Contribution au calcul des approximations de Tschebicheff

Author(s):
Descloux, Jean

Publication Date:
1961

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000087627

Prom. Nr. 3047

Contribution au calcul des approximations de Tschebicheff

THÈSE

présentée à l'Ecole Polytechnique de Zurich
pour l'obtention du grade de Docteur ès Sciences mathématiques

par

JEAN DESCLOUX

d'Echarlens (Fribourg)
diplômé ès sciences physiques E. P. F.

Rapporteur : Professeur Dr E. Stiefel
Corapporteur : Professeur Dr H. Rutishauser

1961
Lausanne
Multi-Office Garzoni & Flury

V. QUELQUES RESULTATS NUMERIQUES

L'algorithme généralisé décrit en II 4 a été éprouvé entre autres avec diverses approximations de la fonction de deux variables $J_\vartheta(x)$ (fonction de Bessel) sur le domaine $1 \leqslant x, \vartheta \leqslant 2$ par des polynomes de deux variables. Tous les calculs ont été effectués sur la calculatrice ZEBRA de l'Ecole polytechnique de Lausanne. Nous consignons ici les résultats de deux approximations; dans le premier cas, toutes les références qui sont intervenues au cours du calcul ont été strictes, si bien que l'algorithme restreint décrit dans [1] aurait suffi. Le second cas au contraire a présenté des références non strictes; de plus il a permis une vérification numérique des propriétés des fonctions T données au théorème 11.

Soit $S_i(x) = T_i(2x-3)$ (T_i est le polynome de Tschebicheff de degrés i). La suite $S_0, S_1, \dots$ forme un système T sur le domaine $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Le premier calcul porte sur les 49 points (x_i, ϑ_j) d'un cadriage du domaine avec : $x_i = \vartheta_i$ $i=1,2,\dots 7$; $x_1=1$; $x_2=1,15$; $x_3=1,35$; $x_4=1,5$; $x_5=1,65$; $x_6=1,85$; $x_7=2$. Les approximations sont des combinaisons linéaires des 15 fonctions $S_i(x)\, S_j(\vartheta)$ de degré total maximum 4. Partant d'une référence initiale de déviation 0,000144 (erreur maximum pour la première approximation : 0,00304), le calcul a nécessité 21 itérations pour obtenir la référence finale de déviation 0,000417. Notons que l'erreur maximum pour la dixième approximation ne s'élève qu'à 0,000885. Voici les coefficients de la meilleure approximation qui est unique :

1	0,379986	$S_1(x)S_2(\nu)$	-0,015973
$S_1(x)$	0,110686	$S_3(\nu)$	0,002208
$S_1(\nu)$	-0,152159	$S_4(x)$	0,000096
$S_2(x)$	-0,011376	$S_3(x)S_1(\nu)$	-0,000466
$S_1(x)S_1(\nu)$	0,024098	$S_2(x)S_2(\nu)$	-0,000623
$S_2(\nu)$	0,003319	$S_1(x)S_3(\nu)$	0,001696
$S_3(x)$	-0,001198	$S_4(\nu)$	-0,000261
$S_2(x)S_1(\nu)$	0,012972		

Une tabulation de cette approximation sur 441 points du domaine $1 \leqslant x, \nu \leqslant 2$ a révélé un écart maximum de 0,000521, ce qui montre qu'il aurait fallu considérer plus de 49 points pour obtenir une meilleure approximation valable sur tout le domaine.

Comme nous l'avons montré au théorème 11, la suite des fonctions $S_i(x)S_j(\nu)$ dans l'ordre donné ci-dessus forme un système T. Si nous permutons $S_1(x)S_3(\nu)$ et $S_4(x)$, nous obtenons encore un système T. Le coefficient $S_1(x)S_3(\nu)$ est alors "beaucoup plus grand" que les coefficients suivants. Nous pouvons appliquer la remarque faite en IV 1 sur les avantages des fonctions T: pour une meilleure approximation de $J_\nu(x)$ par les polynomes $S_i(x)\,S_j(\nu)$ de degré maximum 3, on peut s'attendre à ce que l'erreur soit donnée environ par $0{,}0017\ S_1(x)S_3(\nu)$; en particulier la déviation sur le cadre T relatif à $S_1(x)S_3(\nu)$ doit être de l'ordre de 0,0017.

Pour vérifier ces pronostics, j'ai calculé avec l'algorithme généralisé les meilleures approximations de $J_\nu(x)$ sur le cadriage (x_i, ν_j) $x_i = \nu_i$, $i=1,2,\ldots 5$; $x_1=1$; $x_2=1{,}25$; $x_3=1{,}5$; $x_4=1{,}75$; $x_5=2$. D'après la seconde partie du théorème 11, le cadre T relatif à $S_1(x)S_3(\partial)$ est le produit topologique de la référence T stricte relative à $S_1(x)$ et de la référence T stricte relative à $S_3(\partial)$ soit les points : (1;1), (1;1,25), (;1,75), 1;2), (1;1), (2;1,25), (2;1,75), (2;1), La référence initiale contenait ce cadre. Dans le tableau qui suit, on trouve, pour les références successives, à gauche la déviation, à droite l'erreur maximum.

0,00170	0,00840
0,00170	0,00491
0,00170	0,00445
0,00170	0,00302
0,00182	0,00182

Ces résultats confirment les prévisions. Remarquons que les 4 premières références ont le même cadre. Voici les coefficients :

1	0,38020	$S_2(\partial)$	0,00267
$S_1(x)$	0,11067	$S_3(x)$	-0,00124
$S_1(\partial)$	-0,15209	$S_2(x)S_1(\partial)$	0,01280
$S_2(x)$	-0,01138	$S_1(x)S_2(\partial)$	-0,01613
$S_1(x)S_1(\partial)$	0,02386	$S_3(\partial)$	0,00166

Une tabulation de cette approximation sur 441 points du domaine $1 \leqslant x,\ \partial \leqslant 2$ a révélé un écart maximum de 0,0021.