

DISS. ETH NO. 22945

ROBUST METHODS FOR THE SABR MODEL  
AND RELATED PROCESSES:  
ANALYSIS, ASYMPTOTICS AND NUMERICS

A dissertation submitted to  
ETH ZURICH

for the degree of  
Doctor of Sciences

presented by

BLANKA NORA HORVATH

Dipl. Math. University of Bonn  
M. Econ. The University of Hong Kong  
born August 22, 1985  
citizen of Hungary

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Josef Teichmann	examiner
Prof. Dr. Johannes Muhle-Karbe	co-examiner
Prof. Dr. Peter Friz	co-examiner

2015

# Abstract

This thesis is dedicated to the study of the *stochastic alpha beta rho (SABR) model* and related stochastic processes both from a theoretical and a practical perspective. During its 14 years of existence, the SABR model has become industry standard and is now ubiquitous in interest rate modelling. Its popularity arose from a tractable asymptotic expansion for implied volatility, derived by heat kernel methods, which strengthened the connection between geometry and finance. In recent years markets have moved to historically low rates for which this expansion is prone to yield inconsistent prices, thereby inducing distortions and arbitrage into modelling. As SABR is deeply embedded in the markets, there is undisputed need for uniform pricing methods—suitable for the SABR model—which eliminate the observed irregularities. Since the emergence of the aforementioned problems, the so-called *arbitrage issue* has been addressed in numerous approaches. Despite several excellent contributions to this matter in the past years, to date there does not seem to be a consensus about a method for adjusting the SABR formula, or about the reasons for the potential appearance of inconsistent prices under this model using different pricing tools. The aim of this thesis is to investigate the properties of the model from this perspective and to propose some effective solutions to the arbitrage problem.

An analysis of the SABR model for near-zero (positive or negative) rates calls for a more general functional analytic framework than the one that Riemannian geometry and heat kernel expansions can provide. This in turn can be held accountable for the breakdown of the asymptotic formula in this region. While several available methods aim for exact approximation of the absolutely continuous part of the SABR distribution, we confirm that the asymptotics of the implied volatility for extreme strikes (for which the inconsistencies typically appear) can be fully characterized by the mass at zero, regardless of the absolutely continuous part of the distribution.

Accordingly, we also propose a finite element method—tailored to the specific degeneracy of the model at the origin—in order to evaluate option prices under the SABR model. Finally we prove convergence and derive error estimates for the proposed numerical scheme.

# Kurzfassung

Diese Arbeit ist der Untersuchung des *Stochastischen Alpha Beta Rho (SABR) Modells* und verwandter stochastischer Prozesse gewidmet. In den 14 Jahren seiner Existenz hat sich das SABR Modell zu einem der meist verbreiteten Modelle entwickelt und ist heute Industriestandard auf Zinsmärkten. Eine leicht handhabbare asymptotische Formel für die implizite Volatilität trug wesentlich zur Beliebtheit des Modells bei. Diese asymptotische Formel wurde aus einer Entwicklung des Wärmeleitungskerns auf einer passend gewählten Mannigfaltigkeit hergeleitet. Dies intensivierte in den darauffolgenden Jahren die Verwendung von Methoden aus der Riemannschen Geometrie in der Finanzmathematik. Die jüngsten Entwicklungen der Finanzmärkte zeigten eine deutliche und persistente Verschiebung der Zinsraten in einen historisch niedrigen Bereich, in dem das SABR Modell widersprüchliche Optionspreise generieren kann. Das daraus entstandene sogenannte *Arbitrage Problem* und die damit verbundenen Marktverzerrungen ließen keinen Zweifel, dass eine Korrektur der SABR Formel notwendig ist. Seitdem wurde das SABR Arbitrage Problem vielfältig aufgegriffen. Dennoch gibt es bis heute keine einheitlich etablierte Aufklärung und Lösung dieses Problems. Ausgangspunkt dieser Arbeit ist die bekannte Beobachtung, dass standard Wärmeleitungskernentwicklungen in der Nähe der Null nicht angewandt werden können. Klassische Wärmeleitungs-Methoden approximieren den absolutstetigen Teil der Verteilung, hingegen kann die Asymptotik der impliziten Volatilität nahe bei Null vollständig durch den singulären Teil der Verteilung charakterisiert werden. Wir zeigen, dass das Problem in einem allgemeineren funktionalanalytischen Rahmen lösbar ist, nämlich mit Hilfe der Theorie der nicht-symmetrischen Dirichlet-Formen. In diesem Rahmen entwickeln wir eine Finite Elemente Methode, um Optionspreise unter dem SABR Modell numerisch zu approximieren, und beweisen Konvergenzraten.