Der plastische Grenzzustand in der schiefen ebenen Erd- oder Schneeschicht

Author(s):
Kupper, Walter

Publication Date:
1967

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000087831

Diss. Nr. 3904

Der plastische Grenzzustand in der schiefen ebenen Erd- oder Schneeschicht

Abhandlung
zur Erlangung der Würde eines
Doktors der technischen Wissenschaften
der

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZÜRICH

vorgelegt von

WALTER KUPPER
dipl. Phys. ETH
geboren am 7. Januar 1938
von Wildberg, Kanton Zürich

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. Hans Ziegler, Referent
Prof. Dr. Walter Schumann, Korreferent

Basel
Buchdruckerei Birkhäuser AG
1967

Summary

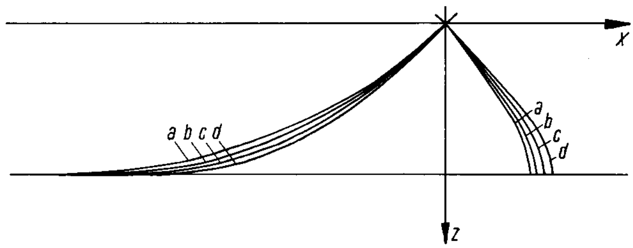
On the basis of recent articles by D. C. DRUCKER, W. PRAGER, R. T. SHIELD and H. ZIEGLER, the author establishes general relations for the state of plane flow in an idealized soil. A simple geometric interpretation of the relation between the stresses and the strain rates is given. The condition that the dissipation rate associated with an admissible state of motion cannot be negative is transformed into a new criterion, which in many cases facilitates the decision as to whether a state of motion is compatible with a prescribed state of stress or not. As an example, a study is made of the plastic state of an inclined plane layer. Particular emphasis is paid to a comparison of layers of equal inclination but of different cohesion and internal friction. Layers of variable density are also considered.

(Eingegangen: 12. Mai 1967)

Lebenslauf

Ich, WALTER KUPPER, wurde am 7. Januar 1938 in St. Gallen geboren. Die Schulen durchlief ich in der normalen Zeit in St. Gallen und ab 1953 in Zürich. Im September 1957 erhielt ich an der Kantonsschule Zürichberg das Maturitätszeugnis (Typus A). Hierauf trat ich in die Abteilung für Mathematik und Physik der Eidg. Technischen Hochschule ein und erwarb im Herbst 1962 das Diplom als Physiker (Experimentelle Richtung). Vom Wintersemester 1962/63 bis und mit Sommersemester 1965 war ich Assistent für technische Mechanik bei Herrn Prof. Dr. H. Ziegler. Seit Oktober 1965 leite ich ein physikalisches Labor der Firma Mettler Instrumente AG in Stäfa (ZH).

Die vorliegende Arbeit ist grösstenteils während meiner Assistentenzeit entstanden. Für die Anregung zu dieser Arbeit und für die wertvollen Ratschläge bin ich Herrn Prof. Dr. H. Ziegler zu grossem Dank verpflichtet.



Figur 25
Gleitlinien zu den Spannungsverteilungen von Figur 24 für den passiven Zustand; für den aktiven Zustand ist die x-Achse entgegengesetzt zu orientieren.

Der Nachweis eines kinematisch zulässigen Geschwindigkeitsfeldes, das mit der vollplastischen Spannungsverteilung verträglich ist, erfordert keine grundsätzlich neuen Überlegungen. Es sind hier ebenfalls die in den Abschnitten III.3 und III.4 genannten Lösungen möglich, und die dort gemachten Ausführungen können wörtlich übernommen werden.

