Über harmonische Kapazität und quasikonforme Abbildungen im Raum

Abhandlung
zur Erlangung der Würde eines
Doktors der Mathematik
der

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZÜRICH

vorgelegt von

HANS MARTIN REIMANN
dipl. Math. ETH
geboren am 8. Juli 1941
von Winterthur, Kanton Zürich

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. A. PFLUGER, Referent
Prof. Dr. J. HERSCH, Korreferent

Basel
Birkhäuser Verlag
1969

Über harmonische Kapazität und quasikonforme Abbildungen im Raum

H. M. REIMANN (Zürich)

Einleitung

Für den 3-dim. euklidschen Raum E^3 wurde eine Theorie der quasikonformen Abbildungen entwickelt (siehe z.B. GEHRING [4], VÄISÄLÄ [10]), die viele Merkmale der Theorie für die Ebene beibehält. Die Definition der quasikonformen Abbildungen im Raum stützt sich auf den Begriff der konformen Kapazität von Ringen. Ein Ring R in E^3 ist das homömorphe Bild von $\{x \mid 0<a<|x|<b\}$. Betrachtet man alle stetig differenzierbaren Funktionen u mit dem Randwert 0 auf der einen Randkomponente und dem Randwert 1 auf der anderen, so heisst die Grösse $M_3=\inf_u \int_R |\operatorname{grad} u|^3 \, dx$ „konforme Kapazität" von R (nach LOEWNER). Eine quasikonforme Abbildung im Raum ist dann ein Homöomorphismus von einem Gebiet G in E^3 auf ein Gebiet G' mit der Eigenschaft, dass für eine gewisse Konstante K und für alle Ringe R mit $\bar{R}\subset G$ und Bild R' die Ungleichung $M_3(R)\leqslant KM_3(R')$ besteht. Die vorliegende Studie befasst sich mit den Abbildungen, die man erhält, wenn die konforme Kapazität in dieser Definition durch die harmonische $M_2(R)=\inf_u \int_R |\operatorname{grad} u|^2 \, dx$ ersetzt wird. Die harmonische Kapazität eines Ringes ist gleich dem Wert des Dirichletintegrals derjenigen harmonischen Funktion in R, welche das verallgemeinerte Dirichlet-Randwertproblem mit den Werten 0 und 1 auf den beiden Randkomponenten löst. Der Kapazitätsbegriff wird im folgenden durch den allgemeineren Begriff des Moduls ersetzt. Diese beiden Begriffe fallen für Ringe zusammen (vgl. (1.7)).

Die Methoden, welche die Untersuchung derartiger Abbildungen gestatten, stammen grösstenteils aus der Theorie der quasikonformen Abbildungen. Handelt es sich im ersten Abschnitt noch um Diffeomorphismen, so werden im zweiten und dritten die gewonnenen Resultate auf Homöomorphismen ohne a priori Regularitätsvoraussetzungen übertragen. Das Schwergewicht liegt hier demzufolge bei der Abklärung von Regularitätseigenschaften. Der letzte Abschnitt dient der Herleitung einer Normalfamilien-Eigenschaft. Die Resultate, die sich wesentlich von der Theorie der quasikonformen Abbildungen abheben, sind in den Sätzen 1 und 3 enthalten.

Herrn Prof. A. PFLUGER möchte ich an dieser Stelle für die mannigfachen Anregungen und für das rege Interesse, das er meiner Arbeit stets entgegenbrachte, meinen ganz besonderen Dank aussprechen.