

# Approximative Funktionalgleichungen und Mittelwertsätze für Dirichletreihen, die Spitzenformen assoziiert sind

**Author(s):**
Good, Anton

**Publication Date:**
1974

**Permanent Link:**
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000085421

**Diss. Nr. 5303**

# Approximative Funktionalgleichungen und Mittelwertsätze für Dirichletreihen, die Spitzenformen assoziiert sind

ABHANDLUNG

zur Erlangung
des Titels eines Doktors der Mathematik
der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZÜRICH

vorgelegt von

ANTON GOOD
dipl. Math. ETH Zürich
geboren am 13. Juni 1947
von Mels (Kt. St. Gallen)

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. K. Chandrasekharan, Referent
Prof. Dr. A. Pfluger, Korreferent

Juris Druck + Verlag Zürich
1974

Mit Satz 5 beweisen wir nun

Korollar 4. Sei $0 < \varepsilon < 1/2$ , $\frac{4\pi^2}{N^2} xy = t^2$ . Dann ist gleichmässig in $\frac{k-1}{2} \leq \sigma \leq \frac{k+1}{2}$

$$G(s) = \sum_{n \leq x} a_n n^{-s} + \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{2s-k} \frac{\Gamma(k-s)}{\Gamma(s)} \sum_{n \leq y} b_n n^{s-k} + O\Big(|t|^{-1/2+\varepsilon} x^{\frac{k-1}{2}-\sigma}(x+|t|) + |t|^{-1/4+\varepsilon/2} x^{\frac{k-1}{2}-\sigma+1/5}\left(x^{3/5}+|t|^{3/5}\right) + x^{k/2-\sigma+1/5}\left(x^{-2/5}+|t|^{-2/5}\right)\Big),\ |t| \to \infty,$$

wobei die im $O$-Term implizit gegebene Konstante von $\varepsilon$ nicht aber von $s$, $x$ und $y$ abhängig ist. Insbesondere gilt also für $x = y = \frac{N}{2\pi}|t|$

$$G(s) = \sum_{n \leq x} a_n n^{-s} + \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{2s-k} \frac{\Gamma(k-s)}{\Gamma(s)} \sum_{n \leq y} b_n n^{s-k} + O\left(|t|^{k/2-\sigma+1/20+\varepsilon}\right),\ |t| \to \infty.$$

Beweis: Wir wählen in Satz 5 $\alpha = 1/2 - \varepsilon$ und $r \geq 1/\varepsilon$ . Damit ist der $O$-Term in Satz 5 von der Ordnung $O\left(x^{\frac{k-1}{2}-\sigma} |t|^{1/2}\right),\ |t| \to \infty$ . Nach Lemma 2 ist

$$\sum_{1 \leq \frac{n}{x} \leq 1+|t|^{-\alpha}} |a_n|^2 = Ax^k(1+|t|^{-\alpha})^k - Ax^k + O(x^{k-2/5}) = O\left(x^k |t|^{-\alpha} + x^{k-2/5}\right),\ |t| \to \infty,\ x > 0,$$

und ebenso

$$\sum_{\frac{1}{1+|t|^{-\alpha}} \leq \frac{n}{y} \leq 1} |b_n|^2 = O\left(y^k |t|^{-\alpha} + y^{k-2/5}\right),\ |t| \to \infty,\ y > 0.$$

Für $\sigma \geq 0$ haben wir

$$\sum_{1 \leq \frac{n}{x} \leq 1+|t|^{-\alpha}} n^{-2\sigma} \leq x^{-2\sigma} + \int_x^{x(1+|t|^{-\alpha})} u^{-2\sigma}\,du \leq x^{-2\sigma} + x^{-2\sigma}\int_x^{x(1+|t|^{-\alpha})} du = x^{-2\sigma}\left(1 + x|t|^{-\alpha}\right),\ |t| \to \infty,\ x > 0.$$

