Diss. Nr. 4527

Galois-Theorie für unendliche, rein-inseparable Körpererweiterungen vom Exponenten 1

ABHANDLUNG

zur Erlangung der Würde eines Doktors der Mathematik
der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZÜRICH

vorgelegt von

HANS ULRICH KUBLI
dipl. Math. ETH
geboren am 9. August 1940
von Netstal (Kt. Glarus)

Angenommen auf Antrag von
Prof. Dr. B. Eckmann, Referent
Prof. Dr. M.A. Knus, Korreferent

Juris Druck + Verlag Zürich
1971

Es genügt zu zeigen, dass in $\mathfrak{D}$ eine Derivation existiert, die auf $x_1, \ldots, x_{n-1}$ Null, auf x_n verschieden von Null ist.

V. Beweis des Lemmas IV.5

Beweis durch Induktion: Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich richtig. Sie sei richtig für $n = k$. Wir zeigen, dass in $\mathfrak{D}$ eine Derivation existiert, die $x_1, \ldots, x_k$ annulliert, und die auf x_{k+1} verschieden von Null ist. Wir nehmen an, dies sei nicht möglich. D.h. wir nehmen an, dass für jedes $D \in \mathfrak{D}$ mit $Dx_1 = Dx_2 = \ldots = Dx_k = 0$ auch $Dx_{k+1} = 0$ ist.

V.1 Hilfssatz: Seien $D_1, D_2, \ldots, D_k$ die nach Induktionsvoraussetzung in $\mathfrak{D}$ existierenden Derivationen, derart, dass $D_i x_j = \delta_{ij}$ ist, für $1 \leq i,j \leq k$. Sei D eine Derivation aus $\mathfrak{D}$ mit der Eigenschaft $[D,D_i]\, x_j = 0$ für $1 \leq i,j \leq k$.

Dann operiert jede Derivation von der Form $[[\ldots[D,D_{i_1}],D_{i_2}],\ldots,D_{i_m}]$, $(1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_m \leq k)$, trivial auf $x_1, \ldots, x_k$, und $D_1^{\nu_1} D_2^{\nu_2} \ldots D_k^{\nu_k} x_{k+1}$, $(\nu_i \geq 0,\ m \geq 1)$.

Beweis mit Induktion nach der Summe $\nu_1 + \ldots + \nu_k$.

Für $\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_k = 0$ ist die Behauptung evident, da jeder Klammerausdruck in $\mathfrak{D}$ liegt, nach Voraussetzung auf x_1, $x_2, \ldots, x_k$ verschwindet und daher auch auf x_{k+1} verschwindet.

Die Behauptung sei richtig für $\nu_1 + \ldots + \nu_k = s-1$. Sei nun die Exponentensumme s , und sei ν_j der erste von Null verschiedene Exponent unter den $\nu_1, \ldots, \nu_k$. Man erhält

$$[[\ldots[D,D_{i_1}], \ldots, D_{i_m}]\, D_j^{\nu_j} \ldots D_k^{\nu_k}\, x_{k+1} =$$

$$[[\ldots[D,D_{i_1}], \ldots, D_{i_m}], D_j]\, D_j^{\nu_j-1} D_{j+1}^{\nu_{j+1}} \ldots D_k^{\nu_k}\, x_{k+1}$$

$$+ D_j\, [[\ldots D,D_{i_1}], \ldots, D_{i_m}] D_j^{\nu_j-1}\, D_{j+1}^{\nu_{j+1}} \ldots D_k^{\nu_k}\, x_{k+1} \quad .$$

Die Terme auf der rechten Seite sind beide nach Induktionsvoraussetzung Null. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Korollar 1: D und alle D_i vertauschen miteinander auf den Elementen $x_1, \ldots, x_k$, $D_1^{\nu_1} \ldots D_k^{\nu_k}\, x_{k+1}$ $(\nu_1, \ldots, \nu_k \geq 0)$. Daher lässt sich speziell jedes Element $D_{i_1}^{\nu_1}\, D_{i_2}^{\nu_2} \ldots D_{i_k}^{\nu_k}\, x_{k+1}$ ersetzen durch $D_1^{\nu_{\sigma(1)}} \ldots D_k^{\nu_{\sigma(k)}}\, x_{k+1}$, wobei σ die Permutation $\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_k \\ 1 & \ldots & k \end{pmatrix}$ ist.

