Die Reihe der Derivierten von E-Gruppen

Author(s):
Strebel, Ralph

Publication Date:
1973

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000086400

Diss. Nr. 5148

Die Reihe der Derivierten von $\underline{E}$-Gruppen

ABHANDLUNG

zur Erlangung
des Titels eines Doktors der Mathematik
der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZÜRICH

vorgelegt von

RALPH STREBEL
dipl. Math. ETH Zürich
geboren am 27. April 1944
von Lindau (Kt. Zürich)

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. U. Stammbach, Referent
Prof. Dr. B. Eckmann, Korreferent

Juris Druck + Verlag Zürich
1973

Bemerkung. G. Baumslag hat in (2) und (3) die Frage der Existenz und der Struktur der (relativ)-parafreien Gruppen untersucht. In seiner Definition der (absolut)-parafreien Gruppen ((2), p.309) lautet die zweite Forderung so:

(ii)' falls es eine freie Gruppe F und für alle natürlichen Zahlen $j \geqq 2$ Isomorphismen $\varphi_j : F/F_j \cong G/G_j$ gibt, sodass φ_j von φ_{j+1} induziert ist.

Die Aequivalenz der beiden Definitionen ist implizit im Beweis von Theorem 4.1 ((3), p. 522) ausgesprochen, und von U. Stammbach mit homologischen Methoden nachgewiesen worden ((27), § 4, insbesondere Bemerkung zu Corollar 4.4 und Corollar 4.6, p. 164). In unseren Beispielen ist die Definition von U. Stammbach die naheliegendere.

Lemma 8.6. F sei eine freie Gruppe, $G \in \underline{E}$, $\mathbf{k} \in \mathbf{K}$ und $\varphi : F \to G$ eine Abbildung, für welche die Abbildungen

$$\varphi : F/F_{\mathbf{k}} \cong G/G_{\mathbf{k}}$$

$$\varphi : (F_{\mathbf{k}})_{ab} \cong (G_{\mathbf{k}})_{ab}$$

isomorph sind. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) G ist für jede Primzahl p residuell eine endliche p-Gruppe

(ii) $G_{\mathbf{k}}$ ist residuell nilpotent.

Beweis. Da '(i)$\Rightarrow$(ii)' klar ist, gehen wir gleich zur Begründung der Umkehrung, '(ii)$\Rightarrow$(i)', über.

$G/G_{\mathbf{k}}$ ist nach Voraussetzung frei polynilpotent, liegt also in $\underline{D}$ (Theorem 3.4, Corollar 4.2). und folglich gehört $G_{\mathbf{k}}$ zu $\underline{E}$ (Theorem 5.5). Weil $\varphi : (F_{\mathbf{k}})_{ab} \cong (G_{\mathbf{k}})_{ab}$ isomorph ist, sind alle Voraussetzungen von Corollar E erfüllt, und wir schliessen, dass $\varphi : F_{\mathbf{k}}/F_{(\mathbf{k},j)} \cong G_{\mathbf{k}}/G_{(\mathbf{k},j)}$ und ebenso $\varphi : F/F_{(\mathbf{k},j)} \cong G/G_{(\mathbf{k},j)}$ für jedes $j \geqq 2$ Isomorphismen sind.

Dies bedeutet wegen (ii) insbesondere, dass G residuell 'frei polynilpotent' ist. Verbinden wir dieses Ergebnis mit dem bekannten Resultat von Grünberg ((11), Theorem 7.1, p.52 und Bemerkung, p. 53 oben), wonach jede frei polynilpotente Gruppe für alle Primzahlen p residuell eine endliche p-Gruppe ist, so ergibt sich (i).

Diskussion einer Beispielschar von G. Baumslag. Mit den Methoden dieses Paragraphen wollen wir eine Schar von parafreien Gruppen analysieren, die G. Baumslag konstruiert hat.

