Same-Set Hitting with Applications to Parallel Repetition

Author(s):
Hązła, Jan

Publication Date:
2016

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-010745283 →

DISS. ETH NO. 23537

Same-Set Hitting with Applications to Parallel Repetition

A thesis submitted to attain the degree of
DOCTOR OF SCIENCES of ETH ZURICH
(Dr. sc. ETH Zurich)

presented by

JAN HĄZŁA
MSc in Computer Science
Jagiellonian University in Kraków, Poland

born on September 21, 1987

citizen of
the Republic of Poland

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Thomas Holenstein, examiner
Prof. Dr. Elchanan Mossel, co-examiner
Prof. Dr. Angelika Steger, co-examiner

2016

Abstract

This thesis consists of two parts investigating topics from discrete mathematics with computer science motivation.

In the first part we study a problem in the *analysis of discrete functions*, which we call *same-set hitting.* Analysis of discrete functions is the study of functions $f : \Omega^n \to \mathbb{R}$ for a finite input alphabet Ω. An important part of this field is the analysis of Boolean functions $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. It dates back to the beginnings of the 20th century and has found many applications across computer science and mathematics.

Our problem is motivated by connections to hypercontractivity (which is an important tool in the analysis of discrete functions), hardness of approximation and additive combinatorics. It can be stated as follows:

Let $\mathcal{P}$ be a probability distribution over a finite alphabet Ω^ℓ with all ℓ marginals equal. Let $\underline{X}^{(1)}, \ldots, \underline{X}^{(\ell)}$ be random vectors, where $\underline{X}^{(j)} = (X_1^{(j)}, \ldots, X_n^{(j)})$. Furthermore, suppose that for each coordinate $i \in [n]$ the tuples $(X_i^{(1)}, \ldots, X_i^{(\ell)})$ are identically and independently distributed according to $\mathcal{P}$. We say that the distribution $\mathcal{P}$ is same-set hitting if there exists a function $c_{\mathcal{P}}()$ independent of n such that for every set $S \subseteq \Omega^n$ with $\Pr[\underline{X}^{(j)} \in S] = \mu > 0$:

$$\Pr\left[\underline{X}^{(1)} \in S \wedge \ldots \wedge \underline{X}^{(\ell)} \in S\right] \geq c_{\mathcal{P}}(\mu) > 0 \,.$$

The matter we address is: which probability distributions are same-set hitting? Our main result answers this question in case $\ell = 2$, as well as when $\ell > 2$ and the distribution $\mathcal{P}$ has *bounded correlation* $\rho(\mathcal{P}) < 1$.

The second part of this work discusses bounds on the value of *parallel repetition of multi-prover games*, another problem motivated by hardness of approximation.

An open problem in the field of parallel repetition concerns the difference between the games with two provers, for which we know exponentially

small bounds, and those with three and more provers. In the latter case it is unknown if general exponential bounds exist.

Exploring the differences between those two cases, and motivated by a certain connection to the density Hales-Jewett theorem from additive combinatorics, we study a different kind of parallel repetition bounds, which depend only on the number of repetitions and the question set of a game (so-called *forbidden subgraph bounds*).

We ask the question: Which question sets admit such a bound that decreases exponentially with the number of repetitions?

We demonstrate that because of the connection to the density Hales-Jewett theorem, exponential forbidden subgraph bounds cannot be established for certain sets for three and more provers. However, it is not known if the same holds in case of two provers. This is in contrast to classical bounds, where (as just mentioned) two-prover exponential bounds are known, but multiple-prover case is an open problem.

We use the concept of same-set hitting from the first part of the thesis to obtain some new exponential forbidden subgraph bounds. In particular, interpreting an r-prover questions set as an r-uniform hypergraph, we get such bounds for two-prover question sets that have *treewidth* at most two and for multi-prover sets that are α-*acyclic*.

Zusammenfassung

Diese Arbeit besteht aus zwei Teilen, die Themen der diskreten Mathematik behandeln, welche durch Informatik motiviert sind.