Korollar 2: Es gibt nur endlich viele $D_1^{\nu_1} \ldots D_k^{\nu_k}\, x_{k+1}$, da für $\nu_i = p$ gilt: $D_1^{\nu_1} \ldots D_i^p \ldots D_k^{\nu_k}\, x_{k+1} = D_1^{\nu_1} \ldots \widehat{D_i^p} \ldots D_k^{\nu_k}\, D_i^p\, x_{k+1}$. $D_i^p\, x_{k+1}$ ist Null, da D_i^p auf $x_1, \ldots, x_k$ verschwindet.

Korollar 3: Der von $x_1, \ldots, x_k$, $D_1^{\nu_1}\, D_2^{\nu_2} \ldots D_k^{\nu_k}\, x_{k+1}$, $(\nu_1, \ldots, \nu_k \geq 0)$, über Γ erzeugte Körper C wird von allen Derivationen D_i in sich abgebildet.

Korollar 4: Wenn $D \in \mathfrak{D}$ auf $x_1, x_2, \ldots, x_k$ Null ist, dann ist D auf ganz C Null.

D erfüllt ja die Voraussetzungen von Hilfssatz V.1 und vertauscht daher mit allen D_i $(i = 1, \ldots, k)$. Somit gilt

$$D D_1^{\nu_1} \ldots D_k^{\nu_k} x_{k+1} = D_1^{\nu_1} \ldots D_k^{\nu_k} D x_{k+1} = 0 \quad .$$

Zwei Derivationen aus $\mathfrak{D}$, die auf $x_1, \ldots, x_k$ übereinstimmen, stimmen daher auf C überein. Hieraus folgt, dass die Einschränkung $\mathfrak{D}_C$ von $\mathfrak{D}$ auf C als K-Vektorraum k-dimensional ist. Denn jede Derivation $D \in \mathfrak{D}$ stimmt nach dem Vorangehenden mit $\sum_{i=1}^{k} (Dx_i) D_i$ auf C überein. Ein Element $\xi \in C$, das von $D_1, \ldots, D_k$ annulliert wird, wird somit von allen $D \in \mathfrak{D}$ annulliert, liegt also in Γ .

Betrachten wir nun $D_1, \ldots, D_k$ als Derivationen beschränkt auf C . Nach Korollar 3 liegen $D_1, \ldots, D_k$ in $\mathrm{Der}_\Gamma C$. Die von diesen Elementen erzeugte restringierte C-Lie-Algebra $\tilde{\mathfrak{D}}_C$ bildet C in sich ab und wird als C-Vektorraum erzeugt von $D_1, \ldots, D_k$. Somit ist $\dim_C \tilde{\mathfrak{D}}_C = k$. Die k-dimensionale restringierte C-Lie-Algebra $\tilde{\mathfrak{D}}_C$ ist nach [2,4,6] gleich $\mathrm{Der}_{C_0} C$, wobei C_0 der Körper der $\tilde{\mathfrak{D}}_C$ -Konstanten ist. Es gilt $[C : C_0] = p^k$. Jedes Element aus C_0 wird von $D_1, \ldots, D_k$ annulliert, liegt in C und muss daher in Γ liegen, d.h. $C_0 = \Gamma$. Nun ist $\Gamma \subset \Gamma(x_1, \ldots, x_k) \subset C$ und

$$[C : \Gamma(x_1, \ldots, x_k)] \cdot [\Gamma(x_1, \ldots, x_k) : \Gamma] = [C : \Gamma] = p^k ,$$

also muss $C = \Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ sein. Da x_{k+1} nach

Konstruktion in C liegt, kann x_{k+1} nicht p-unabhängig von $x_1, x_2, \ldots, x_k$ über Γ sein. Mit diesem Widerspruch zur Voraussetzung ist das Lemma IV.5 bewiesen.