Doctoral Thesis

Numerical Methods for Optimization and Variational Problems with Manifold-Valued Data

Author(s):
Sprecher, Markus

Publication Date:
2016

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-010686559 →

Diss. ETH No. 23579

Numerical Methods for Optimization and Variational Problems with Manifold-Valued Data

A dissertation submitted to
ETH Zürich

for the degree of
Doctor of Sciences

presented by
MARKUS SPRECHER
MSc ETH Math, ETH Zürich born August 30, 1986
citizen of Chur, GR

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Philipp Grohs, ETH Zürich, examiner
Prof. Dr. Oliver Sander, TU Dresden, co-examiner
Prof. Dr. Johannes Wallner, TU Graz, co-examiner

2016

Abstract

In this thesis, we consider optimization and variational problems where the data is constrained to lie on a Riemannian manifold. Two examples, we will particularly focus on, are the denoising of manifold-valued images by minimizing a total variation (TV) functional and the minimization of the harmonic energy with prescribed boundary data. Typical examples for the manifold in these applications are the sphere S^n (e.g. for the chromaticity part of an RGB-image, or unit vector fields), the special orthogonal group $SO(n)$ (e.g. for rigid body motion) or the set of positive definite matrices $SPD(n)$ (e.g. for diffusion tensor magnetic resonance imaging (DT-MRI)).

For the optimization problems, we will use techniques of Absil et al. [3], which generalize many optimization techniques for functionals on $\mathbb{R}^n$ to optimization techniques for functionals on manifolds. We present a theory which shows how these techniques can be applied to our problems.

To minimize the TV functional, we propose an iteratively reweighted minimization (IRM) algorithm, which is an adaptation of the well-known iteratively reweighted least squares (IRLS) algorithm. We show that the algorithm can be applied to Hadamard manifolds and the half-sphere.

To minimize the harmonic energy, we use a natural discretization. As it turns out, this discretization has the same structure as the functional occuring in the IRM algorithm. This will allow us to reuse derived results. In particular, it follows that the discretization of the harmonic energy has a unique minimizer. For the half-sphere we can prove convergence of the discrete minimizer towards the minimizer of the harmonic energy. We will also present a general technique to numerically solve variational problems with manifold valued data by minimizing the functional on a subspace. This subspace is constructed from a classical “finite element space”. Minimizing a functional over the subspace will reduce to an optimization problem on a Cartesian power of the manifold. To estimate the discretization error, we will derive a nonlinear Céa lemma showing that the discretization error can be bounded by the best approximation error. To estimate the best approximation error, we generalize a class of approximation operators into finite element spaces and show that the generalization satisfies the same error estimate as its linear counterpart.

The thesis can be summarized by saying that we generalize numerical methods and theories for optimization and variational problems from the real-valued case to the manifold-valued case.

Zusammenfassung

In dieser Dissertation betrachten wir Optimierungs- und Variationsprobleme mit der Nebenbedingung, dass die Daten auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit liegen müssen. Zwei Beispiele, denen wir uns besonders widmen, sind das Entrauschen von mannigfaltigkeitswertigen Bildern mittels Minimierung eines Variationsfunktionals und die Minimierung der harmonischen Energie mit vorgebenen Randdaten. Typische Beispiele für die Mannigfaltigkeit in diesen Anwendungen sind die Sphäre S^n (z.B. für den Chromatizitätsanteil eines RGB-Bildes, oder Einheitsvektorfelder), die spezielle orthogonale Gruppe $SO(n)$ (z.B. für starre Bewegungen) oder die Menge der positiv definiten Matrizen $SPD(n)$ (z.B. für die Diffusions-Tensor-Bildgebung (DT-MRI)).

Für die Optimierungsprobleme verwenden wir Techniken von Absil et al. [3], welche viele Optimierungstechniken für Funktionale auf $\mathbb{R}^n$ zu Optimierungstechniken für Funktionale auf Mannigfaltigkeiten verallgemeinern. Wir leiten eine Theorie her um diese Techniken auf unsere Probleme anwenden zu können.

Um das Variationsfunktional zu minimieren, schlagen wir einen iterativen Neugewichtungsalgorithmus (IRM) vor, welcher eine Abwandlung des allgemein bekannten iterativen kleinste Quadrate Neugewichtungsalgorithmus (IRLS) ist. Wir zeigen, dass unser Algorithmus auf Hadamardmannigfaltigkeiten und die Halbkugel anwendbar ist.

Um die harmonische Energie zu minimieren, verwenden wir eine natürliche Diskretisierung. Wie sich zeigen wird hat diese Diskretisierung die gleiche Struktur wie das Funktional, welches beim IRM-Algorithmus auftritt. Dies wird uns erlauben, hergeleitete Resultate wiederzuverwenden. Unter anderem folgt dann, dass die Diskretisierung der harmonischen Energie einen eindeutigen Minimierer hat. Für die Halbkugel können wir zeigen, dass dieser Minimierer gegen den Minimierer der harmonischen Energie konvergiert. Wir werden auch eine allgemeine Methode präsentieren, um numerisch Variationsprobleme mit mannigfaltigkeitswertigen Daten zu lösen. Die Methode basiert auf dem Lösen des Minimierungsproblems auf einem Unterraum. Dieser Unterraum stammt jeweils von einem “Finite Elemente Raum” ab. Minimierung eines Funktionals über diesen Unterraum reduziert sich auf die Minimierung eines Funktionals auf dem kartesischen Produkt einer Mannigfaltigkeit. Um den Diskretisierungsfehler abzuschätzen, werden wir ein nichtlineares Céa-lemma herleiten, welches zeigt, dass der Diskretisierungsfehler mit dem bestmöglichen Fehler abgeschätzt werden kann. Um den bestmöglichen Fehler abzuschätzen, verallgemeinern wir eine Klasse von Approximationsoperatoren in Finite-Elemente-Räume und zeigen, dass die Verallgemeinerung die gleichen Fehlerabschätzungen erfüllt wie das lineare Gegenstück.

Zusammenfassend kann man sagen, dass die Arbeit numerische Methoden und Theorien für Optimierungs- und Variationsprobleme vom reellwertigen auf den mannigfaltigkeitswertigen Fall verallgemeinert.