Da $\varphi_\alpha$ und $\varphi_\alpha^0$ beschränkt sind, ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq \frac{n}{x} \leq 1+|t|^{-\alpha}} a_n n^{-s} \varphi_\alpha\left(\tfrac{n}{x}, t\right) &= O\Big(\Big(\sum_{1 \leq \frac{n}{x} \leq 1+|t|^{-\alpha}} |a_n|^2 \sum_{1 \leq \frac{n}{x} \leq 1+|t|^{-\alpha}} n^{-2\sigma}\Big)^{1/2}\Big) = \\ &= O\left(\left(x^{k/2}|t|^{-\alpha/2} + x^{k/2-1/5}\right)\left(x^{-\sigma} + x^{-\sigma+1/2}|t|^{-\alpha/2}\right)\right) \\ &= O\left(x^{\frac{k+1}{2}-\sigma}|t|^{-\alpha} + x^{\frac{k+1}{2}-\sigma-1/5}|t|^{-\alpha/2} + x^{k/2-\sigma-1/5}\right),\ |t| \to \infty, \end{aligned} \tag{5.4}$$

und

$$\left(\frac{2\pi}{N}\right)^{2s-k} \frac{\Gamma(k-s)}{\Gamma(s)} \sum_{\frac{1}{1+|t|^{-\alpha}} \leq \frac{n}{y} \leq 1} b_n n^{s-k}\left(\varphi_\alpha^0\left(\tfrac{n}{y}, s\right) - 1\right) = O\Big(|t|^{k-2\sigma}\Big(\sum_{\frac{1}{1+|t|^{-\alpha}} \leq \frac{n}{y} \leq 1} |b_n|^2 \sum_{\frac{1}{1+|t|^{-\alpha}} \leq \frac{n}{y} \leq 1} n^{2\sigma-2k}\Big)^{1/2}\Big) =$$

$$= O\left(|t|^{k-2\sigma}\left(y^{k/2}|t|^{-\alpha/2}+y^{k/2-1/5}\right)\left(y^{\sigma-k}+y^{\sigma-k+1/2}|t|^{-\alpha/2}\right)\right) =$$
$$= O\left(|t|^{k-2\sigma}\left(y^{\sigma-k/2+1/2}|t|^{-\alpha}+y^{\sigma-k/2+1/2-1/5}|t|^{-\alpha/2}+y^{\sigma-k/2-1/5}\right)\right)$$
$$= O\left(|t|^{1-\alpha}x^{\frac{k-1}{2}-\sigma}+|t|^{2/5-\alpha/2}x^{\frac{k-1}{2}-\sigma+1/5}+|t|^{-2/5}x^{k/2-\sigma+1/5}\right), |t|\to\infty, \tag{5.5}$$

da $\frac{4\pi^2}{N^2}xy = t^2$. Setzen wir $\alpha = 1/2-\varepsilon$ in (5.4) und (5.5) ein, so erhalten wir die Behauptung des Korollars.

Vor dem Beweis von Satz 5 untersuchen wir die Mellintransformation von $\varphi_\alpha$ und geben eine Intgegraldarstellung für $\varphi_\alpha^o$

5.2 Hilfssätze

Lemma 18. Sei $\varphi_\alpha$ eine Funktion aus $C_\alpha^{(r)}$ (siehe p. 60). Sei $z=u+iv$ und für $u>0$

$$\int_0^\infty \varphi_\alpha(\rho,t)\rho^{z-1}d\rho = \frac{K_\alpha(z,t)}{z}$$

Dann lässt sich $K_\alpha$ zu einer ganzen Funktion in $z$ fortsetzen und $K_\alpha(0,t)=1$

Für $\ell = 1,2,\dots,r$ besitzt $K_\alpha$ die Integraldarstellungen

$$K_\alpha(z,t) = \frac{(-1)^\ell}{(z+1)(z+2)\cdots(z+\ell-1)}\int_0^\infty \varphi_\alpha^{(\ell)}(\rho,t)\,\rho^{z+\ell-1}\,d\rho, \tag{5.6}$$

und es gilt die Mellininversion

$$\varphi_\alpha(\rho,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty} K_\alpha(z,t)\rho^{-z}\frac{dz}{z}, \quad u>0.$$

Beweis: Für $u>0$ ist

$$\frac{K_\alpha(z,t)}{z} = \int_0^1 \rho^{z-1}d\rho + \int_1^\infty \varphi_\alpha(\rho,t)\rho^{z-1}d\rho = \frac{1}{z}+\tilde{K}_\alpha(z,t).$$

Das Integral $\int_1^\infty \varphi_\alpha(\rho,t)\rho^{z-1}d\rho$ ist für jede komplexe Zahl $z$ absolut konvergent. Somit ist $\tilde{K}_\alpha$ eine ganze Funktion in $z$, also auch $K_\alpha$ und $K_\alpha(0,t)=1$

