Funktionen, deren Logarithmus darstellbar ist als Differenz subharmonischer Funktionen

Author(s):
Gygax, Raymond

Publication Date:
1974

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000086405

Diss. Nr. 5100

FUNKTIONEN, DEREN LOGARITHMUS DARSTELLBAR IST ALS DIFFERENZ SUBHARMONISCHER FUNKTIONEN

Abhandlung
zur Erlangung des Titels eines Doktors
der Mathematik
der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZÜRICH

vorgelegt von

RAYMOND GYGAX
Dipl. Math. ETH
geboren am 1. November 1944
von Seeberg (Kt. Bern)

Angenommen auf Antrag von
Prof. Dr. A. Huber, Referent
Prof. Dr. A. Pfluger, Korreferent

ok Zürich, 1974

$$+ \quad \exp[N-P(\Omega_0)] \int_{\Omega_0} | \exp u_n - \exp u_0| \quad dO \quad < \quad \varepsilon \quad , \qquad (3.11)$$

und $\{\mu_n\}$ konvergiert schwach in Ω gegen μ^*, nach dem Satz von Arsove.

§ 2 Ein Darstellungssatz und eine Algebra

Sei Ω eine offene Menge in der komplexen z-Ebene und sei H die Klasse aller δ-subharmonischen Funktionen in Ω, welche sich lokal als Differenzen beschränkter subharmonischer Funktionen darstellen lassen*. Betrachten wir

$$H_0 := \left\{ u \in H \,/\, \inf_{\Omega_0} u > 0 \quad \text{für jede beliebige Teilmenge } \Omega_0, \; \Omega_0 + \partial\Omega_0 \subset \Omega \right\},$$

und $\quad H_1 := \left\{ \exp u \,/\, u \in H \right\}$. Es gilt

Satz 7: $H_0 = H_1$. (3.12)

Beweis: (I) $H_0 \supset H_1$. (3.13)

Sei $\exp u \in H_1$. In einer offenen Umgebung $U(z_0)$ von $z_0 \in \Omega$

* H umfasst nicht sämtliche in Ω lokal beschränkten δ-subharmonischen Funktionen ! (vgl. [3, Example 3, S. 354])

gelte die Darstellung $u = v-w$, v und w subharmonisch und beschränkt in $U(z_0)$, $w \geqq -M$ dort.

Bekanntlich ist jede natürliche Potenz f^n einer nicht negativen subharmonischen Funktion f wieder subharmonisch: f^n ist nämlich oberhalbstetig und

$$f^n(0) \leqq \left\{\frac{1}{\pi r^2}\right\}^n \left\{ \int_{|z|<r} f(z)\, do(z) \right\}^n \leqq \left\{\frac{1}{\pi r^2}\right\}^n \cdot \int_{|z|<r} f^n(z)\, dO(z) \cdot$$

$$\cdot \left\{ \int_{|z|<r} dO(z) \right\}^{n-1} = \frac{1}{\pi r^2} \int_{|z|<r} f^n(z)\, dO(z) \tag{3.14}$$

für genügend kleine r, wenn 0 zum Definitionsbereich von f gehört.

Ferner ist $u_1 u_2 \in H$, falls $u_1, u_2 \in H$, denn es gilt lokal

$$u_1 u_2 = (v_1-w_1)(v_2-w_2) = \frac{1}{2} \Big\{ \{(v_1+v_2)^2 + (w_1+w_2)^2\} +$$

$$- \{(v_1+w_2)^2 + (w_1+v_2)^2\} \Big\}, \tag{3.15}$$

wobei v_1, v_2, w_1 und w_2 nicht negative subharmonische Funktionen bezeichnen.

