



Doctoral Thesis

Numerical Shape Optimization with Finite Elements

Author(s):

Paganini, Alberto

Publication Date:

2016

Permanent Link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-010579469> →

Rights / License:

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

DISS. ETH No. 23212

NUMERICAL SHAPE OPTIMIZATION WITH FINITE ELEMENTS

A thesis submitted to attain the degree of

DOCTOR OF SCIENCES of ETH ZURICH

(Dr. sc. ETH Zurich)

presented by

ALBERTO PAGANINI

M.Sc. ETH in Mathematics

born on 18.06.1987

citizen of St. Gallen SG, Switzerland

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Ralf Hiptmair, ETH Zürich, examiner

Prof. Dr. Christian Hafner, ETH Zürich, co-examiner

Prof. Dr. Boris Vexler, TU München, co-examiner

Abstract

This thesis is devoted to numerical aspects of PDE-constrained shape optimization in the framework of Galerkin finite element (FE) discretization of the underlying boundary value problem (BVP). The formulation of a shape optimization problem comprises the description of a set of admissible shapes and the definition of a shape functional. An admissible shape is said to be optimal if it minimizes (or maximizes) the shape functional. Most shape functionals considered in literature are shape differentiable. In this case, optimal shapes are critical points, that is, shapes for which the shape gradient is zero.

For shape functionals constrained by BVPs, the shape gradient also depends on the solution of the underlying BVP and, usually, on the solution of an adjoint problem. Shape gradients can be approximated by replacing these functions with numerical solutions. We prove superconvergence in the approximation of shape gradients when the underlying BVP is elliptic and is discretized by means of Galerkin FEs.

Next, we develop a shape optimization algorithm tailored to preserve and exploit the approximation properties of the FE method, and that allows for arbitrarily high resolution of shapes. Optimization is carried out by constructing a deformation diffeomorphism that is based on B-splines and is updated with the help of H^1 -representatives of shape gradients. We provide numerical evidence of the performance of this method both on prototypical well-posed and ill-posed shape optimization problems. For the latter case, we discuss regularization based on wavelets.

Finally, we apply the shape optimization algorithm to optimize the shape of the cross section of cylindrical microlenses. Microlenses are highly attractive for optical applications such as super resolution and photonic nanojets, but their design is demanding because resonance effects play an important role, which forces one to perform a full wave analysis. In literature, mostly spherical microlenses were studied. Starting from reasonable elliptical and semi-circular shapes, we show that strong increases of the performance of the lenses may be obtained for any physically meaningful value of the refraction index.

Riassunto

Questa tesi tratta aspetti numerici di problemi di ottimizzazione di forma con vincoli espressi da equazioni alle derivate parziali (PDE), discretizzate mediante elementi finiti (FE). Per formulare un problema di ottimizzazione di forma è necessario introdurre un insieme di forme ammissibili che funge da dominio di un funzionale di forma. Una forma ammissibile è detta ottimale se minimizza (o massimizza) il funzionale di forma. La maggior parte dei funzionali di forma trattati nella letteratura è differenziabile. In questo caso, le forme ottimali sono punti critici, ovvero, sono zeri del gradiente di forma.

Il gradiente di forma di un funzionale di forma vincolato ad una PDE dipende anche dalla soluzione di quest'ultima oltre che, in generale, dalla soluzione di un problema aggiunto. Il gradiente di forma può essere approssimato sostituendo queste soluzioni con approssimazioni numeriche delle stesse. Dimostriamo che questa approssimazione è superconvergente quando la PDE vincolante è ellittica e viene discretizzata con FE.

Successivamente, sviluppiamo un algoritmo di ottimizzazione di forma che mira a preservare e sfruttare la proprietà di approssimazione dei FE e che, allo stesso tempo, permette risoluzione arbitrariamente accurata delle forme. Questo algoritmo utilizza il rappresentante in H^1 del gradiente di forma per costruire un diffeomorfismo di deformazione basato su B-splines. Forniamo prove numeriche delle prestazioni di questo algoritmo su problemi standard di ottimizzazione di forma ben e mal posti. Per quest'ultimo caso proponiamo una regolarizzazione basata su wavelets.

Infine, l'ottimizzazione della forma della sezione di microlenti cilindriche fornisce un'interessante applicazione realistica per testare il nostro algoritmo. Infatti le microlenti vengono studiate in applicazioni quali la super risoluzione e i nanojet fotonici, ma il loro design è complicato a causa di fenomeni di risonanza non trascurabili. Nella letteratura sono state studiate principalmente microlenti sferiche. Noi consideriamo design ellittici o semi-circolari e dimostriamo che le prestazioni della lente possono essere migliorate per ogni valore "ragionevole" dell'indice di rifrazione.