Theorem G. ((3), Theorem 2.1, p.512) Es seien i, j ganze Zahlen,

$$(8.16)\qquad \begin{aligned} F^y &= \langle y_1, y_2 : \rangle, \\ G &= \langle x, y_1, y_2 : x[y_2^i, x][y_2^j, y_1]\rangle_\pi \end{aligned},$$

und $\varphi: F^y \to G$ induziert durch $y_1 \mapsto y_1^\pi$, $y_2 \mapsto y_2^\pi$.

Dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) $\varphi : F^y/F^y_j \xrightarrow{\sim} G/G_j$ isomorph $(2 \leqq j < \omega)$,

(ii) $\varphi : F^y/[F^y, (F^y)''] \xrightarrow{\sim} G/[G, G'']$ isomorph,

(iii) $\mathfrak{N}(x^\pi, y_1^\pi) \lhd G \twoheadrightarrow (y_2^\pi)$ ist Erweiterung einer freien Gruppe durch eine frei zyklische,

(iv) G ist residuell nilpotent,

(v) falls $i \cdot j \neq 0$, so ist G nicht frei.

Analyse. G ist eine $\underline{M}$-Gruppe, die Präsentierung (8.16) hat die Normalform (8.8), und $\varphi: F^y \to G$ ist so, wie es in Satz 8.5 verlangt wird. (Um die Notation zu vereinfachen, schreibe ich F statt F^y.)

(i) cf. Satz 8.5.

(ii) Gemäss Satz 8.5 berechnen wir die partielle Abbildung des Relators nach x:

$$D_x(x[y_2^i,x][y_2^j,y_1]) = 1 + x\, D_x(y_2^i\, x\, y_2^{-i}\, x^{-1}) \tag{8.17}$$
$$= 1 + x\, y_2^i - x[y_2^i,x].$$

Da x^π ersichtlich in G' liegt, vereinfacht sich das Bild von (8.17) unter der Abbildung $\pi_{(2)}\circ\pi : \mathbb{Z}F \twoheadrightarrow \mathbb{Z}G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}G_{ab}$ zu $((y_2^i)^\pi)^{\pi(2)} = (y_2^{\pi\,\pi(2)})^i$, d.h. zu einer Einheit von $\mathbb{Z}G_{ab}$. φ induziert folglich die Isomorphismen

$$\varphi : F/F_{(2,j)} \cong G/G_{(2,j)} \quad (2 \leq j < \omega), \text{ also insbesondere}$$
$$\varphi : F/F'' \cong G/G''. \tag{8.18}$$

Wenn wir nun Theorem D auf die Situation

$$\varphi : F_{ab} \cong G_{ab}, \quad \varphi : F/F_{(2,j)} \cong G/G_{(2,j)}, \quad H_2(G,\mathbb{Z})=0.$$

anwenden, gewinnen wir dür jedes $n_1 \geq 1$ den Isomorphismus

$$\varphi : F/[\underbrace{F\ldots[F,[F}_{n_1-1},F_{(2,j)}]]\cdots] \cong G/[\underbrace{G\ldots[G,[G}_{n_1-1},G_{(2,j)}]]\cdots]. \tag{8.19}$$

Die in (8.19) auftretenden Normalteiler notieren wir als $F(n_1|2,j)$ bzw. $G(n_1|2,j)$, und wenden Theorem D erneut an, dieses Mal auf die Situation

$$\varphi : (F')_{ab} \cong (G')_{ab}, \quad \varphi : F'/F(n_1|2,j) \cong G'/G(n_1|2,j), \quad H_2(G',\mathbb{Z})=0.$$

(Die angeschriebenen Isomorphismen ergeben sich unmittelbar aus (8.18) und (8.19), da $\varphi : F_{ab} \cong G_{ab}$ isomorph ist.) Wir gewinnen so für jedes $n_1' \geq 1$ die Isomorphismen

$$\varphi : F'/[\underbrace{F',\ldots[F',[F'}_{n_1'-1},F(n_1|2,j)]]\ldots] \cong \tag{8.20}$$
$$\cong G'/[\underbrace{G',\ldots[G',[G'}_{n_1'-1},G(n_1|2,j)]]\ldots],$$

also auch die Isomorphismen

$$\varphi : F/F(n_1',n_1|2,j) \cong G/G(n_1',n_1|2,j). \tag{8.21}$$

Dabei haben wir die Normalteiler, welche in (8.20) auftreten, als $F(n_1', n_1 | 2, j)$ bzw. $G(n_1', n_1 | 2, j)$ notiert.

