Sous-variété minimales

Author(s):
Terrier, Jean-Marc

Publication Date:
1967

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000087559

Thèse no 3963

Sous-variétés minimales

THÈSE

présentée

à l'Ecole polytechnique fédérale, Zurich

pour l'obtention du
grade de Docteur ès sciences mathématiques

par

JEAN-MARC TERRIER

mathématicien dipl. EPF
né le 11 juillet 1935
de Montignez (Canton de Berne)

acceptée sur proposition
du rapporteur professeur B. Eckmann
du corapporteur professeur K. Voss

Juris Druck + Verlag Zurich
1967

INTRODUCTION

Lorsqu'on étudie, en géométrie différentielle classique, les surfaces dans R^3, on bénéficie de circonstances privilégiées provenant, en premier lieu, du fait que la codimension (la différence entre la dimension de l'espace ambiant et celle de la sous-variété) est égale à 1; cela implique l'unicité de la direction normale.

La généralisation qui forme l'objet de notre travail porte d'une part sur l'espace ambiant: on remplace R^3 par une variété riemannienne M de dimension quelconque; et d'autre part sur la codimension: on étudie des sous-variétés de dimension m quelconque $(m < n)$.

Bien que cette généralisation ne soit pas récente, cf.p.ex. [1], le choix d'un formalisme global adéquat nous permet d'en donner une exposition particulièrement simple. La concision même du formalisme conduit presque naturellement à de nouvelles applications qu'on aurait sans doute de la peine à découvrir autrement. Les applications concernent avant tout les sous-variétés presque complexes des variétés analytiques complexes ou presque complexes.

Ce travail est divisé en quatre parties. Après un rappel des notions indispensables, on définit, dans le premier chapitre, la forme de minimalité H d'un plongement et on calcule sa valeur dans deux cas particuliers. Le nom de forme de minimalité est justifié dans le deuxième chapitre. On y montre que, dans une certaine famille de sous-variétés, on a $H = 0$ pour celle qui donne le minimum. Comme premières applications, on retrouve d'abord, dans le chapitre suivant, une analyse et généralisation des théorèmes (cf.p.ex. [2]) sur la minimalité (au sens $H = 0$) de sous-variétés presque complexes d'une variété kählérienne ou presque kählérienne. En affaiblissant de deux manières la condition kählérienne, on obtient ensuite deux séries de théorèmes (appelés ici cas "parakählériens" et "subkählériens") dont certains généralisent des théorèmes connus, tandis que d'autres sont dans une autre direction. En fait, on tire profit de l'existence d'une métrique riemannienne particulière. Une situation analogue se retrouve dans le cas des variétés parallélisables qui fait l'objet du dernier chapitre.

Pour terminer, l'auteur tient à remercier le professeur B. Eckmann pour sa bienveillance et pour les nombreuses suggestions qui ont permis la rédaction de ce travail.