Globale Tschebyscheff-Netze auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten und Fortsetzung von Flächen konstanter negativer Krümmung

Author(s):
Wissler, Christian

Publication Date:
1972

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000087633

Globale Tschebyscheff-Netze auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten und Fortsetzung von Flächen konstanter negativer Krümmung

Abhandlung
zur
Erlangung der Würde eines
Doktors der Mathematik
der

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZÜRICH

vorgelegt von

CHRISTIAN WISSLER
dipl. Math.
geboren am 16. Mai 1941
von Sumiswald, Kanton Bern

Angenommen auf Antrag von
Prof. Dr. K. Voss, Referent
Prof. Dr. B. Eckmann, Korreferent

Basel
Birkhäuserverlag
1972

Fläche, auf der es ein globales T-Netz gibt, das Lösung von (5.8) ist, beschränkt sind:

$$\sup\{r(s), s\in(a, b)\} < \infty .$$

Allgemeiner gilt der

SATZ 10. *Auf einer vollständigen Rotationsfläche F, die die Rotationsachse nicht schneidet und auf der es ein globales T-Netz gibt, sind die Radien der Parallelkreise beschränkt.*

Bemerkung. Der Satz ist falsch, wenn die Fläche die Rotationsachse schneidet, oder wenn sie nicht vollständig ist. Ein Beispiel für den ersten Fall ist das Rotationsparaboloid $z=x^2+y^2$, auf dem die Kurven $x=\text{const.}$, $y=\text{const.}$ ein T-Netz bilden; ein Beispiel für den zweiten Fall ist dieselbe Fläche, wenn der Punkt $z=0$ herausgenommen wird.

Beweis. Auf F sei ein globales T-Netz gegeben; nach Satz 1 zerfällt das Netz also global in zwei Kurvenscharen. Dem Netz auf F entspricht in der φ, s-Ebene, der universellen Überlagerung von F, ein gemäss Satz 3 global kartesisches T-Netz, das unter den Decktransformationen D_i, nämlich den Translationen $(\varphi, s)\to(\varphi+i2\pi, s)$, $i\in\mathbf{Z}$, in sich übergeht. Wir nennen die eine Schar des Netzes in der φ, s-Ebene die erste Schar, die andere die zweite.

c_0 sei Kurve der ersten Schar, die durch den Punkt (0, 0) geht.

Behauptung. Entweder sind die Kurven $c_i=D_ic_0$ der ersten Schar, die durch die Punkte $(i2\pi, 0)$, $i\in\mathbf{Z}$, gehen, alle voneinander verschieden, oder sie fallen alle mit c_0 zusammen.

Zum Beweis nehmen wir an, es gebe eine Zahl $m\geqslant 1$ so, dass $c_m=c_0$ ist. Wir beweisen, dass dann $c_1=c_0$ ist, also alle c_i zusammenfallen. Da c_0' bei der Translation D_m in sich übergeht, besteht c_0 aus dem Teilbogen c_0' von (0, 0) bis $(m2\pi, 0)$ und den aus c_0' durch Translation in φ-Richtung entstehenden Bögen $D_{mn}c_0'$ für $n\in\mathbf{Z}$ (c_0 ist also in der φ, s-Ebene periodisch). Daraus folgt, dass φ auf c_0 das Intervall $(-\infty, +\infty)$ durchläuft und s ein abgeschlossenes Intervall $[s_1, s_2]$. c_0 liegt also ganz in dem Streifen $S: s_1\leqslant s\leqslant s_2$ der φ, s-Ebene und enthält einen Teilbogen c_0'', der zwei Punkte (φ_1, s_1), (φ_2, s_2) verbindet. Auf der Kurve $c_1=D_1c_0$ durchläuft φ ebenfalls alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$; da c_0'' den Streifen S zerlegt, haben c_0 und c_1 einen Punkt gemeinsam, und da beide Kurven zu derselben Schar gehören, ist $c_0=c_1$.

