

Combinatorial Methods for Analyzing Network Security and Reliability

Doctoral Thesis

Author(s):

Zenklusen, Rico

Publication date:

2008

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-005713608>

Rights / license:

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#)

Diss. ETH N° 18109

Combinatorial Methods for Analyzing Network Security and Reliability

A dissertation submitted to
ETH ZURICH

for the degree of
DOCTOR OF SCIENCES

presented by
RICO ZENKLUSEN
M. Sc. in Mathematics, EPFL

born May 27, 1981
citizen of Naters (VS)

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Angelika Steger, examiner
Prof. Dr. Friedrich Eisenbrand, co-examiner
Prof. Dr. Komei Fukuda, co-examiner

2008

Abstract

The main focus in most classical network optimization problems lies on performability. In these problems one usually does not consider the possibility that arcs or vertices may be removed from the given network due to failures or other reasons. However, many systems with an underlying network structure are not perfectly reliable and it is often of high interest to consider network models in settings where arcs and vertices may be removed. Unfortunately, relatively little is known about classical network optimization problems in a failure-prone setting. The thesis at hand deals with classical combinatorial optimization problems on networks in settings where arcs and vertices may be subject to removal. It contains results on four topics to be presented next. In all problems we consider, the arcs and vertices that are removed, are all removed simultaneously.

The first problem we consider, is the problem of estimating s - t reliabilities in acyclic digraphs. As long as the reliability to estimate is not too small, a crude Monte-Carlo approach can be used to obtain a good estimate with high probability. However, this method needs a tremendous amount of time to deliver good estimates for very small reliabilities. Small reliabilities often have to be estimated in models where one is interested in rare events with a high impact. We suggest a method allowing to estimate very small s - t reliabilities in large acyclic digraphs and present structural conditions on the input network under which the proposed algorithm is an FPRAS.

The second problem that will be discussed is known as network flow

interdiction and can be described as follows. In a given flow network one has to remove a subset of the arcs constrained to some budget such that the value of a maximum flow in the resulting network is minimized. Although this problem is known to be NP-hard in general, pseudo-polynomial algorithms are known for some special cases of planar instances. We present new approaches that allow to solve in pseudo-polynomial time a wider class of planar instances than previously possible. In particular, we present a method for incorporating the possibility of vertex removals and vertex capacities. Furthermore, an algorithm is presented that can solve a particular type of interdiction problem on networks with multiple sources and sinks. We also show a technique for converting a large class of pseudo-polynomial network flow interdiction algorithms into FPAS's.

In the third part of the thesis we introduce the matching interdiction problem which is basically a natural extension of other interdiction problems to matchings. The task is to choose in a given undirected network a subset of edges with respect to some budget such that the weight of a maximum matching in the resulting network is minimized. Hardness results for different types of graph classes are presented. For graphs with bounded treewidth we introduce a pseudo-polynomial algorithm and an FPAS.

In the fourth part of this thesis we present a proof for a conjecture raised by Goemans and Vondrák about a bound on the number of edges contained in the union of all minimum spanning trees of fixed sized subgraphs. We show that the proven bound can be seen as a generalization of Mader's theorem which bounds the number of edges in any edge-minimal k -connected graph.

Zusammenfassung

Der Fokus in den meisten klassischen Netzwerkoptimierungsproblemen liegt auf der Effizienz des Netzwerks. Dabei wird normalerweise angenommen, dass Knoten und Kanten nicht ausfallen können. Jedoch sind viele Systeme mit Netzwerkstruktur nicht komplett ausfallsicher und verlangen zu ihrer Analyse Modelle, welche die Möglichkeit von Ausfällen abbilden. Leider gibt es bislang nur relativ wenig Resultate über klassische Netzwerkprobleme in Situationen wo Kanten und Knoten ausfallen können. In dieser Arbeit werden klassische kombinatorische Netzwerkoptimierungsprobleme betrachtet unter verschiedenen Ausfallmodellen für Knoten und Kanten. Vier Themen werden in dieser Arbeit behandelt die folgend kurz vorgestellt werden. Bei allen Modellen die betrachtet wurden, nehmen wir an, dass alle Kanten und Knoten die ausfallen, gleichzeitig ausfallen.

Das erste Problem, das betrachtet wird, ist das *s-t reliability* Problem in gerichteten, azyklischen Graphen. Solange die zu schätzende Reliability nicht zu klein ist, kann ein klassisches Monte-Carlo Verfahren angewendet werden um mit hoher Wahrscheinlichkeit eine gute Schätzung zu bestimmen. Diese Methode benötigt jedoch enorm viel Zeit um gute Schätzer für sehr kleine Reliabilities zu erhalten. Kleine Reliabilities müssen jedoch häufig geschätzt werden wenn man mit Modellen arbeitet, wo man an seltenen, wichtigen Ereignissen interessiert ist. Wir schlagen eine randomisierte Methode vor, die es erlaubt sehr kleine *s-t* Reliabilities in grossen azyklischen Netzwerken zu schätzen. Zusätzlich präsentieren wir strukturelle Bedingungen für das gegebene Netzwerk

unter denen der vorgeschlagene Algorithmus ein FPRAS ist.

Das zweite Problem, welches in dieser Arbeit betrachtet wird, ist bekannt unter dem Namen *network flow interdiction* und kann folgendermassen beschrieben werden. In einem gegebenen Netzwerk soll ein beschränktes Budget eingesetzt werden um eine Untermenge der Kanten zu entfernen, so dass der Wert eines maximalen Flusses im übrigbleibenden Netzwerk minimiert wird. Obwohl dieses Problem im allgemeinen Fall NP-hard ist, sind pseudo-polynomielle Algorithmen bekannt für spezielle Fälle von planaren Graphen. Wir stellen neue Methoden vor, die es erlauben in pseudo-polynomieller Zeit eine breitere Klasse von planaren Probleminstanzen zu lösen als bislang möglich war. Mitunter präsentieren wir eine Methode um die Möglichkeit von Knotenausfällen und Knotenkapazitäten zu modellieren. Des Weiteren führen wir einen Algorithmus ein, welcher einen speziellen Typ von network flow interdiction Problemen mit mehreren Quellen und Senken lösen kann. Zusätzlich stellen wir ein Verfahren vor, um eine grosse Klasse von pseudo-polynomiellen network flow interdiction Algorithmen in FPAS's umzuwandeln.

Im dritten Teil dieser Arbeit führen wir das *matching interdiction* Problem ein, welches eine natürliche Ausweitung von interdiction Problemen auf Matchings ist. In einem gegebenen ungerichteten Graphen soll ein beschränktes Budget eingesetzt werden um eine Untermenge der Kanten zu entfernen, so dass das Gewicht eines maximum Matchings im resultierenden Netzwerk minimiert wird. Wir präsentieren Komplexitätsresultate für verschiedene Graphenklassen. Für Graphen mit beschränkter treewidth, stellen wir einen pseudo-polynomiellen Algorithmus vor sowie ein FPAS.

Im vierten Teil dieser Arbeit präsentieren wir einen Beweis für eine Behauptung von Goemans und Vondrák über eine Schranke für die Anzahl der Kanten in der Vereinigungsmenge aller minimal aufspannenden Bäume in Untergraphen mit fixierter Kardinalität. Wir zeigen, dass die bewiesene Schranke eine Verallgemeinerung von einem Theorem von Mader darstellt, welches die Anzahl der Kanten in kantenminimalen, k-verbundenen Graphen beschränkt.