Diss. Nr. 4854

Picard-Kategorien und funktorielle Determinantentheorien

ABHANDLUNG

zur Erlangung der Würde eines Doktors der Mathematik
der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZÜRICH

vorgelegt von

HERBERT EGLI
dipl. Math. ETH
geboren am 11. September 1945
von Winterthur (Kt. Zürich)

Angenommen auf Antrag von
Prof. Dr. B. Eckmann, Referent
Prof. Dr. M. A. Knus, Korreferent

Juris Druck + Verlag Zürich
1972

Abbildung der Isomorphieklassen von co(G) auf die Klassen von co($\bar{G}$). Da diese verträglich ist mit den durch die Verknüpfungen gegebenen Zusammensetzungen, erhalten wir einen Isomorphismus von $K_0(co(G))$ nach $K_0(co(\bar{G}))$. Unter diesem entsprechen sich die Untergruppen N und $\bar{N}$, sodass beim Uebergang zu φ: $R_0G \longrightarrow R_0\bar{G}$ die Eineindeutigkeit bestehen bleibt.

IV.3. Folgen für verknüpfungsverträgliche Funktoren

Wir wollen nun einem beliebigen $\perp$-verträglichen Funktor $F: \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ eine Folge der K-Gruppen zuordnen. Dazu benützen wir eine universelle funktorielle Determinantentheorie $U: \underline{C}' \longrightarrow \underline{P}$ und betrachten UF. Mit der Zusammensetzung der entsprechenden Verträglichkeitsäquivalenzen erhalten wir so eine funktorielle Determinantentheorie $G = UF: \underline{C} \longrightarrow \underline{P}$, zu der wir gemäss IV.1. die Folge $\mathbb{G} =: \mathbb{F}_U$ konstruieren können. Da U universell ist, ist $K_i\underline{P} \cong K_i\underline{C}'$; $\mathbb{F}_U$ hat also folgende Gestalt:

$$\mathbb{F}_U: \quad K_1\underline{C} \xrightarrow{f_1} K_1\underline{C}' \xrightarrow{\partial} R_0(UF) \xrightarrow{r} K_0\underline{C} \xrightarrow{f_0} K_0\underline{C}'$$

SATZ: Sind $U: \underline{C}' \longrightarrow \underline{P}$ und $\bar{U}: \underline{C}' \longrightarrow \underline{\bar{P}}$ universelle funktorielle Determinantentheorien (mit Verträglichkeitsäquivalenzen t und $\bar{t}$), so können wir durch geeignete Wahl von $\bar{t}$ erreichen, dass für alle $\perp$-verträglichen Funktoren $F: \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ gilt: $\mathbb{F}_U \cong \mathbb{F}_{\bar{U}}$.

BEWEIS: Da U universell ist, gibt es einen P-Funktor $H: \underline{P} \longrightarrow \underline{\bar{P}}$ mit $HU = \bar{U}$. Da $\bar{U}$ ebenfalls universell ist, ist H eine Aequivalenz. Wählen wir $t: H(-\boxtimes-) \xrightarrow{\simeq} H-\boxtimes H-$ beliebig und setzen wir $\bar{t}$ für $\bar{U}$ fest als Zusammensetzung der Verträglichkeitsäquivalenzen von U und H, so ist für jeden $\perp$-verträglichen Funktor $F: \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ das folgende Diagramm kommutativ und t-verträglich:

$$\begin{tikzcd} \underline{C} \arrow[r, "UF"] \arrow[d, equal] & \underline{P} \arrow[d, "H"] \\ \underline{C} \arrow[r, "\bar{U}F"'] & \underline{\bar{P}} \end{tikzcd}$$

Da H eine Aequivalenz ist, erhalten wir aus Satz IV.2. einen Isomorphismus $\mathbf{F}_U \cong \mathbf{F}_{\bar{U}}$.

Wir halten nun eine universelle funktorielle Determinantentheorie $U\colon \underline{C}' \longrightarrow \underline{P}$ fest.

SATZ: (i) Ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \underline{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "V"'] & \underline{C}' \\ \underline{\bar{C}} \arrow[ur, "\bar{F}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ bis auf eine natürliche, t-verträgliche Aequivalenz $\nu\colon F \xrightarrow{\simeq} \bar{F}V$, so induziert es eine Abbildung $\Phi_U\colon \mathbf{F}_U \longrightarrow \bar{\mathbf{F}}_U$.

(ii) Ist im obigen Diagramm V eine Aequivalenz, so ist Φ_U ein Isomorphismus.