Da $\varphi_\alpha$ $r$-mal stetig differenzierbar ist, ergeben sich die Integraldarstellungen (5.6) durch partielle Integrationen vorerst für $z=u>0$. Die Integrale in (5.6) konvergieren für jedes komplexe $z$ absolut, da $\varphi_\alpha^{(\ell)}(\rho,t)=0$ für $\ell\geq 1, 0\leq\rho\leq 1$. Wegen der Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung gilt dann (5.6) auch für jedes komplexe $z$. Somit ist insbesondere

$$K_\alpha(z,t) = -\int_0^\infty \varphi_\alpha^{(1)}(\rho,t)\rho^z d\rho = -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\alpha^{(1)}(e^\mu,t)\, e^{\mu(z+1)} d\mu .$$

Als Funktion von $\mu$ ist $\varphi_\alpha^{(1)}(e^\mu,t)$ $(r-1)$-mal stetig differenzierbar und hat kompakten Träger. Also ist nach der Theorie der Fouriertransformation für feste $\alpha$, $t$ und $u$

$$K_\alpha(u+iv,t) = O(|v|^{1-r}),\ |v|\to\infty ,$$

und

$$-\varphi_\alpha^{(1)}(\rho,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty} K_\alpha(z,t)\rho^{-(z+1)}dz , \tag{5.7}$$

da $r\geq 3$. Wir integrieren (5.7) von $\rho_0>0$ bis nach $\infty$. Für $u>0$ darf die Reihenfolge der Integrationen auf der rechten Seite von (5.7) vertauscht werden, da das Doppelintegral für $u>0$ absolut konvergiert:

$$-\int_{\rho_0}^\infty \varphi_\alpha^{(1)}(\rho,t)d\rho = \varphi_\alpha(\rho_0,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\rho_0}^\infty\int_{u-i\infty}^{u+i\infty} K_\alpha(z,t)\rho^{-(z+1)}dz\,d\rho =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty} K_\alpha(z,t)\int_{\rho_0}^\infty \rho^{-(z+1)}d\rho = \frac{1}{2\pi i}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty} K_\alpha(z,t)\rho_0^{-z}\frac{dz}{z} .$$

Lemma 19.

(a) Sei $s=\sigma+it$ und $\varphi_\alpha^0$ durch (5.3) definiert. $\varphi_\alpha^0$ besitzt die Integraldarstellung

$$\varphi_\alpha^0(\rho,s) = \frac{\Gamma(s)}{2\pi i\,\Gamma(k-s)}\int_{\mathfrak{F}} \frac{(-1)^r\,(\rho t^2)^z}{z(z+1)\dots(z+r-1)}\int_0^{1/\rho}\varphi_\alpha^{(r)}(\mu,t)\mu^{z+r-1}d\mu\,\frac{\Gamma(k-s-z)}{\Gamma(s+z)}dz \tag{5.8}$$

wobei $\mathfrak{F}$ eine einfach geschlossene Kurve ist, welche die Punkte $z=0,-1,\dots,-r+1$ nicht aber die Punkte $z=k-s+n$, $n=0,1,\dots$, im positiven Sinne umschliesst.

(b) Sei $h$ durch (5.2) definiert. Dann ist für $\ell=0,1,2,\dots$

$$h_\ell(\sigma+it) = O(|t|^{-\ell/2}), \ |t| \to \infty,$$

gleichmässig für $\frac{k-1}{2} \leq \sigma \leq \frac{k+1}{2}$.

<u>Beweis</u>: (a) Wir integrieren das innere Integral auf der rechten Seite von (5.8) mehrmals partiell. Da $\varphi_\alpha^{(\ell)}(\rho,t)=0$ für $\ell=1,2,\dots,r$, wenn $0\leq\rho\leq 1$ erhalten wir

$$\int_0^{1/\rho}\varphi_\alpha^{(r)}(\mu,t)\mu^{z+r-1}d\mu = \sum_{j=1}^{r-1}\varphi_\alpha^{(r-j)}(1/\rho,t)\,(1/\rho)^{r+z-j}(-1)^{j+1}(z+r-1)(z+r-2)\dots(z+r-j+1)+$$
$$+(-1)^{r-1}\int_1^{1/\rho}\varphi_\alpha^{(1)}(\mu,t)\mu^z d\mu\,(z+r-1)(z+r-2)\dots(z+1)$$
$$=\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j+1}\varphi_\alpha^{(r-j)}(1/\rho,t)\,(1/\rho)^{z+r-j}(z+r-1)\dots(z+r-j+1)+$$
$$+(-1)^r(z+r-1)\dots(z+2)(z+1)+(-1)^r\int_1^{1/\rho}\varphi_\alpha(\mu,t)\mu^{z-1}d\mu\,(z+r-1)\dots(z+1)z\,.$$

