungen alle Feldgleichungen und Randbedingungen der linearen Elastizitätstheorie.

$$\begin{aligned} \delta I(v, \sigma, \epsilon) = & \int_V [\delta \epsilon (D \cdot (\epsilon - \epsilon^0) - \sigma) + \delta \sigma (\epsilon - \Delta v) - \delta v (\nabla \sigma + g)] \cdot dV \\ & + \int_R [\delta v (s - \bar{s}) - \delta s (v - \bar{v})] \cdot dF = 0 \end{aligned}$$

Geht man nun einen Schritt weiter und setzt die Kontinuität von v und s auf bestimmten Kontaktflächen D in V nicht mehr a priori voraus, ergeben sich zwei zusätzliche Kontinuitätsbedingungen

$$\begin{aligned} v^+ &= v^- & (\text{kinematisch}) & \text{ auf } D_v \\ s^+ &= s^- & (\text{statisch}) & \text{ auf } D_s \end{aligned}$$

für welche ein Variationsprinzip zu suchen ist, das diese als Euler'sche Gleichungen enthält.

Das erweiterte Washizu-Prinzip kann dann folgendermassen geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\delta I(v, \sigma, \epsilon) = & \int_V [\delta \epsilon (D \cdot (\epsilon - \epsilon^0) - \sigma) + \delta \sigma (\epsilon - \Delta v) - \delta v (\nabla \sigma + g)] \cdot dV \\ & + \int_R [\delta v (s - \bar{s}) - \delta s (v - \bar{v})] \cdot dF \\ & + \int_D [\delta v (s^+ - s^-) - \delta s (v^+ - v^-)] \cdot dF = 0\end{aligned}$$

Die Formulierung in dieser Weise stützt sich auf das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie.

Betrachtet man die kinematische Verträglichkeit als a priori erfüllt

$$\epsilon = \Delta v \quad \text{in } V$$

$$v = \bar{v} \quad \text{auf } R_v$$

und formt mit Hilfe des Gauss'schen Integralsatzes ([A1], Anhang E) um, erscheint die kinematische Kontinuität auf D als Nebenbedingung im Prinzip des Minimums der potentiellen Energie. (Als Lagrange'sche Multiplikatoren treten die Spannungen s auf)

$$\begin{aligned}\delta I(v, \sigma) = & \int_V \delta \Delta v \cdot D \cdot \Delta v \cdot dV - \int_V \delta \Delta v \cdot D \cdot \epsilon^0 \cdot dV \\ & - \int_V \delta v \cdot g \cdot dV - \int_{R_s} \delta v \cdot \bar{s} \cdot dF - \int_{D_v} \delta (s[v^+ - v^-]) \cdot dF = 0\end{aligned}$$

Es ist zu beachten, dass die Variationsgleichung $\delta I(v, \sigma, \epsilon) = 0$ nur dann umgeformt werden kann, wenn die im Abschnitt 1.1 angegebenen Randbedingungen entlang des Randes R und auf den Diskontinuitätsflächen D in V eingehalten werden.

Die Gleichung $\delta I(v, \sigma) = 0$ lässt sich nun integrieren:

$$\begin{aligned}I(v, \sigma) = & \frac{1}{2} \int_V \Delta v \cdot D \cdot \Delta v \cdot dV - \int_V \Delta v \cdot D \cdot \epsilon^0 \cdot dV \\ & - \int_V v \cdot g \cdot dV - \int_{R_s} v \cdot \bar{s} \cdot dF - \int_{D_v} s(v^+ - v^-) \cdot dF \rightarrow \text{stationär}\end{aligned}$$

Das letzte Integral gibt die Arbeit, welche durch die Spannungen s entlang der Flächen D_v mit möglichen Verschiebungskontinuitäten geleistet wird.

Die Lösung der Gleichung ergibt sich aus $\delta I(v, \sigma) = 0$.

Schreibt man dasselbe erweiterte Variationsprinzip in der Form, welche sich auf das Prinzip vom Minimum der komplementären Energie stützt, kommt man zu folgender Variationsgleichung, welche die Grundgleichung der im weiteren behandelten hybriden Spannungsmodelle darstellt:

$$\begin{aligned} \delta \bar{I}(\sigma, v) = & \int_V [\delta \sigma (D^{-1} \cdot \sigma + \epsilon^0 - \Delta v) + \delta v (\nabla \sigma + g)] \cdot dV + \\ & + \int_R [\delta \sigma (v - \bar{v}) - \delta v (s - \bar{s})] \cdot dF + \\ & + \int_D [\delta \sigma (v^+ - v^-) - \delta v (s^+ - s^-)] \cdot dF = 0 \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung der Erfüllung der im Abschnitt 1.1 festgelegten Bedingungen entlang des Randes R und der Diskontinuitätsfläche D, lässt sich mit Hilfe von Integrationsformeln auch diese Gleichung umformen ([A1], Anhang E)

$$\begin{aligned} \delta \bar{I}(\sigma, v) = & \int_V \delta \sigma \cdot D^{-1} \cdot \sigma \cdot dV - \int_{R_V} \delta s \cdot \bar{v} \cdot dF + \int_V \delta \sigma \cdot \epsilon^0 \cdot dV \\ & + \int_V \delta (v [\nabla \sigma + g]) \cdot dV - \int_{D_s} \delta (v [s^+ - s^-]) \cdot dF - \int_{R_s} \delta (v [s - \bar{s}]) \cdot dF = 0 \end{aligned}$$

Als Nebenbedingungen des Prinzips des Minimums der komplementären Energie erscheinen hier die Gleichgewichtsgleichungen im Innern, am Rand mit vorgeschriebenen Lasten und entlang der Spannungsdiskontinuitätsränder. (Die Verschiebungsparameter v haben hier die Funktion von Lagrange-Multiplikatoren.)

Die umgeformte Variationsgleichung lässt sich nun sofort integrieren:

$$\begin{aligned} \bar{I}(\sigma, v) = \int \delta \bar{I}(\sigma, v) = & \frac{1}{2} \int_V \sigma \cdot D^{-1} \cdot \sigma \cdot dV + \int_V \sigma \cdot \epsilon^0 \cdot dV - \int_{R_V} s \cdot \bar{v} \cdot dF + \\ & + \int_V v (\nabla \sigma + g) \cdot dV - \int_{D_s} v (s^+ - s^-) \cdot dF - \int_{R_s} v (s - \bar{s}) \cdot dF \rightarrow \text{stationär} \end{aligned}$$

Die ersten beiden Integrale geben die Formänderungsarbeit infolge der Spannungen σ_{ij} .

Das dritte Integral beinhaltet die negative Arbeit von s_i für $\bar{v}_i$ auf R.

Die letzten drei Ausdrücke stellen die Arbeit der Verschiebungen v dar, welche überall dort geleistet wird, wo Gleichgewichtsverletzungen auftreten.

Die Aussage, dass die Variation von $\bar{I}$ nach σ und v null sein muss, wird als Hellinger-Reissner-Prinzip bezeichnet.

3. FINITES ELEMENTMODELL

Eine finite Element-Formulierung wird durch das Einführen bereichsweiser Ansätze für die gesuchten Spannungen σ und Verschiebungen v erhalten. Wie Wolf in [W1] zeigt, können alle finiten Elementmodelle (Verschiebungs-Spannungs-, gemischte, 3-Feld- und entsprechende hybride Modelle) aus Spezialfällen erweiterter Variationsprinzipien hergeleitet werden.

In dieser Arbeit wird kein weiteres solches Modell entwickelt, sondern eines gewählt, das mit einigen Erweiterungen und Modifikationen die folgenden Anforderungen erfüllt:

- Hohe Genauigkeit bei geringem Rechenaufwand
- Einheitliche Behandlung von Scheiben-, Platten- und Schalenproblemen
- Kombinationsmöglichkeit mit Stabtragwerksmodellen
- Erfassen von Flächenlagerungen
- Berücksichtigung des Querkrafteinflusses bei Platten und Schalen
- Sicheres Verhalten im Bereich singulärer Punkte
- Einfache Problemformulierung (z.B. der Rand- und Auflagerbedingungen) bei der Verwendung des Modells in einem praxisorientierten Anwendungsprogramm.

Die Auswahl eines finiten Elementmodells nach den obigen Kriterien kann zum Teil nach theoretischen Gesichtspunkten aber auch nach vorliegenden Vergleichsuntersuchungen mit verschiedenen Elementen erfolgen.

Die Kennzeichnung der verschiedenen Modelle soll im weiteren der Terminologie aus [W1] folgen, wo Wolf auch die Möglichkeit deren systematischen Klassifizierung zeigt.

Da bewiesen ist, dass für vorgeschriebene Verschiebungen verträgliche Deformations- bzw. Gleichgewichtsmodelle stets einen oberen, bzw. unteren Grenzwert der Formänderungsarbeit liefern, d.h. immer zu steif, bzw. zu weich sind, liegt es nahe, ein Modell zu wählen, das sich zwischen diesen Extremen bewegt.

Unter diesen erwiesen sich die hybriden Modelle, welche erstmals von Pian [P1] vorgeschlagen wurden, als besonders leistungsfähig. Ausgedehnte Genauigkeitsvergleiche (z.B. [W2]) zeigen, dass das Verhältnis von Anzahl zu lösender Gleichungen zu erreichbarer Genauigkeit für hybride Elemente am günstigsten ausfällt. Da der unterschiedliche Aufwand zur Berechnung der lokalen Steifigkeitsmatrizen für verschiedene Elementmodelle durch das Verwenden möglichst gleicher Elemente in einer Masche, nicht ins Gewicht fällt,

darf die Anzahl zu lösender Gleichungen als Mass für den Rechenaufwand herangezogen werden.

Für das standard hybride Modell ist sowohl der Beweis der Konvergenz [T1] als auch der Beweis [T2] bekannt, dass es stets eine steifere Lösung als ein Gleichgewichtsmodell mit gleichem Schnittkraftansatz liefert, andererseits aber weicher ist als ein Deformationsmodell mit gleichen Randdeformationen.

Die weiteren Gründe, das standard hybride Modell zum Aufbau eines praxisorientierten Programmsystems zu verwenden, sind die folgenden:

- Mit der Einführung besonderer Ansätze für die Randverschiebungen lässt sich der Querkrafteinfluss bei Platten und Schalen einfach berücksichtigen; allerdings auf Kosten einer raschen Konvergenz (siehe Kapitel 4).
- In der Spannungsberechnung können die Nullzustände (d.h. die Festeinspannungen infolge am Element angreifender Lasten) berücksichtigt werden.
- Die Verwendung dieses Modells führt zur Matrixdeformationsmethode und erlaubt damit die Verwendung rechnerisch effizienter Algorithmen.
- Ebene Schalenelemente, welche sich aus je einem Scheiben- und Platten-element zusammensetzen, haben sich auch für die Behandlung gekrümmter Flächen als sehr geeignet erwiesen. Auf die Verwendung gekrümmter Schalenelemente wird in dieser Arbeit verzichtet. Sie besitzen den schwerwiegenden Nachteil, dass sich die Starrkörper-Bedingung (d.h. es dürfen keine Dehnungen auftreten, wenn die Bewegung des Tragwerks gleich dem eines starren Körpers ist) im allgemeinen nicht erfüllen lässt. Die Beschreibung der Geometrie ist zudem bei der Verwendung ebener Elemente einfacher und deshalb für ein Anwendungsprogramm geeigneter.

Mit den in dieser Arbeit im folgenden entwickelten Verbesserungen und Erweiterungen des ursprünglichen Modells von Pian sowie mit der Anwendung numerischer Integrationsmethoden, die die Verwendung allgemein geformter Viereckelemente erlauben, gelingt es, eine vollständige und effiziente Element-"Familie" zur Berechnung von beliebig geformten homogenen und linear-elastischen Flächentragwerken aufzubauen. Insbesondere die Lösung des Problems elastisch gebetteter Elemente bedeutet eine wesentliche Ausdehnung des möglichen Anwendungsbereichs in der Praxis.

3.1 Das standard hybride Spannungsmodell

Das standard hybride Spannungsmodell beruht auf dem erweiterten Prinzip vom Minimum der komplementären Energie (Hellinger-Reissner-Prinzip).

$$\begin{aligned}\bar{I}(\sigma, v) = & \frac{1}{2} \int_V \sigma \cdot D^{-1} \cdot \sigma \cdot dV + \int_V \sigma \cdot \epsilon^0 \cdot dV - \int_{R_V} s \cdot \bar{v} \cdot dF + \\ & + \int_V v(\nabla \sigma + g) \cdot dV - \int_{D_s} v(s^+ - s^-) \cdot dF - \int_{R_s} v(s - \bar{s}) \cdot dF \rightarrow \text{stationär}\end{aligned}$$

Lässt man vorläufig vorgeschriebene Randlasten und Randverschiebungen ausser Betracht und nimmt auch keine initialen Dehnungen an, so vereinfacht sich der Ausdruck bei gleichzeitiger Erfüllung der Gleichgewichtsbeziehung $\nabla \sigma + g = 0$ wie folgt:

$$\begin{aligned}\bar{I}(\sigma, v) = & \frac{1}{2} \int_V \sigma \cdot D^{-1} \cdot \sigma \cdot dV - \int_R v \cdot s \cdot dF \\ & - \int_{D_s} v(s^+ - s^-) \cdot dF \rightarrow \text{stationär}\end{aligned}$$

mit $\bar{v} = \bar{s} = 0$

$$\nabla \sigma + g = 0$$

$$\epsilon^0 = 0$$

Die Verschiebungsvariable v tritt nur noch in den Randintegralen auf und wird deshalb im weiteren mit v_R bezeichnet.

Aus der Diskretisierung nach der Methode der finiten Elemente ergibt sich:

$$\bar{I}(\sigma, v_R) = \sum \bar{I}_e(\sigma, v_R)$$

$$\bar{I}_e(\sigma, v_R) = \frac{1}{2} \int_{V_e} \sigma \cdot D^{-1} \cdot \sigma \cdot dV_e - \int_{R_e} v_R \cdot s \cdot dF_e$$

(Der Index e bezeichnet die sich auf ein Element beziehenden Grössen.)

Die Kontinuität der Spannungen im Elementinnern kann durch eine entsprechende Wahl der Spannungsansätze gewährleistet werden. Spannungsdiskontinuitäten treten nur zwischen den Elementen auf.

Für die Unbekannten σ , v_R und s werden nun die folgenden Ansätze gebildet:

a) Lokaler Spannungsansatz

Die Ansatzfunktionen werden in der für die Programmierung gebräuchlicheren Matrixschreibweise angegeben:

Im Elementinnern:

$$\{\sigma\} = \{\psi_0\} + [\Psi]\{\beta\}$$

wobei: $\nabla(\{\psi_0\}) + g = 0$

$$\nabla([\Psi]) = 0 \text{ erfüllt ist.}$$

Die β 's stellen vorläufig noch unbekannte Spannungsparameter dar.

Am Elementrand in Richtung $\{v_R\}$:

$$\{s\} = \{\psi_{0R}\} + [\Psi_R]\{\beta\}$$

b) Randverschiebungsansatz

$$\{v_R\} = [\Phi_R]\{w\}$$

$\{w\}$ = Verschiebungsfreiheitsgrade in den Knoten.

Dabei sollen die Verschiebungen benachbarter Elementränder zwischen zwei Knoten kompatibel sein.

Die Wahl der Ansatzfunktionen beeinflusst selbstverständlich das Verhalten der Elemente. Für alle Ansätze werden hier Polynome verwendet. Wie bereits Pian [P1] erwähnt hat, erhöht eine Vergrößerung der Anzahl Spannungskoeffizienten die Steifigkeit. Mit einer unendlichen Anzahl solcher Koeffizienten könnte die im allgemeinen nicht vorhandene kinematische Verträglichkeit der aus den Spannungen hergeleiteten Dehnungen erfüllt werden.

Auf der anderen Seite führt eine Erhöhung der Verschiebungskoeffizienten zu einem Weicherwerden des Modells, da damit die Gleichgewichtsbedingungen entlang der Seiten besser erfüllt werden können. Die einander entgegenwirkenden Einflüsse der Erweiterung der Ansatzfunktionen legen den Gedanken nahe, den Grad der Funktionen so zu bestimmen, dass sich ein Optimum in der Genauigkeit ergibt. Bereits Pian [P2] wies jedoch darauf hin, dass es scheinbar nicht möglich ist, im voraus ein solches Optimum festzulegen, da zum Beispiel auch die Form des Gesamttragwerks von Bedeutung sein kann.

Man wird im allgemeinen auch nicht sagen können, ob ein erhaltenes Resultat

nun zu steif oder zu weich ist. Numerische Konvergenztests zeigen, dass sich das hybride Modell von beiden Seiten der richtigen Lösung nähern kann.

Aber auch andere als Genauigkeitsüberlegungen können bei der Wahl der Ansatzfunktionen eine Rolle spielen. So sind zum Beispiel die Bedingungen der Starrkörper-Verschiebung und konstanten Dehnungen nur mit gewissen Bedingungen gehorchenden Funktionen zu erfüllen (siehe Abschnitt 3.2.3). Ebenso kann der Konvergenzverlauf durch den Grad der gewählten Ansätze stark beeinflusst werden. Bei der Zusammensetzung von Schalenelementen aus je einem Platten- und Scheibenelement kann die Verschiebungscompatibilität der Ränder nicht in einer Ebene liegender Elemente, die Ansatzfunktionen der v_R bestimmen (siehe Abschnitt 3.2.3.1). Im weiteren ist klar, dass eine Anwendung Funktionen höheren Grades den Rechenaufwand (z.B. bei den numerisch durchgeführten Integrationen) vergrößert.

Setzt man nun die Ansätze für $\{\sigma\}$, $\{v_R\}$ und $\{s\}$ in $\bar{I}_e(\sigma, v_R)$ ein, erhält man folgendes:

$$\begin{aligned} \bar{I}_e(\beta, w) = & \frac{1}{2} \int_{V_e} (\{\beta\}^T [\Psi]^T [D]^{-1} [\Psi] \{\beta\} + \{\beta\}^T [\Psi]^T [D]^{-1} \{\psi_o\}) \cdot dV \\ & - \int_{R_e} (\{\beta\}^T [\Psi_R]^T [\varphi_R] \{w\} + \{\psi_{oR}\}^T [\varphi_R] \{w\}) \cdot dF + c \end{aligned}$$

oder:

$$\bar{I}_e(\beta, w) = \frac{1}{2} (\{\beta\}^T [f] \{\beta\} + \{\beta\}^T \{f_o\}) - \{\beta\}^T [g] \{w\} - \{g_o\} \{w\} + c$$

wobei:

$$[f] = \int_{V_e} [\Psi]^T [D]^{-1} [\Psi] \cdot dV \quad (\text{Flexibilitätsmatrix})$$

$$[g] = \int_{R_e} [\Psi_R]^T [\varphi_R] \cdot dF \quad (\text{Gleichgewichtsmatrix})$$

Die Koeffizienten $f_{ij} = f_{ji}$ stellen die Arbeit der Spannungen infolge $\beta_i = 1$ bzw. $\beta_j = 1$ für die Dehnungen infolge $\beta_j = 1$ bzw. $\beta_i = 1$ dar.

Die Koeffizienten g_{ij} enthalten die Arbeit der Randspannungen $\{s\}$ infolge $\beta_j = 1$ für die Randverschiebungen infolge $w_i = 1$. $\{f_o\}$ und $\{g_o\}$ enthalten die Arbeit der inhomogenen Spannungsanteile. Die erste Variation nach $\{\beta\}$ ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \bar{I}_e}{\delta \{\beta\}} &= [f] \{\beta\} + \{f_o\} - [g] \{w\} = 0 \\ \rightarrow \{\beta\} &= -[f]^{-1} \{f_o\} + [f]^{-1} [g] \{w\} \end{aligned}$$

Setzt man $\{\beta\}$ in $\bar{I}_e$ und $\{\sigma\}$ ein, ergibt sich:

$$\bar{I}_e(w) = -\frac{1}{2}\{w\}^T[k*]\{w\} + \{w\}^T\{p*\} + c'$$

wobei:

$[k*] = [g]^T[f]^{-1}[g]$ die hier auf statischem Weg gefundene lokale Steifigkeitsmatrix und

$\{p*\} = -\{g_o\} + [g]^T[f]^{-1}\{f_o\}$ den Lastvektor darstellen.

$$\{\sigma\} = \{\psi_o\} - [\Psi][f]^{-1}\{f_o\} + [\Psi][f]^{-1}[g]\{w\}$$

$$\{\sigma_o\} = \{\psi_o\} - [\Psi][f]^{-1}\{f_o\} \quad \text{Nullzustand}$$

$$[\sigma_w] = [\Psi][f]^{-1}[g] \quad \text{Spannungsmatrix}$$

$$\rightarrow \{\sigma\} = \{\sigma_o\} + [\sigma_w]\{w\}$$

Unter Berücksichtigung der topologischen Transformationen beim Zusammensetzen des Gesamttragwerks aus den einzelnen Elementen, folgen aus $\bar{I} = \sum \bar{I}_e$

$$- \bar{I}(W) = \frac{1}{2}\{W\}^T[K*]\{W\} - \{W\}^T\{P*\} + c''$$

und weiter aus $\frac{\delta \bar{I}(W)}{\delta \{W\}} = 0$

die gesuchten Verschiebungen

$$\underline{\{W\} = [K*]^{-1}\{P*\}}$$

mit $[K*]$ = Globale Steifigkeitsmatrix
 $\{P*\}$ = Globaler Lastvektor
 $\{W\}$ = Globaler Verschiebungsvektor

Wie bereits erwähnt, führt die Verwendung des hybriden Modells zur bekannten Matrixdeformationsmethode.

