Doctoral Thesis

Convex Integration, Isometric Extensions & Approximations of Curves

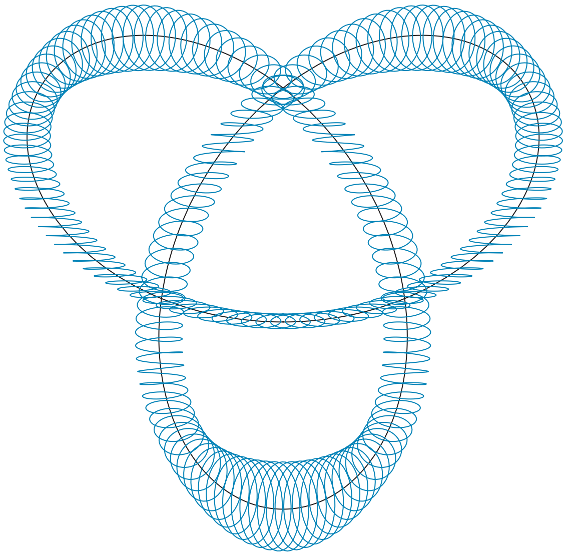
Author(s):
Wasem, Micha

Publication Date:
2016

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-010609244 →

Diss. ETH No. 23133

Convex Integration, Isometric Extensions & Approximations of Curves



A thesis submitted to attain the degree of
Doctor of Sciences of ETH Zurich
(Dr. sc. ETH Zurich)

presented by

Micha Wasem
MSc Math. University of Fribourg
born February 28, 1986
citizen of
Schwarzenburg BE, Switzerland

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Norbert Hungerbühler, advisor
Prof. Dr. Camillo de Lellis, co-advisor

2016

Zusammenfassung

In der vorliegenden Dissertation wird einerseits ein Fortsetzungsproblem für isometrische Immersionen und Einbettungen in der Riemann'schen Geometrie untersucht und andererseits werden mit änhlichen Methoden zwei Approximationsresultate bewiesen – eines für Legendrekurven in dreidimensionalen Kontaktmannigfaltigkeiten und das andere für Kurven mit vorgeschriebener Krümmung in Euklidischen Räumen mit drei oder mehr Dimensionen.

Im ersten Kapitel befassen wir uns mit dem Fortsetzungsproblem: Den Ausgangspunkt bildet ein Resultat von Jacobowitz von 1974, welches notwendige und hinreichende Bedingungen für die isometrische C^2-Fortsetzbarkeit von auf Hyperflächen vorgeschriebenen Isometrien liefert. Mit den von Nash entwickelten Methoden zur Konstruktion isometrischer Immersionen und Einbettungen der Klasse C^1 werden einseitige isometrische C^1-Fortsetzungen konstruiert, die auch dann existieren können, wenn einseitige C^2-Fortsetzungen nicht zugelassen sind. Für die so konstruierten C^1-Fortsetzungen weisen wir ein parametrisches, C^0-dichtes h-Prinzip im Sinne von Gromov nach. Die Konstruktion benötigt mindestens eine Kodimension.

In Kapitel 2 zeigen wir, dass im äquidimensionalen Fall im Allgemeinen keine isometrischen C^1-Fortsetzungen existieren können. Durch Abschwächung der Regularität beweisen wir aber mit einem ähnlichen Verfahren die Existenz von Lipschitz-Fortsetzungen, welche die Isometriebedingung fast überall erfüllen. Das technische Rüstzeug für die Konstruktion der Fortsetzungen ist in beiden Fällen die von Nash antizipierte – und schliesslich von Gromov entwickelte – Methode der konvexen Integration. Die technische Schwierigkeit besteht darin, dass diese Methode im Allgemeinen auf der Hyperfläche, wo die fortzusetzende Abbildung definiert ist, die Metrik nicht festlässt, was aber mit Hilfe von Abschneidefunktionen behoben werden kann. Für die Konstruktion von äquidimensionalen Isometrien gilt es allerdings zu erwähnen, dass es andere, allgemeinere Methoden gibt.

Das dritte Kapitel geht aus einer gemeinsamen Arbeit mit Thomas Mettler und meinem Doktorvater Norbert Hungerbühler hervor. Wir präsentieren einen alternativen Beweis für ein wohlbekanntes Approximationsresultat aus der Kontaktgeometrie. Dieser Beweis ermöglicht es, Legendrekurven erstmals explizit zu konstruieren und zu visualisieren, die eine gegebene stetige Kurve in einer 3-dimensionalen Kontaktmannigfaltigkeit beliebig gut approximieren.

Im letzten Kapitel beweisen wir, dass C^2-Kurven mit vorgeschriebener Krümmung im n-dimensionalen Euklidischen Raum ein C^1-dichtes h-Prinzip erfüllen, falls $n \geqslant 3$. Als Korollar dieses Resultates finden wir insbesondere eine Anwendung in der Knotentheorie: Wir beweisen die Existenz eines C^2-Knotens mit vorgeschriebener positiver Krümmung in jeder Isotopieklasse und verallgemeinern damit ein Resultat von McAtee aus dem Jahr 2004, welches die Existenz von C^2-Knoten mit konstanter Krümmung in jeder Isotopieklasse garantiert.

Abstract

In this dissertation, we investigate on the one hand an extension problem for isometric immersions and embeddings in Riemannian geometry and on the other hand, using similar methods, we prove two approximation results: One concerns Legendrian curves in contact 3-manifolds and the other is about curves with prescribed curvature in Euclidean spaces of dimension at least 3.

The first chapter deals with isometric extensions: The starting point is a result by Jacobowitz from 1974, giving necessary and sufficient conditions for the isometric C^2-extendability of isometries that are prescribed on a hypersurface. Using Nash's method for the construction of isometric immersions and embeddings of class C^1, we show the existence of one-sided isometric C^1-extensions which may exist even if one-sided classical extensions cannot due to Jacobowitz' result. Furthermore, we show that the so-constructed extensions satisfy a C^0-dense parametric h-principle in the sense of Gromov. The construction requires at least one codimension.

In the second chapter, we show that isometric C^1-extensions cannot generally exist in codimension 0. However, by relaxing the regularity, we show with a similar method the existence of Lipschitz-extensions which satisfy the isometry condition in a weak sense. The tool for the construction is in both convex integration – a method anticipated by Nash and developed subsequently by Gromov. The main technical difficulty is that this method may change the metric on the hypersurface, where the isometry one wishes to extend is defined, but this can be circumvented using cut-off functions. Despite this, there are more general methods available for the construction of different notions of weak isometries in codimension 0.

The third chapter stems from a project with Thomas Mettler and my advisor Norbert Hungerbühler. We present an alternative proof of a well-known approximation theorem from contact geometry. This proof allows for an explicit construction of Legendrian curves that approximate a given continuous curve in a contact 3-manifold and delivers the first illustration of approximating Legendrian curves.

In the final chapter, we establish a C^1-dense h-principle for curves with prescribed curvature in Euclidean n-space provided $n \geqslant 3$. As a special case of a corollary of this result, we obtain an application in knot theory and prove that there exists a C^2-knot of prescribed positive curvature in each isotopy class. This generalizes a result by McAtee from 2004, which gives the existence of C^2-knots of constant curvature in every isotopy class.