Diss. Nr. 5645

PROBLEME DER REALISIERUNG

DIGITALER FILTER

ABHANDLUNG

ZUR ERLANGUNG

DES TITELS EINES DOKTORS DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

DER

EIDGENOESSISCHEN TECHNISCHEN

HOCHSCHULE ZUERICH

vorgelegt von

FEDERICO BONZANIGO

Dipl. El.-Ing. ETH Zürich

geboren am 1. Juli 1941

von Bellinzona (Kt. Tessin)

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. E. Baumann, Referent

Prof. Dr. G. S. Moschytz, Korreferent

1976

~~Separatdruck aus~~ AGEN-Mitteilungen Nr. 21

Seite Leer /
Blank leaf

INHALTSVERZEICHNIS

Probleme der Realisierung digitaler Filter

von F. Bonzanigo

Quelques problèmes dans la réalisation de filtres digitaux

Realization Problems in Digital Filters

Alcuni problemi inerenti alla realizzazione di filtri digitali

Zusammenfassung

Diese Arbeit befasst sich mit einigen Problemen, die sich bei der Realisierung digitaler Filter stellen, insbesondere mit den dabei auftretenden Quantisierungs- und Abschnittfehlern. Nach einer Einführung werden die wichtigsten Filterstrukturen und die für Digitalfilter geeigneten Zahlendarstellungen beschrieben und die allgemeinen Eigenschaften des Abschnittes von Fest- und Gleitkommazahlen untersucht. Es werden die Eigenschaften des Ueberlaufs diskutiert und es wird gezeigt, wie der Ueberlauf in der Arithmetik detektiert und gegebenenfalls korrigiert werden kann. Die praktische Durchführung der Skalierung und die dazu nötige Bestimmung der maximalen Signalamplituden werden behandelt. Es wird dann auf die Quantisierungsfehler der Koeffizienten eingegangen. Zuerst wird eine indirekte Betrachtung angestellt, die einige qualitative Schlüsse gestattet. Nachher werden die Empfindlichkeit der Uebertragungsfunktion auf Koeffizientenänderungen und daraus Schranken für die Fehler berechnet. Am Schluss werden die Abschnittfehler der Signalgrössen behandelt, und zwar mit dem Modell des Quantisierungsrauschens. Zuerst werden die Gültigkeitsgrenzen dieses Modells untersucht: Die Korrelation zwischen Quantisierungsrauschen und Signal, die Verteilung und die Varianz des Abschnittfehlers werden berechnet. Für den wichtigen Fall des Abschnitts des Produktes wird der Zusammenhang zwischen Abschnittfehler und Eingangssignal am Multiplikator gezeigt;

numerische Resultate dafür, wie auch für die Verteilung der Fehler, ihre Streuung und die Korrelation zwischen Fehler und Eingangssignal werden vorgeführt. Schliesslich wird das Rauschmodell zur Berechnung von Mittelwert und Streuung des Quantisierungsrauschens am Ausgang eines Digitalfilters im stationären und im transienten Zustand angewendet. Der Einfluss der Skalierung auf das Quantisierungsrauschen und das Verhalten der Doppelrundung werden am Schluss untersucht.

Weder die durch die Nichtlinearität des Abschnitts und des Ueberlaufs verursachten parasitären Schwingungen, noch die speziellen Probleme der Hardware-Realisierung werden in dieser Arbeit behandelt.

Résumé

Ce travail traite quelques problèmes se posant dans la réalisation de filtres digitaux, en particulier des fautes de quantification et d'arrondi.

