Variationsmethoden für die konforme Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete

Diss. Nr. 4822

Variationsmethoden für die konforme Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete

ABHANDLUNG

zur Erlangung der Würde eines Doktors der Mathematik
der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZÜRICH

vorgelegt von

ECKHARD GRASSMANN
dipl. Math. Universität Zürich
geboren am 6. Dezember 1942
von Zürich

Angenommen auf Antrag von
Prof. Dr. Pfluger, Referent
Prof. Dr. Strebel, Korreferent

Juris Druck + Verlag Zürich
1972

4. Lineare Funktionale

4.1. Bevor wir unsere Variationsmethoden auf die Maximierung von beliebigen linearen Funktionalen anwenden, wollen wir noch ein allgemeines Resultat über die analytische Darstellung solcher Funktionale bereitstellen.

In diesem Abschnitt ist D ein festes Gebiet in $\mathbb{C}$ und L(f) ein lineares Funktional, das auf den in D analytischen Funktionen definiert ist und in Bezug auf lokal gleichmässige Konvergenz stetig ist. Es gilt:

Lemma: Es gibt eine in D kompakte Menge G und eine Funktion K, die auf $\mathbb{C} \setminus G$ analytisch ist, derart, dass für eine zu ∂D (in $\mathbb{C}$) homologe Wegkette Γ in $D \setminus G$ gilt:

$$L(f) = \int_{\Gamma} f(z)K(z)dz \tag{37}$$

für jede in D analytische Funktion f.

Wir möchten hervorheben, dass der Definitionsbereich von K(z) nicht zusammenhängend sein muss.

Unter den Voraussetzungen des obigen Lemmas gibt es in D eine kompakte Menge G und auf G ein komplexes Borelsches Mass μ, sodass $L(f) = \int_G f(z)d\mu$ ist, für jede auf D analytische Funktion f. Denn nach geläufiger indirekter Schlussweise gibt es eine kompakte Menge $G \subset D$ und eine Konstante δ, sodass $|L(f)| < 1$ ist für $\max_{z \in G} |f(z)| < \delta$. Nach dem Hahn-Banachschen Satz lässt sich L zu einem stetigen linearen Funktional auf $\mathcal{C}(G)$ (dem Raum der komplexen stetigen Funktionen auf G mit der L_∞Norm) erweitern. Nach dem Darstellungssatz von Riesz gibt es daher ein komplexes Borelsches Mass μ mit

$$L(f) = \int_G f(z)d\mu , \qquad f \in \mathcal{C}(C)$$

Wir definieren nun die Funktion

$$K(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{d\mu(\zeta)}{z-\zeta}$$

die auf der offenen Menge $\mathbb{C} \setminus G$ analytisch ist. Ist f in D analytisch, so folgt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} dz \int_{G} \frac{f(z)\,d\mu(\zeta)}{z-\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{G} d\mu(\zeta)\int_{\Gamma}\frac{f(z)dz}{z-\zeta} \int_{G} f(\zeta)\,d\mu(\zeta) = L(f)$$

und daher (37).

Wir müssen unterscheiden, ob G den Ring R trennt oder nicht. Ersterer Fall liegt zum Beispiel vor, wenn L ein Koeffizient der Laurentreihe von f ist. Eigentlich überraschend scheint die Theorie in diesem Fall viel schwieriger zu sein.

4.2. S sei wieder eine nicht leere, kompakte Klasse von Funktionen f, die einen festen Ring $R_0 = \{r_0 < |z| < 1\}$ eineindeutig und konform in $\not{C}$ abbilden und ferner folgenden Nebenbedingungen genügen:

1) Für eine feste endliche Menge C nimmt f keines der $c \in C$ an.
2) Für endlich viele lineare stetige Funktionale L_i $(i=1....n-1)$ nimmt Re $L_i(f)$ vorgegebene Werte b_i an.

In S soll der Realteil eines stetigen linearen Funktionals L_n maximiert werden.

Wir werden mit völlig analogen Methoden wie in Kap. 3. den folgenden Satz beweisen:

Satz VII: Falls die L_i nicht im reellen Sinn linear abhängig sind, gilt für eine Extremalfunktion des Problems eine Gleichung der Form $R(z)\,(\frac{dz}{z})^2 = Q(w)dw^2$. Dabei hat Q(w) folgende Eigenschaften:

1) Auf mindestens einer Komplementärkomponente von $\Omega = f(R)$ kann Q(w) nicht identisch verschwinden. Diese hat keine inneren Punkte.

