

Diss. Nr. 5645

PROBLEME DER REALISIERUNG

DIGITALER FILTER

ABHANDLUNG

ZUR ERLANGUNG

DES TITELS EINES DOKTORS DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

DER

E I D G E N O E S S I S C H E N T E C H N I S C H E N

H O C H S C H U L E Z U E R I C H

vorgelegt von

F E D E R I C O B O N Z A N I G O

Dipl. El.-Ing. ETH Zürich

geboren am 1. Juli 1941

von Bellinzona (Kt. Tessin)

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. E. Baumann, Referent

Prof. Dr. G. S. Moschytz, Korreferent

1976

~~Separatdruck~~ aus AGEN-Mitteilungen Nr. 21

# Probleme der Realisierung digitaler Filter

von F. Bonzanigo

Quelques problèmes dans la réalisation de filtres digitaux

Realization Problems in Digital Filters

Alcuni problemi inerenti alla realizzazione di filtri digitali

## Zusammenfassung

Diese Arbeit befasst sich mit einigen Problemen, die sich bei der Realisierung digitaler Filter stellen, insbesondere mit den dabei auftretenden Quantisierungs- und Abschnittfehlern. Nach einer Einführung werden die wichtigsten Filterstrukturen und die für Digitalfilter geeigneten Zahlendarstellungen beschrieben und die allgemeinen Eigenschaften des Abschnittes von Fest- und Gleitkommazahlen untersucht. Es werden die Eigenschaften des Ueberlaufs diskutiert und es wird gezeigt, wie der Ueberlauf in der Arithmetik detektiert und gegebenenfalls korrigiert werden kann. Die praktische Durchführung der Skalierung und die dazu nötige Bestimmung der maximalen Signalamplituden werden behandelt. Es wird dann auf die Quantisierungsfehler der Koeffizienten eingegangen. Zuerst wird eine indirekte Betrachtung angestellt, die einige qualitative Schlüsse gestattet. Nachher werden die Empfindlichkeit der Uebertragungsfunktion auf Koeffizientenänderungen und daraus Schranken für die Fehler berechnet. Am Schluss werden die Abschnittfehler der Signalgrößen behandelt, und zwar mit dem Modell des Quantisierungsrauschens. Zuerst werden die Gültigkeitsgrenzen dieses Modells untersucht: Die Korrelation zwischen Quantisierungsrauschen und Signal, die Verteilung und die Varianz des Abschnittfehlers werden berechnet. Für den wichtigen Fall des Abschnittes des Produktes wird der Zusammenhang zwischen Abschnittfehler und Eingangssignal am Multiplikator gezeigt;

numerische Resultate dafür, wie auch für die Verteilung der Fehler, ihre Streuung und die Korrelation zwischen Fehler und Eingangssignal werden vorgeführt. Schliesslich wird das Rauschmodell zur Berechnung von Mittelwert und Streuung des Quantisierungsrauschens am Ausgang eines Digitalfilters im stationären und im transienten Zustand angewendet. Der Einfluss der Skalierung auf das Quantisierungsrauschen und das Verhalten der Doppelrundung werden am Schluss untersucht.

Weder die durch die Nichtlinearität des Abschnitts und des Ueberlaufs verursachten parasitären Schwingungen, noch die speziellen Probleme der Hardware-Realisierung werden in dieser Arbeit behandelt.

### Résumé

Ce travail traite quelques problèmes se posant dans la réalisation de filtres digitaux, en particulier des fautes de quantification et d'arrondi.

