Diss. Nr. 5160

Diffusionsprobleme in Strömungen mit diskontinuierlichen Geschwindigkeitsverteilungen

ABHANDLUNG

zur Erlangung
des Titels eines Doktors der technischen Wissenschaften
der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZÜRICH

vorgelegt von

ERIC DARDEL
dipl. Masch. Ing. ETH Zürich
geboren am 28. Juli 1944
von St-Blaise (Kt. Neuenburg)

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. N. Rott, Referent
Prof. Dr. J. Hersch, Korreferent

Juris Druck + Verlag Zürich
1973

Ein Vergleich der Exponentialfaktoren von (12.21) und (12.11) wäre interessant, lässt sich aber für beliebige Verhältnisse der Parameter nur schwer durchführen. Im Spezialfall $Q_p=0$, d.h. bei reiner Gegenströmung, liefern allerdings (12.21) und (12.11) mit gebietsweise konstantem Massenfluss das gleiche Resultat :

$$\frac{\tilde{N}(L)}{\tilde{N}(-L)} = \frac{\tilde{N}_b}{\tilde{N}_a} = \exp\left(\frac{3}{2}\varepsilon \frac{Q_a}{Q_a^2+3} 2L\right) \quad , Q_p = 0 \tag{12.23}$$

Eine Diskussion dieses Ergebnisses findet im nächsten Abschnitt statt.

Beim "kurzen" Schlitz sind die Resultate stark abhängig von den angenommenen Konzentrationsverteilungen in y -Richtung im Gebiet a an der Stelle $x=-L$ und im Gebiet b an der Stelle $x=+L$. Aus diesem Grund wird dieser Fall nicht weiter untersucht.

§ 13 Vergleich der Resultate. - Numerisches Beispiel.

Die im vorigen Abschnitt erhaltenen Resultate werden anhand eines konkreten Beispiels verglichen und diskutiert. Das zu trennende Gasgemisch sei Uranhexafluorid UF_6 , wobei das Uran aus einer Mischung der beiden Isotopen U^{238} und U^{235} gebildet ist. In natürlicher Form ist die Konzentration $U^{235}/U^{238} = 0.7\%$. Die im Abschnitt 2 getroffene Annahme, eine Gassorte sei viel seltener als die andere, ist also bei natürlichem oder schwach angereichtem UF_6 sehr gut erfüllt. Das Molekulargewicht der leichten Komponente von UF_6 ist $M_1 = 349\ kg/kMol$ und dasjenige der schweren Komponente $M_2 = 352\ kg/kMol$ Es wird eine Gastemperatur von $T = 30°C$ gewählt.

Die Zentrifuge sei durch folgende Daten charakterisiert :

Rotorlänge $z = 1\ m$

Rotorradius $r_e = 0.1\ m$

Umfangsgeschwindigkeit $r_e.\omega = 450\ m/s$

Als Kanalhöhe des ebenen Modells wird die Länge $r_e - r^*$ gewählt, wobei an der Stelle r^* der Druck 10 mal kleiner ist als an der Wand. r^* kann aus der radialen Druckverteilung

$$p(r) = p_o \cdot exp\left(\frac{M\omega^2 r^2}{2 \Re T} \right)$$

berechnet werden :

$$r_e - r^* = 7 \cdot 10^{-3} \ m$$

90% der Gasmasse ist also in einer dünnen Wandschicht konzentriert deren Dicke 7% des Rotorradius beträgt.

Die Beschleunigung g an der Wand ist

$$g = r_e \omega^2 \simeq 2 . 10^6 \ m/s^2$$

Es wird sich zeigen, dass für Zwecke der dimensionslosen Darstellung die folgende Wahl einer charakteristischen Länge ℓ vorteilhaft ist :

$$\ell = \frac{\Re T}{\Delta M . g} = 0.5 \ m$$

Daraus ergibt sich für das Druckdiffusionsglied :

$$\varepsilon = \frac{\Delta M . g . \ell}{\Re T} = 1$$

Für die dimensionslosen Kanallänge $2L$ und Kanalhöhe $Y_a + Y_b$ erhält man :

$$2L = \frac{z}{\ell} = 2$$

$$Y_a + Y_b = \frac{r_e - r^*}{\ell} = 1.4 \ 10^{-2}$$

Die an verschiedenen Stellen dieser Arbeit getroffene Annahme $|\varepsilon Y| \ll 1$ ist in diesem Anwendungsbeispiel gut erfüllt.