2) $Q(w)dw^2 \geqslant 0$ auf $\partial\Omega$.

3) Es gibt eine Linearkombination der zu den L_i gehörigen K_i (vergl. 4.1.), $K(z) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i K_i$, sodass $Q(w) - 2\pi i K(z)/f'(z)$ gleichzeitig von beiden Randkomponenten analytisch in Ω fortgesetzt werden kann.

4) $Q(w)dw^2$ hat in ∞ und in den $c \in C$ höchstens einfache Pole.

<u>Zusatz:</u> Falls G den Ring R_0 nicht trennt, kann Q(w) auf keiner Randkomponente identisch verschwinden und Ω hat keine äusseren Punkte.

Beweis: Wir wenden den gleichen Variationskegel wie in Kapitel 3. an. Zu jeder Variation x haben wir wieder ein f_x; jedem der L_i entspricht wie dort ein $N_i = \text{Re}(L_i(f_x) - L_i(f))$. Ungleichung (26) wird in diesem Fall:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i N_i(x) + \mathrm{Re} \sum_{c \in C} \lambda_c N_c \leq 0 \qquad (\lambda_i \in \mathbb{R}\,,\ \lambda_c \in \mathbb{C})$$

falls f extremal ist.

Wir finden die λ_i und λ_c für (26) und setzen völlig analog wie in 3.6.

$$R(z_o) = +\lambda_o + \int_\Gamma \overline{K(z)\, z\, f'(z)\, \tau\, (\bar{\zeta}-\zeta_o)\, dz} + \int_\Gamma K(z)\, z f'(z)\, \tau\, (\bar{\zeta}-\zeta_o)\, \overline{dz}$$

und

$$Q(w_o) = \int_\Gamma \frac{K(z)\,dz}{f(z)-w_o} + \sum_{c \in C} \frac{\lambda_c}{c-w_o}$$

und beweisen Wort für Wort wie in 3.6, dass, falls f extremal ist,

$$\frac{R(z_o)}{z_o^2 f'(z_o)^2} = Q(w_o) \quad \text{ist,} \tag{38}$$

dass $Q(w)dw^2 \geq 0$ ist auf $\partial\Omega$ und dass $Q(w)$ in ∞ mindestens eine dreifache Nullstelle hat, d.h. $Q(w)dw^2$ hat höchstens einen einfachen Pol. Damit sind die Punkte 2) und 4) bewiesen.

Zur Diskussion von (38) stellen wir zuerst fest, dass $Q(w)$ in $\hat{\mathbb{C}} \setminus f(\Gamma)$ holomorph ist, während $R(z)$ holomorph ist ausser auf Γ und dessen Spiegelbildern bezüglich $C(0,1)$ und $C(0,r)$.

Wenn man nun Γ bzw. $f(\Gamma)$ von rechts nach links überschreitet, so ändert $R(z)$ bzw. $Q(w)$ um das Residuum, d.h. um $+2\pi i z^2 f'(z)K(z)$ bzw. $+2\pi i K(z)/f'(z)$. Man folgert, dass

$$Q(f(z)) - 2\pi\, iK(z)/f'(z) \qquad \text{bzw.} \qquad R(z) - 2\pi\, iz^2 f'(z)K(z)$$

gleichzeitig von beiden Randkontinuen von R her in ganz R fortgesetzt werden können.

$Q(w)$ kann auf beiden Randkontinuuen verschwinden, wenn die L_i im reellen Sinn linear abhängig sind. Wir wollen zeigen, dass diese Bedingung auch notwendig ist. Es sei also $Q(w) = 0$ auf dem Rand. Dann müssen alle $\mu_j = 0$ sein, da sonst $Q(w)$ Pole hat und also nicht auf einem ganzen Kontinuum verschwinden kann. Es können also nicht auch alle $\lambda_i = 0$ sein. Falls

$Q(w) = 0$ ist, lässt sich aber $K(z)$ analytisch auf R fortsetzen und es gilt:

$$\sum \lambda_i L_i(g) \;=\; \int K(z)g(z)\,dz = 0 \qquad \forall g \quad \text{analytisch in } R$$

d.h. die L_i sind im reellen Sinn linear abhängig.