Après une introduction, les structures de filtre les plus importantes, les représentations des nombres les plus appropriées et les propriétés principales de l'arrondi des nombres en virgule fixe et en virgule flottante sont décrites. Les propriétés du débordement sont données et on montre comment il peut être détecté et éventuellement corrigé. L'exécution pratique de la normalisation et la détermination de l'amplitude maximale du signal sont examinées. Ensuite, les fautes dues à la quantification des coefficients sont considérées. Une considération indirecte amène à des conclusions qualitatives simples. La sensibilité de la fonction de transfert aux changements des coefficients est calculée et de là des limites pour les erreurs de la fonction de transfert. A la fin les fautes dues à l'arrondi des signaux sont traitées à l'aide du modèle du bruit de quantification. D'abord les limites de validité de ce modèle sont examinées: la corrélation entre le bruit de quantification et le signal est calculée ainsi que la distribution et la variance des fautes d'arrondi. Pour le cas très important de l'arrondi du produit, la dépendance fonctionnelle entre l'erreur et le signal d'entrée du multiplicateur est montrée par des exemples numériques pour la distribution de l'erreur, sa variance et la corrélation entre le bruit et le signal d'entrée. Ensuite le modèle du bruit de quantification est utilisé pour calculer la moyenne et la variance du bruit à la sortie du filtre à l'état stationnaire et à l'état transitoire. Enfin l'influence de la normalisation sur le bruit et le comportement du double arrondi sont examinés.

Dans ce travail ni les effets de la non-linéarité de l'arrondi et du débordement (comme les oscillations parasites), ni les problèmes pratiques de la réalisation hardware ne sont traités.

### Abstract

This paper deals with some problems which appear when implementing digital filters.

After an introduction, the most important filter structures and the most suitable number representations are described and the general roundoff properties of fixed point and floating point numbers are discussed. The properties of the overflow are treated and it is shown, how overflow can be detected and if necessary, corrected. The practical implementation of scaling along with the necessary determination of the peak signal amplitudes is examined. Next, the errors due to coefficient quantization are treated. An indirect consideration leads to some simple qualitative rules. Then, the sensitivities of the transfer function are calculated to obtain some bounds on the transfer function error. At the end the errors due to signal rounding are examined using the quantization noise model. First, the limits of validity of this model are examined: the correlation between quantization noise and signal is calculated, as well as the distribution and the variance of the roundoff error. For the important case of product roundoff the functional dependence of the error from the multiplier input is shown and numerical examples for the distribution and the variance of the error and for the correlation between the error and the multiplier input are presented. The noise model is then used to calculate the mean and the variance of the noise at the filter output under stationary and under transient conditions. Finally influence of scaling on roundoff noise and the performance of double rounding are examined.

This paper treats neither the nonlinear effects of roundoff and overflow, as limit cycle oscillations, nor the practical aspects of hardware implementation.

## Riassunto

Il presente lavoro si occupa di alcuni problemi che si pongono nella realizzazione di filtri digitali, in particolare degli errori di quantificazione e di arrotondamento.

Dopo un'introduzione, le principali strutture dei filtri digitali, le rappresentazioni dei numeri le più adatte e le proprietà generali dell'arrotondamento dei numeri in virgola fissa e in virgola mobile sono descritte. Le proprietà dello overflow sono discusse e viene mostrato come questo possa essere scoperto ed eventualmente corretto. L'esecuzione pratica dello scaling con la necessaria determinazione dei livelli massimi del segnale vengono trattati. In seguito si considerano gli errori dovuti alla quantificazione dei coefficienti. Una considerazione indiretta conduce a conclusioni qualitative semplici. In seguito viene calcolata la sensibilità della funzione di trasferimento a modificazioni dei coefficienti e da ciò dei limiti per gli errori della funzione di trasferimento. Alla fine vengono trattati gli errori dovuti all'arrotondamento dei segnali usando il modello del rumore di quantificazione. Dapprima vengono esaminati i limiti di validità di tale modello: la correlazione fra errore di quantificazione e segnale, la distribuzione e la varianza dell'errore di arrotondamento sono calcolati. Per il caso importante dell'arrotondamento del prodotto è mostrata la dipendenza funzionale fra errore e segnale d'entrata del moltiplicatore; vengono mostrati esempi numerici per la distribuzione e la varianza dell'errore, come pure per la correlazione fra errore e segnale d'entrata. Il modello viene utilizzato in seguito per calcolare il valore medio e la varianza del rumore all'uscita di un filtro sia allo stato stazionario che a quello transitorio. Infine vengono esaminati l'effetto dello scaling sul rumore ed il comportamento del doppio arrotondamento.

Né gli effetti della non-linearità dell'arrotondamento e dello overflow, come oscillazioni parassite, né i problemi specifici alla realizzazione in hardware vengono trattati in questo lavoro.