Après une introduction, les structures de filtre les plus importantes, les représentations des nombres les plus appropriées et les propriétés principales de l'arrondi des nombres en virgule fixe et en virgule flottante sont décrites. Les propriétés du débordement sont données et on montre comment il peut être détecté et éventuellement corrigé. L'execution pratique de la normalisation et la détermination de l'amplitude maximale du signal sont examinées. Ensuite, les fautes dues à la quantification des coefficients sont considerées. Une considération indirecte amène à des conclusions qualitatives simples. La sensibilité de la fonction de transfert aux changements des coefficients est calculée et de là des limites pour les erreurs de la fonction de transfert. A la fin les fautes dues à l'arrondi des signaux sont traitées à l'aide du modèle du bruit de quantification. D'abord les limites de validité de ce modèle sont examinées: la correlation entre le bruit de quantification et le signal est calculée ainsi que la distribution et la variance des fautes d'arrondi. Pour le cas très important de l'arrondi du produit, la dépendance fonctionelle entre l'erreur et le signal d'entrée du multiplicateur est montrée par des examples numériques pour la distribution de l'erreur, sa variance et la correlation entre le bruit et le signal d'entrée. Ensuite le modèle du bruit de quantification est utilisé pour calculer la moyenne et la variance du bruit à la sortie du filtre à l'état stationnaire et à l'état transitoire. Enfin l'influence de la normalisation sur le bruit et le comportement du double arrondi sont examinés.

Dans ce travail ni les effects de la non-linéarité de l'arrondi et du debordement (comme les oscillations parasites), ni les problèmes pratiques de la réalisation hardware ne sont traités.

Abstract

This paper deals with some problems which appear when implementing digital filters.

After an introduction, the most important filter structures and the most suitable number representations are described and the general roundoff properties of fixed point and floating point numbers are discussed. The properties of the overflow are treated and it is shown, how overflow can be detected and if necessary, corrected. The practical implementation of scaling along with the necessary determination of the peak signal amplitudes is examined. Next, the errors due to coefficient quantization are treated. An indirect consideration leads to some simple qualitative rules. Then, the sensitivities of the transfer function are calculated to obtain some bounds on the transfer function error. At the end the errors due to signal rounding are examined using the quantization noise model. First, the limits of validity of this model are examined: the correlation between quantization noise and signal is calculated, as well as the distribution and the variance of the roundoff error. For the important case of product roundoff the functional dependence of the error from the multiplier input is shown and numerical examples for the distribution and the variance of the error and for the correlation between the error and the multiplier input are presented. The noise model is then used to calculate the mean and the variance of the noise at the filter output under stationary and under transient conditions. Finally influence of scaling on roundoff noise and the performance of double rounding are examined.

This paper treats neither the nonlinear effects of roundoff and overflow, as limit cycle oscillations, nor the practical aspects of hardware implementation.

Riassunto

Il presente lavoro si occupa di alcuni problemi che si pongono nella realizzazione di filtri digitali, in particolare degli errori di quantificazione e di arrotondamento.

Dopo un'introduzione, le principali strutture dei filtri digitali, le rappresentazioni dei numeri le più adatte e le proprietà generali dell'arrotondamento dei numeri in virgola fissa e in virgola mobile sono descritte. Le proprietà dello overflow sono discusse e viene mostrato come questo possa essere scoperto ed eventualmente corretto. L'esecuzione pratica dello scaling con la necessaria determinazione dei livelli massimi del segnale vengono trattati. In seguito si considerano gli errori dovuti alla quantificazione dei coefficienti. Una considerazione indiretta conduce a conclusioni qualitative semplici. In seguito viene calcolata la sensibilità della funzione di trasferimento a modificazioni dei coefficienti e da ciò dei limiti per gli errori della funzione di trasferimento. Alla fine vengono trattati gli errori dovuti all'arrotondamento dei segnali usando il modello del rumore di quantificazione. Dapprima vengono esaminati i limiti di validità di tale modello: la correlazione fra errore di quantificazione e segnale, la distribuzione e la varianza dell'errore di arrotondamento sono calcolati. Per il caso importante dell'arrotondamento del prodotto è mostrata la dipendenza funzionale fra errore e segnale d'entrata del moltiplicatore; vengono mostrati esempi numerici per la distribuzione e la varianza dell'errore, come pure per la correlazione fra errore e segnale d'entrata. Il modello viene utilizzato in seguito per calcolare il valore medio e la varianza del rumore all'uscita di un filtro sia allo stato stazionario che a quello transitorio. Infine vengono esaminati l'effetto dello scaling sul rumore ed il comportamento del doppio arrotondamento.

Né gli effetti della non-linearità dell'arrotondamento e dello overflow, come oscillazioni parassite, né i problemi specifici alla realizzazione in hardware vengono trattati in questo lavoro.

