

Diss. ETH No. 17597

Augmented time-stepping integration of non-smooth dynamical systems

A dissertation submitted to
ETH ZURICH
for the degree of
Doctor of Technical Sciences

presented by
CHRISTIAN WALTER STUDER

Dipl. Bau-Ing. ETH
born March 11, 1976
citizen of Pfäffikon (ZH)

accepted on the recommendation of
Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. habil. Ch. Glocker, examiner
Prof. Dr. habil. B. Brogliato, co-examiner

2008

Abstract

This thesis deals with the time integration of rigid mechanical systems with unilateral contacts and/or friction. Such systems are modeled within this thesis in a non-smooth way, i.e. the time evolution of the displacements and of the velocities is not requested to be smooth anymore. Due to possible impacts, the velocities are even allowed to undergo jumps at certain time instances in order to fulfill the kinematical restrictions. As a consequence, the accelerations and the contact forces are not defined anymore at such impact points. The behaviour of the unilateral contacts and/or friction is described by set-valued force laws, which are linked to the equations of motion to obtain an analytic representation of the mechanical system for the impact-free case. If impacts have to be considered, then separate impact equations and set-valued impact laws are stated which relate the impulsive contact forces to the admissible post-impact velocities. A comprehensive description of the mechanical system which is applicable for both the impulsive and non-impulsive case can be obtained by using so-called equalities of measures with associated set-valued laws. This formulation in terms of measures incorporates also the classical smooth mechanical system as most simple special case.

Set-valued laws can be expressed as normal cone inclusions. Doing so, a broad scope of non-smooth interactions can be described by the same mathematical structure, which allows amongst others for a unified treatment of arbitrary friction laws, i.e. classical Coulomb friction, Coulomb-Contensou friction or anisotropic friction. The thesis uses an augmented Lagrangian approach to solve the occurring normal cone inclusion problems. Doing so, the inclusions which are associated with the individual set-valued laws can be transformed into projective equations. These equations can be solved iteratively by a Jacobi or Gauss-Seidel like approach, i.e. an underlying system of linear equations is solved in the classical Jacobi or Gauss-Seidel way, and additional projections are applied at each step to guarantee admissibility. The different set-valued laws are taken into account by different instructions for these additional projections.

A discretization of the equality of measures and of the associated set-valued laws leads to the so-called time-stepping schemes. These schemes are closely related to the discretization of differential algebraic equations, which describe smooth mechanical systems subjected to bilateral constraints. The thesis gives an overview on existing time-stepping schemes and categorizes them. Special notice is given to the time-stepping method of Moreau, which has proven to be a simple and robust integrator for arbitrary kind of non-smooth systems. Switching points are time instances at which the system configuration

changes, i.e. time instances at which for example a sticking contact begins to slide or at which an impact occurs. In contrast to event driven methods, time-stepping methods do not aim at resolving all switching points. The methods are therefore very well suited for the simulation of systems with many contacts, for example granular material. Considering mechanical systems with a fewer number of contacts, time-stepping methods may so far not be the preferable choice as the overall step size must be chosen small to detect the few switching incidents with an acceptable accuracy. This thesis proposes to use step size adjustment, i.e. to use small step sizes for time steps which contain a switching point and to increase the step size in smooth parts of the motion. In this sense the advantages of event driven integrators are merged with the advantages of the time-stepping schemes, i.e. accuracy is merged with robustness. Switching points are detected in a unified manner by observing the projection behaviour of the projective equations at the solution point. Detected switching points are then located by a regula falsi method. Furthermore, the thesis proposes to use extrapolation to increase the integration order in the smooth parts of the motion. The resulting method can handle systems with few contacts quite well by refining the step size at switching points and by using extrapolation in the smooth parts of the motion. In addition, systems with many contacts can be handled by the same method because the underlying algorithm is still a time-stepping scheme.