( Für $j=1$ sei $(z+r-1)\dots(z+r-j+1)=1$ ). Da

$$\int_1^{1/\rho}\varphi_\alpha(\mu,t)\mu^{z-1}d\mu$$

eine ganze Funktion in $z$ definiert, ergibt sich für die rechte Seite in (5.8)

$$\frac{\Gamma(s)}{2\pi i\,\Gamma(k-s)}\int_{\mathfrak{F}}\frac{(-1)^r(\rho t^2)^z}{z(z+1)\dots(z+r-1)}\int_0^{1/\rho}\varphi_\alpha^{(r)}(\mu,t)\mu^{z+r-1}d\mu\,\frac{\Gamma(k-s-z)}{\Gamma(s+z)}dz=$$

$$=\frac{\Gamma(s)}{2\pi i\,\Gamma(k-s)}\sum_{j=1}^{r}(-1)^{r-j+1}\varphi_\alpha^{(r-j)}(1/\rho,t)\,(1/\rho)^{r-j}\int_{\mathfrak{F}}\frac{t^{2z}}{z(z+1)\dots(z+r-j)}\frac{\Gamma(k-s-z)}{\Gamma(s+z)}dz+$$

$$+\frac{\Gamma(s)}{2\pi i\,\Gamma(k-s)}\int_{\mathfrak{F}}\frac{(\rho t^2)^z}{z}\frac{\Gamma(k-s-z)}{\Gamma(s+z)}dz+\frac{\Gamma(s)}{2\pi i\,\Gamma(k-s)}\int_{\mathfrak{F}}(\rho t^2)^z\int_1^{1/\rho}\varphi_\alpha(\mu,t)\mu^{z-1}d\mu\,\frac{\Gamma(k-s-z)}{\Gamma(s+z)}dz=$$

$$=-\sum_{\ell=0}^{r-1}\varphi_\alpha^{(\ell)}(1/\rho,t)\,(-1/\rho)^\ell\,h_\ell(s)+1=\varphi_\alpha^0(\rho,s),$$

nach (5.2) und (5.3).

(b) In der Definition (5.2) von $h_\ell$ dürfen wir, wenn $|t|>\max(\ell^2,1)$ ist, $\mathfrak{F}$ als Kreis mit Radius $|t|^{1/2}$ und Zentrum $z=0$ wählen. Nach Lemma 9(b) ist

$$\frac{\Gamma(k-s-z)}{\Gamma(s+z)}=O\left(|t+v|^{k-2\sigma-2u}\right),$$

wenn $z$ auf $\mathfrak{F}$ und $|t| \to \infty$ , gleichmässig in $\frac{k-1}{2} \leq \sigma \leq \frac{k+1}{2}$ .
Bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}_1$ den Teil von $\mathfrak{F}$ in der Halbebene $u \geq 0$ und mit $\mathfrak{F}_2$ den Teil in $u \leq 0$ , so ist

$$\frac{\Gamma(k-s-z)}{\Gamma(s+z)} = O(|t|^{k-2\sigma} |t+v|^{-2u}) = O\left(|t|^{k-2\sigma-2u}(1-|t|^{-1/2})^{-2u}\right), \ z \text{ auf } \mathfrak{F}_1, |t| \to \infty,$$

und

$$\frac{\Gamma(k-s-z)}{\Gamma(s+z)} = O\left(|t|^{k-2\sigma-2u}(1+|t|^{-1/2})^{-2u}\right), \text{ wenn } z \text{ auf } \mathfrak{F}_2, |t| \to \infty,$$

gleichmässig in $\frac{k-1}{2} \leq \sigma \leq \frac{k+1}{2}$ . Mit Stirlings Formel (2.8) erhalten wir so

$$h_\ell(s) = \frac{\Gamma(s)}{2\pi i\,\Gamma(k-s)} \left(\int_{\mathfrak{F}_1} + \int_{\mathfrak{F}_2}\right) \frac{t^{2z}}{z(z+1)\dots(z+\ell)} \cdot \frac{\Gamma(k-s-z)}{\Gamma(s+z)}\, dz$$