Ein Tableau zur praktischen Bestimmung der lokalen Steifigkeitsmatrix, des lokalen Lastvektors sowie der Spannungsmatrizen ist in Bild 3.1 dargestellt.

Bild 3.1: Tableau der lokalen Elementmatrizen

- NB = Anzahl β -Parameter
- NW = Anzahl Verschiebungsfreiheitsgrade
- NS = Anzahl Spannungsgrößen
- NL = Anzahl inhomogener Spannungszustände

Im rechten oberen Feld der Untermatrizen stehen die ursprünglich einzusetzen-
den Werte, im linken untern Teil erscheinen nach NB Austauschschritten die
gesuchten lokalen Elementmatrizen.

Für das Lösen des globalen Gleichungssystems stehen eine Vielzahl bekannter

Algorithmen zur Verfügung. Eine neuere Variante, die sogenannte "frontal solution", welche erstmals von Irons [I1] vorgestellt und für das hier entstandene Programm von Green erweitert wurde, wird im Anhang näher erläutert.

3.2 Hybride dreieckige und viereckige Scheibenelemente

In diesem Abschnitt werden für die acht im Programm FLASH enthaltenen hybriden Scheibenelemente die gewählten Ansatzfunktionen angegeben. Anhand von zwei Beispielen werden die damit erreichten Resultate mit anderen numerischen oder analytischen Lösungen verglichen.

3.2.1 Anzahl Verschiebungsfreiheitsgrade

Als erster schlug Pian (z.B. [P1]) ein standard hybrides Scheibenmodell vor. Da dies zur Lösung von Scheibenproblemen vollauf genügt, wird ein Modell verwendet, welches als Verschiebungsparameter lediglich die beiden Verschiebungen u und v aufweist (Bild 3.2).

Bild 3.2: Verschiebungsparameter des ursprünglichen Scheibenmodells von Pian [P1]

Einer Knotenrotation in der Elementebene ist keine Steifigkeit zugeordnet.

Der fehlende Rotationsfreiheitsgrad erweist sich erst beim Zusammensetzen der Scheibenelemente mit Plattenelementen zu ebenen Schalenelementen als Nachteil, verursacht doch im globalen System der Plattenbiegeanteil im allgemeinen eine Verdrehung in Scheibenebene der benachbarten Elemente (Bild 3.3).

Bild 3.3: Scheiben und Plattenfreiheitsgrade im Raum

Es sind verschiedene Möglichkeiten bekannt, um das Problem eines fehlenden sechsten Freiheitsgrades zu umgehen (z.B. [Z1]). Entweder führt man eine R_z entsprechende fiktive Rotationssteifigkeit ein oder arbeitet für die Knoten co-planarer Elemente in lokalen Koordinaten. Der Rechenalgorithmus wird dadurch jedoch schwerfällig.

Dungar und Severn schlugen für ihre dreieckigen Schalenelemente variabler Dicke in [D1] bereits die Einführung eines Rotationsfreiheitsgrades senkrecht zur Scheibenebene vor, um die Kompatibilität der Randverschiebungen nicht in einer Ebene liegender Elemente zu sichern. Die in [D1] nicht erwähnten daraus folgenden Konsequenzen (z.B. keine Konvergenz!) werden im Abschnitt 3.2.3.3 näher untersucht.

Neben dem Bestreben, die Kontinuität der Verschiebungen zwischen den Schalenelementen einzuhalten, führten beim Aufbau der Scheibenelement-"familie" für das Programm FLASH noch andere Überlegungen dazu, auch für die reinen Scheibenelemente solche mit drei Freiheitsgraden zu verwenden. Genauigkeitsuntersuchungen an hybriden Scheibenmodellen mit zwei Verschiebungsparametern zeigen, dass die Lösungen stets zu steif ausfallen und auch langsam konvergieren. Zudem ergeben sich unbefriedigende Resultate in den Spannungen an Rändern, wo diese vorgeschrieben sind.

Die Einführung des Rotationsfreiheitsgrades bringt die mit einer Erhöhung der Anzahl Verschiebungsparameter erwartete Herabsetzung der Steifigkeit. Wie das gerechnete Testbeispiel (Bild 3.25) zeigt, ergeben sich zudem bessere Resultate für die Randspannungen. Dies wiederum ermöglicht es, auf die Einführung spezieller Randelemente, wie sie Wolf vorschlägt, zu verzichten (siehe Abschnitt 3.2.4).

Der dritte Scheibenfreiheitsgrad bietet im weiteren die Möglichkeit, ebene Rahmen mit Scheibentragwerken zu verbinden (z.B. Interaktion zwischen Tragwerk und Untergrund).

3.2.2 Ansatzfunktionen

Als Grundlage zur Diskussion der verschiedenen mit FLASH untersuchten Scheibenelemente, sind im folgenden die gewählten Ansatzfunktionen angegeben.

a) Spannungsansätze

Bild 3.4: Randspannungs- und Verschiebungsparameter

Spannungsansatz im Innern:

$$\{\sigma\} = [\Psi]\{\beta\} + \{\Psi_0\}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y & 0 & 0 & 0 & x & 0 & y^2 & 0 & x^2 & xy & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & y & 0 & x^2 & y^2 & 0 & xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -y & -x & 0 & 0 & -2xy & \frac{-y^2}{2} & \frac{-x^2}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{12} \end{Bmatrix} + \{\Psi_0\}$$

Inhomogene Spannungsanteile

$$\{\Psi_0\} = \begin{bmatrix} -x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{für Einheitslast in X-Richtung}$$

$$\{\Psi_0\} = \begin{bmatrix} 0 \\ -y \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{für Einheitslast in Y-Richtung}$$

$$\nabla(\{\Psi_0\}) + g = 0$$

d.h., die Gleichgewichtsbedingungen im Element-

$$\nabla(\{\Psi\}) = 0 \quad \text{innern sind erfüllt.}$$

Randspannungsansatz:

$$\{s\} = [\Psi_R]\{\beta\} + \{\Psi_{0R}\} \quad \{s\} = \begin{Bmatrix} \sigma_\eta \\ \tau_{\xi\eta} \end{Bmatrix}$$

$$= [T_R](\{\Psi\}\{\beta\} + \{\Psi_0\})$$

$$[T_R] = \begin{bmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & -2\sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) \end{bmatrix}$$

b) Verschiebungsansätze am Elementrand

$$\{v_R\} = [\varphi_R]\{w\}$$

$$\begin{Bmatrix} u_\eta \\ u_\xi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{2}(1-\xi) & -\frac{c}{2}(1-\xi) & -\frac{LS}{8}(1-\xi-\xi^2+\xi^3) \\ \frac{c}{2}(1-\xi) & \frac{s}{2}(1-\xi) & 0 \\ \frac{s}{2}(1+\xi) & -\frac{c}{2}(1+\xi) & -\frac{LS}{8}(-1-\xi+\xi^2+\xi^3) \\ \frac{c}{2}(1+\xi) & \frac{s}{2}(1+\xi) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_A \\ v_A \\ \theta_{ZA} \\ u_E \\ v_E \\ \theta_{ZE} \end{Bmatrix}$$

Bild 3.5: Randverschiebungsparameter

Ohne die Terme für θ_A und θ_R entspricht der Ansatz demjenigen eines Elementes mit zwei Freiheitsgraden.

Da die Randdeformationen nur von den Knotenfreiheitsgraden der anschliessenden Knoten und deren Lage abhängt, ist sofort ersichtlich, dass die Randverschiebungen für zwei Elemente entlang ihres gemeinsamen Randes identisch sind.

Kubische Ansätze für u_η erhält man, wenn die Terme φ_{R11} , φ_{R12} , φ_{R14} und φ_{R15} ersetzt werden durch:

$$\varphi_{R11} = \frac{s}{4}(2-3\xi+\xi^3)$$

$$\varphi_{R12} = -\frac{c}{4}(2-3\xi+\xi^3)$$

$$\varphi_{R14} = \frac{s}{4}(2+3\xi-\xi^3)$$

$$\varphi_{R15} = -\frac{c}{4}(2+3\xi-\xi^3)$$

Diese Randverschiebungen entsprechen jenen eines Plattenelementes. Es ist deshalb möglich, solche Elemente zusammen mit einem Plattenelement als Schälenelement zu verwenden. Man nimmt damit aber gleichzeitig in Kauf, dass der Winkel zwischen zwei Seiten bei einer Verschiebung oder Rotation des gemeinsamen angeschlossenen Knotens konstant bleibt. Dies bedeutet eine Verhinderung der Schiebung in den Knoten. Eine eingehendere Betrachtung solcher Elemente erfolgt im nächsten Abschnitt.

3.2.3 Eigenschaften der hybriden Scheibenmodelle im Programm FLASH

Untersucht man die Eigenschaften eines finiten Elementes, sind die folgenden Bedingungen und numerischen Tests von Bedeutung:

- Starr-Körper-Bedingung
- Konstante-Dehnungs-Bedingung
- Invarianz-Bedingung
- Konvergenz
- Genauigkeit
- Rechenaufwand zur Bestimmung der Elementmatrizen.

Das Erfüllen der ersten beiden Bedingungen sowie das Konvergenzkriterium sind abhängig von der Wahl geeigneter Ansatzfunktionen. Um die Konvergenz der approximativen Lösung gegen die genaue zu ermöglichen, müssen die Funktionen mathematisch vollständig sein, d.h. jede beliebige Funktion f muss sich mit

$$\sum_{i=1}^n \phi_i \cdot f_i \quad (\text{wobei } n \rightarrow \infty \text{ strebt})$$

beliebig genau annähern lassen.

Dieser Bedingung genügen z.B. vollständige Polynomansätze wie sie bei den hier vorgestellten Elementen sowohl für die Verschiebungs- als auch die Spannungsansätze verwendet werden. Es wird sich zeigen (Abschnitt 3.2.3), dass die erwähnte Forderung notwendig, aber nicht hinreichend für die Konvergenz ist.

Die Starr-Körper-Bedingung verlangt, dass keine Dehnungen, bzw. elastische Spannungen auftreten, falls die Knotenverschiebungen denen eines starren Körpers entsprechen. Sie ist dann erfüllt, wenn die Spannungsansätze homogenen Spannungszuständen entsprechen und in den Randverschiebungsfunktionen alle linearen Glieder enthalten sind.

Die vorgestellten standard hybriden Scheibenmodelle gehorchen dieser Bedingung. Die Forderung, dass im Innern eines Elementes ein konstanter Spannungszustand herrschen muss, falls die Knotenverschiebungen denen eines konstanten Dehnungszustandes entsprechen, ist, ausser von den Elementen mit kubischen Randverschiebungen, welche keine Schiebung in den Elementecken zu lassen, ebenfalls erfüllt. ($[\Psi]$ enthält konstante Spannungszustände, $[\phi_R]$ alle linearen Terme).

Die Invarianzbedingung verlangt, dass die Lösung unabhängig vom gewählten Koordinatensystem ausfällt. Dies erreicht man durch die Berechnung der lokalen Steifigkeitsmatrizen in einem elementeigenen lokalen Koordinatensystem und der Wahl vollständiger Polynome als Ansatzfunktionen.

SCHEIBENELEMENTE MIT 2 VERSCHIEBUNGSFREIHEITSGRADEN			
ELEMENT - BEZEICHNUNG	RANDVERSCHIE - BUNGSANSATZ	SPANNUNGS - ANSATZ	BEMERKUNGEN
SV2LL SD2LL	u_η : u_ζ : LINEAR	LINEAR
SCHEIBENELEMENTE MIT 3 VERSCHIEBUNGSFREIHEITSGRADEN
SV3LL SD3LL	u_ζ : $f(u,v)$ LINEAR u_η : $f(u,v)$ u_η : $f(\theta_z)$ KUBISCH	LINEAR

SV3LQ SD3LQ		QUADRATISCH

SV3KL SD3KL	u_η : $f(u,v,\theta_z)$ KUBISCH u_ζ : LINEAR	LINEAR

SV3KQ SD3KQ		QUADRATISCH

Bild 3.6: Die FLASH - Scheibenelemente

Bild 3.6 zeigt eine Uebersicht der neuen Elementfamilie des standard hybriden Scheibenmodells, welche im Programm FLASH enthalten ist. Die Elemente mit zwei Verschiebungsfreiheitsgraden [P1] sowie das Dreieckselement SD3KQ [D1] dienen als Vergleichselemente.

Die besonderen Merkmale der neuen Elementtypen lassen sich am besten anhand eines einfachen Beispiels veranschaulichen.

Bild 3.7: Beispiel 1: Kragarm

Bild 3.8: Durchbiegung im Punkt C_m für Lastfall Endmoment

Bild 3.9: Durchbiegung im Punkt C_m Lastfall Endkraft

Bild 3.10: Spannung σ_x im Punkt A_U Lastfall Endmoment ,

Bild 3.11: Spannung σ_x im Punkt B_U Lastfall Endkraft

Bild 3.12: Spannung τ_{xy} im Punkt B_m Lastfall Endkraft

3.2.3.1 Die Elemente SV3LL und SD3LL

Die Scheibenelemente SV3LL und SD3LL weisen einen linearen Spannungsansatz sowie lineare Randverschiebungen infolge der Knotenverschiebungen u und v auf. Der Rotationsfreiheitsgrad überlagert den Randverschiebungen eine kubische Verschiebung senkrecht zum Rand. Die Eckrotation stellt demzufolge nur eine relative Verdrehung der Knoten dar; der Winkel zwischen zwei Seiten bleibt bei einer Deformation des Elementes nicht erhalten. Die Schubverformung in den Elementecken ist damit im Gegensatz zu den Elementen mit rein kubischen Randverschiebungen möglich.

Interessante Eigenschaften weist insbesondere das Viereckelement SV3LL auf. Der lineare Spannungsansatz enthält nur sieben β -Parameter; der Rang der Steifigkeitsmatrix ist demzufolge ebenfalls sieben.

$$n_{\beta}^e < n_w^e - r$$

n_{β}^e = Anzahl Spannungsparameter β des Elementes

n_w^e = Anzahl Verschiebungsfreiheitsgrade des Elementes

r = Anzahl Starr-Körper-Verschiebungen (bei Scheiben $r = 3$)

Physikalisch bedeutet dies nichts anderes, als dass zusätzlich zu den drei Starr-Körper-Verschiebungen noch zwei Verschiebungszustände möglich sind, welche keine Formänderungsenergie hervorrufen (sog. "kinematic modes"). Sie lassen sich beide leicht bestimmen. Mathematisch gesehen äussert sich ihr Vorhandensein darin, dass zwei Gleichungen der lokalen Steifigkeitsmatrix nicht linear unabhängig sind. Zu suchen sind also die beiden Eigenvektoren mit zugehörigen verschwindenden Eigenwerten.

$$([k] - \lambda[I])\{w_{SK}\} = 0$$

$$([k] - \lambda[I])\{w_{KM}\} = 0$$

$\{w_{SK}\}$ Starr-Körper-Verschiebungen

$\{w_{KM}\}$ Verschiebungszustände, die keine Formänderungsenergie ergeben
("kinematic modes")

λ Eigenwerte

$[I]$ Einheitsdiagonalmatrix

Für ein Einheitselement

Bild 3.13: Scheibeneinheitselement

erhält man zum Beispiel folgende Verschiebungszustände:

Bild 3.14: Verschiebungszustände des Einheitselementes SV3LL
die keine Formänderungsarbeit ergeben

$$\{w_{KM1}\} = \{0, 0, 0, 0, \frac{1}{6}, 1, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{6}, 0, 1\}$$

$$\{w_{KM2}\} = \{0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1\}$$

Wie man durch Multiplikation der $\{w_{KM}\}$ mit den nachstehend angegebenen Steifigkeits- und Spannungsmatrizen leicht nachprüfen kann, ergeben die beiden Verschiebungszustände keine Formänderungsenergie und natürlich auch keine Spannungen.

Die "kinematic modes" verstärken die Tendenz des Weicherwerdens eines Modells durch die Verminderung der Anzahl der Spannungsparameter ganz beträchtlich. Diese an sich positive Eigenschaft (die hybriden Scheibenelemente sind meist zu steif) kann sich aber nachteilig auswirken durch das mögliche Entstehen eines singulären Gleichungssystems.

Als notwendige aber nicht hinreichende Bedingungen um "kinematic modes" zu vermeiden, muss am globalen System

$$n_{\beta}^g \geq n_w^g$$

sein.

n_{β}^g = Anzahl β -Parameter aller Elemente

n_w^g = Anzahl Freiheitsgrade des Systems nach Einführung der kinematischen Randbedingungen in den Knoten

Diese Bedingung ist zwar sehr oft erfüllt, schliesst aber Schwierigkeiten beim Lösen des Gleichungssystems nicht a priori aus. Insbesondere haben auch die kinematischen Randbedingungen einen grossen Einfluss auf das Auftreten unerwünschter Verschiebungszustände.

Die Randverschiebungsansätze des Elementes SV3LL weisen als Besonderheit eine mit dem Rotationsfreiheitsgrad gekoppelte kubische Verschiebung senkrecht zum Rand auf.

Bild 3.16: Randverschiebungen der Elemente SV3LL, SD3LL, SV3LQ, SD3LQ

Wie bereits erwähnt, wird dadurch jedoch die Schubverformung in den Knoten nicht verhindert. Für reine Scheibenprobleme liefert das Element SV3LL die besten Resultate (Bilder 3.8 bis 3.12).

Schwierigkeiten ergeben sich, falls man die Elemente mit gemischt linear-kubischen Randverschiebungsansätzen zusammen mit einem Plattenelement als Schalenelement verwenden möchte. Der Scheibenanteil kann nämlich im allgemeinen die Starr-Körper-Verdrehung der Platte nicht mitmachen (Bild 3.17) und verletzt damit natürlich eine der wesentlichsten Bedingungen, denen ein Element zu gehorchen hat.

Bild 3.17: Verhinderte Starr-Körpersverschiebung

Für den Spezialfall des Viereckelementes SV3LL mit parallelen Seiten (Quadrat, Rechteck, Parallelogramm) entspricht der Verschiebungszustand des Scheibenelementes bei einer reinen Rotation der Knoten allerdings gerade einem "kinematic mode", so dass die Starr-Körper-Rotation wieder möglich ist. Diese Eigenschaft des Elementes SV3LL mit parallelen Rändern ist für die Berechnung räumlicher Tragwerke von grösster Bedeutung. Die Bedingung der Starr-Körper-Verdrehung kann nämlich sonst nur mit rein kubischen Randverschiebungen erfüllt werden, was wiederum zu Elementen mit verhinderten Eckschubverformungen führt, die im allgemeinen nicht konvergieren! (Siehe Abschnitt 3.2.3.3)

Das Dreieckelement SV3LL erfüllt die Bedingung

$$n_{\beta}^e \geq n_w^e - r$$

d.h., es treten keine "kinematic modes" auf. Der Einfluss der Anzahl der Spannungs- und Verschiebungsparameter lässt sich im Vergleich mit den andern Dreieckelementen am gerechneten Beispiel schön verfolgen (Bilder 3.8 bis 3.12, Bild 3.18).

Bei den Viereckelementen gelten die gleichen Aussagen. Das Auftreten von "kinematic modes" kann allerdings die erwarteten Steifigkeitsverhältnisse beeinträchtigen (z.B. SV3LL ist weicher als SV3KL).

Das Element SD3LL besitzt ebenfalls einen Rotationsfreiheitsgrad, welcher sich nur relativ zu den Elementrändern verdreht. Dies verunmöglicht aus den gleichen Gründen wie beim allgemeinen Viereckelement seine Verwendung als Schalenelement. Als reines Scheibenelement zeigt aber SD3LL die besten Eigenschaften der untersuchten Dreieckelemente (z.B. Bild 3.12), und es ist deshalb im Computerprogramm FLASH als Standardelement eingebaut. (Die Ele-

Bild 3.18

mente SD3KL und SD3KQ ergeben für endliche Maschen zwar oft bessere Resultate, konvergieren jedoch nicht. Siehe Abschnitte 3.2.3.3 und 3.2.3.4.)

3.2.3.2 Die Elemente SV3LQ und SD3LQ

Die Elemente SV3LQ und SD3LQ weisen bei gleichen Randverschiebungsansätzen gegenüber den Elementen SV3LL und SD3LL quadratische Spannungsansätze auf. Der Rang der Steifigkeitsmatrix des Viereckelementes ist nun kleiner als die Anzahl der Spannungsparameter, d.h. es treten keine "kinematic modes" mehr auf.

Die nachstehend angegebene Steifigkeitsmatrix für das viereckige Einheits-element (Bild 3.13) zeigt, dass sich die zusätzliche Steifigkeit nur in den Termen der Rotationsfreiheitsgrade ergibt. (Diese Kontrolle muss erfüllt sein, da ja Elemente mit zwei Verschiebungsfreiheitsgraden für lineare und quadratische Spannungsansätze die gleiche [k]-Matrix besitzen.)

Die beiden Elemente SV3LQ und SD3LQ eignen sich wegen der verhinderten Starr-Körper-Verdrehung beim Zusammensetzen mit Plattenelementen nicht als Schalen-anteile.

Das Viereckelement SV3LQ wird im Programm FLASH als Standardelement für Schei-benprobleme verwendet. Es konvergiert zwar langsamer als SV3LL, birgt aber nicht die Gefahr in sich das globale Gleichungssystem singulär werden zu las-sen. (Im Anhang sind die Standardelemente des Programms FLASH angegeben.

