

DISS. ETH No. 22119

SCATTERING FOR CRITICAL NONLINEAR WAVE EQUATIONS

A thesis submitted to attain the degree of
DOCTOR OF SCIENCES
(Dr. sc. ETH Zurich)

presented by

Martin Sack

Master of Science in Physics (ETH Zurich)
Born on 26 December 1985
Citizen of the Federal Republic of Germany

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Michael Struwe (examiner)
Prof. Dr. Thomas Kappeler (co-examiner)
Prof. Dr. Wilhelm Schlag (co-examiner)

2014

Abstract

We prove scattering for a massless wave equation which belongs to a class of critical equations in two space dimensions. The corresponding class of critical equations with a power nonlinearity in higher dimensions had already been studied in the 1990s. In the two-dimensional case, however, Sobolev embedding renders every power nonlinearity subcritical. The nonlinearity that can just be controlled with the energy is of exponential type. This is due to the Moser-Trudinger inequality. However, the Moser-Trudinger inequality fails for large energies. Therefore, it was conjectured that within the exponential nonlinearity there is another critical threshold in terms of the energy of the initial data.

For data with energy below this threshold, global existence and scattering was completed by works of Ibrahim, Majdoub, Masmoudi and Nakanishi. The first three of them also showed a certain ill-posedness property of the solution map for energies above the threshold. Surprisingly, Struwe could prove that solutions with smooth compactly supported initial data exist for all times regardless of the size of their energy. Since he proves by contradiction he makes no statement about the long-time behaviour of solutions. With our work we shed some light on that question.

Our methods are as follows. We employ a conformal inversion that Grillakis had used already to investigate the long-term behaviour of the critical equation in three space dimensions. On the conformally transformed wave equation we use the same methods that Struwe used in his proof of global existence. The resulting bound on certain space-time norms of the nonlinearity can be transferred back to the original coordinates which yields part of the control we need to establish scattering. Since the bound only covers a subset of the support of the solution we need to supplement control on the remaining region which lies close to a forward light cone. Assuming in addition that the data are radial we obtain a pointwise decay which suffices to bound space-time norms of the nonlinearity in the remaining region. This closes the argument.

We note that our techniques require modifications of the original equation. To our best knowledge the scattering problem for the original equation has not been solved. However, our work provides a major step towards a solution of the problem for the original equation.

Zusammenfassung

Wir beweisen Streuung für eine masselose Wellengleichung, die zu einer Klasse kritischer Gleichungen in zwei Dimensionen gehört. Die entsprechende Klasse von Nichtlinearitäten in der Form einer Potenz in höheren Dimensionen wurde in den 1990ern untersucht. Im zweidimensionalen Fall hingegen sind diese Gleichungen alle subkritisch, wie man durch den Einbettungssatz von Sobolev sieht. Die Nichtlinearität, welche sich gerade noch mit der Energie kontrollieren lässt, ist exponentiellen Typs. Dies sieht man anhand der Moser-Trudinger-Ungleichung. Da diese aber ab einer gewissen Schwelle versagt, erwartet man, dass bei der exponentiellen Nichtlinearität kritisches Verhalten von der Energie der Anfangsdaten abhängt.

Für Anfangsdaten mit einer Energie unter der Schwelle wurden Existenz und Streuung abschliessend von Ibrahim, Majdoub, Masmoudi und Nakanishi gezeigt. Die ersten drei haben in einer weiteren Arbeit gezeigt, dass die Lösungsabbildung oberhalb der Schwelle nicht mehr gleichmässig stetig ist. Überraschenderweise konnte Struwe zeigen, dass glatte Lösungen mit kompaktem Träger für alle Zeiten existieren, egal wie gross ihre Energie ist. Er verwendet dafür einen Widerspruchsbeweis, weswegen man keine weitere Information über das Langzeitverhalten der Lösungen gewinnen kann. Mit unserer Arbeit geben wir einen Einblick in dieses.

Dabei verwenden wir folgende Methoden. Wir verwenden eine konforme Inversion; die gleiche, die Grillakis schon im kritischen Problem in drei Dimensionen verwendet hat, um Langzeiteigenschaften zu untersuchen. Auf der transformierten Gleichung schätzen wir mit den gleichen Energiemethoden wie in Struwes Beweis ab. Als Resultat kontrollieren wir Integrale der Nichtlinearität in Raum und Zeit. Transformieren wir zurück in ursprüngliche Koordinaten, so erhalten wir einen Teil der nötigen Schranken für das Streuresultat. Allerdings gelten diese Schranken nur in einer Untermenge des Trägers der Lösung. Das Komplement der Menge befindet sich nahe eines Vorwärtslichtkegels. Um zusätzliche Kontrolle zu erhalten, beschränken wir uns auf radialsymmetrische Lösungen. Dadurch erhalten wir eine weitere Schranke, die zusammen mit der ersten ausreicht, um Streuung zu zeigen.

Wir bemerken, dass unsere Techniken gewisse Änderungen der ursprünglichen Gleichung erfordern. Nach unserem besten Wissen ist noch kein Resultat zur Streutheorie der ursprünglichen Gleichung erschienen. Insofern ist unser Resultat ein wichtiger Schritt zur Lösung der Frage, ob die Lösungen der ursprünglichen Gleichung streuen.