Wir zeigen nun folgende Tatsache: Falls eine Komplementärkomponente *innere Punkte hat, so ist* $Q(w) = 0$ auf dieser Komponente von $\not{C} \setminus f(\Gamma)$. Wenn nämlich w_0 irgendein äusserer Punkt von Ω ist, können wir (27) auf die Variation 4) anwenden und erhalten:

$$\lambda_i \int \frac{K_i(z)}{f(z)-w_0}\,dz + \sum \frac{\mu_\delta \lambda_c}{c_i - w_0} = 0$$

Die linke Seite ist aber gerade $Q(w_0)$ und daraus folgt unsere Behauptung. Höchstens eine Komplementärkomponente von Ω kann also innere Punkte haben, und falls Γ R nicht trennt, hat Ω keine äusseren Punkte.

Im Fall, dass G den Ring R trennt, können Komplikationen auftreten, die wir mit unseren Methoden nicht ausschliessen können. Dazu folgendes Beispiel, in dem wir ein f, λ_i und λ_0 so finden, dass alle unsere Gleichungen erfüllt sind.

Es sei Ω ein zweifach zusammenhängendes Gebiet, das entsteht, wenn wir von $\not{C}$ irgendein Kontinuum, das $+1$ und ∞ verbindet, und das reelle Intervall $[-1, 0]$ wegnehmen. $g(z)$ sei eine Funktion, die einen Ring R konform auf Ω abbildet.

Wir definieren nun:

$$K_1(z) = \frac{g'(z)}{2\pi i}\left(1 - \frac{1}{g(z)} + \frac{1}{g(z)+1}\right)$$

und:

$$L_1(f) = \mathrm{Re} \int_{C(0,r')} K_1(z)f(z)\,dz \qquad (r < r' < 1)$$

Dies ist offenbar der Realteil eines linearen Funktionals. Wir wollen es in der Klasse der Funktionen, die -1 und 0 von $+1$ und ∞ trennen, maximieren. Wir verifizieren nun, dass $f(z) = g(z)$ alle unsere Gleichungen erfüllt.

Wir haben:

$$Q_1(w_o) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f(C(o,r'))} \left(1 - \frac{1}{w} + \frac{1}{w+1}\right) \frac{dw}{w-w_o} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{w_o} - \dfrac{1}{w_o+1} & \text{ausserhalb } f(C(o,r')) \\ 1 & \text{innerhalb } f(C(o,r')) \end{cases}$$

und:

$$Q(w) = \lambda_1 Q_1(w) + \frac{\lambda_o}{-w} + \frac{\lambda_{-1}}{-1-w} + \frac{\lambda_1}{1-w}$$

Wir setzen nun $\lambda_1 = 1$, $\lambda_o = 1$, $\lambda_{-1} = -1$, $\lambda_1 = 0$ und erhalten:

$$Q(w) = \begin{cases} 0 & \text{ausserhalb } f(C(o,r')) \\ 1 - \frac{1}{w} + \frac{1}{w+1} & \text{innerhalb } f(C(o,r')) \end{cases}$$

Man verifiziert, dass $Q(w)dw^2 > 0$ auf $[-1,0]$. Es ist nun:

$$R_1(z_o) = \int K_1(z)\, z f'(z)\, \tau(\zeta - \zeta_o)\, dz + \int \overline{K_1(z)\, z f'(z)}\, \tau(\bar{\zeta} + \zeta_o)\, \overline{dz}$$

Der Sprung von R_1 auf $C(0, r')$ beträgt also:

$$z^2 f'(z)^2 \left(1 - \frac{1}{f(z)} + \frac{1}{f(z)+1}\right)$$

R_1 und $z^2 f'(z)^2 Q(w)$ haben also denselben Sprung auf $C(0, r')$. Ausserdem ist $z^2 f'(z)^2 Q(f(z))$ reell auf dem Rand und $R_1(z)$ ist reell auf $C(0, 1)$ und hat einen konstanten Imaginärteil auf $C(0, r)$, was man wie in 3.2. sieht. Daraus folgt wie in 2.1.2., dass sich $R_1(z)$ und $z^2 f'(z)^2 Q(f(z))$ um eine reelle Konstanz λ_o unterscheiden. Es gilt also Gleichung (38). Diese Betrachtung zeigt auch, dass es eigentlich nur auf $Q(w)$ ankommt. Wir sehen also, dass wir mit unseren Methoden nicht ausschliessen können, das f Extremalfunktion ist.