HALBE LOKALE STEIFIGKEITSMATRIX [ke]

.4687	-.1875	-.0469	.0937	-.0000	.0156	-.2812	.1875	-.0156	-.2812	.0000	.0469
-.0000	.4687	-.0469	.0000	-.2812	.0469	.1875	-.2812	-.0156	-.0000	.0937	.0156
-.0000	-.0000	.0277	-.0156	.0469	-.0105	.0156	.0156	.0040	.0469	-.0156	-.0105
-.0000	-.0000	-.0000	.4687	.1875	.0469	-.2812	-.0000	.0469	-.2812	-.1875	.0156
-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	.4687	-.0469	.0000	.0937	-.0156	-.0156	.0156	.0040
-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	.0277	.0469	-.1875	.0469	.0937	-.0000	.0156
-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	.0469	.4687	.0469	.2812	-.0469	-.0469
-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	.0277	.0156	-.0469	-.0105
-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	.4687	.1875	-.0469
-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	.4687	.0469
-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	.0277

LOKALE SPANNUNGSMATRIX [σw]

-1.0312	.0937	.1533	-.0937	-.0937	.0637	.0937	-.2812	-.0342	1.0312	.2812	.1387
-.0937	1.0312	-.1533	-.2812	-.2812	-.1387	.2812	-.0937	.0342	.0937	.0937	-.0637
.2813	-.2813	.0000	-.2813	-.0937	-.1313	.0937	.0937	.0000	.2813	.2813	.1313
-.0937	.0937	-.0637	-1.0312	-.0937	.1533	-.2812	-.0937	-.1387	.0937	.2812	.0342
-.2812	1.0312	.1387	-.2813	-.0937	.0000	.0937	-.0937	.0637	.2812	.0937	-.0342
.2813	-.0937	-.1313	-.0937	-.2813	.1387	-.0937	.2813	.1313	.0937	.0937	-.0000
-.0937	.2812	-.0342	-1.0312	-.0937	.1387	-.0937	-.0937	.1533	.0937	.0937	.0637
-.2812	.0937	.0342	-.0937	-.0937	-.0637	.2812	-.0937	-.1533	1.0312	.0937	-.1387
.0937	-.0937	.0000	-.0937	-.2813	.1313	.2813	.2813	.0000	.2813	.0937	-.1313
-1.0312	.2812	-.1387	-.0937	-.2812	.0342	.0937	-.0937	-.0637	1.0312	.0937	-.1533
-.0937	.0937	.0637	-.0937	-.0937	-.0342	-.2812	-.0937	.1387	.2812	.2813	.1533
.2813	-.2813	.1042	-.0937	-.0937	.0000	-.2813	.0937	-.1313	.0937	.2813	-.0000
-.5625	.1875	.1042	-.5625	-.5625	-.1042	.5625	-.1875	.1042	.5625	.1875	-.1042
-.1875	.5625	-.1042	-.1875	-.5625	.1042	.1875	-.5625	-.1042	.1875	.5625	.1042
.1875	-.1875	-.0000	-.1875	-.1875	-.0000	-.1875	.1875	-.0000	.1875	.1875	-.0000

Bild 3.19 Element SV3LQ

Man findet dort auch eine Zusammenstellung der Nichtstandardelemente, welche durch Setzen gewisser Parameter bei der Dateneingabe initialisiert werden können.)

Vergleicht man die beiden Elemente mit den entsprechenden Elementen SV3KQ und SD3KQ mit absoluten Eckrotationen, so sticht die Bedeutung einer möglichen oder verhinderten Eckschubverzerrung deutlich hervor. Wohl trägt der höhere Grad der Ansatzfunktionen für die Verschiebungen zu einem Weicherwerden der Elemente SV3KQ und SD3KQ bei, dies jedoch nur im Falle einer nicht zu feinen Mascheneinteilung. Für eine unendlich feine Masche verhindert die Erhaltung der Eckwinkel zwischen den angeschlossenen Seiten jede Bewegung (Bild 3.20).

Elemente mit verhinderter Schubverformung ($\gamma_{xy} = 0$)

(S-3KL, -3KQ)

Elemente mit relativen Knotenverdrehung ($\gamma_{xy} \neq 0$)

(S-3LL, -3LQ)

Bild 3.20

In den Bildern 3.11 und 3.12 kann die daraus resultierende Divergenz der Lösungen für die σ_x - und τ_{xy} -Spannungen verfolgt werden.

3.2.3.3 Die Elemente SV3KL und SD3KL

Bedingt durch den linearen Spannungsansatz besitzt Element SV3KL wie Element SV3LL zwei Verschiebungszustände, welche keine Formänderungsenergie liefern.

Die Verschiebungen senkrecht zu den Elementrändern sind nicht mehr linear, sondern kubisch angesetzt. Dies bedeutet, wie bereits erwähnt, dass der eingeschlossene Winkel zwischen zwei Seiten bei einer Verschiebung oder Rotation des Eckknotens erhalten bleibt. Die dadurch verhinderte Schubverformung lässt das Modell für gegen unendlich wachsende Elementmaschen zu steif werden, d.h. die Lösung konvergiert nicht.

Diese Aussage gilt für die Viereckelemente SV3KL nur, wenn diese beliebig geformt sind. Wie beim Modell SV3LL, wo die "kinematic modes" für spezielle Elementformen die Starr-Körper-Verschiebungen zusammen mit einem Plattenelement zulassen, ermöglichen hier die zusätzlichen Verschiebungszustände für

besondere Elemente SV3KL gerade jenen Verformungszustand (Schubverformung in den Ecken), der sonst durch die Wahl kubischer Randverschiebungen ausgeschlossen ist.

Diese Tatsache trifft auf alle Elemente mit parallelen Rändern zu. Die zusätzlichen Verschiebungszustände solcher Elemente sind identisch für SV3LL und SV3KL, woraus sich die in Bild 3.21 skizzierte Dualität ergibt.

Bild 3.21: Duale Wirkung der "kinematic modes"

HALBE LOKALE STEIFIGKEITSMATRIX [k _c]											

.5034	-.1875	-.0478	.0591	-.2466	.1875	-.0147	-.3159	.0000	.0478	.0000	.0478
-.0000	.5034	-.0478	.0000	.1875	-.2466	.0147	-.0000	.0591	-.0147	.0591	.0147
-.0000	-.0000	.0223	-.0147	.0147	.0147	-.0015	.0478	-.0147	-.0015	-.0147	-.0104
-.0000	-.0000	-.0000	.5034	-.3159	-.0000	.0478	-.2466	.1875	-.0478	.1875	.0147
-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	.0000	.0591	.0147	-.1875	.2466	.0147	-.2466	-.0147
-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0478	-.0147	-.0104	-.0147	.0147	-.0104	.0147	-.0015
-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	.5034	-.1875	.0478	.0591	-.0000	.0478	-.0000	-.0147
-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	.5034	.0478	.0000	.0000	.0478	.0000	-.0478
-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	.0223	.0000	-.0478	-.0223	-.0478	-.0104
-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	.5034	.0147	-.0000	.0147	-.0478
-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	.0000	-.0000	.0000	.0478
-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	.5034
-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0478
-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	.0223

LOKALE SPANNUNGSMATRIX [σ _w]											

-1.1344	.1031	.1563	.0094	-.0094	-.2719	-.0313	1.1344	.2719	-.0250	-.2719	-.0250
-.1031	1.1344	-.1563	-.2719	.2719	.0094	.0313	.1031	-.0094	.1000	-.0094	.1000
.2719	-.2719	-.0000	-.2719	-.1031	.1031	.0000	.1031	.2719	.1313	.2719	.1313
.0094	.1031	.1000	-1.1344	1.1344	-.2719	.0250	-.0094	.2719	.0313	.2719	.0313
-.2719	1.1344	-.0250	-.1031	-.1031	.0094	-.1000	.2719	-.0094	-.0313	-.0094	-.0313
.0094	-.2719	-.0313	-.2719	.1031	.2719	.1313	.1031	.1031	.0000	.1031	.0000
-.2719	-.0094	.0313	.0094	1.1344	-.1031	.1563	-.0094	.1031	-.1000	.1031	-.1000
.1031	-.1031	.0000	-.1031	.0094	.2719	-.1000	.2719	1.1344	.0250	.1031	.0250
-1.1344	.2719	.0250	.0094	-.0094	-.2719	.1313	.1031	.1031	-.1313	.1031	-.1313
-.1031	.2719	.0250	.0094	.2719	.1031	.0000	1.1344	.1031	.1563	.1031	.1563
.2719	-.1031	.1313	-.2719	-.1031	-.1031	-.0250	.1031	1.1344	.1563	.1031	.1563
.1031	-.2719	.0625	.1031	-.2719	.1031	-.1313	.2719	.1031	.0000	.1031	.0000
-.5625	.1875	.0625	-.5625	.5625	-.1875	.0625	.5625	.1875	-.0625	.1875	-.0625
-.1875	.5625	-.0625	-.1875	.1875	-.5625	-.0625	.1875	.5625	.0625	.1875	.0625
.1875	-.1875	-.0000	-.1875	-.1875	.1875	.0000	.1875	.1875	.0000	.1875	.0000

Bild 3.22 Element SV3KL

Der Einfluss der "kinematic modes" lässt sich am Beispiel einer reinen Schubverformung veranschaulichen (Bild 3.23).

Bild 3.23: Viereckelement unter reiner Schubverformung

Wie man durch Einsetzen von $u_2 = u_3 = 1$ in den Spannungsmatrizen ersieht, treten trotz der verhinderten Schiebung in den Knoten für das Element SV3KL keine Spannungen σ_x und σ_y auf, und die für τ_{xy} erhaltenen Werte entsprechen denen von SV3LL und SV3LQ. Im Element SV3KQ hingegen, welches keine "kinematic modes" besitzt, treten Normalspannungen auf. Es ist leicht einzusehen, dass damit zusätzliche Formänderungsarbeit geleistet wird, welche mit einer steten Verfeinerung der Masche zunimmt. (Schiebung bleibt konstant, Anzahl Knoten mit Gleichgewichtsverletzung wird grösser.) Die Elemente mit rein kubischen Randverschiebungen konvergieren demzufolge im allgemeinen nicht.

Das Element SV3KL mit parallelen Seiten kann vor allem als Scheibenanteil für Schalenelemente sehr empfohlen werden, ist doch dort die Gefahr, dass ein singuläres Gleichungssystem entsteht, geringer als bei reinen Scheibenproblemen (siehe Kap. 4).

Das Dreieckelement SD3KL wird im Programm FLASH als Standardscheibenanteil für die dreieckigen Schalenelemente eingesetzt. Dem Vorteil der möglichen Starr-Körper-Verdrehung steht der Nachteil der verhinderten Schubverformung in den Knoten gegenüber, der jedoch bei gebräuchlichen Maschenweiten nicht ins Gewicht fällt.

3.2.3.4 Die Elemente SV3KQ und SD3KQ

Beide Elemente besitzen quadratische Spannungsansätze und absolute Knotenverdrehungen. Die höhere Steifigkeit gegenüber SV3KL und SD3KL infolge der grösseren Anzahl Spannungsparameter, lässt die Wirkung der verhinderten Schubverformung in den Knoten noch deutlicher zu Tage treten. Die τ_{xy} -Spannungen (Bild 3.12) divergieren bereits bei grober Elemententeilung, und dass nicht nur für die Schubspannungen schlechte Resultate erhalten werden, zeigt Bild 3.11 für die Längsspannungen σ_x .

Trotz des nachteiligen Einflusses der verhinderten Eckverzerrungen ist das Element SV3KQ im Programm FLASH als Standard-Viereckelement eingeführt, um mit einem Plattenelement zusammen ein Schalenelement zu bilden. Die Starrkörper-Verschiebungen sind dadurch bei der Schale möglich und Schwierigkeiten beim Lösen des Gleichungssystems können durch das Fehlen von "kinematic modes" nicht auftreten.

HALBE LOKALE STEIFIGKEITSMATRIX [kε]											

.5103	-.1890	-.0505	.0522	-.0015	-.2534	.1890	-.0174	-.3091	.0015	.0451	
-.0000	.5103	-.0505	.0015	-.3091	.1890	-.2534	-.0174	-.0015	.0522	.0120	
-.0000	-.0000	.0277	-.0120	.0451	.0174	.0174	.0040	.0451	.0120	-.0105	
-.0000	-.0000	-.0000	.0505	.1890	-.3091	-.0015	-.0451	-.2534	.1890	.0174	
-.0000	-.0000	-.0000	-.0505	.5103	.0015	.0522	.0120	-.1890	-.2534	.0040	
-.0000	-.0000	-.0000	-.0277	-.0000	.5103	-.1890	.0505	.0522	.0174	-.0120	
-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	.5103	.0505	.0015	-.3091	-.0451	
-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	.0277	.0120	.0451	-.0105	
-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	.5103	.1890	-.0505	
-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	.5103	.0505	
-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	.0277	

LOKALE SPANNUNGSMATRIX [σw]											
-.1.3397	.1478	.1533	.2147	-.0585	.1960	-.3165	-.0342	.9290	.2272	.1387	
-.1478	1.3397	-.1533	-.2272	-.9290	-.1960	.3165	.0342	.0585	-.2147	-.0637	
.1885	-.1885	.0000	-.1885	-.0198	.0198	-.0198	.0000	.0198	.1885	.1313	
.2147	.0585	-.0637	-1.3397	-.1478	.2272	.9290	-.1387	.1960	.3165	.0342	
-.2272	.9290	.1387	-.1478	-.13397	.0585	.0198	.0637	.3165	.1960	-.0342	
.1885	-.0198	-.1313	-.1885	.0000	-.0198	-.0198	.1313	.0198	.0198	-.0000	
-.1960	.3165	-.0342	-.1885	-.2272	1.3397	.1478	.1533	-.2147	.0585	.0637	
-.3165	.0198	.0342	-.9290	-.2272	.1478	.1885	.1313	.2272	.0585	-.1387	
.0198	-.0198	.0000	.2147	.1885	-.1885	-.1478	.0000	.2272	.0198	-.1313	
-.9290	.2272	-.1387	-.0585	-.3165	-.2147	.0585	.0637	.1885	.9290	.1313	
-.0585	-.2147	.0637	-.3165	-.1960	-.2272	.2272	.1387	1.3397	.1478	-.1533	
-.0198	-.1885	.1313	-.3165	-.0198	-.9290	.1885	.1313	.1478	.1885	.1533	
.5625	.1875	.1042	-.5625	-.0198	.0198	-.1885	-.1313	.1885	.1885	-.0000	
-.1875	.5625	-.1042	-.1875	-.5625	-.1875	.5625	.1042	.5625	.1875	-.1042	
.2292	-.2292	-.0000	-.2292	-.2292	.1875	-.1875	-.1042	.1875	.5625	.1042	
					-.2292	-.2292	-.0000	.2292	.2292	-.0000	

Bild 3.24 Element SV3KQ

3.2.4 Vorgeschriebene Randspannungen

In diesem Abschnitt wird am Beispiel des aus vier Elementen gebildeten Kragarmes kurz der Einfluss des Rotationsfreiheitsgrades auf die Genauigkeit vorgeschriebener Randspannungen gezeigt.

Wie bereits erwähnt, schlagen [P1], [D1], [W1] aufgrund der unbefriedigenden Resultate bei Elementen mit zwei Freiheitsgraden vor, entlang Rändern mit vorgeschriebenen Randspannungen spezielle Elemente zu verwenden, deren Ansatzfunktionen den Randspannungsverlauf berücksichtigen.

Vergleicht man nun die Resultate am gewählten Beispiel des aus vier Elementen gebildeten Kragarmes, muss folgendes vorausgeschickt werden:

- Da das Beispiel nur aus Randelementen besteht, darf man die Verbesserung der Resultate durch Einführung von erzwungenen statischen Randbedingungen nicht verallgemeinern. Eine Verbesserung der Randspannungen wird natürlich insbesondere dort, wo diese null sind und damit zu null gesetzt werden, stets eintreten. Die bessere Genauigkeit der Durchbiegungen wird sich aber bei Problemen, in welchen die Randelemente gegenüber den mascheninternen Elementen in der Minderzahl sind, nur noch beschränkt einstellen, und für die unendliche Masche gar ganz verschwinden. Das eklatante Weicherwerden des Modells SV2LL mit statischen Randbedingungen gegenüber demjenigen ohne, ergibt sich daraus, dass durch das Nullsetzen der entsprechenden β 's in den Spannungsansätzen für die verschwindenden Randspannungen "kinematic modes" entstehen.

Die daraus entstehenden Konsequenzen wurden bereits in Abschnitt 3.2.3.1 erläutert. Wolf gibt in [W3] eine Prozedur an, um die entstehenden linearen Abhängigkeiten im Gleichungssystem zu bestimmen.

Vergleicht man die Elemente mit drei Freiheitsgraden und ohne statische Randbedingungen mit dem Element SV2LL (ohne statische Randbedingungen) in den Punkten, wo effektiv Spannungen auftreten und in den Durchbiegungen, so sieht man, dass ausnahmslos bessere Resultate erreicht werden. Gegenüber dem Element SV2LL mit statischen Randbedingungen ergeben sich vor allem dort, wo die Spannungen null ergeben sollten und in Lasteinleitungspunkten, schlechte Ergebnisse. In den Durchbiegungen und effektiven Randspannungen jedoch, also bei Resultaten, die von praktischer Bedeutung sind, können sich die Elemente SV3LL, SV3KL und SV3KQ durchaus mit dem verbesserten Modell SV2LL messen. Da das Einführen von statischen Randbedingungen nicht nur die Berechnung der Steifigkeitsmatrizen kompliziert, sondern vor allem die Problemformulierung und -eingabe für den Benutzer erheblich erschwert, wurde im Anwendungsprogramm FLASH darauf verzichtet.

LASTFALL		MOMENT M						QUERKRAFT Q									
		vorgeschriebene Randspannungen						vorgeschriebene Randspannungen									
		berück- sichtigt		nicht berücksichtigt				berück- sichtigt		nicht berücksichtigt							
		Theorie	SV2LL	SV2LL	SV3LL	SV3LQ	SV3KL	SV3KQ		Theorie	SV2LL	SV2LL	SV3LL	SV3LQ	SV3KL	SV3KQ	
Vertikale Durch- biegung im Punkt C _m		27.00	26.27	15.14	29.76	16.80	26.78	26.32		216 ÷ 235.2		242.6	129.2	234.1	144.6	213.4	211.1
									Stabtheo- rie mit und ohne Quer- kraftver- formung								
Spannungen am freien Rand	σ_{xC_u}	1.50	1.50	.81	.84	.95	1.00	1.41		0.	0.	2.54	2.74	1.81	3.18	4.01	
	σ_{yC_u}	0.	0.	-.13	-.14	0.	-.10	-.35		0.	0.	.16	.02	1.59	.01	-.92	
	τ_{xyC_u}	0.	0.	.45	.21	-.10	.14	.02		0.	0.	.32	-.44	-1.80	-.63	-.85	
Spannungen am einge- spannten Rand	σ_{xA_u}	1.50	1.59	.83	1.63	.83	1.65	1.54		18.00	19.62	7.41	13.75	8.70	13.92	13.92	
	σ_{yA_u}	0.	0.	.01	.46	-.02	.53	.29		0.	0.	.06	2.97	-.47	3.15	3.41	
	τ_{xyA_u}	0.	0.	-.43	.09	-.43	.10	.04		0.	0.	4.88	-.45	-5.21	-.39	.34	

Belastungen und Schnittbezeichnungen siehe Beispiel 1.

Bild 3.25

3.2.5 Anwendungsbeispiel

Um die standard hybriden Elemente für einmal nicht nur mit der theoretischen Lösung, sondern auch mit einem anderen finiten Scheibenmodell mit drei Freiheitsgraden vergleichen zu können, ist hier als Beispiel die Berechnung der Ringspannungen an einer runden Scheibe aus [W4] gewählt worden.

Bild 3.26: Beispiel 2: Ringspannungen

Das zum Vergleich herangezogene Deformationsmodell Q12R12 besitzt als Knotenfreiheitsgrade die beiden Verschiebungen u und v sowie analog den Elementen SV3LL bis SV3KQ eine Rotation R_z senkrecht zur Scheibenebene. William [W4] verwendet Q12R12 zusammen mit einem Plattenelement als Schalenelement.

Die Resultate der hybriden Elemente sind, wie aus Bild 3.27 ersichtlich ist, fast ausnahmslos besser als die mit dem Deformationsmodell erhaltenen.

Es ist zu beachten wie alle Modelle die in Punkt 6 auftretende Spannungssingularität gut wiedergeben. Die hybriden Elemente weisen dabei den Vorteil auf, dass sich die Spannungsspitze auf die Genauigkeit der Resultate benachbarter Punkte weniger auswirkt als beim Deformationsmodell.