1. EINLEITUNG

1.1 Was ist ein Digitalfilter?

Um den Begriff "Digitalfilter" klar definieren zu können, werden wir zuerst den Begriff des Abtastfilters einführen.

Ein eindimensionales[1] Abtastfilter ist ein lineares, zeitinvariantes System, das eine oder mehrere[2] Zeitfolgen $x(nT)$ (Eingang) in eine oder mehrere[2] Zeitfolgen $y(nT)$ (Ausgang) transformiert. Ein solches Abtastfilter lässt sich durch ein System von linearen, zeitunabhängigen Differenzengleichungen beschreiben. Die dynamischen Eigenschaften sind durch die Koeffizienten dieses Differenzengleichungssystems, die Filterkoeffizienten, gegeben.

In einem digitalen Filter werden folgende Operationen durchgeführt: Multiplikationen mit konstanten Koeffizienten, Additionen und Zeitverzögerungen von ganzen Vielfachen der Abtastperiode T. Falls diese Operationen mit digitalen arithmetischen Elementen durchgeführt werden (siehe Kap. 1.2), wird das Abtastfilter Digitalfilter im engsten Sinn[3] genannt.

---

[1] Es gibt daneben auch mehrdimensionale Digitalfilter. Am verbreitetsten sind die zweidimensionalen Filter, bei welchen die Variablen je 2 Parameter enthalten, die als Koordinaten eines Punktes in einer Ebene aufgefasst werden können. Sie werden u.a. zur Verarbeitung von Bilddaten und in der Geophysik eingesetzt. Mehrdimensionale Filter werden in dieser Arbeit nicht behandelt.

[2] Dies sind die sogenannten Mehrfach- (multivariable) Filter, wo die Ein- und Ausgänge Folgen von Vektoren sind [25]. In dieser Arbeit werden solche Systeme nicht betrachtet, die Resultate können aber im allgemeinen leicht auf solche Mehrfachfilter erweitert werden.

[3] Da heutzutage die meisten Abtastfilter digital realisiert werden, wird häufig in der Literatur das Wort Digitalfilter eingesetzt, um die Abtastfilter (sampled-data filters) allgemein zu bezeichnen.

Dieses System von Differenzengleichungen lässt sich auf eine einzige Differenzengleichung reduzieren:

$$y(n) + \sum_{i=1}^{N} b_i \cdot y(n-i) = \sum_{i=0}^{M} a_i \cdot x(n-i) \qquad (1)$$

Diese Differenzengleichungen (1) lässt sich nach y(n) auflösen:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{M} a_i \cdot x(n-i) - \sum_{i=1}^{N} b_i \cdot y(n-i) \qquad (2)$$

Das Digitalfilter sei jetzt bis zu einem gewissen Abtastpunkt, den wir als Nullpunkt wählen, in Ruhe, d.h. alle Eingänge und Speichervariablen (und daher auch die Ausgänge) seien für diesen Moment gleich Null. Im Zeitpunkt $n = 0$ setze man einen einzigen Wert $x(0) = 1$ am Eingang, für alle anderen $n \neq 0$ sei der Eingang immer gleich Null. Das Ausgangssignal, das sich bei einer solchen Erregung ergibt, wird als die Impulsantwort h(n) des Filters bezeichnet.

Wir haben unsere Digitalfilter als lineare Systeme definiert: es gilt daher das Superpositionsgesetz. Deswegen kann die Antwort einer beliebigen Eingangsfolge x(n) durch die Ueberlagerung der Antworten auf der einzelnen Eingangswerte berechnet werden.