I. Untersuchung der Konzentration.

Das Verhältnis der Konzentrationen an den beiden Maschinenenden ist im Falle der Cohen'schen Theorie durch (12.11) mit $X = L$ gegeben. Um einen stichhaltigen Vergleich mit dem Resultat (12.21) der Singularitätenmethode zu ermöglichen, wird in (12.11) der Massenfluss als gebietsweise konstant gewählt, so dass k_1 und k_2 durch (12.13) und (12.14) gegeben sind. Zudem werden im folgenden die Massenflüsse pro Flächeneinheit der beiden Gebiete gleich gross gewählt ($B=-A$).

In Abb. 27 sind (12.11) und (12.21) für verschiedene Werte des "Durchflussverhältnisses" Q_P/Q_a in Funktion des Massenstromes Q_a dargestellt. Die Cohen'sche Theorie liefert systematisch höhere Werte als die Singularitätenmethode und der Unterschied, der für $Q_P/Q_a=0$ verschwindet, nimmt mit Q_P/Q_a zu. Dies kann aus der Näherung (12.7) leicht verstanden werden. Aus dieser folgt :

$$J_o = J(x,o) = \frac{\partial N}{\partial x}\, Q_a$$

$$J_b = J(x,-Y_b) = \frac{\partial N}{\partial x}\left(Q_a - |Q_b|\right)$$

J_o ist der grösst mögliche Wert des transversalen Diffusionsflusses und wird bei $y=0$ erreicht. J_b sollte null sein, weil die untere Wand undurchlässig ist. Ein Mass für den begangenen Fehler ist :

$$\frac{J_b}{J_o} = \frac{Q_a - |Q_b|}{Q_a} = \frac{Q_P}{Q_a} \qquad (13.1)$$

Der achsiale Konzentrationsgradient ist am grössten, wenn keine Entnahme erfolgt ($Q_P/Q_a=0$). In diesem Fall sind nach (12.23) beide Kurven der Abb. 27 identisch, weil der Fehler (13.1) in der Cohen'schen Theorie null ist.

Der maximale Wert wird für $Q_a=\sqrt{3}$ erreicht und beträgt in diesem Beispiel $\overline{N}_L/\overline{N}_{a\,max} \approx 2{,}37$. Die Existenz eines Maximums des achsialen Konzentrationsgradienten ist auf die Wirkung der achsialen Diffusion zurückzuführen. Wird diese vernachlässigt, so muss im Nenner des Exponentialfaktors von (12.23) die Zahl 3 durch 0 ersetzt werden. Der achsiale Konzentrationsgradient hat dann kein Maximum mehr und wird unendlich für $Q_a=0$.

Bei $Q_a \simeq 2$ gilt :

$$\min\left(\frac{2L}{A\,Y_a^2},\ \frac{2L}{|B|\,Y_b^2}\right) \simeq \begin{cases} 100\ , & Q_P/Q_a = 0.4 \\ 200\ , & Q_P/Q_a = 0 \end{cases}$$

Die Gültigkeitsbedingungen (12.22) für den "langen" Schlitz sind in diesem Bereich von Q_a sehr gut erfüllt.

II. Untersuchung der Trennleistung.

Die Leistungsfähigkeit einer Trennanlage ist durch ihre Trennleistung δU charakterisiert. Diese Grösse, welche unabhängig von dem verwendeten Trennverfahren definiert ist, soll maximal sein, damit die Grösse der Trennanlage minimal wird. In dimensionsloser Schreibweise lautet die Trennleistung nach [20] :

$$\Delta U = \frac{\delta U}{\varrho D_{12}\, t} = Q_f\ \frac{\bar{\alpha}(\bar{\beta}-1)\ln\bar{\alpha} - (\bar{\alpha}-1)\ln\bar{\beta}}{\bar{\alpha}\bar{\beta}-1} \tag{13.2}$$

Die Kanaltiefe t ist gleich dem Rotorumfang, und der dimensionslose Zufuhrstrom ist gegeben durch

$$Q_f = \frac{\dot{m}_f}{\varrho D_{12}\, t}$$

Der Anreicherungsfaktor $\bar{\alpha}$ und der Abreicherungsfaktor $\bar{\beta}$ sind definiert als

$$\bar{\alpha} = \frac{R_P}{R_f}\quad , \quad \bar{\beta} = \frac{R_f}{R_w}$$

wobei

$$R = \frac{P_1}{P_2}$$

das Verhältnis der Partialdrücke der beiden Gassorten bedeutet. Unter Berücksichtigung der in §2 getroffenen Annahmen und der in Abb.26 dargestellten Verhältnisse erhält man :

$$\bar{\alpha} = \frac{N_P}{N_f} \doteq \frac{\bar{N}_b}{\bar{N}_a}\cdot\frac{1-\theta\varphi}{1-\theta+\frac{\bar{N}_b}{\bar{N}_a}\theta(1-\varphi)} \tag{13.3}$$

$$\bar{\beta} = \frac{N_f}{N_w} = \frac{1-\theta+\frac{\bar{N}_b}{\bar{N}_a}\theta(1-\varphi)}{1-\frac{\bar{N}_b}{\bar{N}_a}\theta\varphi} \qquad (13.4)$$

