



Doctoral Thesis

## Measuring risk beyond the cash-additive paradigm

**Author(s):**

Munari, Cosimo-Andrea

**Publication Date:**

2015

**Permanent Link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-010475509> →

**Rights / License:**

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

DISS. ETH NO. 22541

MEASURING RISK BEYOND THE  
CASH-ADDITIVE PARADIGM

A thesis submitted to attain the degree of  
DOCTOR OF SCIENCES of ETH ZURICH  
(Dr. sc. ETH Zurich)

presented by  
COSIMO-ANDREA MUNARI

MSc in Mathematics  
Università degli Studi di Milano  
born on 23.01.1984  
citizen of Italy

accepted on the recommendation of  
Prof. Dr. Martin Schweizer, examiner  
Prof. Dr. Walter Farkas, co-examiner  
Prof. Dr. Damir Filipović, co-examiner  
Prof. Dr. Alexander Schied, co-examiner

2015

# Preface

The theory of risk measures has become a well-recognized research area since the publication of the landmark paper by Artzner, Delbaen, Eber and Heath in 1999. In the context of a one-period economy, the above authors called a *risk measure* any function assigning to the terminal position of a financial agent – be it the net capital position of a financial company, the profit-and-loss position of a single portfolio or the payoff of a given financial contract – the minimal amount of capital that has to be raised and invested in a pre-specified *reference asset* in order to take the agent’s position to a pre-specified level of *acceptable risk*.

The focus of the literature soon shifted towards the special class of *cash-additive* risk measures, for which the reference asset is a *risk-free bond with zero interest rate*. The central role assigned to cash-additivity was justified on the grounds of a suitable *discounting argument*. By virtue of this argument, it was claimed that the original theory of risk measures could be reduced to the cash-additive setting by means of discounting. Indeed, most of the subsequent theory builds, implicitly or explicitly, on this legitimization argument.

This work has three fundamental objectives. First, we aim to demonstrate that the above-mentioned discounting argument is only conclusive at a first sight and, unfortunately, hides a variety of financial and mathematical problems making the preceding reduction claim and the consequent exclusive focus on cash-additivity essentially illegitimate. Second, motivated by this failure, we aim to return to the original framework and develop a theory of risk measures with respect to a general reference asset without resorting to any change of numéraire. Third, we aim to lay the foundations of a general theory of risk measures beyond the case of a single reference asset. In particular, although the main explicit focus of our analysis

will be dedicated to univariate positions in the context of a one-period economy, we aim to provide a unifying perspective on the problem of measuring risk for general financial positions – univariate positions, multivariate positions, streams of univariate or multivariate positions – in the context of a general multi-period economy.

The distinguishing aspect of our approach is the articulation of a *concept* of a risk measure based on a prior notion of *acceptable risk* and on the specification of a class of *admissible management actions* that can be implemented in order to reach acceptability. From this perspective, a risk measure represents the *minimal cost* we have to pay to reach acceptability by means of admissible actions.

# Prefazione

La teoria delle misure di rischio ha acquisito un contorno teorico autonomo in seguito alla pubblicazione dell'articolo di Artzner, Delbaen, Eber e Heath nel 1999. Nel contesto di una economia uniperiodale, gli autori di quell'articolo chiamarono *misura di rischio* ciascuna funzione che assegni alla posizione a scadenza di un agente finanziario – sia che questa rappresenti il bilancio netto di una compagnia finanziaria, il conto profitti-perdite di un singolo portafoglio o il valore a scadenza di un contratto finanziario – l'ammontare minimo di capitale che deve essere raccolto e investito in un dato *titolo di riferimento* al fine di garantire che la posizione dell'agente sia compatibile con un *accettabile livello di rischio* stabilito a priori.

La ricerca successiva si è di fatto concentrata su una sottoclasse particolare di misure di rischio, chiamate *cash-additive*, per cui il titolo di riferimento è un *titolo obbligazionario privo di rischio a interesse nullo*. La centralità di tali misure di rischio venne giustificata sulla base di una opportuna trasformazione matematica corrispondente a un cambiamento di valuta. In virtù di questa trasformazione, alcuni autori sostennero che la teoria originaria potesse essere ridotta allo studio delle misure di rischio cash-additive e, di fatto, la maggior parte della ricerca successiva si è da allora fondata, esplicitamente o implicitamente, su tale argomento.

La tesi ha tre obiettivi fondamentali. In primo luogo, intendiamo dimostrare che tale argomento è soltanto apparentemente conclusivo e presenta, in effetti, diversi problemi sia da un punto di vista finanziario che matematico, tali da rendere la corrispondente rivendicazione di centralità per le misure di rischio cash-additive di fatto illegittima. In secondo luogo, motivati da tali problemi, ci prefiggiamo di (ri)prendere le mosse dalla definizione originaria al fine di costruire una teoria

delle misure di rischio rispetto a un generale titolo di riferimento, senza fare ricorso ad alcun procedimento di cambio di valuta. In terzo luogo, desideriamo porre le fondamenta di una teoria generale che spazi oltre il caso di un singolo titolo di riferimento. In particolare, nonostante la nostra analisi si concentrerà prevalentemente su posizioni espresse in un'unica valuta fissata nel contesto di un mercato uniperiodale, intendiamo offrire una prospettiva unificante sul problema della misurazione del rischio per posizioni finanziarie più generali – per esempio, vettori di posizioni espresse in valute diverse o flussi stocastici di posizioni nel tempo – nel contesto di un mercato multiperiodale.

La cifra caratteristica del nostro approccio consiste nell'articolazione di un *concetto* di misura di rischio fondato sulla definizione preliminare di *rischio accettabile* e sulla specificazione di una classe di *azioni manageriali ammissibili* a cui fare ricorso per garantire un'esposizione al rischio accettabile. In questa prospettiva, una misura di rischio rappresenta il *costo minimale* per garantire tale esposizione per mezzo di azioni ammissibili.