Falls $x(n) = 0$ für $n < 0$ und falls bei $n = 0$ alle Speichervariablen gleich Null sind, ergibt sich die Faltungssumme

$$y(n) = \sum_{i=0}^{n} x(i) \cdot h(n-i)$$

Wir können auf die Folgen $y(n)$, $x(n)$ und $h(n)$ die z-Transformation anwenden. Bei der z-Transformation geht bekanntlich (siehe z.B. [1]) die Faltung in eine Multiplikation über:

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$

$H(z)$ ist die Uebertragungsfunktion: sie ist die z-transformierte der Impulsantwort $h(n)$. $X(z)$ und $Y(z)$ sind die z-transformierte der Eingangsfolge $x(n)$, bzw. der Ausgangsfolge $y(n)$.[4]

Wenn am Eingang eine Cosinusfolge eingegeben wird:

$$x(nT) = A.\cos(\omega.nT) = A.\mathrm{Re}\{e^{jn\omega T}\}$$

ist die Antwort im eingeschwungenen Zustand (d.h. für $n \to \infty$) durch die Uebertragungsfunktion am Punkt $z = e^{j\omega T}$ gegeben

$$y(nT) = A\ \mathrm{Re}\{H(z)\Big|_{z=e^{j\omega T}} \cdot e^{jn\omega T}\}$$

$H(z)\Big|_{z=e^{j\omega T}} \triangleq H(\omega T)$ ist der Frequenzgang, $|H(\omega T)|$ der Amplitudengang, $\measuredangle H(\omega T)$ der Phasengang des digitalen Filters.

Die Uebertragungsfunktion kann aus der Differenzengleichung(en) des Filters berechnet werden. Wenn man Gl. (2) z-transformiert (wobei jede Verzögerung um T durch eine Multiplikation mit z^{-1} ersetzt wird), ergibt sich:

---

4 Normalerweise bezeichnet man Zeitfolgen mit Kleinbuchstaben und die entsprechende z-transformierte mit Grossbuchstaben, so dass ~~es~~ gilt $X(z) = Z\{x(n)\}$

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{M} a_i \cdot z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^{N} b_i z^{-i}}$$

Durch Division von Zähler und Nenner durch die grösste Potenz von z^{-1}, ergibt sich die Uebertragungsfunktion in der üblichen Form

$$H(z) = z^{N-M} \frac{\sum_{i=0}^{M} a_i \; z^{M-i}}{z^N - \sum_{i=1}^{N} b_i \; z^{N-i}}$$

Dabei wird häufig der Term z^{N-M} weggelassen, weil er eine reine Verzögerung darstellt. Wir werden ihn in dieser Arbeit ebenfalls nicht berücksichtigen, ausser wenn es anders vermerkt ist.

Die Uebertragungsfunktion eines digitalen Filters kann immer als eine rationale Funktion in z ausgedrückt werden.

1.2 Prinzipielle Möglichkeiten zur Realisierung von Abtastfiltern

Ein Abtastfilter (Digitalfilter im weitesten Sinn) kann entweder mit analogen oder mit digitalen Elementen realisiert werden. Digitale Realisierungen von Abtastfiltern (Digitalfilter im eigentlichen Sinn) können entweder als Programme für Digitalrechner oder als spezialisierte Hardware realisiert werden.

Um ein Abtastfilter analog zu realisieren, braucht man ein analoges Verzögerungselement. Als Verzögerungselemente können

Verzögerungsleitungen [2], kapazitive Speicher (entweder diskret [3] oder integriert als Eimerkettenschaltungen (bucket brigade) [4] oder ladungsgekoppelte Schaltungen (charge coupled devices, CCD) [5]), ferromagnetische [6] oder ferroelektrische Speicher [7] verwendet werden. Die Multiplikationen werden mit Widerständen oder Spannungsteilern, Additionen mit Operationsverstärkern realisiert. Mit Hilfe von Oberflächenwellen auf piezoelektrischen Materialien (surface waves) können Filter gebaut werden, die ähnlich wie Transversalfilter (nichtrekursive Digitalfilter) sind. Dispersive Effekte bei der Wellenausbreitung bewirken aber, dass ihre Eigenschaften etwas von denen der digitalen Filtern abweichen [8].

Auch hybride Lösungen wurden vorgeschlagen, wo die Speicherung digital und die Operationen analog durchgeführt werden [9].