$$= O(|t|^{2\sigma-k}) \left(\int_{\mathfrak{F}_1} + \int_{\mathfrak{F}_2}\right) \frac{t^{2u}}{|t|^{(\ell+1)/2}} \frac{|\Gamma(k-s-z)|}{|\Gamma(s+z)|} |dz|$$

$$= O\left(|t|^{-\ell/2} \left\{(1-|t|^{-1/2})^{-2|t|^{1/2}} + (1+|t|^{-1/2})^{2|t|^{1/2}}\right\}\right) = O(|t|^{-\ell/2}), \ |t| \to \infty,$$

gleichmässig in $\frac{k-1}{2} \leq \sigma \leq \frac{k+1}{2}$ da $(1 \pm |t|^{-1/2})^{\pm |t|^{1/2}} = O(1), \ |t| \to \infty$ . Damit ist das Lemma bewiesen.

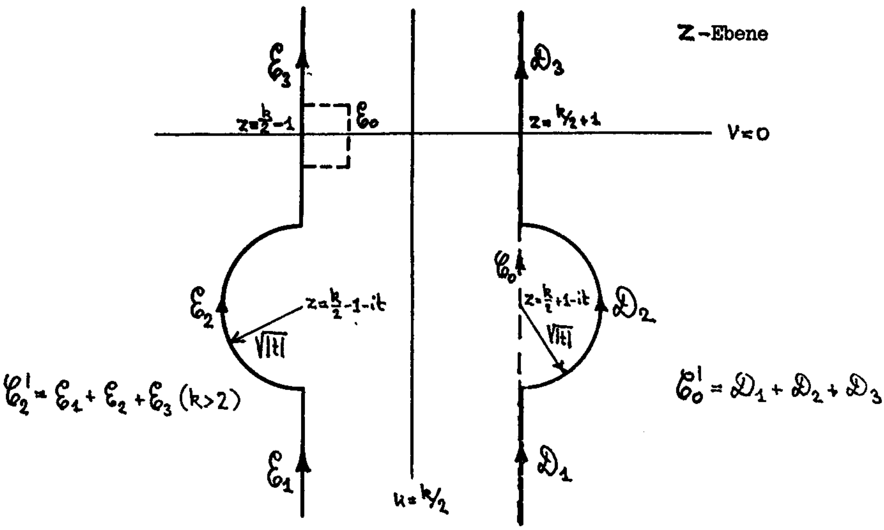
### 5.3 Beweis von Satz 5

Da die Beweisidee für Satz 5 grundsätzlich dieselbe ist wie für Satz 2, werden wir uns an die Notation im Beweis von Satz 2 halten und uns in den gleichbleibenden Details kurz fassen.

Sei $|t| > (r-1)^2$. Auf dieselbe Weise wie (3.8) erhalten wir mit Lemma 18 für $x > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \varphi_\alpha\left(\frac{n}{x}, t\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}_\sigma} \frac{x^w}{w} K_\alpha(w,t)\, G(s+w)\, dw.$$

Der Beweis von Satz 2 lässt sich nun bis (3.9) Wort für Wort übertragen. Für die Integrationswege erinnere man sich der Figur




Da zwischen $\mathscr{C}_0$ und $\mathscr{C}_0'$ keine Pole des Integranden in (3.9) liegen, dürfen wir in (3.9) $\mathscr{C}_0$ gleich durch $\mathscr{C}_0'$ ersetzen. Dies ist auch hier möglich und wir erhalten

$$G(s) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \varphi_\alpha\left(\frac{n}{x}, t\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}_0'} \frac{x^{k-s-z}}{(s+z-k)} K_\alpha(k-s-z, t) \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{k-2z} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(k-z)} G_0(z)\, dz \; . \tag{5.9}$$

In Satz 2 haben wir $K(k-s-z)\,G_0(z)$ in eine Summe aufgespalten. Hier werden wir $K_\alpha(k-s-z,t)\,G_0(z)$ durch ein Integral ersetzen. Damit wird wieder erreicht, dass sich bei den Abschätzungen von Integralen über $\mathscr{D}_2$ und $\mathscr{E}_2$ gewisse Faktoren wegheben. Sei $z=u+iv$ und

$$G_1(\beta, z) = \sum_{n \le \beta} b_n n^{-z} \quad ,$$

$$G_2(\beta, z) = \sum_{n > \beta} b_n n^{-z} \quad , \quad u > \frac{k+1}{2} \, .$$