Finite Elemente	Resultatpunkte					
	1	2	3	4	5	6
Theorie [P6]	10.15	4.00	1.24	-.59	- 2.19	Singularität
SV3LL	8.57	4.00	1.20	-.65	- 2.22	- 6.67
SV3LQ	9.76	3.80	1.21	-.49	- 1.98	- 6.67
SV3KL	8.94	3.86	1.16	-.68	- 2.24	- 7.27
SV3KQ	10.03	3.87	1.02	-.97	- 3.10	- 7.40
Q12R12 [W4] (Deformationsmodell)	9.87	3.79	1.05	- 1.24	- 4.34	- 9.24
	55	56	57	58	59	60
Theorie	- 8.94	- 4.61	- 2.01	- 0.11	1.48	2.61
SV3LL	- 8.23	- 4.61	- 2.03	- 0.13	1.48	2.81
SV3LQ	- 8.74	- 4.54	- 2.05	- 0.22	1.31	2.76
SV3KL	- 8.48	- 4.52	- 1.99	- 0.10	1.49	2.93
SV3KQ	- 8.87	- 4.57	- 1.99	- 0.11	1.48	2.95
Q12R12	- 9.06	- 4.56	- 2.08	- 0.24	1.32	2.77

Bild 3.27: Resultate der Ringspannungen am Beispiel 2 für verschiedene Elemente

3.3 Hybride dreieckige und viereckige Plattenelemente

Die im Anwendungsprogramm für reine Plattenprobleme als auch für Schalenprobleme verwendeten hybriden Plattenelemente entsprechen jenen, die erstmals von Pian [P1] vorgeschlagen wurden. In diesem Kapitel werden die gewählten Ansatzfunktionen der Vollständigkeit halber angegeben. Zwei Beispiele sollen die Konvergenzeigenschaften und das Verhalten der Elemente mit oder ohne Einführung statischer Randbedingungen zeigen.

Die Herleitung für die neu entwickelten hybriden elastisch gebetteten Plattenelemente folgt im nächsten Abschnitt.

3.3.1 Ansatzfunktionen

a) Spannungsansätze

Bild 3.28: Randspannungs- und Verschiebungsparameter

Spannungsansatz im Innern:

$$\{\sigma\} = [\Psi]\{\beta\} + \{\Psi_0\}$$

$$\begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \\ q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & x^2 & xy & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^2 & xy & y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & y & -xy & 0 & 0 & 0 & 0 & -xy & x^2 & y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & -x & 0 & 2y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -y & 0 & 0 & 0 & x & y & 2x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_{17} \end{Bmatrix} + \{\Psi_0\}$$

Inhomogene Spannungsanteile:

$$\{\Psi_0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -xy/2 \\ -x/2 \\ -y/2 \end{Bmatrix} \quad \text{für eine gleichmässige Belastung in Richtung } z$$

Durch entsprechendes Ableiten wird die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen im Element ersichtlich:

$$\nabla\{\Psi_0\} + g = 0$$

$$\nabla\{\Psi\} = 0$$

Randspannungen:

$$\begin{aligned} \{s\} &= [\Psi_R]\{\beta\} + \{\Psi_{0R}\} & \{s\} &= \begin{Bmatrix} m_\eta \\ m_{\eta\xi} \\ q_\eta \end{Bmatrix} \\ &= [T_R](\{\Psi\}\{\beta\} + \{\Psi_0\}) \end{aligned}$$

$$[T_R] = \begin{bmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & -2\sin\alpha\cos\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha\cos\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha - \cos^2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

b) Verschiebungsansätze am Elementrand für dünne Platten

$$\{v_R\} = [\phi_R]\{w\}$$

$$\begin{Bmatrix} w_n \\ w, \eta \\ w, \xi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -(2-3\xi+\xi^3)/4. & -DY*(1-\xi-\xi^2+\xi^3)/8. & DX*(1-\xi-\xi^2+\xi^3)/8. \\ 0. & C*(1-\xi)/2. & S*(1-\xi)/2. \\ (3-3\xi^2)/(2*L) & S*(1+2\xi-3\xi^2)/4. & -C*(1+2\xi-3\xi^2)/4. \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -(2+3\xi-\xi^3)/4. & -DY*(-1-\xi+\xi^2+\xi^3)/8. & DX*(-1-\xi+\xi^2+\xi^3)/8. \\ 0. & C*(1+\xi)/2. & S*(1+\xi)/2. \\ (-3+3\xi^2)/(2*L) & S*(1-2\xi-3\xi^2)/4. & -C*(1-2\xi-3\xi^2)/4. \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_A \\ \theta_{xA} \\ \theta_{yA} \\ w_E \\ \theta_{xE} \\ \theta_{yE} \end{Bmatrix}$$

$$DX = X_E - X_A$$

$$DY = Y_E - Y_A$$

$$C = DX/L$$

$$S = DY/L$$

Bild 3.29: Randverschiebungsparameter

Vergleicht man die Randverschiebungsansätze des Plattenelementes mit denjenigen der Scheibenelemente SV3KL-SD3KQ so sieht man, dass eine beliebige räumliche Zusammensetzung der Elemente ohne Verletzung der Verschiebungs-kontinuität gemeinsamer Seiten möglich ist.

c) Verschiebungsansätze am Elementrand für dicke Platten (mit Querkraftverformung)

$$\{v_R\} = [\phi_R]\{w\}$$

$$\begin{Bmatrix} w_n \\ w_{,\eta} \\ w_{,\xi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & 0 \\ 0 & C*(1-\xi)/2. & S*(1-\xi)/2. \\ 0 & -S*(1-\xi)/2. & C*(1-\xi)/2. \\ -\frac{1}{2}(1+\xi) & 0 & 0 \\ 0 & C*(1+\xi)/2. & S*(1+\xi)/2. \\ 0 & -S*(1+\xi)/2. & C*(1+\xi)/2. \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} w_A \\ \theta_{xA} \\ \theta_{yA} \\ w_E \\ \theta_{xE} \\ \theta_{yE} \end{Bmatrix}$$

Bild 3.30: Randverschiebungen der Plattenelemente bei Berücksichtigung des Querkrafteinflusses

3.3.2 Eigenschaften der hybriden Plattenelemente, welche in FLASH verwendet werden

Die Plattenelemente müssen den gleichen Bedingungen (Invarianz, konstante Dehnungen, Starr-Körperverschiebungen) gehorchen wie sie in Abschnitt 3.2.3 zusammengestellt wurden. Diese sind auch tatsächlich erfüllt, wobei dafür die gleichen Ueberlegungen massgebend sind wie bei den Scheibenelementen (Abschnitt 3.2.3).

Elementbezeichnung	Randverschiebungsansätze	Spannungsansatz
<div>PV3KQ </div> <div>PD3KQ </div>	<div>w_n : kubisch</div> <div>w_η : linear</div> <div>w_ζ : quadratisch</div>	quadratisch
<div>PV3LQ </div> <div>PD3LQ </div>	<div>w_n : $\left. \begin{array}{l} w_\eta \\ w_\zeta \end{array} \right\}$ linear</div>	quadratisch

Bild 3.31: Die FLASH-Plattenelemente

Die numerische Untersuchung der FLASH-Plattenelemente wird aus folgenden Gründen auf die in Bild 3.31 zusammengestellten Viereckelemente beschränkt:

- Das prinzipielle Verhalten der Elemente zeigt sich in den Viereckelementen sehr deutlich, so dass sich eine Darstellung der Dreieckelemente hier erübrigt (Literatur dazu [P1], [W1]).
- Die Auswirkungen einer Variation der Spannungsansätze findet man bei Pian [P1]. Eine Erhöhung der Anzahl der Spannungsparameter führt erwartungsgemäss zu einem Steiferwerden des Modells.

Als Beispiel zur Veranschaulichung der Elementeigenschaften wird die Quadratplatte gewählt:

Belastungen :

- a) verteilte Last q
- b) Einzellast P (in Plattenmitte)

$$D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} ; \quad \nu = .3$$

Bild 3.32: Beispiel 3: Einfach gelagerte Quadratplatte

Berechnungsmethode Elementtypen	$w_{\max}$ $\alpha \cdot \frac{q \cdot a^4}{D} \cdot 10^{-5}$	$M_{\max}$ $\beta \cdot q \cdot a^2 \cdot 10^{-4}$	$Q_{\max}$ $\gamma \cdot q \cdot a \cdot 10^{-3}$
analytisch [T3] (ohne Querkraftverformung)	406.2	479.	338.
Masche : 1 x 1	390.6	491.	250.
2 x 2	405.2	483.	283.
PV3KQ 4 x 4	406.2	480.	308.
8 x 8	"	479.	322.
$G = \infty$ 16 x 16	"	"	330.
32 x 32	"	"	334.
analytisch [R1] (mit Querkraftverformung)	435.7	479.	338.
1 x 1	719.	566.	145.
2 x 2	504.	490.	73.
PV3KQ 4 x 4	433.	480.	35.
8 x 8	413.	479.	17.
$G = .385 \cdot E$ 16 x 16	408.	"	8.
$\frac{a}{t} = 1.0$ 32 x 32	406.	"	4. !!!
1 x 1	520.9	529.	318.
2 x 2	464.8	505.	289.
PV3LQ 4 x 4	445.9	488.	296.
8 x 8	440.9	481.	317.
$G = .385 \cdot E$ 16 x 16	439.6	479.	328.
$\frac{a}{t} = 8.0$ 32 x 32	439.2	"	333.

Bild 3.33: Resultate der einfach gelagerten Quadratplatte unter gleichmässiger Belastung

Elemente		analytisch	1 x 1	2 x 2	4 x 4	8 x 8	16 x 16	32 x 32
PV3KQ $G = \infty$	$w_{\max}$	$.01160 \frac{Pa^2}{D}$	.01045	.01138	.01155	.01159	.01160	.01160
	$Q_{\max}$	$.417 \frac{P}{a}$	.669	.466	.431	.420	.418	.417
PV3KQ $G = .385 \cdot E$ $a/t = 1.$	$w_{\max}$	—	.02052	.01642	.01327	.01213	.01176	.01165
	$Q_{\max}$	$.417 \frac{P}{a}$	.076	.021	.005	.001	0.	0. !!!
PV3LQ $G = .385 \cdot E$ $a/t = 8.$	$w_{\max}$	—	.01690	.01460	.01441	.01473	.01518	.01566
	$Q_{\max}$	$.417 \frac{P}{a}$	.799	.543	.484	.437	.422	.418

Bild 3.34: Einfach gelagerte Quadratplatten unter einer konzentrierten Einzellast

Alle Resultate (Bilder 3.33 und 3.34) sind ohne Berücksichtigung der statischen Randbedingungen erhalten worden, was die zum Teil schlechteren Resultate gegenüber andern in der Literatur (z.B. [W1]) angegebenen Konvergenztests erklärt. Die Notwendigkeit der Einführung statischer Randbedingungen wird anhand eines weiteren Beispiels im Abschnitt 3.3.3 eingehender diskutiert.

3.3.2.1 Das Viereckelement PV3KQ

Das Plattenelement PV3KQ besitzt einen quadratischen Spannungsansatz im Innern und kubische Randverschiebungen. Es eignet sich nur zur Berechnung dünner Platten, wenn der Einfluss der Querkraftverformung vernachlässigt werden kann ([P1], [W1]).

Die Schubverformung der Platte kann deshalb nicht berücksichtigt werden, weil die gewählten Randverschiebungsansätze eine Schiebung entlang der Seiten verunmöglichen. Senkrechte Schnitte zur Plattenmittelebene bleiben auch im verformten Zustand senkrecht zu dieser, d.h. $\gamma_{x_{id}} = \gamma_{y_{id}} = 0$.

Bild 3.35: Kubische Randverschiebungen

Aus den Beziehungen

$$\gamma_{x_{id}} = \frac{1}{G \alpha t} q_x = 0$$

$$\gamma_{y_{id}} = \frac{1}{G \alpha t} q_y = 0$$

sieht man deshalb sofort:

- wird der Schubmodul G nicht unendlich gesetzt (Vernachlässigung der Querkraftverformung), können $\gamma_{x_{id}}$ und $\gamma_{y_{id}}$ nur null werden, falls

$$q_x = q_y = 0.$$

In Bild 3.33 des Beispiels 3 kann man dies für die maximalen Querkräfte bestätigen finden.

Die Durchbiegungen konvergieren gegen die Werte, welche ohne Querkrafteinfluss erhalten werden, da bei einer unendlich feinen Masche nur der Verschiebungszustand erreicht werden kann, der keine Schiebungen $\gamma_{x_{id}}$ und $\gamma_{y_{id}}$ enthält.

Bild 3.36 zeigt die Steifigkeits- und Spannungsmatrizen für ein Einheitsplattenelement PV3KQ (Bild 3.52) ohne Berücksichtigung der Querkraftverformung.

HALBE LOKALE STEIFIGKEITSMATRIX [k_e]

11.7040	3.2260	3.2260	-5.7040	1.9260	-2260	-2960	1.0740	1.0740	-5.7040	1.0740	-2260	1.9260
-0000	1.6933	0.9030	-1.9260	.5267	-1.030	-1.0740	.4733	.3970	-2260	.3970	.3067	.1030
-0000	-0000	1.6933	-2260	.1030	.3067	-1.0740	.4733	.4733	-1.9260	-1.030	-1.030	.5267
-0000	-0000	-0000	11.7040	-3.2260	3.2260	-5.7040	.2260	1.9260	-2960	1.9260	-1.0740	1.0740
-0000	-0000	-0000	-0000	1.6933	-9030	.2260	.3067	.3970	1.0740	.4733	.4733	-3970
-0000	-0000	-0000	-0000	-0000	1.6933	-1.9260	.1030	.5267	-1.0740	-3970	.4733	.4733
-0000	-0000	-0000	-0000	-0000	-0000	11.7040	-3.2260	-3.2260	-5.7040	-1.9260	.2260	.2260
-0000	-0000	-0000	-0000	-0000	-0000	-0000	1.6933	.9030	1.9260	.5267	-1.030	.1030
-0000	-0000	-0000	-0000	-0000	-0000	-0000	-0000	1.6933	.2260	.1030	.3067	.3067
-0000	-0000	-0000	-0000	-0000	-0000	-0000	-0000	-0000	11.7040	3.2260	-3.2260	-3.2260
-0000	-0000	-0000	-0000	-0000	-0000	-0000	-0000	-0000	-0000	1.6933	1.9030	-9030
-0000	-0000	-0000	-0000	-0000	-0000	-0000	-0000	-0000	-0000	-0000	-0000	1.6933

LOKALE SPANNUNGSMATRIX [σ_w]

-8.5800	-2.0000	-4.2400	2.5800	-4.000	.2400	-7800	-2000	-0600	6.7800	8000	-1.9400
-8.5800	-4.2400	-2.0000	6.7800	-1.9400	.8000	-7800	-0600	-0600	2.5800	.2400	-4000
-19.5600	-5.6000	-6.1800	-7.5600	-1.6000	-7000	.7000	-0000	.0000	-7000	-7000	-0000
19.5600	6.1800	5.6000	19.5600	6.1800	-5.6000	7.5600	1.6000	.1800	19.5600	5.6000	-6.1800
2.5800	.2400	.8000	-8.5800	2.0000	-4.2400	6.7800	-0800	-1.6000	-7.5600	-2000	1.6000
6.7800	1.9400	.8000	-8.5800	4.2400	-2.0000	2.5800	-8000	-1.9400	-7800	.2000	-0600
.7000	-0000	.7000	-7000	.7000	.7000	.7000	-2400	-4000	-7800	.0600	-2000
7.5600	1.6000	.1800	-19.5600	5.6000	-6.1800	19.5600	-7000	.0000	-7000	.0000	-0000
19.5600	6.1800	5.6000	19.5600	6.1800	-5.6000	7.5600	-6.1800	-6.1800	-7.5600	-1.6000	.1800
-7800	.2000	.0600	6.7800	-8000	1.9400	-8.5800	2.0000	-1.6000	-7.5600	.1800	1.6000
-7800	.0600	.2000	2.5800	-2400	.4000	-8.5800	4.2400	4.2400	2.5800	.4000	-2400
.7000	.0000	-0000	-7000	.7000	.0000	.7000	-7000	-7000	6.7800	1.9400	-8000
7.5600	1.6000	.1800	-19.5600	5.6000	-6.1800	19.5600	-5.6000	-6.1800	-7.5600	-0000	.7000
-7.5600	-1.6000	-1.8000	7.5600	-1.8000	1.6000	-19.5600	-5.6000	-6.1800	-7.5600	-1.6000	.1800
6.7800	.8000	1.9400	-7800	-7800	.0600	2.5800	5.6000	6.1800	19.5600	6.1800	-5.6000
2.5800	.2400	.4000	-7800	-7800	.2000	6.7800	-4000	-2400	-8.5800	-2.0000	4.2400
.7000	.7000	-0000	-7000	-7000	.0000	.7000	-1.9400	-8000	-8.5800	-4.2400	2.0000
-19.5600	-5.6000	-6.1800	7.5600	-1.6000	.1800	-7.5600	.0000	.0000	19.5600	-7.0000	-5.6000
-7.5600	-1.6000	-1.8000	7.5600	-1.8000	1.6000	-7.5600	1.6000	5.6000	19.5600	5.6000	-5.6000
-0000	-1500	-5000	.0000	.1500	-5000	-0000	.5000	.1500	6.1800	-1500	.5000
-0000	-5000	-1750	.0000	.5000	-1750	-0000	.1750	.1750	6.1800	-5000	.1500
-1.4000	-1750	1.4000	.0000	.1750	-1.4000	-0000	-2.0000	-3.0000	19.5600	1.750	-1750
-6.0000	-2.0000	-3.0000	-6.0000	-3.0000	-2.0000	6.0000	-3.0000	-2.0000	19.5600	2.0000	-3.0000
6.0000	3.0000	-6.0000	-6.0000	3.0000	-2.0000	-6.0000	-2.0000	-3.0000	6.0000	3.0000	-2.0000

m_{x5}
m_{y5}
m_{xy5}
q_{x5}
q_{y5}

Bild 3.36 Element PV3KQ

3.3.2.2 Das Viereckelement PV3LQ

Um auch dicke Platten und Schalen berechnen zu können, enthält das Anwendungsprogramm FLASH das Element PV3LQ.

Verschiedene Autoren ([P5], [M3]) haben das Problem der Querkraftverformung bei standard hybriden Plattenelementen bereits behandelt. Mau hat die rascheste Konvergenz mit einem Viereckelement mit linearen Ansätzen für die Spannungen als auch für die Randverschiebungen erreicht.

Da bei linearen Spannungsansätzen aber die saubere Behandlung von gleichmässig verteilten Belastungen unmöglich ist, wird für FLASH ein Modell mit quadratischem Spannungsansatz und linearen Randverschiebungen verwendet. Bei linearem Spannungsansatz weist das Polynom der partikulären Lösung für eine gleichmässige Belastung notwendigerweise einen höheren Grad auf als der homogene Teil. Dies hat zur Folge, dass die Resultate von der Wahl der partikulären Lösung abhängen. Die Steifigkeits- und Spannungsmatrizen eines Einheitselementes PV3LQ (Bild 3.52) sind in Bild 3.37 angegeben.

Bei der praktischen Verwendung der dicken Platten- und Schalenelemente mit dem FLASH-Programm ist die langsamere Konvergenz derselben zu berücksichtigen. Insbesondere bei Tragwerken, in welchen der Querkrafteinfluss nur in gewissen Zonen von Bedeutung ist, d.h. wenn dünne und dicke Elemente gemischt eingesetzt werden, ist für die letzteren eine wesentlich feinere Mascheneinteilung zu wählen, um eine gleichmässige Genauigkeitsverteilung zu erreichen.

HALBE LOKALE STEIFIGKEITSMATRIX [ke]

12.7970	3.5023	3.5023	-5.2433	2.8962	.2745	-2.3104	.8807	-5.2433	.2745	2.8962
-.0000	2.4838	.0296	-2.8962	.7764	-.5624	-.8807	-.3739	.2745	.8905	.5624
-.0000	-.0000	2.4838	.2745	.5624	.8905	-.8807	.5766	-2.8962	-.5624	.7764
-.0000	-.0000	12.7970	.2745	-3.5023	3.5023	-5.2433	-2.745	-2.3104	-.8807	.8807
-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	2.4838	-.0296	-2.745	.8905	.8807	-.3739	-.5766
-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	2.4838	2.4838	-2.8962	.5624	-.8807	-.5766	-.3739
-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	12.7970	-.0000	12.7970	-3.5023	-5.2433	-2.8962	-.2745
-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	2.4838	2.8962	.7764	-.5624
-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	.0296	-.2745	.5624	.8905
-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	2.4838	12.7970	3.5023	-3.5023
-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	2.4838	-.0296
-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	-.0000	2.4838

LOKALE SPANNUNGSMATRIX [ow]

-6.9892	-.3873	-4.3863	1.3939	-1.2000	-.7917	.2847	-.7196	5.3106	.6282	-1.0157
-6.9892	-4.3863	-.3873	5.3106	-1.0157	.6282	.2847	.5983	1.3939	-.7917	-1.2000
4.9668	1.5860	1.5860	-3.0084	1.2474	-.6068	1.0501	-.2682	-3.0084	-.6068	1.2474
-23.2836	4.6255	-16.8734	8.1761	-5.9932	-2.5113	-8.1761	9.3197	23.2836	7.2055	-5.0424
23.2836	16.8734	-4.6255	-23.2836	5.0424	-7.2055	8.1761	-9.3197	-8.1761	2.5113	5.9932
1.3939	1.2000	-.7917	-6.9892	.3873	-4.3863	5.3106	-1.0157	.2847	.7196	.5983
5.3106	1.0157	.6282	-6.9892	4.3863	-.3873	1.3939	.7917	.2847	-.5983	-.7196
3.0084	1.2474	.6068	-3.0084	1.5860	-.6068	3.0084	-1.2474	-1.0501	.2682	.5983
8.1761	-5.8378	9.3197	8.1761	-4.6255	-16.8734	23.2836	-7.2055	-8.1761	5.8378	9.3197
-8.1761	5.8378	9.3197	-8.1761	4.6255	-16.8734	8.1761	2.5113	-8.1761	5.8378	-9.3197
5.3106	.6282	-.7196	.2847	-.5983	.7196	-6.9892	.3873	1.3939	-9.3197	-5.8378
1.3939	-.7917	.7196	.2847	-.5983	.7196	-6.9892	.3873	1.3939	1.2000	.7917
3.0084	.6068	.6068	-3.0084	.6068	-1.2474	4.9668	-1.5860	-3.0084	1.0157	-.6282
8.1761	-5.8378	9.3197	8.1761	7.2055	-5.0424	23.2836	-4.6255	-8.1761	-1.2474	.6068
-8.1761	5.8378	9.3197	-8.1761	5.9932	-7.2055	23.2836	-4.6255	23.2836	-5.9932	-2.5113
5.3106	.6282	1.0157	.2847	-.5983	.7196	-6.9892	.3873	-6.9892	5.0424	-7.2055
1.3939	-.7917	1.2000	.2847	-.5983	.7196	5.3106	-1.0157	-6.9892	-4.3863	4.3863
3.0084	.6068	.6068	-3.0084	.6068	-.2682	3.0084	-1.2474	-4.9668	-1.5860	1.5860
-23.2836	-8.1761	2.5113	8.1761	5.8378	9.3197	-8.1761	5.9932	23.2836	-4.6255	-16.8734
-8.1761	2.5113	5.8378	-8.1761	9.3197	7.2055	-23.2836	2.5113	23.2836	-4.6255	16.8734
.0000	-.4951	-.4951	-.0000	.4951	-.1549	.0000	.4951	-.0000	-.4951	.1549
-1.5042	-.2011	-.2011	1.5042	-.2011	-.4951	-.0000	.4951	1.5042	-.2011	-.4951
-7.5537	-6.062	-3.7769	-7.5537	-6.062	-3.7769	7.5537	-6.062	7.5537	-6.062	-3.7769
7.5537	3.7769	.6062	-7.5537	3.7769	-.6062	-7.5537	3.7769	-7.5537	3.7769	-.6062

Bild 3.37 Element PV3LQ

3.3.3 Vorgeschriebene statische Randbedingungen

In Abschnitt 3.2.4 ist bereits erwähnt worden, dass im Anwendungsprogramm FLASH auf die Einführung statischer Randbedingungen verzichtet wird. An der gleichen Stelle ist dafür auch bereits eine eingehende Begründung angegeben.