Dann ist

$$\exp u = \exp(v-w) = \exp(v+M) \cdot \left\{ \left\{ 1 + \frac{(w+M)^2}{2!} + \frac{(w+M)^4}{4!} + \ldots \right\} + \right.$$

$$\left. - \left\{ (w+M) + \frac{(w+M)^3}{3!} + \frac{(w+M)^5}{5!} + \ldots \right\} \right\} \in H_0 \, . \tag{3.16}$$

denn $\exp(v+M)$ ist von der Klasse PL, also subharmonisch.

(II) $H_0 \subset H_1$. $\qquad$ (3.17)

Sei $u \in H_0$.

(1) Zunächst wird bewiesen, dass log u δ-subharmonisch in Ω ist.

Sei $z_0 \in \Omega$ und sei

$$U(z_0) := \{|z-z_0| < r_0\} \;, \quad r_0 \leqq 1 \;, \quad \overline{U(z_0)} \subset \Omega \;,$$

eine Umgebung von z_0 in welcher u die zulässige Darstellung $u = v-w$ besitzt. Sei weiter

$$0 < c \leqq u(z) \leqq C \;, \quad z \in U(z_0) \;. \tag{3.18}$$

Wir verwenden ein Kriterium von Arsove [3, Theorem 14, S. 338], und zu diesem Zweck führen wir den Begriff der Wiener'schen Variation ein [24]:

Sei f eine in Ω fast überall endlich definierte und lokal integrierbare Funktion. Unter der Wiener'schen Variation $\Psi_{\Omega'}(f)$ über Ω' – Ω' eine messbare Teilmenge von Ω – versteht man die Grösse

$$\Psi_{\Omega'}(f) := \overline{\lim_{r\to 0}} \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega'_r} |\Delta_r^B f| \, dO \quad (\leqq \infty) \;,$$

wobei Ω'_r die Menge aller Punkte aus Ω' bezeichnet, deren Abstand von $\partial\Omega$ grösser ist als r. Δ_r^B bezeichnet den Blaschke-Operator von f [6, Chap. II, §2]:

$$\Delta_r^B f(z) := \frac{2}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \{ f(z+re^{i\varphi}) - f(z) \} \, d\varphi \quad , \quad |f(z)| < \infty \;.$$

Das Kriterium von Arsove lautet:

Eine fast überall definierte und lokal integrierbare Funktion ist genau dann fast δ-subharmonisch in einer offenen Menge Ω, wenn ihre Wiener'sche Variation über alle kompakten Teilmengen von Ω endlich ist.

Betrachten wir

$$U'(z_0) := \{|z-z_0| < \frac{r_0}{2}\} , \quad z_1 \in U'(z_0) \quad \text{und} \quad r < \frac{r_0}{2} .$$

Dann ist für jeden Punkt z auf dem Kreis $|z-z_1| = r$

$$\log u(z) - \log u(z_1) = \frac{u(z) - u(z_1)}{u(z_1)} - \frac{\{u(z) - u(z_1)\}^2}{2\,\eta^2(z_1,z)} , \qquad (3.19)$$

wobei $\eta(z_1,z) > c$, und

$$\Delta_r^B \log u(z_1) = \frac{1}{u(z_1)} \Delta_r^B u(z_1) - \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \frac{\{u(z_1+re^{i\varphi}) - u(z_1)\}^2}{\eta^2(z_1, z_1+re^{i\varphi})} d\varphi . \qquad (3.20)$$

Dann gilt

$$|\Delta_r^B \log u(z_1)| \leqq \frac{1}{c} |\Delta_r^B u(z_1)| + \frac{1}{\pi r^2 c^2} \int_0^{2\pi} \{u(z_1+re^{i\varphi}) - u(z_1)\}^2 \, d\varphi \qquad (3.21)$$

und, da

$$\{u(z) - u(z_1)\}^2 = u(z)^2 - u(z_1)^2 - 2\,u(z_1)\,\{u(z) - u(z_1)\} , \qquad (3.22)$$

$$|\Delta_r^B \log u(z_1)| \leqq \frac{1}{c} |\Delta_r^B u(z_1)| + \frac{1}{2c^2} |\Delta_r^B u^2(z_1)| + \frac{C}{c^2} |\Delta_r^B u(z_1)|$$

$$= \frac{1}{c} \left\{ (1+\frac{C}{c}) |\Delta_r^B u(z_1)| + \frac{1}{2c} |\Delta_r^B u^2(z_1)| \right\} . \qquad (3.23)$$