Wir bezeichnen nun entsprechend den c_i mit k_i die Kurven der zweiten Schar durch die Punkte $(i2\pi, 0)$. Nach obigem genügt es, den Satz 11 für folgende zwei Fälle zu beweisen:

(a) alle c_i, $i\in\mathbf{Z}$, und alle k_i sind verschieden

(b) die c_i sind verschieden, die k_i fallen alle zusammen.

Der Fall $c_0=c_1$ und $k_0=k_1$ kann nicht auftreten, da dann c_0, k_0 wegen der Translationsinvarianz mehr als einen Schnittpunkt hätten.

Fall (a). P_{ij} sei der Schnittpunkt von c_i und k_j. Wir führen noch die folgende Bezeichnung ein: Liegen zwei Punkte P, Q auf einer Netzlinie, so bezeichnen wir die Länge des Bogens zwischen P und Q mit $\overset{\frown}{PQ}$. Die Längen $\overset{\frown}{P_{ii}P_{i\,i+1}}$, $i \in \mathbf{Z}$, sind alle gleich lang, da die Bögen durch die Decktransformationen ineinander übergehen; hieraus folgt, dass für alle $j \in \mathbf{Z}$ $\overset{\frown}{P_{0j}P_{0\,j+1}} = \overset{\frown}{P_{00}P_{01}}$ ist, denn wegen der Tschebyscheffeigenschaft des Netzes ist $\overset{\frown}{P_{0j}P_{0\,j+1}} = \overset{\frown}{P_{jj}P_{j\,j+1}}$. Entsprechend ist $\overset{\frown}{P_{i0}P_{i+1\,0}} = \overset{\frown}{P_{00}P_{10}}$. Zwei aufeinanderfolgende Kurven k_j, k_{j+1} schneiden also auf c_0 für alle j Bögen gleicher Länge aus; entsprechend schneiden c_i, c_{i+1} auf k_0 gleiche Längen aus. Hieraus folgt, dass das Gitter, das durch die Kurven c_i, k_j gebildet wird, die ganze φ, s-Ebene überdeckt (man beachte, dass die Kurven c_0, k_0 isometrisch den Koordinatenachsen der Tschebyscheff-Parameterebene entsprechen). Für jede Masche des Gitters gilt:

– die Längen gegenüberliegender Seiten sind gleich lang und zwar sind sie entweder gleich $l_1 = \overset{\frown}{P_{00}P_{01}}$ oder gleich $l_2 = \overset{\frown}{P_{00}P_{10}}$;

– die beiden Eckpunkte P_{ij}, $P_{i+1\,j+1}$ liegen auf einer Parallelen zur φ-Achse. Die beiden Punkte überlagern denselben Punkt von F.

Wir betrachten das Bild A einer beliebigen Masche – gebildet von c_i, c_{i+1}, k_j, k_{j+1} – unter der Überlagerungsabbildung. Die Bilder der Eckpunkte P_{ij}, $P_{i\,j+1}$, $P_{i+1\,j+1}$, $P_{i+1\,j}$ seien der Reihe nach T, U, V, W. Es ist $T = V$. Die Bögen TUV und VWT sind also geschlossen; sie haben die Länge $l = l_1 + l_2$. r_A sei das Minimum der Radien der Parallelkreise, die mit A Punkte gemeinsam haben, r'_A das Maximum. Die normale Projektion p des Bogens $TUVW$ in die x, y-Ebene liegt innerhalb des Kreisringes, dessen innerer Randkreis den Radius r_A und dessen äusserer Randkreis den Radius r'_A hat. Beide Randkreise haben mit p mindestens einen Punkt gemeinsam. Die Differenz der Radien ist folglich kleiner als die Länge von p, die nicht grösser als die Länge des Bogens $TUVW$ ist, d.h. $r'_A - r_A < 2l$, also

$$r'_A < r_A + 2l. \tag{5.12}$$

Nun ist aber der Umfang des innern Randkreises nicht grösser als die Länge der Projektion des geschlossenen Bogens TUV, wie man leicht sieht, wenn man das Bogenelement in der x, y-Ebene in Polarkoordinaten darstellt. Es folgt: $2\pi r_A \leqslant l$. Zusammen mit (5.12) erhalten wir:

$$r'_A < \frac{l}{2\pi} + 2l. \tag{5.13}$$

Da l für alle Maschen gleich ist und da jeder Punkt der Fläche F in einer Masche liegt, ist mit (5.13) der Satz 10 für den Fall (a) bewiesen.