In diesem Abschnitt soll nun anhand des bekannten Beispiels der aufgelegten schiefen Platte unter gleichmässiger Belastung gezeigt werden, dass durch eine "elementgerechtere" Spezifikation der kinematischen Randbedingungen Verbesserungen der Resultate erreicht werden können, welche diejenigen noch übertreffen, die durch die unvergleichlich aufwendigere Einführung statischer Randbedingungen erhalten werden.

Bild 3.38: Beispiel 4: Schiefe aufgelegte Platte

Für das gewählte Beispiel, von Wolf [W1] als "enfant terrible" der Plattenbiegeprobleme bezeichnet, liegt eine Lösung von Morley [M1] vor, welche sehr genau ist und auf einer Reihenentwicklung beruht, mit nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmten Koeffizienten.

In [W1] werden die mit hybriden Standardelementen erhaltenen Lösungen mit andern finiten Elementmodellen verglichen. Hier sollen lediglich verschiedene Formulierungen der Randbedingungen am Element PV3KQ verglichen werden.

Element	PV3KQ(1)	PV3KQ(2)	PV3KQ(3)
stat. Randbedingung	nicht erfüllt	erfüllt	nicht erfüllt
entlang den Rändern:	$m_n \neq 0.$	$m_n = 0.$	$m_n \neq 0.$
stumpfe Ecken:	$\theta_x = \theta_y = 0.$	$\theta_x = \theta_y = 0.$	$\theta_x = 0. ; \theta_y \neq 0.$

Bild 3.39: Verschiedene Randbedingungen für das Beispiel 4

Bild 3.39 zeigt die verschiedenen statischen und kinematischen Bedingungen, welche entlang der Seiten und in der stumpfen Ecke eingeführt wurden.

Masche	PV3KQ(1)	PV3KQ(2) [W1]	PV3KQ(3)
analytisch : $w_{maxc} = .408 \cdot 10^{-3} \frac{p \cdot l^4}{D}$ [M1]			
2 x 2	.139	.438	.597
4 x 4	.226	.426	.448
8 x 8	.297	.420	.420
16 x 16	.332	.418	.416
32 x 32	.354	—	.413

Bild 3.40: Konvergenz der Durchbiegung in Plattenmitte unter gleichförmiger Belastung

Masche	PV3KQ(1)	PV3KQ(2)	PV3KQ(3)
analytisch : $m_{xc} = 1.91 \cdot 10^{-2} \cdot pl^2$			
2 x 2	.905	2.51	2.41
4 x 4	1.01	1.92	2.21
8 x 8	1.50	1.90	1.86
16 x 16	1.70	1.94	1.93
32 x 32	1.75	—	1.92
analytisch : $m_{yc} = 1.08 \cdot 10^{-2} \cdot pl^2$			
2 x 2	.33	1.61	1.64
4 x 4	.09	1.16	1.37
8 x 8	.65	1.05	1.04
16 x 16	.81	1.11	1.13
32 x 32	.88	—	1.11

Bild 3.41: Konvergenz der Hauptmomente in Plattenmitte unter gleichförmiger Belastung

Als Begründung für die Formulierung der statischen Randbedingungen nach (3) kann man folgendes sagen: Im Eckpunkt der stumpfen Ecke weisen nach der Kirchhoff'schen Plattentheorie beide Momente m_x und m_y Singularitäten auf. Die entsprechenden Krümmungen werden also unendlich. Das bedeutet, dass die Rotationsfähigkeit um den Auflagerrand erst in unmittelbarer Umgebung des Eckpunktes stark abnimmt. Bei der finiten Elementformulierung ergibt sich durch das Einspannen des Eckknotens nach (1) aber eine Verhinderung der Randverdrehung bis zum nächsten Randknoten und demgemäss eine zu steife Lösung. Mit den kinematischen Randbedingungen nach (3) definiert man eine "mittlere" Rotationsfähigkeit für den Rand zwischen dem Eckpunkt und den zwei anschließenden Knoten. Die Resultate in den Bildern 3.40 und 3.41 zeigen, dass man mit dieser einfachen physikalischen Ueberlegung ebenfalls zu ausgezeichneten Resultaten gelangen kann. Wie bei den Scheiben bereits dargelegt wurde, führt die aufwendige Einführung statischer Randbedingungen wohl meist zu einer Verbesserung der Resultate, doch muss diese Erhöhung der Genauigkeit wie das Beispiel 4 zeigt nicht unbedingt Folge einer statischen Erfüllung gewisser Zwangsbedingungen sein, sondern kann ebenso sehr aus einer Verschmierung anderer Einflüsse entstehen.

Es bleibt noch zu zeigen, dass auch beim Vorschreiben einer mittleren Rotation im stumpfen Eck der Platte die dort vorhandenen Momentensingularitäten auftreten.

Bild 3.42: Verlauf der Hauptmomente m_x , m_y von der Plattenmitte zur stumpfen Ecke (Elementmasche 16 x 16)

Aus Bild 3.42 ist ersichtlich, dass mit der "elementgerechteren" Formulierung (3) der kinematischen Randbedingungen die Momente selbst in unmittelbarer Nähe der stumpfen Ecke gut mit der analytischen Lösung übereinstimmen.

Im nächsten Abschnitt, der die elastisch gestützten Plattenelemente behandelt, wird noch eine weitere elegante Lösung für das Beispiel 4 angegeben.

3.4 Hybride dreieckige und viereckige elastisch gebettete Plattenelemente

Sehr oft stellt sich bei der Berechnung von Flächentragwerken das Problem der elastischen Bettung von Platten und Schalen (z.B. Fundamentplatten, Pflasterdecken, Klärbecken, Reaktorgefäße, etc.). Bei der üblichen finiten Elementanalyse wird das echte Tragverhalten der elastisch gebetteten Flächentragwerke meist nicht berücksichtigt, da die Auflagerbedingungen nur als kinematische Randbedingungen in den Knoten eingeführt werden.

In [A2] hat Anderheggen erstmals ein Viereckelement basierend auf einem Deformationsmodell vorgeschlagen, das die elastische Flächenlagerung wirklichkeitsgetreu erfasst. In diesem Abschnitt wird nun für ein standard hybrides Modell eine Lösung für den Fall des elastisch gestützten, frei drehbaren dreieckigen oder viereckigen Plattenelementes angegeben. Einige Beispiele sollen die vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten und die hohe Genauigkeit der Resultate veranschaulichen.

3.4.1 Erweitertes Hellinger-Reissner-Prinzip für die elastische Bettung

Als zusätzliche Unbekannte bei elastisch gebetteten Elementen tritt der Auflagerdruck, im weiteren Stützendruck S genannt, auf. In das allgemeine Hellinger-Reissner-Variationsprinzip

$$\begin{aligned} \delta \bar{I}(\sigma, v) = & \int_V [\delta \sigma (D^{-1} \sigma - \Delta v) + \delta v (\nabla \sigma + g)] \cdot dV \\ & + \int_R [\delta \sigma (v - \bar{v}) - \delta v (s - \bar{s})] \cdot dF \\ & + \int_D [\delta \sigma (v^+ - v^-) - \delta v (s^+ - s^-)] \cdot dF = 0 \end{aligned}$$

muss demzufolge S als zusätzliche Variable eingeführt werden.

Es ergibt sich dadurch eine erweiterte Gleichgewichtsgleichung und eine zusätzliche kinematische Bedingung:

$$\begin{aligned} \nabla \sigma + g - S &= 0 : && \text{Gleichgewichtsgleichung} \\ v - \frac{1}{f} S &= 0 : && \text{kinematische Bedingung} \end{aligned}$$

f: Federkonstante (Druck pro Einheitsverschiebung)
 v: Plattendurchbiegung

Die Variationsgleichung lautet dann in der finiten Elementformulierung wie folgt:

$$\delta \bar{I}(\sigma, v, S) = \sum_e \int_{V_e} [\delta \sigma (D^{-1} \sigma - \Delta v) + \delta v (\nabla \sigma + g - S) - \delta S (v - \frac{1}{f} S)] \cdot dV +$$

$$\int_R \dots + \int_D \dots$$

Formt man diese Gleichung wie in Abschnitt 2.2 um und integriert sie unter Beachtung von

$$\delta v \cdot S + v \cdot \delta S = \delta (v \cdot S)$$

kommt man zu

$$\bar{I}(\sigma, v, S) = \sum_e \bar{I}_e(\sigma, v, S) = \sum_e \left(\frac{1}{2} \int_{V_e} \sigma \cdot D^{-1} \cdot \sigma \cdot dV + \frac{1}{2} \int_{F_e} \frac{1}{f} \cdot S^2 \cdot dF + \right.$$

$$\left. + \int_{V_e} v \cdot (\nabla \sigma + g - S) \cdot dV - \int_{R_e} v \cdot s \cdot dF \right)$$

F_e = Elementfläche

3.4.2 Ansatzfunktionen und Stützendruckberechnung

Von den Ansätzen für σ , v_R , S (siehe Abschnitt 3.3.1) braucht lediglich der Ansatz für die Spannungen im Innern um den Stützendruck S erweitert zu werden. Es wird wiederum die anschaulichere Matrixschreibweise verwendet.

Lokale Spannungsansätze:

$$\{\sigma\} = \{\psi_0\} + [\Psi] \cdot \{\beta\}$$

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \\ q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \{\psi\}_1 & \dots & \{\psi\}_n & \{\psi\}_{n+1} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_n \\ \vdots \\ S \end{Bmatrix}$$

Für $\{\psi\}_1$ bis $\{\psi\}_n$ gelten die gleichen Ansätze wie für die ungestützten Plattenelemente. (Polynom 2. Grades mit $n = 17$).

Für den inhomogenen Spannungsanteil $\{\Psi\}_{n+1}$ wird folgender Ansatz gewählt:

$$\{\Psi\}_{n+1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ xy/2. \\ x/2. \\ x/2. \end{Bmatrix}$$

Es gilt:

$$\{\nabla\Psi_0\} = -g$$

$$\{\nabla\Psi\}_1 = \dots\{\nabla\Psi\}_n = 0$$

$$\{\nabla\Psi\}_{n+1} = \dots = 1$$

Damit ist die Gleichgewichtsbeziehung der Platte erfüllt:

$$m_{x,xx} + 2m_{xy,xy} + m_{y,yy} + g - S = \nabla\sigma + g - S = 0.$$

Die gesamte Formänderungsenergie des Elementes schreibt sich dann wie in Abschnitt 3.1:

$$\begin{aligned} \bar{I}_e = (\sigma, w, S) &= \frac{1}{2}(\{\beta\}^T [f^*] \{\beta\} + \{\beta\}^T \{f_0\}) \\ &- \{\beta\}^T [g] \{w\} - \{g_0\} \{w\} + C \end{aligned}$$

$$[f^*] = [f] + [f_s]$$

$$[f_s] = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & F_e & \\ & f & \end{bmatrix}_{n+1 \times n+1} \quad \text{d.h. mit } \beta_{n+1} = S$$

$$\frac{1}{2} \{\beta^T\} [f_s] \{\beta\} = \frac{1}{2} \int_{F_e} \frac{S^2}{f} \cdot dF$$

Da wie erwähnt die Wahl der Verschiebungsansätze gleich ist wie beim ungestützten Element, verläuft auch die Berechnung der lokalen Steifigkeits- und Spannungsmatrizen sowie der Lastvektoren wie in Abschnitt 3.1 beschrieben.

Den Stützendruck S findet man aus der Beziehung:

$$\{\beta\} = [f]^{-1} [g]^T \{w\} - [f]^{-1} \{f_0\}$$

$$\begin{aligned} S &= \beta_{n+1} \\ &===== \end{aligned}$$

Wie aus der Beziehung

$$\frac{1}{2}\{\beta\}^T [f_s] \{\beta\} = \frac{1}{2} \cdot \int_F \frac{S^2}{f} \cdot dF$$

ersichtlich ist wird vorausgesetzt, dass der Stützendruck S über das Element konstant verläuft.

Im weiteren ist zu erwähnen, dass die Herleitung, welche hier für ein Plattenelement gegeben wurde, auch allgemein gilt und zum Beispiel ebenso gut auf Scheibenelemente mit einer Stützung in der Elementebene angewendet werden kann.

3.4.3 Eigenschaften der hybriden elastisch gestützten Plattenelemente;
numerische Beispiele

Die elastisch gestützten Plattenelemente genügen der Starr-Körper-Bedingung in bezug auf eine Translation nicht mehr. Sie bleiben aber frei drehbar. Die Konvergenz ist gewährleistet. Eine Berücksichtigung der Rotationseinspannung der Stütze wäre mit dem angegebenen Algorithmus ebenfalls möglich. Das Bild 3.43 gibt eine Zusammenstellung der im Anwendungsprogramm verfügbaren Elemente.

Elementbezeichnung	Randverschiebungsansätze	Spannungsansatz
EPV3KQ EPD3KQ	w_n : kubisch w_η : linear w_ζ : quadratisch	quadratisch
EPV3LQ EPD3LQ	w_n : } w_η : } linear w_ζ : }	quadratisch

Bild 3.43: Die elastisch gestützten FLASH- Plattenelemente

Da die Anwendungsmöglichkeiten der elastisch gestützten Elemente sehr vielseitig sind, sollen deren Eigenschaften anhand von vier typischen Beispielen aufgezeigt werden.

Bild 3.44: Beispiel 5: Kreisförmige Fundamentplatte

Eine analytische Lösung des Problems der elastisch gestützten Kreisplatte unter einer Einzellast gibt Timoshenko in [T3]. Das Beispiel eignet sich deshalb besonders gut zum Vergleich mit der finiten Elementlösung, da auch die analytische Lösung von einem gleichmässig verteilten Reaktionsdruck ausgeht. Unter Ausnützung der Kreissymmetrie lässt sich die Platte mit einem einzigen Element approximieren. Da lediglich für die Durchbiegungen eine analytische Lösung dieses Spezialfalles mit konstantem Reaktionsdruck vorliegt, werden nur diese angegeben (Bild 3.45).

Dünne elastisch gebettete Kreisplatte unter einer Einzellast		
	$w_{\max} \quad (r = 0.)$	$w_{\min} \quad (r = 5.)$
analytisch [T3]	.043	.0391
EPD3KQ $\alpha = 5^\circ$	.0432	.0391
$\alpha = 10^\circ$	.0434	.0392
Dicke Platte (mit Querkraftverformung)		
EPD3LQ $\alpha = 5^\circ$	.0419	.0403
$\alpha = 10^\circ$	.0422	.0404

Bild 3.45: Einsenkungen der elastisch gestützten Kreisplatte

Die Durchbiegungsdifferenzen für die Lösung, welche die Querkraftverformung berücksichtigt, sind erwartungsgemäss kleiner und zeigen, dass man mit der Annahme eines gleichmässigen Reaktionsdruckes nur einen kleinen Fehler macht.

Man sieht auch, dass das ungünstige Seitenverhältnis von 11:1 beim Element mit 5°-Winkel überhaupt keinen Einfluss auf das Resultat hat.

Das nächste Beispiel (Bild 3.46) soll zeigen, wie es dank den elastisch gestützten Elementen möglich ist, das Tragverhalten von Flachdecken wirklichkeitsgetreu zu erfassen.

Bild 3.46: Beispiel 6: Unendlich ausgedehnte Flachdecke

Bekanntlich weisen die Momente über den Stützen bei der Annahme einer punktförmigen Lagerung Singularitäten auf. Da in der Baupraxis die Stützenabmessungen aber stets in der Grössenordnung der Plattendicke liegen, drängt sich eine wirklichkeitgetreuere statische Berechnung auf.

Bild 3.47: Elementmaschen

Die Approximation der Stützenköpfe mit elastisch gestützten Elementen liefert, wie das folgende Bild 3.48 zeigt, ausgezeichnete Resultate. Die Vergleichswerte stammen aus [T3].

u : a	Modelle	$M_{x=y=\frac{a}{2}} = \beta qa^2$	$M_{x=y=0}$	$M_{x=\frac{a}{2}; y=0}$	$M_{y=\frac{a}{2}; y=0}$
.10	analytisch [T3]	-.196	.0329	-.0182	.0508
	PV3KQ,EPV3KQ elastisch gestützt	-.195	.0330	-.0162	.0522
	nur PV3KQ punktgestützt	-.348	.0332	-.0162	.0528
.20	analytisch	-.131	.0321	-.0178	.0489
	-.132	.0322	-.0178	.0504
	-.288	.0322	-.0183	.0528
.30	analytisch	-.0933	.0308	-.0170	.0458
	-.0950	.0309	-.0185	.0466
	-.250	.0333	-.0201	.0521
.40	analytisch	-.0678	.0289	-.0158	.0415
	-.0693	.0291	-.0181	.0420
	-.223	.0335	-.0216	.0520

Bild 3.48 : Maximale Momente

Eine wesentliche Verbesserung der Resultate ergibt sich vor allem dort, wo die Auflagerfläche gross ist im Vergleich zu den Feldweiten. Allgemein darf man sagen, dass durch die Einführung der speziellen Stützelemente die Bemessung wesentlich vereinfacht wird, erhält man doch nun in jedem Punkt ein effektiv wirkendes Moment.

Das dritte Beispiel mit elastisch gestützten Elementen (Bild 3.49) zeigt die Konvergenzeigenschaften der neuentwickelten Elemente. Dabei soll nicht nur

die Konvergenz der Momente untersucht werden, sondern auch eine Aussage über die Genauigkeit der Durchbiegungen und des Stützendruckes gemacht werden.

Bild 3.49: Beispiel 7: Flachdecke mit Mittelstütze unter gleichmässiger Belastung

Die Federkonstante f wurde so gewählt, dass die Einsenkung in der Mitte der Stütze null wird. Die Resultate können dadurch mit denen aus [A2] verglichen werden. In jener Publikation sind die Werte, welche mit einem Deformationsmodell erhalten wurden, denjenigen des PLATE-FOURIER-Programms [P5] gegenübergestellt.

Bild 3.50: Konvergenz von S_E und w_A

Obwohl die statischen Randbedingungen nicht vorgeschrieben worden sind, erreicht man selbst mit der groben 3x3 Elemententeilung Resultate die weniger als 1% von der analytischen Lösung für die Durchbiegung und den Stützendruck abweichen, falls man elastisch gestützte Elemente verwendet.

