Ueber die zweite Fundamentalform von Flächen im Raum

Doctoral Thesis

Author(s):
Erard, Pierre Jean

Publication date:
1968

Permanent link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000085648

Diss. 4234

Über die zweite Fundamentalform von Flächen im Raum

Abhandlung

zur Erlangung der Würde eines
Doktors der Mathematik
der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZÜRICH

vorgelegt von

Pierre Jean Erard

dipl. Math. ETH
geboren am 5. Januar 1939
von La Chaux-de-Fonds (Kt. Neuchâtel)

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. K. Voss, Referent
Prof. Dr. Ch. Blatter, Korreferent

Bamberger Fotodruck

1968

E I N L E I T U N G

In dieser Arbeit werden wir einige Probleme untersuchen, welche die zweite Fundamentalform einer Fläche betreffen. Nach einer für unsere Zwecke geeigneten Formulierung des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes von Bonnet und der Herleitung der Gleichung (Q), die in unserer Arbeit eine wichtige Rolle spielt, werden wir uns in einem ersten Kapitel mit der Bestimmung von Flächen beschäftigen, welche eine vorgegebene zweite Fundamentalform besitzen. In diesem Kapitel betrachten wir die Codazzischen Gleichungen und das Theorema egregium als ein Differentialgleichungssystem für die ersten Fundamentalgrössen; wir behandeln hier das Problem von Cauchy, das heisst die Bedingungen unter denen sich der Satz von Cauchy-Kowalewski anwenden lässt. Wir verwenden dann unser Ergebnis, um den folgenden Satz von E. Cartan [1] zu verallgemeinern: "Zu einer gegebenen Immersion einer Kurve $u(t)$, $v(t)$ der Parameterebene in E^3 gibt es im allgemeinen vier Flächen vorgegebener zweiter Fundamentalform, die diese Kurve enthalten." Unsere Methode ermöglicht es nämlich, auch parabolische Punkte als Anfangspunkte zuzulassen, während bei Cartan $K \neq o$ vorausgesetzt wird.

Im Kapitel II leiten wir verschiedene Eigenschaften von Flächen mit konstanter Gaussscher Krümmung her und beweisen, dass eine solche Fläche ohne Nabelpunkt eine II-Verbiegung unter Erhaltung der Hauptkrümmungen zulässt. Dies zeigt, dass es zu dem folgenden globalen Satz von Grove [5]: "II-isometrisch mit Erhaltung der Gaussschen Krümmung aufeinander bezogene Eiflächen sind kongruent" keinen entsprechenden lokalen Satz gibt. Im selben Kapitel wird für die Kugel der Satz bewiesen: "Eine Fläche mit konstanter Gaussscher Krümmung $K = 1$, die zu der Einheitskugel lokal II-isometrisch ist, ist sogar lokal kongruent zu dieser Kugel".

Das dritte Kapitel ist den infinitesimalen Deformationen gewidmet. Es werden dort Flächen gekennzeichnet, zu welchen eine nichttriviale infinitesimale Deformation existiert, bei der neben der zweiten Fundamentalform die Gausssche und die mittlere Krümmung stationär bleiben. Für die Kugel und die Rotationsflächen geben wir Deformationen explizit an.

Weil wir mehrere unserer Resultate mit Hilfe des Satzes von Cauchy-Kowalewski erhalten, nehmen wir an, dass alle gegebenen Funktionen analytisch sind, obwohl gewisse Sätze, wie zum Beispiel der Satz von Bonnet, auch für Funktionen aus einer niedrigeren Differenzierbarkeitsklasse gelten.

Beim Rechnen mit Tensoren ist folgendes zu beachten: $t^{(ij)}$ bezeichnet den zu t_{ij} inversen Tensor. Wenn wir Tensorfelder auf einer Fläche betrachten, wird immer der metrische Tensor g_{ij} als Fundamentaltensor ausgezeichnet, soweit nichts anderes gesagt wird. Den inversen Tensor von g_{ij} bezeichnen wir mit g^{ij}; mit Hilfe dieses Tensors werden Indizes heraufgezogen. Die kovariante Differentiation bezieht sich auf den durch g_{ij} induzierten affinen Zusammenhang. Sie wird durch Indizes bezeichnet (f_m, f_{mn} sind die Ableitungen der Funktion f, $p_{i,m}$ bzw. $t_{ij,m}$ diejenigen des Vektors p_i bzw. des Tensors t_{ij}).

Literaturhinweise [ ] beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluss der Arbeit.

<u>Der Satz von Bonnet.</u> Unter einer Fläche oder einem Flächenstück verstehen wir eine Immersion einer Mannigfaltigkeit V^2 in den euklidischen Raum E^3, mit einem stetigen normalen Einheitsvektorfeld. Sie ist lokal durch den Ortsvektor $x(u,v)$ und den Einheitsvektor $n(u,v)$ bestimmt, wobei $x_u x\, x_v \neq o$. Die Wahl von n ist also auf zwei Arten möglich. Wir definieren

$$w(u,v) = (n\ ,\ x_u\ ,\ x_v\ )$$

Der Betrag von w verhält sich wie eine Dichte; das Vorzeichen von w wechselt mit n und bei jeder Parametertransformation mit negativer Funktionaldeterminante. Unter einer Spiegelung verstehen wir die Abbildung von x und n auf ihre Spiegelbilder