Daraus folgt: log u ist fast δ-subharmonisch in Ω. Auf die δ-Subharmonizität schliesst man mit demselben Argument. Es ist nämlich - aufgrund von (3.19) und (3.23) -

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log u(z_1+re^{i\varphi}) \, d\varphi - \log u(z_1) \right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{c}\left\{(1+\frac{C}{c})\ \left|\int_0^{2\pi} u(z_1+re^{i\varphi})\,d\varphi\ -\ u(z_1)\right|\ +\right.$$

$$\left. +\ \frac{1}{2c}\ \left|\int_0^{2\pi} u^2(z_1+re^{i\varphi})\,d\varphi\ -\ u^2(z_1)\ \right|\right\}\ , \qquad (3.24)$$

so dass alle Mittelwerte mit $r \to 0$ gegen den Wert der Funktion im Mittelpunkt konvergieren ([20, II, S. 344]).

(2) Zeigen wir nun, dass log u darstellbar ist als Differenz beschränkter subharmonischer Funktionen in $U'(z_0)$.

Seien μ, μ^* und ν die u, u^2 und $\log u$ zugeordneten Massenbelegungen, und sei e eine Borel'sche Menge in $U'(z_0)$ mit der Eigenschaft, dass

$$\mu(\partial e) = \mu^*(\partial e) = \nu(\partial e) = 0\ . \qquad (3.25)$$

Dann gilt wegen (3.23)

$$\left|\int_e \Delta_r^B \log u(z_1)\ \ dO(z_1)\right|\ \leqq\ \frac{1}{c}\left\{(1+\frac{C}{c})\ \int_e |\Delta_r^B u(z_1)|\ \ dO(z_1)\ +\right.$$

$$\left. +\ \frac{1}{2c}\ \int_e |\Delta_r^B\ u^2(z_1)|\ \ dO(z_1)\ \right\}. \qquad (3.26)$$

Nach [3, Theorems 12 & 13, S. 337] ist nun

(a) $\Psi_e(u) \leqq |\mu|(e)$ und $\Psi_e(u^2) \leqq |\mu^*|(e)$, (3.27)

(b) $\lim\limits_{r\to 0}\ (-\frac{1}{2\pi}) \int_e \Delta_r^B \log u\ \ dO\ =\ \nu(e)$. (3.28)

Daraus folgt: $|\nu(e)|\ \leqq \frac{1}{c}\left\{(1+\frac{C}{c})\ |\mu|(e)\ +\ \frac{1}{2c}\ |\mu^*|(e)\right\}$. (3.29)

Dass (3.29) für beliebige offene Teilmengen e von $U'(z_0)$ und somit für beliebige Borel'sche Teilmengen von $U'(z_0)$ gilt ist klar (vgl. [16, 4.6-4.14]). Es existiert nämlich ein Punkt $z^* \in U'(z_0)$ mit der Eigenschaft, dass für sämtliche Geraden g_n^k

$$\operatorname{Re}(z-z^*) = \frac{k}{2^n} \quad , \quad \operatorname{Im}(z-z^*) = \frac{k}{2^n} \quad , \quad k \text{ ganz, } n \text{ natürlich,}$$

$$\mu(g_n^k) = \mu^*(g_n^k) = \nu(g_n^k) = 0 \quad . \tag{3.30}$$

Sei ω eine offene Teilmenge von $U'(z_0)$ und sei $\varepsilon > 0$. Es gibt eine abgeschlossene Menge $a_1 \subset \omega$ so, dass

$$|\nu|(\omega - a_1) < \varepsilon \quad . \tag{3.31}$$

(3.31) gilt auch für eine abgeschlossene Menge a_2, $a_1 \subset a_2 \subset \omega$, welche von Strecken aus den soeben definierten Geraden g_n^k berandet ist. Also

$$|\nu(\omega)| \leqq |\nu(a_2)| + |\nu(\omega - a_2)| < \frac{1}{c}\left\{(1+\frac{C}{c})\ |\mu|(\omega) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2c}\ |\mu^*|(\omega)\right\} + \varepsilon \quad . \tag{3.32}$$