Modelle	Anzahl Gleichungen	M_{xE}	M_{yE}	M_{xB}	M_{yC}	M_{yD}
Plate - Fourier		-755.0	-689.3	267.32	192.29	-404.56
VKPL28 (Deformationsmodell [A2])	512	-757.4	-691.4	267.20	192.33	-404.58
FLASH EPV3KQ +PV3KQ	27	-559.0	-580.4	—	—	-28.4
	48	-698.2	-634.9	357.8	303.5	-332.6
	108	-748.3	-682.2	278.9	208.8	-387.9
	192	-758.1	-691.8	267.8	200.4	-397.9
	588	-762.7	-696.4	268.3	193.8	-403.6
FLASH PV3KQ (punktgestützt)	27	-1223.7	-1272.9	—	—	-27.3
	48	-1366.8	-1302.4	360.7	305.1	-343.1
	108	-1435.7	-1367.8	280.5	208.9	-398.7
	192	-1453.1	-1385.3	271.1	202.1	-408.9
	588	-1464.9	-1397.1	271.8	195.5	-414.7

Bild 3.51: Vergleich der Momente mit einem Deformationsmodell und einer Fourieranalyse

Bild 3.51 zeigt die gute Uebereinstimmung der Resultate zwischen der Approximation mit Fourier-Reihen, dem Deformationsmodell VKPL28 mit 6 Knotenfreiheitsgraden und 4 zusätzlichen Freiheitsgraden in Seitenmitte sowie dem hybriden elastisch gestützten Modell. Vor allem die Stützenmomente sind schon bei grober Elementeinteilung sehr genau, wobei die Diskrepanz zu den Resultaten über der Punktstützung besonders ins Auge fällt. Die Werte für M_{xE} und M_{yE} im Falle der Punktstützung sind aber insofern als sehr gut einzustufen als dass sie eine effektive Singularität tatsächlich kräftig zeigen, ohne die Momente nichtsingulärer Punkte zu verfälschen.

Der Vollständigkeit halber und um eine Vergleichsmöglichkeit für eventuelle weitere elastisch gestützte Modelle zu schaffen, sind im folgenden die Steifigkeits- und Spannungsmatrizen für je ein Einheitselement EPV3KQ und EPV3LQ angegeben.

$$G = \infty \text{ bzw. } G = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ ((E)PV3LQ)}$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = 1.$$

$$\nu = .3$$

$$\frac{1}{f} = 0.$$

$$t = 1. \text{ bzw. } t = .125 \text{ ((E)PV3LQ)}$$

Bild 3.52: Einheitselement

HALBE LOKALE STEIFIGKEITSMATRIX [ke]

114.3040	20.3260	20.3260	96.8960	-15.1740	16.8740	102.3040	-16.0260	-16.0260	-16.0260	96.8960	16.8740	-15.1740
-0.0000	4.5433	3.7530	15.1740	-2.3233	2.7470	16.0260	-2.3767	-2.3767	-2.3767	16.8740	3.1567	-2.7470
-0.0000	-0.0000	4.5433	16.8740	-2.7470	3.1567	16.0260	-2.4530	-2.4530	-2.4530	15.1740	2.7470	-2.3233
-0.0000	-0.0000	-0.0000	114.3040	-20.3260	20.3260	96.8960	-16.8740	-16.8740	-16.8740	102.3040	16.0260	-16.0260
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	4.5433	-3.7530	-16.8740	3.1567	2.7470	-2.3767	-16.0260	2.4530	2.4530
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	4.5433	15.1740	-2.7470	-2.3233	2.4530	16.0260	-16.8740	-2.3767
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	114.3040	-20.3260	-20.3260	15.1740	96.8960	-16.8740	-16.8740
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	4.5433	3.7530	3.7530	-15.1740	2.7470	3.1567
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	4.5433	4.5433	-16.8740	2.7470	3.1567
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	114.3040	20.3260	-20.3260
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	4.5433	-3.7530
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	4.5433

LOKALE SPANNUNGSMATRIX [σw]

-28.0800	-5.2500	-7.4900	-16.9200	2.8500	-3.0100	-20.2800	3.0500	3.1900	3.1900	-12.7200	-2.4500	1.3100
-28.0800	-7.4900	-5.2500	-12.7200	1.3100	-2.4500	-20.2800	3.1900	3.0500	3.0500	-16.9200	-3.0100	2.8500
7.0000	1.7500	1.7500	5.6000	-1.0500	.3500	7.0000	-1.0500	-1.0500	.3500	5.6000	.3500	-1.0500
-122.1600	-23.2800	-23.2800	-95.0400	15.5000	-16.9200	-110.1600	18.7000	17.2800	17.2800	-83.0400	-11.5000	10.9200
122.1600	23.2800	22.7000	83.0400	-10.9200	11.5000	110.1600	-17.2800	-18.7000	-18.7000	95.0400	16.9200	-15.5000
-16.9200	-2.8500	-3.0100	-28.0800	5.2500	-7.4900	-12.7200	2.4500	1.3100	1.3100	-20.2800	-3.0500	3.1900
-12.7200	-1.3100	-2.4500	-28.0800	7.4900	-5.2500	-16.9200	3.0100	2.8500	2.8500	-20.2800	-3.0500	3.1900
-5.6000	-1.0500	-3.500	-7.0000	1.7500	-1.7500	-5.6000	.3500	1.0500	1.0500	-7.0000	-1.0500	1.0500
-95.0400	-15.5000	-16.9200	-122.1600	22.7000	-23.2800	-83.0400	11.5000	10.9200	10.9200	-110.1600	-18.7000	17.2800
-83.0400	-10.9200	-11.5000	-122.1600	23.2800	-22.7000	-95.0400	16.9200	15.5000	15.5000	-110.1600	-17.2800	18.7000
-20.2800	-3.0500	-3.0500	-12.7200	2.4500	-1.3100	-28.0800	5.2500	7.4900	7.4900	-16.9200	-2.8500	3.0100
-20.2800	-3.1900	-3.0500	-16.9200	3.0100	-2.8500	-28.0800	7.4900	5.2500	5.2500	-12.7200	-1.3100	2.4500
7.0000	1.0500	1.0500	5.6000	-3.500	1.0500	7.0000	-1.7500	-1.7500	-1.7500	5.6000	1.0500	-3.500
110.1600	18.7000	17.2800	83.0400	-11.5000	10.9200	122.1600	-22.7000	-23.2800	-23.2800	95.0400	15.5000	-16.9200
-110.1600	-18.7000	-17.2800	-95.0400	16.9200	-15.5000	-122.1600	23.2800	22.7000	22.7000	-83.0400	-10.9200	11.5000
-12.7200	-2.4500	-1.3100	-20.2800	3.0500	-3.1900	-16.9200	2.8500	3.0100	3.0100	-28.0800	-5.2500	7.4900
-16.9200	-3.0100	-2.8500	-20.2800	3.1900	-3.0500	-12.7200	1.3100	2.4500	2.4500	-28.0800	-7.4900	5.2500
-5.6000	-1.0500	-3.5000	-7.0000	1.0500	-1.0500	-5.6000	1.0500	1.0500	1.0500	-7.0000	-1.0500	1.7500
83.0400	11.5000	10.9200	110.1600	-18.7000	17.2800	95.0400	-15.5000	-16.9200	-16.9200	122.1600	23.2800	-23.2800
95.0400	16.9200	15.5000	110.1600	-17.2800	18.7000	83.0400	-10.9200	-11.5000	-11.5000	122.1600	23.2800	-23.2800
9.7500	1.4750	1.1250	9.7500	-1.4750	1.1250	9.7500	-1.4750	-1.1250	-1.1250	9.7500	1.4750	-1.1250
9.7500	1.1250	1.4750	9.7500	-1.1250	1.4750	9.7500	-1.1250	-1.4750	-1.4750	9.7500	1.1250	-1.1250
-1.4000	-1.750	-1.750	1.4000	-1.750	1.750	-1.4000	1.750	1.750	1.750	1.4000	1.750	-1.750
-6.0000	-2.0000	-3.0000	-6.0000	2.0000	-3.0000	6.0000	-2.0000	-3.0000	-3.0000	6.0000	2.0000	-3.0000
6.0000	3.0000	2.0000	-6.0000	3.0000	-2.0000	-6.0000	3.0000	2.0000	2.0000	6.0000	3.0000	-2.0000

Bild 3.53 Element EPV3KQ

HALBE LOKALE STEIFIGKEITSMATRIX [k_e]

91.3962	10.0523	10.0523	73.3559	-3.6538	6.8245	76.2888	-5.6692	-5.6692	73.3559	6.8245	-3.6538
-0.0000	3.0297	0.5754	3.6538	.2306	-0.0166	5.6692	-0.9198	-0.9198	6.8245	1.4363	.0166
-0.0000	-0.0000	3.0297	6.8245	.0166	1.4363	5.6692	.0307	.0307	3.6538	-0.0166	.2306
-0.0000	-0.0000	-0.0000	91.3962	-10.0523	10.0523	73.3559	-3.6538	-3.6538	76.2888	5.6692	-5.6692
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	3.0297	-0.5754	-6.8245	-0.9198	-0.9198	-5.6692	-0.9198	-0.9198
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	3.0297	3.6538	.2306	.2306	5.6692	-0.9198	-0.9198
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	91.3962	-10.0523	-10.0523	73.3559	6.8245	-3.6538
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	.5754	.5754	-3.6538	.2306	-0.0166
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	3.0297	3.0297	6.8245	1.4363	1.4363
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	91.3962	10.0523	-10.0523
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	3.0297	3.0297
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	3.0297

LOKALE SPANNUNGSMATRIX [σ_w]

-21.9277	-1.6321	-5.6311	-13.5445	.0449	-2.0366	-14.6537	.5253	1.8432	-9.6278	-0.6166	.2292
-21.9277	-5.6311	-1.6321	-9.6278	.2292	-0.6166	-14.6537	1.8432	.5253	-13.5445	-2.0366	.0449
9.7931	1.9882	1.9882	1.8178	.8452	-0.2046	5.8763	-0.6704	-0.6704	1.8178	-0.2046	.8452
-101.8827	-1.9244	-23.4234	-70.4230	.5568	-9.0612	-86.7753	.7121	15.8697	-55.3156	.6556	1.5075
101.8827	1.9244	1.9244	55.3156	-1.5075	-0.6556	86.7753	-0.7121	-0.7121	70.4230	9.0612	-0.5568
-13.5445	-0.0449	-2.0366	-21.9277	1.6321	-5.6311	-9.6278	.6166	.2292	-14.6537	-0.5253	1.8432
-9.6278	-0.2292	-0.6166	-21.9277	5.6311	-1.6321	-13.5445	2.0366	.0449	-14.6537	-1.8432	.5253
-1.8178	.8452	.8452	-9.7931	1.9882	-1.9882	-1.8178	-0.2046	-0.2046	-5.8763	-0.6704	.6704
-70.4230	-0.5568	-9.0612	-101.8827	1.9244	-23.4234	-55.3156	-0.6556	1.5075	-86.7753	-0.7121	15.8697
-55.3156	1.5075	-0.6556	86.7753	-1.9244	-1.9244	-70.4230	9.0612	-0.5568	-13.5445	-0.7121	.7121
-14.6537	-0.5253	-1.8432	-9.6278	.6166	-2.0366	-21.9277	1.6321	5.6311	-13.5445	-0.0449	2.0366
-14.6537	-1.8432	-0.5253	-13.5445	2.0366	-0.0449	-21.9277	5.6311	1.6321	-9.6278	-0.2292	.6166
5.8763	.6704	.6704	1.8178	.2046	-0.8452	9.7931	-1.9882	-1.9882	-9.6278	-0.8452	.2046
86.7753	.7121	15.8697	55.3156	.6556	1.5075	101.8827	-1.9244	-23.4234	70.4230	.5568	-0.0612
-86.7753	-0.7121	-15.8697	-55.3156	-0.6556	-1.5075	-101.8827	1.9244	23.4234	-55.3156	-1.5075	-0.6556
-9.6278	-0.6166	-2.0366	-14.6537	.8452	-0.2046	5.8763	-0.6704	-0.6704	1.8178	-0.2046	.8452
-13.5445	-0.2046	-2.0366	-14.6537	.5253	-1.8432	-9.6278	.6166	.2292	-13.5445	-0.5253	1.8432
-1.8178	.2046	.8452	-5.8763	1.8432	-0.6704	-14.6537	-0.5253	-0.5253	-13.5445	-0.6704	.6704
55.3156	-0.6556	-9.0612	-101.8827	1.9244	-23.4234	-55.3156	-0.6556	1.5075	-86.7753	-0.7121	15.8697
70.4230	1.5075	-0.6556	86.7753	-1.9244	-1.9244	-70.4230	9.0612	-0.5568	-13.5445	-0.7121	.7121
7.4692	.4675	.4675	7.4692	-0.1274	-0.4675	7.4692	-0.1274	-0.1274	-0.4675	.4675	-0.1274
7.4692	.4675	.4675	7.4692	-0.1274	-0.4675	7.4692	-0.1274	-0.1274	-0.4675	.4675	-0.1274
-1.5042	-0.2011	-2.011	1.5042	-0.4675	.4675	-1.5042	.2011	.2011	1.5042	-0.4675	.4675
-7.5537	-0.6062	-3.7769	-7.5537	.6062	-3.7769	7.5537	-0.6062	-0.6062	7.5537	.6062	-3.7769
7.5537	3.7769	.6062	-7.5537	3.7769	-0.6062	-7.5537	3.7769	.6062	-7.5537	3.7769	-0.6062

Bild 3.54 Element EPV3LQ

3.4.4 Linienlagerung mit elastisch gestützten Elementen

Wie das Beispiel 4 der schief gelagerten Platte zeigte, ist es oftmals nicht möglich, die kinematischen Randbedingungen in allen Punkten sauber zu erfüllen. Zusammen mit der Vernachlässigung der Einführung statischer Randbedingungen können sich dadurch schlechte Resultate ergeben. Im Abschnitt 3.3.3 wurde gezeigt, dass es möglich ist, durch ein entsprechendes Anpassen der kinematischen Randbedingungen an das finite Elementmodell eine beträchtliche Verbesserung der Resultate zu erzielen. Dieses "elementgerechtere" Formulieren der Randbedingungen lässt sich jedoch nicht verallgemeinern und bleibt damit stark problemabhängig. Auch die Einführung statischer Randbedingungen, wie sie Wolf in [W1] empfiehlt, stellt keine saubere Lösung dar. (Man denke nur an das Einspannen der stumpfen Ecke und das gleichzeitige Nullsetzen des entsprechenden Einspannmomentes im Spannungsansatz!).

Eine elegante Lösung des Problems der schief gelagerten Platte lässt sich mit Hilfe der elastisch gestützten Elemente finden. Anstelle der Spezifikation der kinematischen Randbedingungen in den Knoten wird die Auflagerlinie durch eine Reihe unsenkbar gestützter Elemente EPV3KQ approximiert.

Bild 3.55: Beispiel 8: Schiefe aufgelegte Platte unter gleichmässiger Belastung

Dabei dürfen auch sehr extreme Seitenverhältnisse der gestützten Elemente gewählt werden. Beim Vergleich der Resultate muss natürlich die grössere Anzahl Freiheitsgrade berücksichtigt werden.

Masche	Anzahl Gleichung.	PV3KQ(2)	PV3KQ(3)	Linienelemente	Anzahl Gleichung.
	analytisch $w_{\max} = .408 \cdot 10^{-3} \frac{p \cdot l^4}{D}$				
2 x 2	27	.438	.597	.478	75
4 x 4	75	.426	.448	.388	147
8 x 8	243	.420	.420	.393	363
16 x 16	867	.418	.416	.398	1083

Bild 3.56: Einsenkung in Plattenmitte

Es zeigt sich in Bild 3.56, dass für die Durchbiegungen Werte in der gleichen Genauigkeitsordnung erhalten werden, wie mit den in 3.3.3 beschriebenen Modellen, wobei allerdings eine grössere Anzahl Gleichungen benötigt wird.

Bild 3.57: Hauptmomente in Plattenmitte

Die Darstellung der Hauptmomente in Plattenmitte (Bild 3.57) zeigt die rasche Konvergenz der Lösung mit elastisch gestützten "Linienelementen". Vor allem für sehr grobe Elemententeilungen stimmen die Resultate besser mit der analytischen Lösung von [M1] überein als die Berechnung mit einer "mittleren" Rotationsfreiheit im stumpfen Knoten oder mit statisch berücksichtigten Randbedingungen (3.3.3).

Das erstaunlichste Resultat liefert jedoch die Berechnung des Momentenverlaufs vom Plattenzentrum zur stumpfen Ecke für die 2×2 -Masche. Obwohl das Feld nur vier Elemente aufweist, folgen die Momente recht gut der analytischen Lösung und selbst eine der Singularitäten in der stumpfen Ecke wird mit richtigem Vorzeichen angedeutet. Bild 3.58 zeigt die Resultate im Vergleich zur Berechnung mit voll eingespannten stumpfen Ecken und zum Modell mit verbesserten kinematischen Randbedingungen des Abschnittes 3.3.3 für je eine 2×2 und 4×4 Masche. Die 4×4 -Elemententeilung weist gleich viele Freiheitsgrade wie die 2×2 Masche auf, erreicht aber die Genauigkeit der Lösung mit elastisch gestützten Elementen bei weitem nicht.

Bild 3.58: Verlauf der Hauptmomente von C nach A für 2×2 , 4×4 und $2^\circ \times 2^\circ$ - Elemente

4. DIE BERECHNUNG VON RAEUMLICHEN FLAECHENTRAGWERKEN MIT EBENEN HYBRIDEN ELEMENTEN

Zur Berechnung von Faltwerken und Schalen werden im Anwendungsprogramm FLASH ebene Elemente verwendet, welche sich aus je einem der bereits beschriebenen Scheiben- und Plattenelemente zusammensetzen (Bild 4.1).

Bild 4.1: Zusammensetzung eines ebenen Schalenelementes

Die Approximation gekrümmter Flächen mit ebenen Elementen stellt eine zusätzliche Diskretisierung der Geometrie dar. Die erreichten numerischen Resultate lassen jedoch die Annahme zu, dass die Konvergenz der Lösung gewährleistet ist.

Die in den Abschnitten 3.2, 3.3 und 3.4 beschriebenen Scheiben- und Platten-elemente lassen sich prinzipiell alle miteinander zu einem Scheibenelement verbinden, doch führen, wie in der Diskussion der Scheibenelemente bereits ausgeführt, einige Kombinationen zu unerwünschten Nebeneffekten (z.B. verhinderte Starr-Körper-Verschiebungen). Bei der Entwicklung eines leistungsfähigen Schalenelementes aus den vorhandenen Scheiben- und Plattenanteilen ist auf die Behandlung der Scheiben- oder Membranwirkung das Hauptaugenmerk zu richten, stellt diese doch in Flächentragwerken meistens die wesentliche Tragwirkung dar.

4.1 Die dreieckigen und viereckigen hybriden Schalenelemente von FLASH

Die Familie der FLASH-Schalenelemente ist in Bild 4.3 zusammengestellt. Die Bezeichnungsweise folgt dabei der in Bild 4.2 eingeführten Konvention.

Da der Plattenspannungsansatz stets quadratisch gewählt wird (wegen den inhomogenen Spannungsanteilen, siehe Abschnitt 3.3.2.2) wird dieser in der Elementbezeichnung nicht erwähnt.

Bild 4.2 : Beispiel eines Schalelementes gebildet aus einem dünnen Plattenelement und einem Scheibenelement mit kubischen Randverschiebungen und linearem Spannungsansatz

Die eingehende Beschreibung der Elementeigenschaften der Scheiben- und Plattenanteile allein findet man in den Abschnitten 3.2 bis 3.4. Hier sollen deshalb lediglich diejenigen Probleme diskutiert werden, welche sich aus der Zusammensetzung der beiden Anteile ergeben. Als praktisches Beispiel, an welchem sich die verschiedenen Elementeigenschaften gut veranschaulichen lassen, wird das Problem des mit Flüssigkeit gefüllten zylindrischen Tanks gewählt (Bild 4.4).

Elemente	u_η	u_ξ	w	$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	m_x, m_y, m_{xy}	Schubverformung in den Knoten	Starr - Körper - Bedingung
(E)RV6KLL (E)RD6KLL	linear	linear	kubisch	linear	quadratisch	möglich	nur für Elemente mit parallelen Seiten erfüllt
(E)RV6LLL (E)RD6LLL	"	"	linear	"	"	"	"
(E)RV6KLQ (E)RD6KLQ	"	"	kubisch	quadratisch	"	"	nicht erfüllt
(E)RV6LLQ (E)RD6LLQ	"	"	linear	"	"	"	"
(E)RV6KKL (E)RD6KKL	kubisch	"	kubisch	linear	"	nur für Elemente mit parallelen Seiten möglich	erfüllt
(E)RV6LKL (E)RD6LKL	"	"	linear	"	"	"	"
(E)RV6KKQ (E)RD6KKQ	"	"	kubisch	quadratisch	"	unmöglich	"
(E)RV6LKQ (E)RD6LKQ	"	"	linear	"	"	"	"

Bild 4.3: Die FLASH - Schalenelemente

$a = 360.$	$E = 1.$	Elementmaschen bezogen
$d = 312.$	$\nu = .25$	auf einen Ringviertel :
$t = 14.$	$\gamma = .03613$	$3 \times 3, 6 \times 6, 9 \times 9, 12 \times 12$

Bild 4.4 : Beispiel 9: Zylindrischer Tank unter hydrostatischem Druck

Das Beispiel wurde als dünne Schale mit den Viereckelementen RV6KLL, RV6KLQ, RV6KKL und RV6KKQ, also allen möglichen Kombinationen der Scheibenelemente mit den dünnen Plattenelementen, durchgerechnet.

Die Elemente mit linearen Membranspannungsansätzen (RV6KLL, RV6KKL) weisen in Scheibenebene je zwei kinematische Verschiebungszustände auf, welche keine Formänderungsenergie liefern ("kinematic modes"). Die beiden Verschiebungszustände sind für die Elemente mit relativen und diejenigen mit absoluten Knotenverdrehungen je identisch und erlauben, wie bereits im Abschnitt 3.2 gezeigt, dem Element SV3LL die Starr-Körper-Verschiebung mit der Platte sowie dem Element SV3KL die Schubverformung in den Ecken, falls diese Elemente parallele Ränder aufweisen.