Bei analogen und hybriden Realisierungen werden die Amplituden nicht quantisiert. Die Toleranz- und Driftprobleme sind ähnlich gelagert wie bei den analogen Filtern: die Toleranzen der Elemente können nicht beliebig klein gemacht werden. Dazu gibt es noch Schwierigkeiten, welche durch die nichtidealen Eigenschaften der analogen Verzögerungsglieder verursacht werden, wie Verzerrungen durch Dispersion und Dämpfung in Verzögerungsleitungen, Ladungsverluste in den kapazitiven Speichern, usw.

Bei einer <u>digitalen Realisierung</u> werden alle im Filter vorkommende Grössen - Koeffizienten und Signale - durch Zahlen dargestellt. Die Zahlen werden mit Hilfe arithmetischer Schaltungen (Multiplizierer und Summatoren) verarbeitet. Die Verzögerung der Signale ist dabei besonders problemlos. Die Zahlen können fehlerfrei und beliebig lang gespeichert werden. (Eine Ausnahme sind die dynamischen Schieberegister, die eine minimale Schiebefrequenz zur Erhaltung der Information erfordern.)

Die Toleranzprobleme sind anders gelagert. Mit entsprechendem Aufwand kann eine beliebige Genauigkeit erreicht werden: es müssen nur genügend lange Worte für die Zahlen vorgesehen werden. Die Zahlen sind auch keinen Drifterscheinungen unterworfen, welche durch die Temperatur oder die Alterung bedingt wären. Das heisst nicht, dass bei Digitalfilter die Genauigkeitsprobleme nicht beachtet werden müssen. Aus wirtschaftlichen Gründen ist man interessiert, mit der kleinstmöglichen Wortlänge auszukommen, die nötig ist, um gewisse, vorgegebene Genauigkeitsanforderungen zu erfüllen. Daher besteht ein Interesse, die Effekte, welche durch die beschränkte Genauigkeit der Zahlen verursacht werden, zu beherrschen. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, ein Beitrag in dieser Richtung zu liefern.

1.3 Die Fehler der endlichen Arithmetik

Die durch die beschränkte Genauigkeit der Zahlen (beschränkte Arithmetik) verursachten Fehler in Digitalfilter können wie folgt klassifiziert werden:

- Wegen der Darstellung der Koeffizienten durch Zahlen mit einer beschränkten Wortlänge werden diese in ihrem Wert verändert. Man bekommt damit ein verändertes Filter, dessen Koeffizienten von den berechneten abweichen: die Uebertragungsfunktion des Filters wird durch die Quantisierung der Koeffizienten verändert. Dieses Problem wird im Kapitel 4 behandelt.
- Die Zahlen haben einen nach den absolut grossen Werten hin beschränkten Bereich. Falls die Signalgrössen diesen Bereich überschreiten, ergeben sich Ueberlauffehler. Sie führen zu Signalverzerrungen und können Instabilitäten verursachen. Die Ueberlauffehler können durch geeignete Massnahmen, insbesondere durch eine geschickte Skalierung, vermieden werden.

Wir werden sie im Kapitel 3 behandeln.

- Um zu vermeiden, dass die Wortlängen der Signalgrössen mit jeder durchgeführten Multiplikation wächst, müssen an geeigneten Stellen die weniger gewichtigen Ziffern der Zahl abgeschnitten werden. Die so verursachten Abschnittfehler führen zu Störsignalen im Filter. Wir werden diese Fehler im Kapitel 5 analysieren.
- Die bei der Verarbeitung analoger Signale notwendige Analog/Digitalwandlung verursacht Quantisierungsfehler der Signale. Sie werden auch im Kapitel 5 betrachtet.

Das sind die Fehler, die in der vorliegenden Arbeit untersucht werden. Weitere, nicht systembedingte Fehler, wie Abtastjitter, Unregelmässigkeiten der Stufung von Analog/Digitalwandlern und Digital/Analogwandlern, transiente Vorgänge in Digital/Analogwandlern, usw. werden nicht betrachtet.

2. GRUNDLAGEN FUER DIE REALISIERUNG DIGITALER FILTER

In diesem Kapitel werden wir ein paar Probleme betrachten, die bei der Realisierung digitaler Filter wichtig sind.

In einem ersten Abschnitt (2.1) werden wir einige Strukturen betrachten, die bei der Realisierung digitaler Filter von Bedeutung sind.