Wenn $y>0$ , $\rho>0$ , $u > \frac{k+1}{2}$ ist nach Lemma 18

$$K_\alpha(k-s-z, t)\, G_0(z) = (-1)^r \prod_{\ell=1}^{r-1} (k-s-z+\ell)^{-1} \int_0^\infty \varphi_\alpha^{(r)}(\rho, t)\, \rho^{k-s-z+r-1}\, d\rho \; G_0(z)$$

$$= (-1)^r \prod_{\ell=1}^{r-1} (k-s-z+\ell)^{-1} \int_0^\infty \varphi_\alpha^{(r)}(\rho, t)\, G_1(y/\rho, z)\, \rho^{k-s+z+r-1}\, d\rho \; +$$

$$+ (-1)^r \prod_{\ell=1}^{r-1} (k-s-z+\ell)^{-1} \int_0^\infty \varphi_\alpha^{(r)}(\rho, t)\, G_2(y/\rho, z)\, \rho^{k-s-z+r-1}\, d\rho \, .$$

Dementsprechend wird das Integral in (5.9) in eine Summe von zwei Integralen aufgespalten, die wir in Analogie zu Satz 2 mit $I_1$ und $I_2'$ bezeichnen wollen. Wieder wird der Integrationsweg $\mathcal{C}_0'$ von $I_1$ nach $\mathcal{C}_2'$ verschoben und das so entstehende Integral mit $I_1'$ bezeichnet, also

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_0'} \frac{x^{k-s-z}\,(-1)^{r+1}}{\prod\limits_{\ell=0}^{r-1}(k-s-z+\ell)} \int_0^\infty \varphi_\alpha^{(r)}(\rho,t)\,G_1(y/\rho,z)\,\rho^{k-s-z+r-1}\,d\rho\,\left(\frac{2\pi}{N}\right)^{k-2z}\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(k-z)}\,dz$$

$$= I_1' + \mathrm{Res}_{I_1}(\mathcal{C}_2', \mathcal{C}_0'),$$

wo $\mathrm{Res}_{I_1}(\mathcal{C}_2', \mathcal{C}_0')$ die Summe aller Residuen des Integranden von $I_1$ zwischen $\mathcal{C}_2'$ und $\mathcal{C}_0'$ bezeichnet. Wenn $w = k-s-z$ ist also wegen $|t| > (r-1)^2$

$$\mathrm{Res}_{I_1}(\mathcal{C}_2', \mathcal{C}_0') = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{F}} \frac{x^{w}\,(-1)^{r+1}}{\prod\limits^{r-1}(w+\ell)} \int_0^\infty \varphi_\alpha^{(r)}(\rho,t)\,G_1(y/\rho,k-s-w)\,\rho^{w+r-1}\,d\rho\,\left(\frac{2\pi}{N}\right)^{2(s+w)-k}\frac{\Gamma(k-s-w)}{\Gamma(s+w)}(-dw),$$

wobei die einfach geschlossene Kurve $\mathfrak{F}'$ die Punkte $w = 0,-1,\dots,-r+1$ nicht aber die Punkte $w = k-s+n$, $n = 0,1,\dots$, im positiven Sinne umschliesst. Da $\varphi_\alpha^{(r)}(\rho,t) = 0$, wenn $\rho$ nicht im Intervall $[1,2]$ liegt, ist

$$\int_0^\infty \varphi_\alpha^{(r)}(\rho,t)\,G_1(y/\rho,k-s-w)\,\rho^{w+r-1}\,d\rho = \sum_{n\le y} b_n n^{s+w-k}\int_0^{y/n}\varphi_\alpha^{(r)}(\rho,t)\,\rho^{w+r-1}\,d\rho .$$