Das Abzapfverhältnis θ und das "Zufuhrverhältnis" φ sind durch

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \frac{Q_p}{Q_f} \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 1 \\ \varphi &= \frac{Q_f}{Q_a} \quad , \quad 0 \leq \varphi \leq 1 \end{aligned}\right\} \qquad (13.5)$$

definiert, während $\bar{N}_b/\bar{N}_a$ in (12.21) gegeben ist. Nach Cohen hat eine Zentrifuge, welche durch die Differentialgleichung (12.8) charakterisiert ist, die Trennleistung :

$$\Delta U = \frac{1}{4}\,\varepsilon^2\, 2L\, \frac{k_1^2}{k_2} \qquad (13.6)$$

Die Parameter k_1 und k_2 sind in (12.9) und (12.10) definiert. Im Falle eines gebietsweise konstanten Massenflusses sind k_1 und k_2 durch (12.13) und (12.14) gegeben.

Abb.28 zeigt ΔU nach (13.2) und (13.6) für unser numerisches Beispiel in Funktion des Zufuhrstromes Q_f im Falle $\varphi = 0.01$, $\theta = 0.5$. (13.6) liefert erheblich grössere Werte als (13.2), und die Diskrepanz nimmt mit Q_f zu. Für $Q_f = \infty$ ist ΔU nach (13.2) gleich null, während ΔU nach (13.6) maximal wird :

$$\Delta U \simeq 0.75\, \Delta U_{tm} \quad , \quad Q_f = \infty$$

Nach Cohen ist

$$\Delta U_{tm} = \frac{1}{4}\,\varepsilon^2 (Y_a + Y_b)\, 2L$$

die "theoretisch maximal erreichbare Trennleistung". Es sei hier bemerkt, dass diese Grösse, welche oft in der Literatur als obere Grenze der Trennleistung einer Zentrifuge angegeben wird, physikalisch wenig gerechtfertigt ist. Sie ist unter der Voraussetzung hergeleitet worden, dass im ganzen Kanal der Konzentrationsgradient in Y-Richtung die Hälfte seines Gleichgewichtswertes hat.

Unter dieser Annahme sind aber die Randbedingungen, nach welchen der transversale Diffusionsfluss auf den Wänden verschwinden muss, nicht erfüllt.

Erfolgt keine Entnahme ($Q_p = 0$), so wird ΔU nach (13.6) nicht identisch null. Nach der allgemeinen Formel (13.2) muss aber in diesem Fall die Trennleistung verschwinden, weil für $Q_p = 0$ ist $\tilde{\beta} = 1$.

Die Cohen'sche Methode führt bei kleinen "Durchflussverhältnissen" $\theta\varphi$ zu guten Ergebnissen für die Anreicherung (siehe Abb.27). Die in (13.6) angegebene Trennleistung liefert aber kaum befriedigende Resultate.

Abb.29 zeigt die Trennleistung nach (13.2) in Funktion von Q_f, im Falle eines Zufuhrverhältnisses $\varphi = 0.01$ und für verschiedene Abzapfverhältnisse θ. Im dargestellten Bereich ist

$$\min\left(\frac{2L}{AY_a^2}, \frac{2L}{|B|Y_b^2}\right) \simeq 43$$

so dass die Bedingungen (12.22) gut erfüllt sind.

In Abb.30 ist die zu jedem θ gehörende maximale Trennleistung $\Delta U_{\hat{Q}}$ der Abb.29 als Funktion von θ aufgetragen. Die maximale Trennleistung wird für $\theta \simeq 0.3$ erreicht, was in guter Uebereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen steht [20].

Die Trennleistung nach (13.2) ist in Abb.31 als Funktion des Zufuhrstromes Q_f dargestellt, für ein Abzapfverhältnis von $\theta = 0.4$ und verschiedene Werte des Zufuhrverhältnisses φ. Der gestrichelte Teil der Kurven ist durch

$$\min\left(\frac{2L}{AY_a^2}, \frac{2L}{|B|Y_b^2}\right) < 5 \qquad (13.7)$$

charakterisiert, so dass in diesem Bereich die Bedingungen (12.22) nicht mehr gut erfüllt sind. Durch qualitative Ueberlegungen wird gezeigt, dass die näherungsweise berechneten Anreicherungen und

Trennleistungen eine untere Schranke für die exakten Resultate darstellen.

