

Diss. ETH No. 22774

# Schramm-Loewner Evolution and long-range correlated systems

A thesis submitted to attain the degree of  
DOCTOR OF SCIENCES OF ETH ZURICH  
(DR. SC. ETH ZURICH)

presented by  
NICOLAS POSÉ  
MSc ETH Physics,  
Ingénieur diplômé de l'École Polytechnique

born on 24.10.1987

citizen of France

accepted on the recommendation of  
Prof. Dr. Hans J. Herrmann, examiner  
Prof. Dr. Alexander K. Hartmann, co-examiner

2015

# Zusammenfassung

In statistischer Physik interessiert man sich hauptsächlich dafür, Zufallspfade und deren Prozesse durch ihre kritischen Eigenschaften zu klassifizieren, um Ähnlichkeiten zwischen Prozessen herauszufinden, die bei erster Betrachtung unterschiedliche Eigenschaften zu haben scheinen. In der vorliegenden Arbeit studieren wir Zufallspfade im Rahmen der Schramm-Loewner Evolution Theorie (SLE). SLE stellt einen allgemeinen Rahmen dar, der über die traditionelle Analyse hinausgeht, die auf kritischen Exponenten beruht. Die Analyse mithilfe von SLE führt dazu, Pfade durch eine eindimensionale Brownsche Bewegung zu beschreiben. Die Statistiken dieser Pfade spiegeln sich im Diffusionskoeffizienten der Brownschen Bewegung wieder. Um die SLE-Eigenschaften der stochastischen Prozesse zu untersuchen, benutzen wir vier verschiedene Tests, um festzustellen, ob die Statistiken der Zufallspfade mit der SLE- Statistik übereinstimmen. Wir studieren Zufallspfade, die entweder von Standard-Modellen der statistischen Physik stammen oder die an stochastische Flächen gekoppelt sind. Eine der wenigen noch unbeantworteten Fragen zur unkorrelierten Perkolationsstheorie ist, welche fraktale Dimension der kürzeste Pfad hat. Es gab mehrere Versuche, sie exakt zu berechnen, was zu mehreren Vermutungen geführt hat, die sich aber alle als unrichtig erwiesen haben. Deswegen sollte man dieses Problem mit einem neuen Ansatz angehen, wobei die SLE-Theorie ein solcher Ansatz sein könnte. Wir haben getestet, ob der kürzeste Pfad durch die SLE-Theorie beschrieben werden kann, und haben numerische Beweise für SLE-Statistik gefunden. Dies lässt es als möglich erscheinen, eine analytische Rechnung der fraktalen Dimension des kürzesten Pfades zu entwickeln.

Im Gegensatz zur unkorrelierten Perkolationstheorie haben Systeme aus der Natur weitreichende Korrelationen. Deswegen haben wir uns auch dafür interessiert, weitreichende korrelierte Systeme zu studieren. Insbesondere haben wir Systeme analysiert, die an stochastische Flächen gekoppelt sind, die weitreichende Korrelationen haben, die durch den Hurst-Exponenten  $H$  beschrieben sind. Zuerst haben wir die Eigenschaften der Perkolation auf solchen Flächen analysiert, darunter die fraktale Dimension des perkolierenden Clusters und dessen Grenzpfade. Wir haben auch die geometrischen Eigenschaften des größten Clusters studiert. Da es mathematisch bewiesen wurde, dass die Grenzpfade des perkolierenden Clusters für unkorrelierte Perkolation der SLE-Theorie folgen, haben wir uns gefragt, ob solch ein Resultat auch für korrelierte Perkolation gültig ist. Wir haben herausgefunden, dass die Statistiken des zugänglichen Perimeters für  $H \in [-1, 0]$  mit der SLE-Statistik kompatibel sind, aber nicht für  $H \in (0, 1]$ , und haben eine Abhängigkeit zwischen dem Hurst-Exponenten  $H \leq 0$  der Landschaft und dem Diffusionskoeffizienten der Brownschen Bewegung aufgezeigt. Dieses Resultat erweitert zwei analytisch bewiesene Ergebnisse und könnte zu interessanten Entwicklungen im Bereich derjenigen Pfade führen, die an Flächen gekoppelt sind. Dieses Resultat hat jedoch auch Folgen für Systeme, die man als stochastische Flächen betrachten kann. Wir haben die SLE-Theorie auf eine spezifische Fläche, und zwar Graphen, angewendet, und haben herausgefunden, dass die Isolinien auch Statistiken darstellen, die mit SLE kompatibel sind.

# Summary

In Statistical Physics, one is usually interested in classifying random curves and their associated processes according to their critical properties, in order to draw similarities between processes that seem at first to have different properties. Here we are interested in the study of random curves in the framework of Schramm-Loewner Evolution (SLE) theory. SLE provides a general framework that goes beyond the traditional analysis based on critical exponents. In fact, it provides a way to describe curves starting from a generalized one-dimensional Brownian motion, where the statistics of the curve is encoded in the diffusivity. Here, in order to get insights into the SLE properties of random processes, we use four different numerical tests to verify if the statistics of the random paths are compatible with SLE statistics. In this thesis we study random curves, whether related to standard Statistical Physics models or coupled to random surfaces.