Setzen wir noch $\frac{4\pi^2}{N^2}x\,y = t^2$, so erhalten wir mit Lemma 19(a)

$$\mathrm{Res}_{I_1}(\mathcal{C}_2', \mathcal{C}_0') = \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{2s-k}\sum_{n\le y} b_n n^{s-k}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{F}}\left(\frac{4\pi^2}{N^2}xn\right)^{w}(-1)^r\prod_{\ell=0}^{r-1}(w+\ell)^{-1}\int_0^{y/n}\varphi_\alpha^{(r)}(\rho,t)\,\rho^{w+r-1}\,d\rho\,\frac{\Gamma(k-s-w)}{\Gamma(s+w)}\,dw$$

$$= \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{2s-k}\frac{\Gamma(k-s)}{\Gamma(s)}\sum_{n\le y} b_n n^{s-k}\left\{\frac{\Gamma(s)}{2\pi i\,\Gamma(k-s)}\int_{\mathfrak{F}}\left(\frac{n}{y}t^2\right)^{w}(-1)^r\prod_{\ell=0}^{r-1}(w+\ell)^{-1}\int_0^{y/n}\varphi_\alpha^{(r)}(\rho,t)\,\rho^{w+r-1}\,d\rho\,\frac{\Gamma(k-s-w)}{\Gamma(s+w)}\,dw\right\}$$

$$= \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{2s-k}\frac{\Gamma(k-s)}{\Gamma(s)}\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{s-k}\,\varphi_\alpha^{0}\left(\frac{n}{y},s\right),$$

da $\varphi_\alpha^0(\rho,s) = 0$ für $\rho \geq 1$. Damit wird aus (5.9)

$$G(s) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}\varphi_\alpha\left(\frac{n}{x},t\right) - \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{2s-k}\frac{\Gamma(k-s)}{\Gamma(s)}\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{s-k}\,\varphi_\alpha^{0}\left(\frac{n}{y},s\right) = I_1' + I_2'. \tag{5.10}$$

Bei der Abschätzung von $I_1'$ und $I_2'$ gehen wir gleich wie in Satz 2 vor:

Nach der Bemerkung in Anschluss an Satz 5 ist

$$\varphi_\alpha^{(r)}(\rho,t) = O(|t|^{r\alpha}), \text{ wenn } |t| \to \infty,$$

gleichmässig für $\rho \geq 0$ . Nach Lemma 11(b) gilt

$$G_1(y/\rho, z) = O\left( (y/\rho)^{(k+1)/2 - u} \right), \text{ wenn } y > 0,\ \rho > 0 \text{ und } u \leq \tfrac{k}{2} - 1,$$

und

$$G_2(y/\rho, z) = O\left( (y/\rho)^{(k+1)/2 - u} \right), \text{ wenn } y > 0,\ \rho > 0 \text{ und } u \geq \tfrac{k}{2} + 1. \tag{5.11}$$

Somit erhalten wir mit Lemma 9(a) und 10, da $r \geq 4$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{D}_1} \frac{x^{k-s-z}(-1)^{r+1}}{\prod_{\ell=0}^{r-1}(k-s-z+\ell)} \int_0^\infty \varphi_\alpha^{(r)}(\rho,t)\, G_2(y/\rho, z)\, \rho^{k-s-z+r-1} d\rho \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{k-2z} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(k-z)}\, dz =$$

$$= O\left( x^{k-\sigma-(k/2+1)} |t|^{r\alpha} \int_{-\infty}^{-t-\sqrt{|t|}} \frac{(|v|+1)^2}{|t+v|^r} \int_1^2 (y/\rho)^{-1/2} \rho^{k/2-\sigma+r-2} d\rho\, dv \right)$$

$$= O\left( x^{(k-1)/2-\sigma} (xy)^{-1/2} |t|^{r\alpha} |t|^{2-r/2+1/2} \right) = O\left( x^{(k-1)/2-\sigma} |t|^{5/2 - r(1/2-\alpha)} \right),\ |t| \to \infty,$$

und

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{E}_1} \frac{x^{k-s-z}(-1)^{r+1}}{\prod_{\ell=0}^{r-1}(k-s-z+\ell)} \int_0^\infty \varphi_\alpha^{(r)}(\rho,t)\, G_1(y/\rho, z)\, \rho^{k-s-z+r-1} d\rho \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{k-2z} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(k-z)}\, dz$$

$$= O\left( x^{k-\sigma-(k/2-1)} |t|^{r\alpha} \int_{-\infty}^{-t-\sqrt{|t|}} \frac{(|v|+1)^{-2}}{|t+v|^r} \int_1^2 (y/\rho)^{3/2} \rho^{k/2-\sigma+r} d\rho\, dv \right)$$

$$= O\left( x^{(k-1)/2-\sigma} (xy)^{3/2} |t|^{\alpha r} |t|^{-2-r/2+1/2} \right) = O\left( x^{(k-1)/2-\sigma} |t|^{3/2 + r(1/2-\alpha)} \right),\ |t| \to \infty.$$