Zusammenfassung

Diese Dissertation behandelt die zeitliche Integration von starren mechanischen Systemen mit einseitigen Kontakten und Reibung. Der Fokus liegt auf einer nicht-glatte Modellierung solcher Systeme, d.h. der Zeitverlauf der Lagen kann Knicke aufweisen, die Geschwindigkeiten können im Falle eines Stosses sogar springen. Beschleunigungen und Kontaktkräfte können somit an isolierten Zeitpunkten undefiniert sein. Die einseitigen Kontakte und die Reibung werden mittels mengenwertiger Kraftgesetze beschrieben. Eine analytische Representation des mechanischen Systems im stossfreien Fall ergibt sich durch eine Koppelung der mengenwertigen Kraftgesetze mit den Bewegungsgleichungen via Lagrange-Multiplikatoren, welche als Kontaktkräfte interpretiert werden können. Im Falle eines Stosses werden separate Stossgleichungen und mengenwertige Stossgesetze benötigt. Eine umfassende Beschreibung des mechanischen Systems ermöglichen Massdifferentialgleichungen, welche im Stossfall den Stossgleichungen entsprechen, ansonsten sich aber zu den Bewegungsgleichungen reduzieren. Die mengenwertigen Kraft- und Stossgesetze können in einem einzigen mengenwertigen Gesetz zusammengefasst werden. Die Massdifferentialgleichungen und die dazugehörigen mengenwertigen Gesetze beinhalten als Spezialfall auch die klassische Modellierung eines mechanischen Systemes mit zweiseitigen Bindungen.

Mengenwertige Gesetze können als Normalkegelinklusionen geschrieben werden. Eine solche Vorgehensweise erlaubt unter anderem eine einheitliche Beschreibung von verschiedensten Reibgesetzen, so zum Beispiel klassische Coulomb-Reibung, Coulomb-Contensou-Reibung oder anisotrope Reibung. Die Normalkegelinklusionen werden mittels der Augmented Lagrangian Methode in projektive Gleichungen übergeführt, welche iterativ gelöst werden können. Die vorgeschlagen Iterationsschemen entsprechen den klassischen Jacobi- or Gauss-Seidel-Schemen mit zusätzlichen Projektionen, welche die Zulässigkeit der Lösungen garantieren. Die verschiedenen mengenwertigen Gesetze werden durch unterschiedliche Projektionen charakterisiert.

Die zeitliche Integration eines mechanischen Systems mit einseitigen Kontakten und Reibung basiert auf einer Diskretisierung der Massdifferentialgleichung. Eine wichtige Bedeutung haben dabei die sogenannten Schaltunkte, an welchen das mechanische System seinen Zustand wechselt. An solchen Schaltunkten findet zum Beispiel ein Haft-Gleit-Übergang statt, oder ein einseitiger Kontakt schliesst sich. Eine stückweise Diskretisierung der Massdifferentialgleichung zwischen Schaltunkten führt zu ereignisgesteuerten Integratoren, welche sehr genau aber nicht besonders robust sind. Time-Stepping-Integratoren

diskretisieren die Massendifferentialgleichung und die dazugehörigen mengenwertigen Gesetze direkt ohne Rücksichtnahme auf irgendwelche Schaltpunkte. Diese Methoden sind sehr robust, können akkumulierte Schaltpunkte bewältigen, benötigen aber eine sehr kleine Zeitschrittweite um allfällige Schaltpunkte aufzulösen. Diese Dissertation fokussiert auf Time-Stepping-Integratoren. Existierende Schemen werden klassifiziert und nach gemeinsamen Aspekten untersucht. Time-Stepping-Integratoren entfalten ihre Stärken vor allem bei der Integration von mechanischen Systemen mit sehr vielen Kontakten. Um die Methoden auch für Systeme mit wenigen Kontakten interessant zu machen, wird eine Schrittweitensteuerung propagiert, welche Schaltpunkte mit einer kleinen Zeitschrittweite auflöst, hingegen in glatten Abschnitten der Bewegung die Schrittweite hochfährt. Zusätzlich soll die Integrationsordnung in glatten Abschnitten der Bewegung mittels Extrapolationsmethoden verbessert werden. Die Genauigkeit der Integration wird somit verbessert durch eine bessere Auflösung der Schaltpunkte und durch eine höhere Integrationsordnung in den glatten Abschnitten der Bewegung. Die Time-Stepping-Methoden werden in diesem Sinne wieder näher zu den ereignisgesteuerten Integratoren gerückt um die Vorteile der beiden Methoden, d.h. Genauigkeit und Robustheit, in einem Integrator zu vereinen.