



Doctoral Thesis

Knightian uncertainty in mathematical finance

Author(s):

Neufeld, Ariel

Publication Date:

2015

Permanent Link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-010484187> →

Rights / License:

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

DISS. ETH NO. 22605

KNIGHTIAN UNCERTAINTY IN MATHEMATICAL FINANCE

A thesis submitted to attain the degree of

DOCTOR OF SCIENCES of ETH ZURICH

presented by

ARIEL DAVID NEUFELD

MSc ETH Mathematics

born on 04.12.1987

citizen of Aarau, Switzerland

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Martin Schweizer examiner

Prof. Dr. Marcel Nutz co-examiner

Prof. Dr. Nizar Touzi co-examiner

2015

Abstract

This thesis seeks to gain further insight into different classical problems of mathematical finance under Knightian uncertainty. Random events are called *uncertain* if their exact probabilities are unknown. Knightian uncertainty is formalized by a set \mathfrak{P} of probability measures, where each probability measure $P \in \mathfrak{P}$ stands for a possible scenario of the law of the price process. The results of the thesis are divided into four chapters.

In Chapter II, we establish the duality formula for the superreplication price in a setting of volatility uncertainty. In contrast to previous results, the contingent claim is not assumed to satisfy any continuity conditions (as a functional of the stock price).

Given a càdlàg process X on a filtered measurable space, we construct in Chapter III a version of its semimartingale characteristics which is measurable with respect to the underlying probability law. More precisely, let \mathfrak{P}_{sem} be the set of all probability measures P under which X is a semimartingale. We construct processes (B^P, C, ν^P) which are jointly measurable in time, space, and the probability law P , and are versions of the semimartingale characteristics of X under P for each $P \in \mathfrak{P}_{sem}$. The second characteristic C can be constructed as a single process not depending on P . A similar result is obtained for the differential characteristics.

In Chapter IV, we develop a general construction for nonlinear Lévy processes with given characteristics. More precisely, given a set Θ of Lévy triplets, we construct a sublinear expectation on Skorohod space under which the canonical process has stationary independent increments and a nonlinear generator corresponding to the supremum of all generators of classical Lévy processes with triplets in Θ .

In Chapter V, we study a robust portfolio optimization problem under model uncertainty for an investor with logarithmic or power utility. The uncertainty is specified by a set of possible Lévy triplets; that is, possible instantaneous drift, volatility and jump characteristics of the price process. We show that an optimal investment strategy exists and compute it in semi-closed form. Moreover, we provide a saddle point analysis describing a worst-case model.

Kurzfassung

Diese Dissertation beschäftigt sich mit klassischen Problemen aus der Finanzmathematik unter Knight'scher Unsicherheit. Zufällige Ereignisse werden als *unsicher* bezeichnet, wenn ihre genauen Eintrittswahrscheinlichkeiten nicht bekannt sind. Knight'sche Unsicherheit wird formal dargestellt durch eine Menge \mathfrak{P} von Wahrscheinlichkeitsmassen, wobei jedes Element $P \in \mathfrak{P}$ ein mögliches Szenario für das Wahrscheinlichkeitsmass des Preisprozesses bedeutet. Die Resultate dieser Dissertation sind in vier Kapitel aufgeteilt.

In Kapitel II beweisen wir die Dualitätsformel für den Superreplikationspreis unter Volatilitätsunsicherheit. Im Vergleich zu früheren Ergebnissen setzen wir keine Stetigkeitsannahmen an der Eventualforderung (als Funktional des Preisprozesses) voraus.

Für einen gegebenen Prozess X mit càdlàg Pfaden auf einem filtrierten messbaren Raum konstruieren wir in Kapitel III eine Version von seinen Semimartingal-Charakteristiken, welche messbar ist bezüglich dem zugehörigen Wahrscheinlichkeitsmass. Genauer gesagt, bezeichne \mathfrak{P}_{sem} die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmasse unter welchem X ein Semimartingal ist. Wir konstruieren Prozesse (B^P, C, ν^P) welche Produkt-messbar sind in der Zeit, im Raum und dem Wahrscheinlichkeitsmass P , und welche Versionen der Semimartingal-Charakteristiken von X unter jedem Mass $P \in \mathfrak{P}_{sem}$ sind. Die zweite Charakteristik C kann als einen einzigen Prozess unabhängig von P konstruiert werden. Wir erhalten ein ähnliches Resultat auch bezüglich den differentiellen Charakteristiken.

In Kapitel IV entwickeln wir eine allgemeine Konstruktion von nicht-linearen Lévy Prozessen mit gegebenen Charakteristiken. Genauer gesagt, gegeben sei eine Menge Θ von Lévy Tripeln. Wir konstruieren einen sublinearen Erwartungswert auf dem Skorohod-Raum unter welchem der kanonische Prozess stationäre und unabhängige Zuwächse besitzt und welcher einen nichtlinearen Generator hat, der dem Supremum aller Generatoren von klassischen Lévy Prozessen mit Tripeln in Θ entspricht.

In Kapitel V beschäftigen wir uns mit einem robusten Optimierungsproblem unter Modellunsicherheit für einen Investor mit Logarithmischer- oder Power-Nutzenfunktion. Die Unsicherheit ist spezifiziert durch eine Menge von möglichen Lévy Tripeln; sprich möglichen instantanen Drift-, Volatilität- und Sprung-Charakteristiken des Preisprozesses. Wir beweisen die Existenz

einer optimalen Handelsstrategie und berechnen diese in einer semi-expliziten Form. Des Weiteren zeigen wir eine Sattelpunkt-Analyse welche ein Worst-Case-Modell beschreibt.