Im ersten Teil untersuchen wir ein Problem in der Analyse diskreter Funktionen, das wir *Gleichemengetreffen* nennen. Die Analyse diskreter Funktionen befasst sich mit Funktionen $f : \Omega^n \to \mathbb{R}$ über einem endlichen Eingabealphabet Ω. Ein wichtiger Teil dieses Gebiets ist die Analyse Boolescher Funktionen $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Dieses Feld reicht zurück zu den Anfängen des 20. Jahrhunderts und fand seither viele Anwendungen in Informatik und Mathematik.

Unser Problem wird durch Beziehungen zu Hyperkontraktivität, einem wichtigen Werkzeug der Analyse diskreter Funktionen, zur Schwere von Approximationsproblemen und zur additiven Kombinatorik motiviert. Es kann folgendermassen gestellt werden:

Sei $\mathcal{P}$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über einem endlichen Alphabet Ω^ℓ, wobei alle ℓ Randverteilungen gleich sind. Seien $\underline{X}^{(1)}, \ldots, \underline{X}^{(\ell)}$ mit $\underline{X}^{(j)} = (X_1^{(j)}, \ldots, X_n^{(j)})$ zufällige Vektoren, so dass für Koordinaten $i \in [n]$ die Tupel $(X_i^{(1)}, \ldots, X_i^{(\ell)})$ entsprechend der Verteilung $\mathcal{P}$ unabhängig identisch verteilt sind. Wir sagen, dass die Verteilung $\mathcal{P}$ gleichemengetreffend ist, wenn es eine Funktion $c_{\mathcal{P}}()$ gibt, die unabhängig von n ist, so dass für jede Menge $S \subseteq \Omega^n$ mit $\Pr[\underline{X}^{(j)} \in S] = \mu > 0$ gilt:

$$\Pr\left[\underline{X}^{(1)} \in S \wedge \ldots \wedge \underline{X}^{(\ell)} \in S\right] \geq c_{\mathcal{P}}(\mu) > 0 \, .$$

Dabei betrachten wir die folgende Fragestellung: welche Verteilungen sind gleichemengetreffend? Unser Hauptresultat beantwortet diese Frage für den Fall $\ell = 2$, sowie wenn $\ell > 2$ und die Verteilung $\mathcal{P}$ *begrenzte Korrelation* $\rho(\mathcal{P}) < 1$ hat.

Der zweite Teil dieser Arbeit betrachtet Schranken für den Wert *paralleler Wiederholung von Multibeweiserspielen*, ein weiteres Problem, das durch die Schwere von Approximationsproblemen motiviert wird.

Ein ungelöstes Problem des Bereichs der paralleler Wiederholung betrifft den Unterschied zwischen Spielen mit zwei Beweisern, für welche exponentiell kleine Schranken bekannt sind, und diesen mit drei und mehr Beweisern. Für letztere ist die Existenz genereller exponentieller Schranken nicht bekannt.

Um die Unterschiede dieser beiden Fälle zu erforschen, und motiviert durch eine bestimmte Beziehung zum Density Hales-Jewett Satz aus der additiven Kombinatorik, untersuchen wir eine andere Art von Schranken für parallele Wiederholung, die nur von der Anzahl der Wiederholungen und der Fragemenge des Spieles abhängen (sogenannte *Schranken verbotener Teilgraphen*).

Wir interessieren uns dafür, welche Fragemengen eine solche Schranke haben, die exponentiell mit der Anzahl der Wiederholungen sinkt.

Wir zeigen, dass auf Grund der Verbindung zum Density Hales-Jewett Satz, exponentielle Schranken verbotener Teilgraphen für gewisse Mengen im Fall von drei und mehr Beweisern nicht existieren können. Jedoch ist nicht bekannt, ob das auch für zwei Beweiser geht. Das ist im Gegensatz zu klassischen Schranken, für die (wie oben erwähnt) im Fall von zwei Beweisern exponentielle Schranken bekannt sind, aber der Fall von mehreren Beweisern ungelöst ist.

Wir benutzen das Konzept des Gleichemengetreffens aus dem ersten Teil dieser Arbeit, um einige neue exponentielle Schranken verbotener Teilgraphen zu zeigen. Insbesondere, weil man eine Fragemenge für r Beweiser als einen r-uniformen Hypergraphen interpretieren kann, zeigen wir entsprechende Schranken für Fragemengen für zwei Beweiser, die *Baumweite* höchstens zwei haben, sowie für Fragemengen für mehrere Beweiser, die α-*azyklisch* sind.