Es ist wohl klar, dass der vorgeführte Prozess iteriert werden kann. Wenn wir dies tun, erhalten zu jeder endlichen Folge $(n_s', n_s, n_{s-1}', n_{s-1}, \dots, n_2', n_2, n_1', n_1)$ von natürlichen Zahlen $\geqq 1$, einen Isomorphismus

(8.22) $\varphi: F/F(n_s', n_s, \dots, n_1', n_1 | 2, j) \cong G/G(n_s', n_s, \dots, n_1', n_1 | 2, j)$.

Speziell gilt $\varphi: F/F(2|2,2) \cong G/G(2|2,2)$, d. h. (ii).
(iii) ergibt sich, wenn man den von x^π und y_1^π erzeugten Normalteiler $\mathfrak{N}(x^\pi, y_1^\pi)$ nach der Methode von Reidemeister-Schreier präsentiert (cf. (3), Abschnitt 2.2, p. 512. oder (iii) in Satz 8.7; falls $i \cdot j = 0$ ist, wird G frei und (iii) trivial).
(iv) ist, wie Baumslag gezeigt hat, eine Folge von (iii). Ich gebe einen modifizierten Beweis: G' ist als Untergruppe der freien Gruppe $\mathfrak{N}(x^\pi, y_1^\pi)$ frei, und daher residuell nilpotent. φ induziert die Isomorphismen $\varphi: F_{ab} \cong G_{ab}$ und $\varphi: (F')_{ab} \cong (G')_{ab}$ (cf. (8.18)), sodass wir Lemma 8.6 anwenden können. Es ergibt, dass G (für jede Primzahl p) residuell eine p-Gruppe ist.
(v) Die Frage, ob eine Ein-Relationengruppe frei ist, kann durch einen Algorithmus von J.H.C.Whitehead entschieden werden (cf. (20), Theorem N2 und p. 166). Mit diesem Algorithmus findet man heraus, dass G genau dann frei ist, wenn $i \cdot j = 0$ ist.

Die Beispielschar von G. Baumslag kann für jedes $k \in K$ so abgeändert werden, dass $\varphi: F/F_k \cong G/G_k$ wird. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes:

<u>Satz 8.7</u>. Es seien $\hat{F} = \langle y_2, y_3 : \rangle$, $\hat{f} \in \hat{F}_2$, $F^y = \langle y_1, y_2, y_3 : \rangle$,

(8.23) $\quad G = \langle x, y_1, y_2, y_3 \; : \; x[\hat{f}, x][y_3, y_1] \rangle_{\pi}$,

und $\varphi: F^y \to G$ induziert durch $y_i \mapsto y_i^{\pi}$ (i= 1, 2, 3).
Wenn $\hat{f} \neq e$ in $\hat{F}_k$ liegt, gelten die Aussagen:

(i) $\quad \varphi : F^y/F^y_j \xrightarrow{\sim} G/G_j \qquad (2 \leqq j < \omega)$.

(ii) $\quad \varphi : F^y/F^y_{(k,j)} \xrightarrow{\sim} G/G_{(k,j)} \qquad (2 \leqq j < \omega)$.

(iii) $\mathfrak{N}(x^{\pi}, y_1^{\pi}, y_2^{\pi}) \lhd G \twoheadrightarrow (y_3^{\pi})$ ist Erweiterung einer freien Gruppe durch eine frei zyklische Gruppe.

(iv) G ist residuell nilpotent.

(v) G ist nicht frei.

<u>Beweis</u>. G ist eine <u>M</u>-Gruppe, die Präsentierung (8.23) hat die Normalform (8.8), und $\varphi: F^y \to G$ ist so, wie es in Satz 8.5 verlangt wird. (Um die Notation zu vereinfachen, schreibe ich F an Stelle von F^y.)