Es sei ψ^* die zum Kern K^* gehörende Lösung der Integralgleichung

$$N_{b_1} - N_{a_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^{+L} \psi^*(t)\, K^*(x-t)\, dt \quad , \; -L < x < L \tag{13.8}$$

Aus (13.8) und (12.18) folgt :

$$\int_{-L}^{+L} \psi^*(t)\, K^*(x-t)\, dt = \int_{-L}^{+L} \psi(t)\, K(x-t)\, dt \quad , \; -L < x < L \tag{13.9}$$

Wird (13.9) von $-L$ bis $+L$ nach x integriert, so ergibt sich

$$\int_{-L}^{+L} \psi^*(t)\, f^*(t)\, dt = \int_{-L}^{+L} \psi(t)\, f(t)\, dt \tag{13.10}$$

wobei

$$f^*(t) = \int_{-L}^{+L} K^*(x-t)\, dx \quad , \quad f(t) = \int_{-L}^{+L} K(x-t)\, dx \tag{13.11}$$

bedeuten. Man kann unter Berücksichtigung der Eigenschaften des in (9.10) gegebenen Kernes K^* leicht zeigen, dass

$$f^*(t) > f(t) \quad , \; -L < t < L \tag{13.12}$$

ist (siehe § 9). Die exakte Lösung ψ der Integralgleichung (12.18) kann mit der in Abb. 25 dargestellten Konfiguration ihr Vorzeichen nicht ändern, d.h. die Substanz diffundiert nur vom unteren Gebiet b ins obere a . Die in (9.22) angegebene Näherungslösung ψ^* ist unter Berücksichtigung der Substitution (12.19) positiv. Da ψ an den Schlitzenden gegen $+\infty$ strebt (siehe § 10) und im Intervall (9.13) gleich der Näherungslösung ψ^* ist, könnte

$$\int_{-L}^{+L} \psi^*(t)\,dt > \int_{-L}^{+L} \psi(t)\,dt \qquad (13.13)$$

wegen (13.10) und (13.12) nur dann erfüllt sein, wenn ψ einen oszillierenden Verlauf hätte. Ein solches Verhalten ist bei Ausgleichphänomänen in einer Konfiguration wie derjenigen der Abb.25 nicht möglich und folglich kann (13.13) nicht gelten.

Die verwendete Näherungslösung für den langen Schlitz gibt also nirgends grössere Werte der Anreicherung als die exakte Lösung. Dies gilt dann auch für den Anreicherungfaktor $\bar{\alpha}$, für den Abreicherungsfaktor $\bar{\beta}$ und für die Trennleistung ΔU

Die zu jedem φ-Wert gehörende maximale Trennleistung ΔU_Q ist in Abhängigkeit von φ in Abb.32 aufgetragen, und auch hier ist der gestrichelte Teil der Kurve durch (13.7) gekennzeichnet. Die dargestellte Linie ist eine untere Schranke für die exakte Lösung und der Fehler wächst mit φ. Daraus kann geschlossen werden, dass die exakte Trennleistung stärker mit φ wächst als die Kurve der Abb.32 es angibt. Die maximale Trennleistung wird für $\varphi = 1$ erreicht, d.h. wenn der ganze Massenstrom Q_b des unteren Gebietes b aus der Maschine abgezapft wird und entsprechend keine Rezirkulation stattfindet. Dies gilt natürlich unter der Voraussetzung, dass die Zentrifuge als reine Anreicherungsanlage gedacht ist und der Zufuhr folglich am linken Ende der Maschine erfolgt (siehe Abb.23).

Für eine im optimalen Bereich arbeitende Zentrifuge ist der Produktstrom Q_P von der gleichen Grössenordnung wie die internen Ströme Q_a und $|Q_b|$. Die Strömungsverhältnisse bei der maximalen Trennleistung können dann nicht mehr als eine kleine Störung der Verhältnisse ohne Entnahme betrachtet werden. Die in der Literatur oft gefundene Angabe

$$\int_{-Y_b}^{Y_a} |C|\,dy \gg \int_{-Y_b}^{Y_a} C\,dy$$

wobei C der Massenfluss darstellt, ist nur für kleine Durchflussverhältnisse $\theta\varphi$ gültig. In diesem Fall arbeitet aber die ebene Zentrifuge nicht optimal, vorausgesetzt, dass die Trennleistung maximal sein soll.

Aus der Abb. 31 sieht man, dass der optimale Wert des Zufuhrstromes mit φ zunimmt. Diese Abhängigkeit ist in Abb. 33 dargestellt.

Die uns bekannten Veröffentlichungen, welche experimentell gefundene Trennleistungen angeben, machen keine Angaben über die wichtige Grösse φ, so dass die vorliegenden Ergebnisse nicht sinnvoll mit diesen Experimentalwerten verglichen werden können.