Wieder sind die Beiträge zu den Integralen $I_1'$ , $I_2'$ von der Integration längs $\mathcal{E}_3$ respektive $\mathcal{D}_3$ von derselben Grössenordnung, und für $k = 1, 2$ ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{E}_0} \frac{x^{k-s-z}(-1)^{r+1}}{\prod_{\ell=0}^{r-1}(k-s-z+\ell)} \int_0^\infty \varphi_\alpha^{(r)}(\rho,t)\, G_1(y/\rho, z)\, \rho^{k-s-z+r-1} d\rho \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{k-2z} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(k-z)}\, dz$$

$$= O\left( x^{k-\sigma-(k/2-1)} |t|^{\alpha r - r} y^{3/2} \int_{\mathcal{E}_0} |dz| \right) = O\left( x^{(k-1)/2-\sigma} (xy)^{3/2} |t|^{r(\alpha-1)} \right)$$

$$= O\left( x^{(k-1)/2-\sigma} |t|^{3/2 - r(1/2-\alpha)} \right),\ |t| \to \infty,$$

da $r \geq 3$.

Entscheidend sind nun wieder die Beiträge von der Integration längs $\mathcal{D}_2$ und $\mathcal{E}_2$

Für $z$ auf $\mathcal{D}_2$ ist

$$\int_0^\infty \varphi_\alpha^{(r)}(\varrho,t)\, G_2(y/\varrho, z)\, \varrho^{k-s-z+r-1}\, d\varrho = O\Big(|t|^{r\alpha} \int_1^2 (y/\varrho)^{(k+1)/2-u}\, \varrho^{k-\sigma-u+r-1}\, d\varrho\Big)$$
$$= O\big(|t|^{r\alpha}\, y^{(k+1)/2-u}\big), \text{ wenn } |t| \to \infty,$$

und entsprechend für $z$ auf $\mathcal{E}_2$

$$\int_0^\infty \varphi_\alpha^{(r)}(\varrho,t)\, G_1(y/\varrho, z)\, \varrho^{k-s-z+r-1}\, d\varrho = O\Big(|t|^{r\alpha} \int_1^2 (y/\varrho)^{(k+1)/2-u}\, \varrho^{k-\sigma-u+r-1}\, d\varrho\Big)$$
$$= O\big(|t|^{r\alpha}\, y^{(k+1)/2-u}\big), \text{ wenn } |t| \to \infty. \tag{5.12}$$

Damit erhalten wir mit Lemma 9(b)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{D}_2} \frac{x^{k-s-z}\,(-1)^{r+1}}{\prod_{\ell=0}^{r-1}(k-s-z+\ell)} \int_0^\infty \varphi_\alpha^{(r)}(\varrho,t)\, G_2(y/\varrho, z)\, \varrho^{k-s-z+r-1}\, d\varrho \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{k-2z} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(k-z)}\, dz$$
$$= O\Big(x^{k-\sigma}\, |t|^{r\alpha}\, y^{(k+1)/2} \int_{\mathcal{D}_2} \Big(\frac{4\pi^2}{N^2} xy\Big)^{-u} \frac{(|t| + |t|^{1/2})^{2u-k}}{|t|^{r/2}}\, |dz|\Big)$$
$$= O\Big(x^{(k-1)/2-\sigma}\, (xy)^{(k+1)/2}\, |t|^{r(\alpha-1/2)}\, |t|^{-k} \int_{\mathcal{D}_2} (1+|t|^{-1/2})^{2u}\, |dz|\Big)$$
$$= O\big(x^{(k-1)/2-\sigma}\, |t|^{3/2 - r(1/2-\alpha)}\big),\ |t| \to \infty,$$

denn $(1+|t|^{-1/2})^{2u} \le e^{2|t|^{1/2} \log(1+|t|^{-1/2})} = O(1)$, für $|t| \to \infty$.

Mit (5.11) und (5.12) zeigt man, dass der Beitrag zu $I_1'$ von der Integration über $\mathcal{E}_2$ ebenfalls von der Ordnung $O(x^{(k-1)/2-\sigma}\, |t|^{3/2-r(1/2-\alpha)})$. Also ist

$$I_1' + I_2' = O\big(x^{(k-1)/2-\sigma}\, |t|^{3/2 - r(1/2-\alpha)}\big), \text{ wenn } |t| \to \infty$$

Nach (5.10) ist Satz 5 damit bewiesen.