(i) cf. Satz 8.5.
(ii) Wir berechnen die partielle Ableitung des Relators nach x

$$D_x \; (x[\hat{f}, x][y_3, y_1]) = 1 + x \cdot D_x(\hat{f} x \hat{f}^{-1} x^{-1})$$

$$(8.24) \qquad = 1 + x\hat{f} - x[\hat{f}, x].$$

Da $\hat{f}^{\pi}$ in G_k liegt, vereinfacht sich (8.24) unter $\pi_k \circ \pi : \mathbb{Z}F \twoheadrightarrow \mathbb{Z}G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}(G/G_k)$ zu 1. Die Behauptung (ii) folgt dann aus Satz 8.5.
(iii) Ich präsentiere $\mathfrak{N}(x, y_1, y_2)$ nach Reidemeister-Schreier (cf. (20), Beweis von Theorem 4.10, Case 2 oder Case 3, p. 253 ff.). Um die Notation zu vereinfachen, verwende ich für ein Element aus F und sein Bild unter π das gleiche Symbol.

Die Potenzen $(y_3^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ bilden ein Schreier'sches Repräsentantensystem (cf. (20), p. 93 für eine Definition). Wenn wir als Erzeugende von $\mathfrak{N}(x, y_1, y_2) \lhd_i G$ die Elemente

$$x_n \underset{i}{\mapsto} y_3^n \; x \; y_3^{-n}$$

$$y_{1,n} \underset{i}{\mapsto} y_3^n \; y_1 \; y_3^{-n}$$

$$y_{2,n} \underset{i}{\mapsto} y_3^n \; y_2 \; y_3^{-n}$$

wählen, hat $\mathfrak{N}(x,y_1,y_2)$ die Präsentierung (8.25)

$$\mathfrak{N}(x,y_1,y_2)= \langle (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (y_{1,n})_{n\in\mathbb{Z}}, (y_{2,n})_{n\in\mathbb{Z}} : x_n [\hat{f}_n, x_n] y_{1,n+1} \, y_{1,n}^{-1} \rangle$$

(cf. (20), Theorem 2.9, p. 94). Dabei haben wir benützt, dass der Ausschnitt $\hat{f}x\hat{f}^{-1}x^{-1}$ des Relators in die Ausschnitte $\hat{f}_n x_n \hat{f}_n^{-1} x_n^{-1}$ umgeschrieben wird. Aus der Präsentierung (8.25) kann man ablesen, dass die Erzeugenden $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $y_{1,0}$ und $(y_{2,n})_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Basis von $\mathfrak{N}(x,y_1,y_2)$ bilden. Der Quotient $G/\mathfrak{N}(x,y_1,y_2)$ wird von y_3 erzeugt, und ist ersichtlich frei zyklisch.

(iv) $G_{\mathbf{k}}$ ist als Untergruppe von $\mathfrak{N}(x^{\pi}, y_1^{\pi}, y_2^{\pi})$ frei, also residuell nilpotent. Die Behauptung ergibt sich aus dieser Feststellung und (ii) mit Lemma 8.6.

(v) folgt aus dem bekannten Algorithmus von J. H. C. Whitehead (cf. (20), Theorem N2 und Theorem N3, p. 166 und 167). Die Einzelheiten des Beweises werden wir in einer späteren Arbeit veröffentlichen.

Bemerkung. Die neue Schar von Gruppen ist in zwei Beziehungen komplizierter als die Beispiele von G. Baumslag.

(a) Die abelsch gemachten Gruppen haben in Satz 8.7 Rang 3, und in Theorem G Rang 2.

(b) Die Argumentationen für Punkt (ii) sind verschieden: In $\mathbb{Z}G_{ab}$ (Theorem G) kompensieren sich die Terme eins und drei von (8.17), während sich in $\mathbb{Z}G/G_{\mathbf{k}}$ (Satz 8.7) der zweite und dritte Term von (8.24) wegheben.