Die Verwendung von Elementen mit "kinematic modes" wurde bei der Beschreibung der Scheibenelemente für ebene Probleme deshalb nicht empfohlen, weil durch die vorhandenen linearen Abhängigkeiten je nach Art der kinematischen Auflagerbedingungen Schwierigkeiten bei der Lösung des Gleichungssystems auftreten können. Diese Gefahr besteht bei Schalenproblemen weiterhin, doch in erheblich geringerem Masse. Bei der Approximation gekrümmter Flächen addieren sich entlang aller Kanten zur MembranstEIFigkeit eines Elementes Beträge der Plattensteifigkeiten der anschliessenden Elemente, so dass die linearen Abhängigkeiten dort verschwinden.

Als einziges Element verletzt RV6KLQ die Starr-Körper-Bedingung. Dieses Ele-

ment sollte prinzipiell nicht verwendet werden und soll hier nur des Vergleichs wegen mit den andern Lösungen betrachtet werden.

Bild 4.5: Konvergenz der Einspannkkräfte eines Tanks unter hydrostatischem Druck

Das Element RV6KKQ lässt keine Schubverformungen in Scheibenebene in den Elementecken zu. Wie bereits gezeigt, konvergiert dieses Modell nicht, liefert aber in der praktischen Anwendung bei üblichen Elementmaschen sehr gute Resultate.

Die analytischen Lösungen für das Problem des Tanks unter hydrostatischem Druck stammen aus [T3]. Für die Berechnung mit FLASH wurden unter Berücksichtigung der Kreissymmetrie Elementstreifen mit drei, sechs, neun und zwölf Elementen über die Höhe und zugehörigen Sektorwinkeln von 30° , 15° , 10° und 7.5° gewählt. Dies entspricht den recht groben Approximationen des Viertelzylinders mit 3×3 , 6×6 , 9×9 und 12×12 Elementen.

Diskussion der numerischen Resultate

Betrachtet man den Konvergenzverlauf der Einspannkkräfte in Bild 4.5 sowie die Ausbiegungslinien für die 3×3 und 6×6 Masche, sieht man, dass das Element RV6KLQ, welches die Starr-Körper-Bedingung verletzt, am schlechtesten abschneidet und erwartungsgemäss eine zu steife Lösung liefert.

Bild 4.6 : Durchbiegung der Tankwand unter hydrostatischem Druck

Das andere Element, das nicht allen vorgeschriebenen Bedingungen genügt, das Element RV6KKQ mit verhinderter Eckverzerrung γ_{xy} , ergibt deshalb so gute Resultate, weil unter der gegebenen Belastung gar keine Schubspannungen auftreten. Die Berechnung rotationssymmetrischer Tragwerke stellt aber ein in der Praxis oft gestelltes Problem dar, und die Beibehaltung des Elementes RV6KKQ in der FLASH-Elementfamilie ist deshalb gerechtfertigt. Zudem erfüllt dieses Element die Starr-Körper-Bedingung für beliebige Elementformen, ohne "kinematic modes" aufzuweisen.

Die beiden Modelle mit linearen Spannungsansätzen (RV6KLL und RV6KKL) konvergieren rasch. Dasjenige mit kubischen Randverschiebungen ist erwartungsgemäss etwas weicher als dasjenige mit linearen. Das Vorhandensein von "kinematic modes" auf Elementebene führte zu keinerlei Schwierigkeiten beim Lösen des Gleichungssystems. Durch das Setzen eines Parameters können diese beiden Elemente im Anwendungsprogramm FLASH anstelle des Standardelementes RV6KKQ gewählt werden. Es ist lediglich zu beachten, dass ihre positiven Eigenschaften der Ermöglichung der Eckschubverzerrungen bei RV6KLL einerseits und der Starr-Körper-Verschiebungen bei RV6KKL andererseits nur bei Viereckelementen mit parallelen Seiten auftreten.

Momente und Normalspannungen

In Bild 4.7 ist der Verlauf des Wandmomentes M_y für verschiedene Elementmaschen aufgetragen. Da die Spannungen zwischen den Elementen Diskontinuitäten aufweisen, ergeben sich Sprünge im Momenten- und Normalkraftverlauf in den Knoten. Die Resultate in Bild 4.7 und Bild 4.8 stellen jeweils das arithmetische Mittel aus den umliegenden Elementen dar. Als weiteren Resultatpunkt kann man in FLASH den Elementschwerpunkt wählen. Interessant ist zu sehen, dass für jede Masche alle Schwerpunktmomente auf der einen Seite der analytischen Lösung liegen und zwar näher bei derselben als die Knotenmomente auf der anderen Seite. Dieser schwankende Verlauf der Momente erklärt sich aus der Art der Lastaufbringung. Die Elemente wurden jeweils mit einer gleichmässig über die Höhe verteilten Flächenlast belastet, was in den Knoten eine zusätzliche Diskontinuität im Nullzustand der Momente ergibt.

Bild 4.7: Verlauf des Wandmomentes für verschiedene Elementteilungen (3x3, 6x6, 9x9, 12x12 des Viertelzylinders)

Die Normalspannungen σ_f konvergieren sehr viel rascher als die Momente. Da keine anderen Spannungskomponenten auftreten ($\sigma_y = \tau_{yf} = 0$) war dies bereits nach der raschen Konvergenz der Wandausbiegung zu erwarten.

Zusammenfassend darf man sagen, dass die Einführung von Schalenelementen mit "kinematic modes" im Membrananteil eine wesentliche Erweiterung der Anwendungsmöglichkeit ebener hybrider Elemente zur Berechnung von Schalen darstellt. Im Gegensatz zu Dungan und Severn [D1], welche erstmals ein Element des Typs RD6KKQ vorschlugen, ist es mit den neuen Elementen ...KLL und ...KKL möglich, ohne Verletzung der wesentlichen Bedingungen der Starr-Körper-Ver-schiebung und Eckschubverformung, allgemein geformte räumliche Tragwerke zu berechnen. Als besonders positive Eigenschaften dieser hybriden Schalenelemente ist die rasche Konvergenz und das gute Verhalten im Bereich von Singularitäten und Diskontinuitäten der Materialeigenschaften zu erwähnen.

Bild 4.8: Verlauf der Tangentialspannungen für die Maschen 3×3 und 6×6

Die Möglichkeit, auch dicke Schalen zu berechnen sowie im Rahmen des Bettungszifferverfahrens die Flächenlagerung selbst gekrümmter Flächen berücksichtigen zu können, bedeutet für den Benutzer von FLASH die Erfassung aller linear elastischer Flächentragwerksprobleme in einem Programmsystem.

Auf die Berechnung von Faltwerken wird in dieser Arbeit aus folgenden Gründen nicht weiter eingegangen:

- Die Verwendung der anhand des Beispiels 9 vorgestellten Schalenelemente für diese Tragwerke ist bei Beachtung ihrer oben beschriebenen Eigenschaften problemlos.
- Die Haupttragwirkung erfolgt durch den Scheibenanteil, weshalb vor allem oder gar nur dessen Eigenschaften (siehe Abschnitt 3.2) bestimmend sind für das Verhalten der räumlichen Elemente.

Einzig auf den Spezialfall der Rippenplatten soll im nächsten Kapitel näher eingegangen werden. FLASH bietet nämlich dank der Möglichkeit Stabelemente exzentrisch an die Flächenelemente anzuschliessen den Vorteil, Rippenplatten als ebenes Problem zu behandeln.

5. EINE VEREINFACHTE BEHANDLUNG RIPPENFÖRMIGER AUSSTEIFUNGEN AN PLATTEN UND SCHALEN

In diesem Kapitel wird versucht, die Berechnung von mit Rippen ausgesteiften Flächentragwerken, welche nach der Schalentheorie erfolgen müsste, zu vereinfachen. Dabei sollen die Flächenelemente der Rippen durch Stabelemente ersetzt werden, was folgende Vorteile bietet:

- Für den Spezialfall ausgesteifter Platten kann das räumliche Problem auf ein ebenes Problem reduziert werden (Reduktion der Grösse des Gleichungssystems um mehr als die Hälfte!).
- Die Berechnung der lokalen Steifigkeitsmatrix für ein Stabelement ist wesentlich weniger aufwendig als für ein Schalenelement.

In Bild 5.1 sind drei verschiedene Modelle dargestellt, welche zur Approximation von Aussteifungen Verwendung finden können. In den meisten Computerprogrammen wird mit dem Modell 1 gearbeitet, d.h. es bleibt dem Benutzer selbst überlassen, die Balkensteifigkeit durch eine fiktive, die wahre Lage der Neutralachse und Mitwirkung der Platte berücksichtigende Stabsteifigkeit zu ersetzen. Selbstverständlich ist diese Möglichkeit auch im Programm FLASH

Bild 5.1: 3 Modelle zur Behandlung rippenförmiger Aussteifungen

vorhanden. Die Modelle 2 und 3 sind geeignet, um vom Programm aus die versteifende Wirkung einer exzentrischen Stablage zu berücksichtigen, falls der Benutzer die Exzentrizität der Stabachse zur Platten- oder Schalenmittelfläche angibt.

Beide Modelle können grundsätzlich für ebene und räumliche Probleme verwendet werden. Im folgenden wird zuerst die Berechnung von Rippenplatten als ebenes Problem behandelt. Im Abschnitt 5.2 werden die Modelle 2 und 3 dann noch auf ihre Anwendbarkeit für Schalenprobleme untersucht.

5.1 Die Berechnung von Rippenplatten als ebenes Problem

Der prinzipielle Unterschied zwischen Modell 2 und 3 ist in Bild 5.2 noch einmal dargestellt. Wegen der Reduktion des räumlichen Problems auf eine Plattenberechnung, können keine Verschiebungen in Plattenebene auftreten.

Bild 5.2: Dehnungszustand infolge einer Verdrehung

Dies bedeutet eine für beide Modelle unendliche Mitwirkung der Platte oder mit anderen Worten, die Neutralachse des Gesamtquerschnittes liegt in der Plattenebene. Die Lösungen werden deshalb zu steif ausfallen. Modell 3 ist wiederum steifer als das die Kontinuität zwischen Balken und Platte verletzende Modell 2. Einfach lässt sich dies zum Beispiel für den Steifigkeitskoeffizienten k_{ii} infolge einer Knotenverdrehung $\theta_{yi} = 1$ zeigen:

Modell 3:

Verschiebungsansatz: $w = \varphi(x) \cdot \theta_{yi}$

$$\begin{aligned} \text{mit } \theta_{yi} = 1: \quad w &= \varphi(x) = -\frac{x^3}{L^2} + \frac{x^2}{L} \\ w' &= \varphi'(x) = -\frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x}{L} \\ w'' &= \varphi''(x) = -\frac{6x}{L^2} + \frac{2}{L} \end{aligned}$$

und $\epsilon_\varphi = w'' \cdot z$ folgt:

$$k_{ii} = \int_V \varphi'' \cdot z \cdot E \cdot \varphi'' \cdot z \cdot dF \cdot dx = \int_0^L \varphi''^2 \cdot dx \cdot \int_F z^2 \cdot dF$$

$$\int_F z^2 \cdot dF = J_y = J_{\text{Stab}} + e^2 \cdot F_{\text{Stab}}$$

$$k_{ii} = E(J_{\text{Stab}} + e^2 \cdot F_{\text{Stab}}) \cdot \int_0^L \varphi''^2 \cdot dx = \frac{4EJ_{\text{Stab}}}{L} + \frac{4e^2 \cdot EF}{L}$$

$$k_{ii} = \frac{4E}{L}(J_{\text{Stab}} + e^2 \cdot F_{\text{Stab}})$$

Modell 2:

Verschiebungsansätze: $w = \varphi(x) \cdot \theta_{yi}$; $u = \psi(x) \cdot e \cdot \theta_{yi}$

mit $\theta_{yi} = 1$: $w = \varphi(x) = -\frac{x^3}{L^2} + \frac{x^2}{L}$ $\epsilon_\varphi = \varphi'' \cdot z$

$$u = e \cdot \psi(x) = -e \cdot \frac{x}{L} \quad \epsilon_\psi = e \cdot \psi' = -\frac{e}{L}$$

$$k_{ii} = \int_V \varphi'' \cdot z \cdot E \cdot \varphi'' \cdot z \cdot dF \cdot dx + \int_V e \cdot \psi' \cdot E \cdot e \cdot \psi' \cdot dF \cdot dx$$

$$\int_F z^2 \cdot dF = J_{\text{Stab}}$$

$$k_{ii} = \frac{4EJ_{\text{Stab}}}{L} + e^2 \cdot E \cdot F \cdot \int_0^L \psi'^2 \cdot dx$$

$$k_{ii} = \frac{4EJ_{\text{Stab}}}{L} + \frac{e^2 \cdot EF}{L}$$

Modell 2

u_1	v_1	w_1	θ_{x1}	θ_{y1}	θ_{z1}
$\frac{EA_x}{L}$				$-\frac{eEA_x}{L}$	
	$\frac{12EJ_z}{L^3}$				$-\frac{6EJ_z}{L^2}$
		$\frac{12EJ_y}{L^3}$		$\frac{6EJ_y}{L^2}$	
			$\frac{GJ_x}{L}$		
				$\frac{4EJ_y}{L} + \frac{e^2EA_x}{L}$	
					$\frac{4EJ_z}{L}$

A_x : Stabfläche
 J_x : Torsionssteifigkeit
 J_y, J_z : Trägheitsmomente

Modell 3

$\frac{EA_x}{L}$				$-\frac{eEA_x}{L}$	
	$\frac{12EJ_z}{L^3}$				$-\frac{6EJ_z}{L^2}$
		$\frac{12EJ'_y}{L^3}$		$\frac{6EJ'_y}{L^2}$	
			$\frac{GJ_x}{L}$		
				$\frac{4EJ'_y}{L}$	
					$\frac{4EJ_z}{L}$

$J'_y = J_y + e^2A_x$

Bild 5.3: Ausschnitte aus den Steifigkeitsmatrizen für die Modelle 2 und 3

Noch ausgeprägter tritt der Steifigkeitsunterschied in den Termen für eine Verschiebung $w_1 = 1$ auf. Modell 2 berücksichtigt das Balkenträgheitsmoment allein, während das Modell 3 das um $e^2 \cdot F$ vergrößerte Trägheitsmoment einsetzt. Je ein Ausschnitt der Steifigkeitsmatrizen für beide Modelle ist in Bild 5.3 angegeben. Bei der Behandlung ebener Probleme treten nur die den Freiheitsgraden w , θ_x und θ_y zugehörigen Elemente der Matrizen auf.

Um die beiden Modelle miteinander sowie für den ebenen und räumlichen Fall gegenüber einer Schalenberechnung und gegenüber der einfachen Balkentheorie vergleichen zu können, eignet sich das folgende Beispiel 10 des eingespannten Plattenbalkens sehr gut.

Bild 5.4: Beispiel 10: Eingespannte T-Träger, Abmessungen und Elementmaschen

In Bild 5.5 sind zuerst die Durchbiegungen in Trägermitte für zwei verschiedene Spannweiten bei gleicher Elementmasche dargestellt. Bei allen Berechnungen ist der Querkrafteinfluss in der Rippe berücksichtigt. Als reduzierte Querkraftfläche nach der Balkentheorie wurde näherungsweise ein Wert von 0,55 für α ermittelt. ($\alpha F = 0,55 \cdot 62 = 34$).

Um die Resultate der finiten Elementanalyse mit derjenigen der einfachen Balkenstatik vergleichen zu können, wird der Querkrafteinfluss im Plattenanteil der Flächenelemente vernachlässigt. Die Werte, welche in der Spalte "Schalenberechnung" angegeben sind, stammen aus einer FLASH-Berechnung

mit sehr feiner Elemententeilung (360 Elemente RV6KKL).

Lastfälle	Spannweiten	einfache Balkentheorie	Modell 2	Modell 3	Schalen- berechnung
verteilte Last p $w_m = \frac{p l^4}{384 E J} + \frac{p l^2}{8 G F'}$	$L = 7.2$ $L = 19.2$	.3765 13.1854	.3235 9.5063	.3094 8.6983	.4093 13.2021
Einzellast P $w_m = \frac{P l^3}{192 E J} + \frac{P l}{4 G F'}$	$L = 7.2$ $L = 19.2$	.02467 .3239	.02133 .2336	.02038 .2137	.02810 .3259

Bild 5.5: Durchbiegungen in Trägermitte bei der Behandlung als ebenes Problem

Für beide Modelle weichen die Durchbiegungen recht erheblich von der Schalenberechnung ab, welche ihrerseits für dieses Beispiel fast die gleichen Werte liefert wie die einfache Balkentheorie. Das "Aufschneiden" des Modells 3 zwischen Balken und Platte (entspricht Modell 2) wirkt sich erwartungsgemäss positiv aus, doch bleiben die Einsenkungen, insbesondere für die grössere Spannweite, immer noch viel zu klein. Interessant, und für die praktische Anwendung wichtig, ist der Einfluss der Steifigkeitsunterschiede auf die Schnittkräfte. In den Bildern 5.6 und 5.7 sind der Verlauf und die inte-

Bild 5.6: Momenten- und Querkraftverlauf in der Platte (ebene Modelle)

gralen Werte der Momente und Querkräfte im Einspannungsquerschnitt für den Lastfall Einzellast angegeben. Die Plattenschnittkräfte werden etwas zu klein, was durch die zu grosse Steifigkeit des Balkenelementes leicht zu erklären ist. Die Genauigkeit ist wesentlich besser als für die Durchbiegungen und auch der Schnittkraftverlauf stimmt trotz der wenigen Elemente gut. Es lässt sich somit sagen, dass sich die gewählten Stabmodelle (im Programm FLASH wird für ebene Berechnungen Modell 2 verwendet) für eine automatisierte Berechnung der Rippensteifigkeiten bei der ebenen Behandlung von Rippenplatten eignen. Abgesehen von den Verschiebungen lassen sich damit mit stark verringertem Aufwand gegenüber einer Schalenberechnung sehr gute Resultate erreichen.

analytisch	Modell 3			Modell 2		
	Stab	Platte	Total	Stab	Platte	Total
M = 1800.	1731.12	67.78	1798.9	1726.61	72.18	1798.8
Q = 1000.	857.87	139.07	996.94	846.81	149.71	996.5

Bild 5.7: Integrierte Schnittkräfte im Einspannquerschnitt für den Lastfall Einzellast und L = 7.2

5.2 Schalenaussteifungen

Auf die vereinfachte Behandlung von rippenförmigen Schalenaussteifungen soll nur kurz eingegangen werden, denn die Einsparungen im Rechenaufwand beschränken sich hier auf die einfachere Berechnung der lokalen Steifigkeitsmatrix und das Wegfallen der Knoten in den Rippen.

Grundsätzlich lassen sich die gleichen Modelle verwenden wie sie bei der Behandlung der Plattenaussteifungen vorgestellt wurden. Diese besitzen nun aber alle sechs Verschiebungsfreiheitsgrade in den Knoten.

Das Modell 2 wird wegen der fehlenden Kontinuität zwischen Balken und Flächentragwerk stets eine zu weiche Lösung liefern. Modell 3 wird etwas steifer sein als Modell 2, wobei die zusätzliche Steifigkeit im Rahmen der Differenz zwischen Modell 2 und 3 im ebenen Fall liegen dürfte. In Bild 5.9 findet man dies für die Durchbiegungen bestätigt. Diese weichen zudem wesentlich weniger von der Schalenberechnung ab als im ebenen Fall. FLASH ver-

wendet für räumliche exzentrisch angeschlossene Stäbe ebenfalls das Modell 2. Die hier nicht angegebenen Schnittkräfte stimmen wie bei der ebenen Berechnung gut mit der Schalenberechnung überein.

Bedingt durch das zu weiche Rippelement werden die Momente und Querkräfte in der Platte etwas zu gross.

Die Approximation von Schalenaussteifungen mit exzentrisch angeschlossenen Stäben kann überall dort empfohlen werden, wo über den Spannungsverlauf in der Rippe selbst (z.B. Querbiegemomente) keine genauere Aussage verlangt wird.

Lastfall	Spannweiten	Modell 2	Modell 3
verteilte Last p	L = 7.2	.4425	.4285
	L = 19.2	14.3358	13.5303
Einzellast P	L = 7.2	.02915	.02822
	L 19.2	.3525	.3326

Bild 5.8: Durchbiegungen in Trägermitte (Beispiel 10 ; räumliche Berechnung)

6. SCHLUSSBEMERKUNG

Die in den Kapiteln 3 und 4 beschriebenen neuen hybriden Elemente haben sich in der praktischen Anwendung alle als sehr erfolgreich erwiesen. Eine weitere Verbesserung der Scheiben-Modelle durch das Einführen zusätzlicher interner Verschiebungsfreiheitsgrade für die Schubverformungen ist denkbar und könnte ein interessantes Teilgebiet weiterer Forschungen auf dem Gebiet der hybriden Elemente darstellen.

Um dem Leser wenigstens einen kleinen Einblick in die Probleme der Informatik zu geben, welche bei der Uebertragung der gewonnenen theoretischen Erkenntnisse in ein praktisch anwendbares Computerprogramm auftreten, wird im folgenden Anhang das Programm FLASH kurz erläutert.

ANHANG : DAS COMPUTERPROGRAMM FLASH

In diesem Anhang sollen einige der wichtigsten programmtechnischen Eigenschaften von FLASH (Finite Element Analysis of SHells) beschrieben werden. Eine anhand von Beispielen erläuterte Programmbeschreibung findet man auch in [W6]. Die detaillierte Erklärung der Dateneingabe ist in [W5] angegeben.