Im folgenden Abschnitt 2.2 werden wir uns überlegen, welche Zahlendarstellung sich für Digitalfilter am besten eignet und die allgemein getroffene Wahl der binären Arithmetik rechtfertigen.

Im Abschnitt 2.3 werden wir die allgemeinen Eigenschaften des Abschnittes von Festkommazahlen und im Abschnitt 2.4 die des Abschnittes von Gleitkommazahlen behandeln. Diese Resultate werden in den Kapiteln 4 und 5 gebraucht.

2.1 Realisierungsstrukturen von Digitalfiltern

Wir haben gesehen, dass ein Digitalfilter durch ein System von Differenzengleichungen gegeben ist und dass dieses System sich auf eine einzige Differenzengleichung reduzieren lässt, welche die Ausgangsfolge direkt mit der Eingangsfolge verknüpft. Die z-Transformierte dieser Differenzengleichung ist die Uebertragsfunktion in ihrer rationalen Form. Es ist leicht einzusehen, dass viele verschiedene Strukturen von Digitalfiltern existieren, welche alle die gleiche Uebertragungsfunktion besitzen. Sie würden im idealen Fall alle dieselben Eigenschaften haben, sie verhalten sich aber unterschiedlich gegenüber der erwähnten Begrenzung der Genauigkeit, (d.h. gegenüber Abschnittfehler, Quantisierung der Koeffizienten, usw.).

Eine notwendige Bedingung, damit ein System von Differenzengleichungen ein realisierbares digitales Filter darstellt, ist, dass darin keine verzögerungsfreie Schleifen vorkommen, da jede Durchführung von arithmetischen Operationen eine gewisse Zeit beansprucht. Deswegen kann das Differenzengleichungssystem stets in die Form der Zustandsgleichungen gebracht werden:

$$\begin{cases} \underline{w}(n+1) = [A]\cdot\underline{w}(n) + \underline{B}\cdot x(n) \\ y(n) = \underline{C}\cdot\underline{w}(n) + D\cdot x(n) \end{cases}$$

$\underline{w}(n)$ ist der Vektor der Speicherausgänge (Zustandsvariablen) nach dem n-ten Abtastpunkt, $\underline{w}(n+1)$ ist der Vektor der Speichereingänge vor dem (n+1)-ten Abtastpunkt, x(n) und y(n) sind die Ein- und Ausgangswerte. [A] ist die Systemmatrix, $\underline{B}$ der Steuervektor, $\underline{C}$ der Beobachtungsvektor und D der Durchgangskoeffizient.

Zwei lineare Systeme werden als äquivalent definiert, wenn sie die gleiche Impulsantwort, bzw. die gleiche Uebertragungsfunktion besitzen [25]. Ein zu einem gegebenen System äquivalentes System kann durch eine Aehnlichkeitstransformation gefunden werden [10]. Man muss die Zustandsvariablen mit einer regulären Transformationsmatrix [T] multiplizieren

$$\underline{w}' = [T]\cdot\underline{w}$$

Die Systemmatrix [A'], den Steuervektor $\underline{B}'$ und den Beobachtungsvektor $\underline{C}'$ für den neuen Satz von Zustandsvariablen ist dann

$$[A'] = [T]^{-1}[A][T]\ ; \quad \underline{B}' = [T]^{-1}\underline{B}\ ; \quad \underline{C}' = \underline{C}\,[T]$$

Da unendlich viele reguläre Matrizen existieren, gibt es auch unendlich viele Systeme, die zu einem gegebenen System äquivalent sind. Es können immer äquivalente Systeme gefunden werden, die eine höhere Ordnung als das Originalsystem besitzen: Der Vektor der Zustandsvariablen muss zuerst durch die Einführung redundanter Zustände, die weder mit den Ein- und Ausgängen, noch mit den anderen Zustandsvariablen verkoppelt sind, erweitert werden. Es stellt sich daher die Frage, ob zu einem digitalen Filter ein äquivalentes System existiert, das eine kleinere Ordnung besitzt, d.h. ob ein Filter redundante Zustände besitzt, die eliminiert werden können. Bei gewissen Transformationsmatrizen kann eine Kalman'sche kanonische Systemdarstellung [24] erhalten werden. Das System kann dabei in vier Teilsysteme zerfallen, die in Fig. 1 dargestellt sind: ein beobachtbares und erreichbares (BE), ein erreichbares, aber nicht beobachtbares ($\bar{B}E$), ein beobachtbares, aber nicht erreichbares ($B\bar{E}$) und ein nicht beobachtbares und nicht erreichbares ($\bar{B}\bar{E}$) Teilsystem.