Dann ist gemäss dem Hahn'schen Zerlegungssatz

$$\nu^-(e) \leqq \frac{1}{c}\left\{(1+\frac{C}{c})\ |\mu|(e) + \frac{1}{2c}\ |\mu^*|(e)\right\} \quad , \tag{3.33}$$

wobei e eine beliebige Borel'sche Teilmenge von $U'(z_0)$ bezeichnet.

Sei

$$p(z) := -\int_{U'(z_0)} \log \frac{1}{|z-\zeta|}\, d\nu^-(e_\zeta) \quad .$$

In $U'(z_0)$ ist $p - \log u$ subharmonisch, sowie die Funktionen

$$q(z) := v(z) + w(z) + \int_{U'(z_0)} \log \frac{1}{|z-\zeta|}\, d|\mu|(e_\zeta)$$

und
$$q^*(z) := v^*(z) + w^*(z) + \int_{U'(z_0)} \log \frac{1}{|z-\zeta|}\, d|\mu^*|(e_\zeta) \ ,$$

wobei $u^2 = v^*-w^*$ eine zulässige Darstellung von u^2 in $U(z_0)$ bezeichnet. Dann ist in einer hinreichend kleinen Umgebung von z_0

$$p \geqq \frac{1}{c} \{(1+\frac{C}{c})(v+w-q) + \frac{1}{2c}(v^*+w^*-q^*)\} \geqq M_1 > -\infty \tag{3.34}$$

und $\log u = p - (p - \log u)$,

womit Satz 7 bewiesen ist.

Bilden wir

$$H_1' := \{\exp u_1 - \exp u_2 \ / \ u_1, u_2 \in H\} ,$$

so gilt

Satz 8: $H_1' = H$, das heisst: H_1' ist eine Algebra. (3.35)

(Vgl. [3, Theorem 25, S. 347]).

Beweis: (I) $H_1' \subset H$.

Dies ist klar, denn $\exp u_i \in H_0 \subset H$, $i = 1, 2$, und H ist eine Algebra.

(II) $H \subset H_1'$.

Sei $u = v-w \in H$, v und w lokal beschränkt. Eine Darstellung von u als Differenz zweier Elemente aus H_0 ist gegeben durch

$$u = (\max(v,w) + 1 - w) - (\max(v,w) + 1 - v) , \tag{3.36}$$

denn $\max(v,w)$ ist subharmonisch [20, I, S. 335].

Bemerkung: Zwischen den Aussagen

(A) "u ist lokal darstellbar als Differenz beschränkter subharmonischer Funktionen in Ω", und

(B) "u ist darstellbar als Differenz lokal beschränkter subharmonischer Funktionen in Ω",

ist nicht zu unterscheiden. Dass (B) aus (A) folgt zeigt man folgendermassen:

$u = V-W$ bezeichne eine kanonische Darstellung von u in Ω - "kanonisch" im Sinne, dass sie der Jordan'schen Zerlegung von μ entspricht (vgl. Fussnote S. 23). Nehmen wir an, es existiere ein Punkt $z_0 \in \Omega$, so, dass V in keiner Umgebung von z_0 beschränkt ist. In $U(z_0)$ gelte $u = v-w$, v beschränkt dort. Dann ist [3, Theorem 5, S. 331] $V = v-S$, s subharmonisch in $U(z_0)$, was unserer Annahme widerspricht !