Bei der Entwicklung eines Computerprogrammes zur Lösung technischer Probleme, welches für die praktische Anwendung in Ingenieurbüros bestimmt ist, gilt es vor allem die folgenden Ansprüche zu erfüllen:

- rechnerische Effizienz
- leichte Benützung.

Der erste Punkt erfordert die Wahl oder Entwicklung leistungsfähiger Rechenalgorithmen für die eigentliche Problemlösung sowie eine effiziente Daten- und Programmorganisation. Die zweite Forderung verlangt eine dem Ingenieur geläufige, praxisorientierte Problemformulierung und Eingabesprache. Die folgenden Angaben über das Programm FLASH zeigen kurz dessen wichtigste Eigenschaften in bezug auf die genannten Forderungen.

1. Programmaufbau und Datenorganisation

Das Statikprogramm FLASH ist in der Programmiersprache FORTRAN auf der CDC 6400/6500-Anlage des Rechenzentrums der ETH Zürich geschrieben worden. Es ist aus sechs sogenannten "Overlays", d.h. Programmteilen aufgebaut, welche im wesentlichen folgende Aufgaben lösen:

- Eingabe der strukturellen Daten
- Berechnung der lokalen Steifigkeits-, Last- und Spannungsmatrizen
- Lasteingabe
- Lösen des Gleichungssystems
- Resultatausgabe einzelner Lastfälle
- Ausgabe von Grenzwertflächen

In Bild 6.1 ist die Programmstruktur noch etwas detaillierter dargestellt. Die Aufteilung in Programmsegmente ist erstens deshalb nötig, weil das ganze Programm gar nicht im Zentralspeicher Platz finden würde und erfolgt zweitens aus dem Wunsch heraus, während eines bestimmten Rechenvorganges nur aktive Programmteile im Hauptspeicher zu haben, damit mehr Platz für Daten übrig bleibt. Die Unterteilung darf auf der anderen Seite nicht zu weit ge-

trieben werden, um den Daten- und Programmtransfer von den peripheren Speichermedien in den Zentralspeicher nicht übermässig anwachsen zu lassen. Die Schwierigkeiten einer optimalen Programmunterteilung liegen vor allem darin, die Gesamtbelegung im Zentralspeicher bei variablem Anteil der Daten zum Programm, für alle Overlays etwa konstant zu halten.

Der Datentransfer zwischen den Overlays geschieht in FLASH über einen Grossplattenspeicher. Die Daten werden dabei ohne zuerst einen "Buffer" (Pufferzone) im Zentralspeicher zu belegen, direkt aus diesem auf die Platten und zurück geschrieben. Eine weitere Einsparung an Rechenzeit und an Daten wird dadurch erreicht, dass die lokalen Elementmatrizen gleicher Elemente nur einmal berechnet werden.

Overlay 0.0 Organisation des Programmablaufs						
Overlay 1.0 Aufruf der Eingabe (ev. mit Plot)		Overlay 2.0 Berechnung der Steifigkeits-, Last-, Spannungsmatrizen für Platten und Scheiben. Zusammensetzung der Schalenelemente	Overlay 3.0	Overlay 4.0	Overlay 5.0	Overlay 6.0
Ov.1.1 Eingabe der strukturellen Daten	Ov.1.2 Zeichnung der Elementmasche		Bilden der globalen Lastvektoren	Gleichzeitiges Zusammen- setzen und Lösen des Gleichungssystems	Ausgabe der Verschiebungen, Reaktionen, Elementschnittkräfte und integralen Schnittkräfte	Ausgabe der Grenzwerte
Daten	Daten	Daten	Daten	Daten	Daten	Daten

Bild 6.1: Programmaufbau

Ihre Numerierung ist wichtig, bestimmt man doch durch sie die Struktur des Gleichungssystems, währenddem die Knotennumerierung beliebig sein darf. Die statische Kondensation erfolgt nach der Gauss'schen Vorwärtselimination. Ist die letzte Gleichung gelöst, gewinnt man die gesuchten Verschiebungen durch Rückwärtseinsetzen. Die Methode ist sehr effizient solange die "wave-front" nicht zu gross wird und ihrerseits unterteilt werden muss.

3. Problemformulierung und Datenaufbereitung

Neben der Entwicklung leistungsfähiger Elemente und numerisch effizienter Rechenalgorithmen wurde im Programm FLASH die Hauptanstrengung darauf gelegt, die Programmbenützung so einfach als möglich zu gestalten.

Die primitivste Art und Weise von einem Anwender Daten an ein Computerprogramm zu überweisen, besteht im Eingeben einer Liste formatgebundener Zahlen. Es ist klar, dass damit die Uebersichtlichkeit und Kontrollmöglichkeiten sowie der Komfort bei der Datenaufbereitung selbst minim sind.

FLASH besitzt deshalb eine eigene Eingabesprache, welche es dem Benützer erlaubt, sein Problem in der ihm gewohnten Terminologie zu spezifizieren. Der ganze Eingabevorgang kann als eine Reihe von Befehlen, welche aus Worten und ganzen oder gebrochenen Zahlen bestehen, streng logisch in einem Schema auf bloss zwei Seiten dargestellt werden (Bild 6.3). Die einzelnen Befehle sind so aufgebaut, dass sich eine nähere Erläuterung meist erübrigt, da sich ihr Sinn mit der Vorstellung des Ingenieurs von seinem idealisierten Tragwerk leicht verbinden lässt. Eine wesentliche Hilfe bei der Problemformulierung stellen verschiedene "mesh-generators" dar, welche im Eingabeschema enthalten sind [W5].

EINGABESCHEMA ZUM PROGRAMM FLASH

4. Resultatausgabe

Neben der Ausgabe der Deformationen, Reaktionen und Auflagerdrücke elastisch gestützter Elemente, erhält der Benutzer wahlweise die Momente und Membranspannungen in den Elementschwerpunkten oder in den Knoten. Die Werte in den Knoten können, da zwischen den Elementen die Spannungen diskontinuierlich verlaufen, als Elementanteile oder als Mittelwerte der angeschlossenen Elemente verlangt werden. Eine zusätzliche Bemessungshilfe stellt in FLASH die Ausgabe integraler Schnittkräfte dar. Da die Spannungsanteile aus Biegung, Normalkraft, Querkraft und Torsion bei einer normalen finiten Elementanalyse im allgemeinen nicht getrennt werden können, bedeutet diese Ausgabeform eine grosse Arbeitserleichterung, erfordern doch die einzelnen Beanspruchungsarten im allgemeinen eine differenzierte Betrachtung bei der Bemessung.

Bild 6.4: Integrale Schnittkräfte

Die Berechnung der integralen Schnittkräfte erfolgt nicht über ein Aufintegrieren der Spannungen entlang eines definierten Schnitttrandes, sondern geschieht über die aus der finiten Elementberechnung erhaltenen Reaktionskräfte. Damit ist das Gleichgewicht im Schnitt exakt erfüllt. Ein Schnittufer wird durch die Angabe der auf der einen Seite des Schnittes liegenden Elemente definiert.

$$\{B\} = \sum_{i=1}^{n_k} [T] \{P_k^*\} + \sum_{i=1}^{n_k} [T] \{R_k\} + \sum_{i=1}^{n_a} [T] \{A_e\}$$

n_k = Anzahl Knoten auf der einen Seite des definierten Schnittufers. (Für die Terme von $\{P_k^*\}$ im Schnitt selbst dürfen nur die Anteile der auf der gleichen Seite liegenden Elemente genommen werden.)

n_a = Anzahl elastisch gestützter Elemente daselbst

$\{B\} = \langle N, Q_y, Q_z, T, M_y, M_z \rangle$ integrale Schnittkräfte

$\{P_k^*\}$ = globaler Lastvektor eines Knotens

$\{R_k\}$ = globaler Vektor der Knotenreaktionskräfte

$\{A_e\}$ = Vektor der Auflagerkräfte im Elementschwerpunkt

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & Z-Z_B & Y-Y_B & 1 & & \\ Z-Z_B & 0 & X-X_B & 0 & 1 & \\ Y-Y_B & X-X_B & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Um den Rechenaufwand tief zu halten, können bei sich folgenden Schnitten die integralen Beanspruchungen aus dem vorangegangenen Schnitt zur Berechnung des neuen $\{B\}$ -Vektors weiter verwendet werden. Die Summation über $\{P_k^*\}$, $\{R_k\}$ und $\{A_e\}$ hat sich dann nur über die zwischen den Schnitten liegenden Knoten und Elemente zu erstrecken.

$$\{B_{neu}\} = \sum_{i=m_k}^{n_k} [T]\{P_k^*\} + \sum_{i=m_k}^{n_k} [T]\{R_k\} + \sum_{i=m_a}^{n_a} [T]\{A_e\} + [T]\{B_{alt}\}$$

5. Liste der Standardelemente in FLASH

Scheibenprobleme:

isotrop und orthotrop: SD3LL, SV3LQ

Plattenprobleme:

isotrop: (E)SD3KQ, (E)SV3KQ

orthotrop: (E)SD3KQ, (E)SV3KQ oder (E)SD3LQ, (E)SV3LQ

Schalenprobleme:

isotrop: (E)RD6KKL, (E)RV6KKQ

orthotrop: (E)RD6KKL, (E)RV6KKQ oder (E)RD6LKL, (E)RV6LKQ

Alle weiteren in dieser Arbeit erwähnten Elemente sind ebenfalls im Programm FLASH enthalten. Ihre Initialisierung erfolgt durch das Setzen gewisser Parameter bei der Eingabe der strukturellen Daten (siehe [W5]).

ZUSAMMENFASSUNG

Diese Arbeit verfolgt das Ziel, dem praktisch tätigen Ingenieur ein Hilfsmittel zur statischen Berechnung beliebig geformter und gelagerter linear elastischer Flächentragwerke zur Verfügung zu stellen. Die Lösung dieser Aufgabe erfolgt in zwei Schritten. Zuerst werden die Neuerungen und Verbesserungen des mathematischen Modells, das der Berechnung zugrunde liegt, dargestellt. Darauf wird das Konzept des Computerprogrammes FLASH, welches einfachste Anwendung mit hoher Leistungsfähigkeit verbindet, entwickelt.

Die Methode der finiten Elemente hat sich als geeignetster Algorithmus zur Lösung komplexer statischer Probleme erwiesen. Grundsätzlich wird in dieser Arbeit das hybride Verfahren verwendet, d.h. als unbekannte Größen am Element für welche Ansätze gewählt werden, treten die Spannungen im Innern und die Verschiebungen entlang der Ränder auf.

Aufgrund der bis heute unbefriedigenden Resultate bei der Behandlung der Scheiben- oder Membranwirkung in Flächentragwerken, werden zuerst neue hybride dreieckige und viereckige Scheibenelemente entwickelt. Diese besitzen als Besonderheit drei Verschiebungsfreiheitsgrade pro Knoten. Verschiedene Ansätze, sowohl für die Spannungen als auch für die Verschiebungen, werden diskutiert. Das Einführen von "kinematic modes", d.h. von Verschiebungszuständen, welche keine Formänderungsenergie liefern, mittels linearer Spannungsansätze bei den Viereckelementen, ergibt Elemente, die sowohl Schubverformungen in den Elementecken zulassen als auch die Kompatibilität der Randverschiebungen mit einem Plattenelement gewährleisten. Die Konvergenzeigenschaften der neuen Scheibenelemente werden anhand eines Beispiels aufgezeigt und mit bisherigen Resultaten verglichen.

Als sehr geeignet erweist sich das hybride Verfahren bei der Behandlung der Plattenwirkung, da insbesondere der Einfluss der Querkraftverformung einfach mitberücksichtigt werden kann. Für das bisher ungelöste Problem der elastisch gebetteten hybriden Elemente wird eine allgemeine Prozedur angegeben. Ausgegangen wird dabei von einem erweiterten Hellinger-Reissner-Prinzip. Am Beispiel der elastisch gestützten Plattenelemente werden die wesentlichen Verbesserungen der Resultate bei der Berechnung von Fundamentplatten, Flachdecken und sonstigen Flächenlagerungen deutlich gemacht.

Die Approximation räumlicher Flächentragwerke (Kastenstrukturen, Schalen) erfolgt mit ebenen Elementen, welche sich aus je einem Scheiben- und Plattenelement zusammensetzen. Der zusätzliche Rotationsfreiheitsgrad des Scheibenelementes erweist sich dabei als besonders nützlich, da nun alle sechs Verschiebungen und Rotationen des Raumes als Unbekannte auftreten. Verschie-

dene Modelle zur vereinfachten Behandlung rippenförmiger Aussteifungen an Platten und Schalen mittels exzentrisch angeschlossener Stabelemente werden diskutiert.

Alle erwähnten neuen finiten Elemente sind im Anwendungsprogramm FLASH (Finite Element Analysis of SHells) enthalten. Dieses nun bereits in verschiedenen Ländern Europas der Praxis zur Verfügung stehende Programmsystem zeichnet sich im wesentlichen durch die hohe rechnerische Effizienz und den grossen Komfort in der Problemformulierung und Resultatausgabe aus.

Zur Lösung des linearen Gleichungssystems wird die "frontal solution method" angewendet, welche ein gleichzeitiges Zusammensetzen und Lösen der Gleichungen erlaubt. Die vor allem für die praktische Anwendung bedeutende Form der Dateneingabe erfolgt aufgrund eines nur zweiseitigen syntaktischen Eingabeschemas. Mannigfaltige Maschengeneratoren sind eingebaut.

Nebst den üblichen Resultaten (Deformationen, Schnittkräfte, Reaktionen, etc.) können auch integrale Schnittkräfte und Grenzwerte von Schnittkraftkombinationen verlangt werden.

SUMMARY

The aim of the thesis is the development of a tool for the static analysis of linear elastic plates and shells of arbitrary shape and support conditions. It shall be especially suitable for users in practice. The problem is solved in two steps. First, the new ideas and amendments of the chosen mathematical model is shown. Then the characteristic of the computerprogram FLASH, which combines simple use with great efficiency, is described.

The finite element method has been proved to be the most appropriate algorithm to solve complex static problems. In this thesis the hybrid model is used; this means that two estimates, one for the stresses within the element and one for its boundary displacements are chosen.

Because of the unsatisfying results got so far for the inplane action of shells or membranes, new triangular and quadrilateral hybrid membrane-elements are developed. The speciality of these elements consists in a third degree of freedom for the displacements in the nodes. Different assumptions for the stresses and boundary displacements are discussed. When a linear stress distribution is introduced for the quadrilateral elements kinematic modes occur. These elements satisfy the condition of an unrestrained shear deformation in the corners as well as the compatibility with the edge displacement of the plate elements. For a practical example the convergence qualities of the new membrane elements are demonstrated and compared to other solutions.

The hybrid model is specially useful to treat bending action. The effect of the shear-deformation of plates and shells can easily be considered. For the so far unsolved problem of elastically supported hybrid elements a general procedure is given. It bases on a extended Hellinger-Reissner-principle. At the example of the elastically supported plate-elements the essential improvements in the results analysing flat slabs or foundation plates are shown.

To approximate shells and box girder structures, plane elements, which are assembled from a membrane and a plate element, are used. The third degree at freedom of the membrane element appears here as great advantage, because it completes the six degrees of freedom per node. For a simplified analysis of rib-stiffeners two different models of excentrically connected beams are discussed.

All the new finite elements mentioned are involved in the computerprogram

FLASH (Finite Element Analysis of SHells). This program is already employed in different european countries. Its success is based on the great comfort for the user and its numerical efficiency. The linear equation system is solved by the "frontal solution" method, which allows to put together the equations and to reduce them at the same time. The data input follows a simple syntax scheme, described on only two pages. An own problemorientated input language has been developed and various mesh generators are available. Beside the usual results (deformations, stresses, reactions, etc.) integral section forces and stress-envelopes can be recommended.

LITERATURVERZEICHNIS

- [A1] E. Anderheggen "Grundlagen der Computerstatik", Institut für Baustatik und Konstruktion (IBK), ETH Zürich, 1975.
- [A2] E. Anderheggen "Programme zur Methode der finiten Elemente", Bericht Nr. 23, Institut für Baustatik, ETH Zürich, Juli 1969, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart.
- [A3] E. Anderheggen "Finite Element Plate Bending Equilibrium Analysis", Journal of the Engineering Mechanics Division, American Society of Civil Engineers, Vol. 95, No. EM 4, August 1969, pp. 841-857.
- [A4] E. Anderheggen "A Conforming Triangular Finite Element Plate Bending Solution", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 2, No. 2, 1970, pp. 259-264.
- [B1] A. Bengtsson and J.P. Wolf "STRIP (Structural Integrated Programs), Step-S (Plates and Shells)" User Manual, Digital Ltd., Zürich (in German) Nordisk ADB Ltd., Stockholm (in Swedish), August 1969.
- [B2] A. Bengtsson and J.P. Wolf "Ein neues Berechnungshilfsmittel für Statiker", Neue Zürcher Zeitung, Technische Beilage, Vol. 191, Nr. 213, 11. Mai 1970, S. 37-40.
- [B3] K.E. Buck u.a. "Finite Elemente in der Statik", Verlag Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin, 1973.
- [D1] R. Dungar und R.T. Severn "Triangular Finite Element of Variable Thickness and their Application to Plate and Shell Problems", Journal of Strain Analysis, Vol. 4, No. 1, pp. 10-21.
- [H1] I. Holand and K. Bell "Finite Element Methods in Stress Analysis", Tapir, Trondheim, 1970.
- [I1] B.M. Irons "A Frontal Solution Program for Finite Element Analysis", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 2, 1970, pp. 5-32.
- [K1] T. Kawai "On the Bending of a Sectorial Plate", Publications, International Association for Bridge and Structural Engineering, Vol. 18, 1958.
- [M1] L.S.D. Morley "Bending of a Simply Supported Rhombic Plate under Uniform Normal Loading", Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. 15, 1962.
- [M2] L.S.D. Morley "Skew Plates and Structures", Pergamon Press 1963
- [M3] S.T. Mau, P. Tong and T.H.H. Pian "Finite Element Solutions for Laminated Thick Plates", Journal of Composite Materials, Vol. 6, April 1972, pp. 304-311.
- [P1] T.H.H. Pian "Element Stiffness-Matrices for Boundary Compatibility and for Prescribed Boundary Stresses", Proceedings First Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Dayton (Ohio), October 1965, AFFDL-TR-66-80 (November 1966).
- [P2] T.H.H. Pian and P. Tong "Finite Element Methods in Continuum Mechanics", Advances in Applied Mechanics, Vol. 12, 1972.

- [P3] T.H.H. Pian and P. Tong "Rationalization in Deriving Element Stiffness Matrix by Assumed Stress Approach", Proceedings Second Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Dayton (Ohio), October 1968, AFFDL-TR-150 (December 1969).
- [P4] T.H.H. Pian "Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distribution", AIAA-Journal, Vol. 2, No. 7, July 1964, pp. 1333-1336.
- [P5] D. Pfaffinger, B. Thürlimann "Tabellen für unterzugslose Decken", Verlags-AG der akademischen technischen Vereine Zürich.
- [P6] E.C. Pestel, F.A. Leckie "Matrix Methods in Elasto-Mechanics", 1963, McGraw-Hill Co.
- [R1] E. Reissner "Small Bending and Stretching of Sandwich Type Shells", NACA-TN-Report 975, 1950.
- [R2] E. Reissner "The Effect of Transverse-Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates", Journal of Applied Mechanics, Vol. 12, No. 2, June 1945, pp. 69-77.
- [T1] P. Tong and T.H.H. Pian "A Variational Principle and the Convergence of a Finite-Element Method Based on Assumed Stress Distribution", International Journal of Solids and Structures, Vol. 5, 1969, pp. 463-472.
- [T2] P. Tong and T.H.H. Pian "Bounds to the Influence Coefficients by the Assumed Stress Method", International Journal of Solids and Structures, Vol. 6, 1970, pp. 1429-1432.
- [T3] S. Timoshenko and Woinowsky-Krieger "Theory of Plates and Shells", McGraw-Hill, 1959.
- [T4] S. Timoshenko "Theory of Elasticity", McGraw-Hill, 3rd Edition.
- [T5] B. Thürlimann: Vorlesung "Flächentragwerke", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, 1973.
- [W1] J.P. Wolf "Generalized Stress Models for Finite Element Analysis", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Bericht Nr. 52, Juni 1974, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart.
- [W2] J.P. Wolf "Das Flächentragwerksprogramm von STRIP" Seminar Application of Finite Elements in Industry, Swiss Society of Engineers and Architects, Zürich, November 1970, Schweiz. Bauzeitung, Vol. 90, Nr. 3, 10. Jan. 1972, pp. 41-52.
- [W3] J.P. Wolf "Systematic Enforcement of Stress Boundary Conditions in the Assumed Stress Hybrid Model Based on the Deformation Method", Proceedings First International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Berlin, Sept. 1971, Part M6, Paper 10.
- [W4] K. William "Finite Element of Cellular Structures", Doctoral Dissertation, University of California, Berkeley, Department of Civil Engineering, December 1969.
- [W5] U. Walder "FLASH", Programmbeschreibung, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, 1975.
- [W6] U. Walder, E. Anderheggen, D. Green "Das Computerprogramm FLASH", IVBH-Abhandlungen, Band 76-II, September 1976.
- [Z1] O.C. Zienkiewicz "The Finite Element Method in Engineering Science", Mc Graw Hill, 1971.
- [Z2] R. Zurmühl "Matrizen", 4. Auflage, Springer Verlag Berlin, 1964.