BEWEIS: Auch dieser Satz folgt direkt aus Satz IV.2.

SATZ: Ist $\mathbf{F}$ die exakte Folge eines cofinalen, produkterhaltenden Funktors $F\colon \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$, so erhalten wir eine Abbildung $\Phi\colon \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{F}_U$. Ist $G = UF$ ebenfalls produkterhaltend, so ist Φ ein Isomorphismus.

KOROLLAR: Ist $U\colon \underline{C}' \longrightarrow \underline{P}$ produkterhaltend, so ist für jeden produkterhaltenden Funktor $F\colon \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ die Folge $\mathbf{F}_U$ exakt. Ist F cofinal (existiert also die von Bass konstruierte Folge $\mathbf{F}$), so ist $\mathbf{F} \cong \mathbf{F}_U$.

BEWEIS des Satzes: Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \underline{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, equal] & \underline{C}' \arrow[d, "U"] \\ \underline{C} \arrow[r, "G"'] & \underline{P} \end{tikzcd}$$

ist kommutativ und t-verträglich. Die Abbildung Φ von $\mathbf{F}$ nach $\mathbf{G}$ erhält man analog wie in IV.2., da die Folgen $\mathbf{F}$ und $\mathbf{G}$ ja im wesentlichen gleich konstruiert sind.
$\mathbf{F}$ ist exakt. Ist G produkterhaltend, so ist $\mathbf{G}$ ebenfalls exakt, und da die u_i Isomorphismen sind, ist die Abbildung Φ nach dem 5-Lemma ein Isomorphismus.

Ein Kriterium für die Existenz einer produkterhaltenden, universellen funktoriellen Determinantentheorie gibt der

SATZ: Gibt es zu einer Kategorie $\underline{C}$ mit Produkt ein Identifikationssystem E, das abgeschlossen ist bezüglich der Produktbildung und das die Assoziativitäts- und Kommutativitätsisomorphismen enthält, so existiert eine produkterhaltende, universelle funktorielle Determinantentheorie für $\underline{C}$.

BEWEIS: Gemäss Kapitel III konstruieren wir zu $\underline{C}$ eine P-Kategorie $\underline{P}$ und mithilfe von E einen Funktor $U: \underline{C} \longrightarrow \underline{P}$, der die universellen additiven Funktionen induziert. In $\underline{P}$ haben wir ja ein ausgezeichnetes Identifikationssystem $\mathbb{E}$, das kohärente Assoziativitäts- und Kommutativitätsisomorphismen enthält und das abgeschlossen ist bezüglich des Tensorproduktes. Da E ebenfalls abgeschlossen ist bezüglich des Produktes und nach $\mathbb{E}$ abgebildet wird, ist eine Verträglichkeitsäquivalenz t für U gegeben durch Wahl der entsprechenden Isomorphismen in $\mathbb{E}$. Da auch Assoziativitäts- und Kommutativitätsisomorphismen von $\underline{C}$ nach $\mathbb{E}$ abgebildet werden, liegen alle fraglichen Isomorphismen in $\mathbb{E}$; U ist somit produkterhaltend.

Da jeder endlich erzeugte (Links-) Modul über einem halbeinfachen Ring endlich halbeinfach ist und die einfachen direkten Summanden bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind, lässt sich ein beliebiges Identifikationssystem auf den einfachen Moduln so zu cinem Identifikationssystem der halbeinfachen

Moduln ergänzen, dass dieses abgeschlossen ist bezüglich der direkten Summe und die Assoziativitäts- und Kommutativitätsisomorphismen enthält. Zur Kategorie der endlich erzeugten Moduln über einem halbeinfachen Ring mit der direkten Summe als Produkt gibt es also nach obigem Satz eine produkterhaltende, universelle funktorielle Determinantentheorie.

****
****

L i t e r a t u r h i n w e i s e

[1] BASS,H.: Algebraic K-Theory. Benjamin (1968).

[2] BASS,H.: Lectures on Topics in Algebraic K-Theory. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1967).

[3] BUCUR,I.: Triangulated Categories and Algebraic K-Theory. Springer, Lecture Notes in Math. 108 (1969), 28-53.

[4] KAN,D.M.: Adjoint Functors. Trans. Am. Math. Soc. 87 (1958), 294-329.

[5] MAC LANE,S.: Natural Associativity and Commutativity. Rice University Studies 49 (1963), 28-46.

[6] MAC LANE,S.: Homology. Springer (1967).