One of the open question regarding random uncorrelated percolation is the value of the fractal dimension of the shortest path. There has been many attempts to compute it exactly, leading to many conjectures that have been ruled out. Therefore, it seems that a new approach has to be found to tackle this problem, and the SLE theory might be one. We tested if the shortest path might be described by SLE, and found numerical evidence for SLE statistics. This result opens the possibility to develop an analytical framework to compute the fractal dimension of the shortest path, one of the last critical exponent in percolation, whose exact value is unknown.

But as in nature, systems exhibit long-range correlations, we went beyond the framework of usual uncorrelated percolation, and studied long-range cor-

related systems associated to random surfaces that display long-range correlations characterized by their Hurst exponent  $H$ . First, we studied the critical properties of percolation associated to these surfaces, studying the fractal dimension of the percolating cluster and its boundaries, as well as the geometrical and transport properties of the largest cluster. As the cluster boundaries of the percolating clusters have been shown analytically to be SLE for uncorrelated percolation, we wondered if this property applies also for the boundaries of clusters in correlated percolation. We found that the accessible perimeter displays statistics compatible with SLE in the range  $H \in [-1, 0]$ , but not for  $H > 0$ , and got a dependance of the diffusion exponent of the underlying Brownian motion on the value of the Hurst exponent  $H \leq 0$  of the surface. This result might lead to interesting developments concerning the coupling between random surfaces and SLE, as it extends two exactly known analytical results. But it also has consequences on the properties of physical systems that can be seen as random surfaces. We applied the SLE theory to one specific rough surface, suspended graphene sheet, and found that isoheight lines present statistics compatible with SLE.

# Résumé

En Physique Statistique, on s'attache communément à la classification de courbes aléatoires et des processus qui leur sont associés en fonction de leurs propriétés critiques, afin d'établir des similarités entre des processus qui semblent a priori très différents. Dans la présente thèse, nous nous intéressons à l'étude de courbes aléatoires dans le contexte des évolutions de Schramm-Loewner (SLE). La théorie SLE constitue un cadre général qui dépasse l'approche traditionnelle basée sur l'étude des exposants critiques. Elle permet de décrire des courbes aléatoires à partir d'un mouvement brownien unidimensionnel dont le coefficient de diffusivité encode les propriétés statistiques des courbes aléatoires. Afin d'étudier les propriétés SLE de processus stochastiques, nous utilisons quatre tests numériques différents pour vérifier si les statistiques des courbes aléatoires sont compatibles avec les statistiques de processus SLE. Dans le présent travail, nous étudions des courbes aléatoires associées soit à des modèles usuels de la Physique Statistique, soit à des surfaces aléatoires.

La valeur de la dimension fractale du chemin le plus court constitue l'une des dernières questions ouvertes dans la théorie de la percolation. Il y a eu de multiples approches pour tenter de la calculer, conduisant à l'établissement de nombreuses conjectures qui ont toutes été écartées. C'est pourquoi il semble nécessaire de trouver une nouvelle approche pour aborder ce problème, et la théorie SLE pourrait en être une. Nous avons par conséquent testé si le chemin le plus court dans le modèle de percolation peut être décrit par la théorie SLE. Nous avons trouvé un accord numérique avec les prédictions de la théorie SLE. Ce résultat ouvre la possibilité de développer un cadre

analytique permettant de calculer la dimension fractale du chemin le plus court, l'un des derniers exposants critiques de la percolation dont on ignore encore la valeur exacte.

Mais comme dans la nature les systèmes présentent des corrélations longue portée, nous avons dépassé le cadre de la percolation non corrélée usuelle, et avons étudié des systèmes corrélés associés à des surfaces présentant des corrélations longue portée caractérisées par leur exposant de Hurst  $H$ . Dans un premier temps nous avons étudié les propriétés critiques du processus de percolation associé à ces surfaces, en s'attachant plus particulièrement à l'étude des propriétés fractales de l'amas percolant et de ses contours, mais aussi aux propriétés géométriques et de transport de l'amas le plus large. Comme il a été démontré que le contour de l'amas percolant est décrit par une évolution de Schramm-Loewner dans le cas de la percolation non corrélée, on peut se demander s'il est possible d'étendre cette propriété aux contours des amas percolant dans un modèle de percolation corrélée. Nous avons trouvé que le périmètre accessible présente des propriétés statistiques compatibles avec une évolution de Schramm-Loewner pour des valeurs de l'exposant de Hurst comprises entre  $-1$  et  $0$  mais pas pour des valeurs de  $H$  strictement positives. Nous avons trouvé que la valeur du coefficient de diffusion du mouvement Brownien de l'évolution de Schramm-Loewner dépend de la valeur de l'exposant de Hurst  $H \leq 0$  de la surface. Ce résultat peut conduire à des développements intéressants dans le domaine des courbes SLE associées à des surfaces aléatoires. Cependant cette approche a aussi des conséquences sur l'étude des propriétés de certains systèmes physiques vus comme des surfaces aléatoires. Nous avons par exemple appliqué la théorie SLE à des courbes extraites d'une surface particulière, à savoir une feuille de graphène suspendue, et avons montré que ses lignes de niveau présentent des statistiques compatibles avec la théorie SLE.