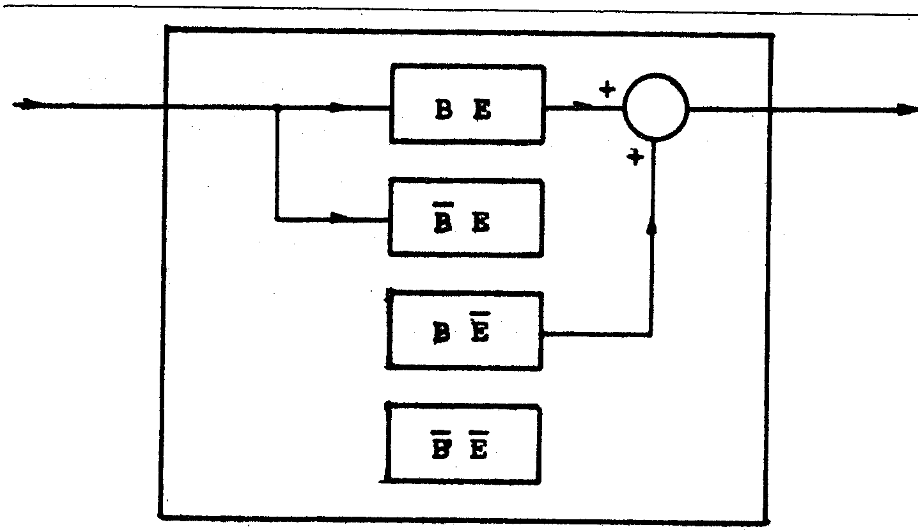

Fig. 1 Kalman'sche kanonische Systemdarstellung

Nur der erreichbare und beobachtbare Teil ist für uns interessant, da er allein die Impulsantwort bestimmt (und daher auch die Uebertragungsfunktion). Ein System, bei welchem alle Zustände erreichbar und beobachtbar sind, wird minimal genannt. Die minimalen Systeme besitzen die kleinste Ordnung - und daher die kleinste Anzahl Speicher - aller äquivalenten Systeme, die eine bestimmte Impulsantwort realisieren. Ein Filter ist sicher nicht minimal, falls der Zähler und der Nenner seiner Uebertragungsfunktion nicht teilerfremd sind, d.h. falls es Nullstellen und Pole besitzt, die sich aufheben. Von den minimalen Systemen sind diejenigen besonders interessant, die eine minimale Anzahl an Koeffizienten verschieden von 0 oder $\pm$ 1 brauchen, um alle rationale Uebertragungsfunktionen gegebener Ordnung zu realisieren. Solche Filterstrukturen sind in der Literatur häufig als kanonisch bezeichnet [14,25].[5]
Man braucht für ein kanonisches Filter mit N Nullstellen und N Polen N Speicher und 2N+1 Koeffizienten.
Wir werden jetzt einige wichtige Filterstrukturen besprechen.

2.1.1 Direkte Formen

Bei den direkten Formen sind die Filterkoeffizienten zugleich die Koeffizienten der Uebertragungsfunktion in rationaler Form, also die Koeffizienten des Ausdrucks

[5] Der Begriff "kanonisch" hat in der Mathematik eine recht vage Definition ("Ein Begriff unter einer Anzahl gleichartiger Begriffe heisst kanonisch, wenn er eine besonders grosse Bedeutung und eine besonders durchsichtige Gestalt hat", Der grosse Brockhaus 1955, Bd. 6, S. 216). Deshalb herrscht in der Literatur über digitale Filter eine ziemlich grosse Verwirrung über die Bedeutung dieses Begriffes: vergleiche z.B. [14] mit [11, 12] und [13].