Fall (b). Die Kurven c_i sind verschieden und die Kurven k_j fallen mit der Kurve k_0 zusammen.

Die Schnittpunkte P_{i0} der Kurven c_i mit k_0 sind die Punkte $(i2\pi, 0)$. P_{01} sei ein beliebiger Punkt auf c_0, k_1 die Kurve der zweiten Schar durch $P_{01} \cdot P_{i1}$ seien die Schnittpunkte der c_i mit k_1. Wegen der Tschebyscheffeigenschaft sind die Bögen $P_{00} P_{01}$ und $P_{i0} P_{i1}$ gleich lang; da die c_i durch Translation in φ-Richtung auseinander hervorgehen, liegen die Punkte P_{i1} folglich auf der Parallelen zur φ-Achse durch P_{01}, überlagern also denselben Punkt von F. k_1 überlagert also wie k_0 eine geschlossene Kurve. Da P_{01} beliebig war, folgt: Die Kurven der zweiten Schar auf F sind alle geschlossen und haben wegen der Tschebyscheffeigenschaft des Netzes die gleiche Länge.

Für eine beliebige Kurve k der zweiten Schar auf F bezeichnen wir entsprechend zum Fall (a) mit r_k das Minimum der Radien derjenigen Parallelkreise, die mit k mindestens einen Punkt gemeinsam haben, mit r_k' das Maximum dieser Radien. Wie in (a) erhält man die Ungleichungen $r_k' - r_k < l$, $2\pi r_k \leqslant l$ und hieraus $r_k' < l + l/2\pi$ wobei l die Länge von k ist.

Damit ist der Satz auch für den Fall (b) bewiesen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Hilbert D., *Grundlagen der Geometrie*, 9. Auflage. Stuttgart 1962.

[2] Amsler M. H., *Des surfaces à courbure négative constante dans l'espace à trois dimensions et de leur singularités*, Math. Ann. *130* (1955), 234–256.

[3] Holmgren E., *Sur les surfaces à courbure constante négative*, C. R. Acad. Sci. Paris *134* (1902), 740–743.

[4] Kaplan W., *Regular curve families filling the plane, I*, Duke Mathematical J., *7* (1940), 154–185.

[5] Efimov N. V., *Appearance of singularities on surfaces of negative curvature*, Mat. Sb. *64* (106) (1964), 286–320; English transl., Amer. Math. Soc. Transl. (2) *66* (1968), 154–190.

[6] ——, *Differential criteria for homeomorphism of certain mappings with applications to the theory of surfaces*, Mat. Sbornik *76* (118) 1968, No. 4, 499–512; English transl., Math. USSR Sbornik *5* (1968) No. 4, 475–488.

[7] ——, *Surfaces with slowly changing negative curvature*, Usp. Mat. Nauk *21* (1966), No. 5, 3–58; English transl., Russian Math. Surveys *21* (1966), No. 5, 1–56.

[8] Rozendorn E. R., *Weakly irregular surfaces of negative curvature*, Usp. Mat. Nauk *21*, No. 5 (1966), 59–116; English transl., Russian Math. Surveys *21*, No.5 (1966), 57–112.

[9] Bieberbach L., *Hilberts Satz über Flächen konstanter Krümmung*, Acta Math. *48* (1926), 319–327.

[10] Courant R. und Hilbert D., *Methoden der mathematischen Physik II*, Heidelberger Taschenbücher, Springer-Verlag, 1968.

Eingegangen den 20. Mai 1972.