Tabelle 24a
Resultierende Kraft pro Längeneinheit der y-Achse auf eine zur Fallinie normale Schnittfläche der Schicht für $\alpha = 45°$

Gradient von γ A	Querkraft $Q/\gamma_0 h^2 \cos\alpha$	passive Lösung Normalkraft $N/\gamma_0 h^2 \cos\alpha$	Angriffspunkt z_0/h	aktive Lösung Normalkraft $N/\gamma_0 h^2 \cos\alpha$	Angriffspunkt z_0/h
0	0,5000	$-2{,}0708$	0,4829	1,0708	0,3113
$2/3\ \gamma_0/h$	0,4445	$-2{,}0784$	0,4862	1,1895	0,3357
$4/3\ \gamma_0/h$	0,3890	$-2{,}0790$	0,4901	1,3009	0,3580
$2\ \gamma_0/h$	0,3333	$-2{,}0710$	0,4948	1,4050	0,3735

V. Schlussfolgerungen

Die Kapitel III und IV haben eine unendlich ausgedehnte Schicht auf schiefer ebener Unterlage behandelt. Die Annahme, dass auf das Material der Schicht die Fliesshypothese von Coulomb zutreffe, hat zur Konsequenz,

- dass die Schicht bei unbeschränkter Schichthöhe h im Gleichgewicht bleibt, falls ihr Neigungswinkel α kleiner ist als der Winkel φ der inneren Reibung,
- dass die Schicht sich beim Erreichen einer kritischen Höhe h an der Grenze des Gleichgewichts befindet, falls $\alpha > \varphi$.

Im zweiten Fall muss die Schicht der Höhe h mindestens an ihrer Sohle plastifiziert sein. In ihren höherliegenden Teilen kann die Schicht zwei Arten plastischen Spannungszustandes, aber auch Spannungszustände unterhalb der Fliessgrenze, aufweisen. Die zu den zwei plastischen Zuständen gehörenden hangparallelen Normalspannungen und Normalkräfte gemäss Figur 11 und 24 stellen die Grenzen des Intervalls dar, in welchem die Beträge von σ_x und N liegen müssen. Das Gleitlinienfeld gibt andrerseits Aufschluss über die Beschaffenheit eines kinematisch zulässigen Bewegungszustandes. Damit lässt sich nun im Prinzip die Aufgabe lösen, die Schicht durch zweckmässige Verbauungen am Abgleiten zu hindern.

Wird die Schicht mit der kritischen Höhe h und der mittleren Dichte γ_0 talwärts durch eine zur Fallinie normale Mauer aufgehalten, so beträgt nach (III.15) eine obere Schranke für den Betrag der hangparallelen Druckspannung $\sigma_x(z)$ auf die Mauer

$$| \sigma_x(z) | < \frac{\gamma_0 h}{\cos\alpha} \left(1 + \frac{z}{h} \sin^2\alpha\right) \tag{V.1}$$

und für den Betrag der resultierenden Druckkraft

$$| N | < \frac{\gamma_0 h^2}{\cos\alpha} \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2\alpha\right) . \tag{V.2}$$

Für das durchgerechnete Beispiel mit $\alpha = 45°$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 45°$ ist diese Schranke um weniger als 10% zu hoch.

Der Angriffspunkt von N liegt am höchsten über der Schichtsohle bei idealplastischem Material, nämlich im Abstand

$$h - z_0 = h \frac{\operatorname{ctg}\alpha + 3\pi - 4}{3(\operatorname{ctg}\alpha + \pi)} . \tag{V.3}$$

Somit beträgt die obere Schranke für das statische Moment der Druckkraft pro Längeneinheit der Mauer, bezogen auf den Fuss der Mauer

$$| M | < \frac{\gamma h^3}{\cos\alpha} \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2\alpha\right) \frac{\operatorname{ctg}\alpha + 3\pi - 4}{3(\operatorname{ctg}\alpha + \pi)} . \tag{V.4}$$

Diese obere Schranke der Beanspruchung kann als Anhaltspunkt für die Dimensionierung von Verbauungen dienen, welche eine Schicht der Höhe h auf einer schiefen ebenen Unterlage am Abgleiten hindern sollen[4]). In einer in Richtung der Fallinie unendlich lang angenommenen Schicht kann jedoch ein einziges Hindernis diese Aufgabe nicht erfüllen. Das Material kann immer noch gemäss Figur 18 darüber hinwegströmen. Diese Gefahr besteht auch bei beschränkter Länge der Schicht, falls unsere idealisierten Annahmen nicht völlig zutreffen (z. B. bei Unebenheiten der Unterlage). Die grösste Länge, die ein Schichtabschnitt haben darf, damit er auch unter ungünstigsten Voraussetzungen nicht über das Hindernis hinwegströmt, wurde von H. ZIEGLER [1] für den idealplastischen Fall aufgrund folgender Überlegung berechnet:

Damit sich oberhalb des Hindernisses ein plastifiziertes Gebiet C (vgl. Figur 17) ausbilden kann, muss das Material auch längs II^* durch hangparallele Druckspannungen plastifiziert sein. Nimmt man als ungünstigsten Fall denjenigen an, wo der Schichtabschnitt A auf der Unterlage reibungsfrei gleitet, so ist die ungefähre Länge l von A dadurch gegeben, dass die hangparallele Komponente des Gewichtes von A gleich der Normalkomponente N der vollplastischen Beanspruchung sein muss, damit das Material längs II^* plastifiziert sein kann, somit

$$\gamma h l \sin\alpha = N . \tag{V.5}$$

Vergleicht man die Beträge für die Normalkraft N der passiven Lösung in den Tabellen 11a und 24a, so fällt auf, wie wenig der Betrag von N sowohl von φ als auch

[4]) Es braucht sich übrigens dabei nicht notwendigerweise um eine zur Fallinie normale Mauer zu handeln. Die Lösung für das Überströmen der Mauer gemäss Figur 18 gilt ebenso für ein längs einer Niveaulinie verlaufendes Hindernis der Höhe h mit beliebig geformtem Querschnitt, sofern nur dessen Umriss das Gebiet C nicht anschneidet.

vom Gradient des spezifischen Gewichtes A abhängt. Der Wert für ein idealplastisches Medium von konstanter Dichte darf daher als gute Näherung angenommen werden, solange sich das betrachtete Material nicht stark einem idealen Sand nähert. Formel (III.12), worin wir $\varphi = 0$ setzen, liefert den von H. ZIEGLER angegebenen Wert

$$| N | = \gamma h^2 \frac{\sin\alpha}{2} (\operatorname{ctg}\alpha + \pi) = \frac{k h}{2} (\operatorname{ctg}\alpha + \pi) \tag{V.6}$$

und damit

$$l = \frac{h}{2} (\operatorname{ctg}\alpha + \pi) . \tag{V.7}$$

Bei der Länge s des vollplastischen Gebietes C ist man mit dem Wert aus der idealplastischen Berechnung mit konstanter Dichte weitgehend auf der sicheren Seite, somit hat man nach (IV.13)

$$s = x_{II} - x_I = h \pi . \tag{V.8}$$

Die Berücksichtigung der inneren Reibung führt im passiven Fall immer auf eine grössere Länge s dieses Gleitliniendreiecks, die Annahme einer beschränkt variablen Dichte auf eine nur unwesentlich kleinere (vgl. Figur 12 und 25). Es zeigt sich somit, dass die von H. ZIEGLER gemachte Abschätzung der Höchstdistanz zwischen den Hindernissen

$$d = \frac{h}{2} (\operatorname{ctg}\alpha + 3\pi) \tag{V.9}$$

gegenüber den Annahmen einer variablen Dichte sowie einer inneren Reibung weitgehend invariant ist, solange man sich nicht stark einem sandartigen Medium nähert. Dies ist keineswegs selbstverständlich; denn wären wir umgekehrt von einem idealen Sand ausgegangen, so hätten wir festgestellt, dass die Ergebnisse jenes durch $c = 0$ charakterisierten Grenzfalles sich gegenüber der Annahme einer nur geringen Kohäsion ausgesprochen kritisch verhalten.

LITERATURVERZEICHNIS

1. Im Text zitierte Literatur

[1] H. ZIEGLER, *Methoden der Plastizitätstheorie in der Schneemechanik*, Z. angew. Math. Phys. *14*, 713–737 (1963).

[2] H. ZIEGLER, *Mechanik I* (Birkhäuser-Verlag, Basel 1960).

[3] R. T. SHIELD, *Mixed Boundary Value Problems in Soil Mechanics*, Q. appl. Math. *11*, 61–75 (1953).

[4] D. C. DRUCKER und W. PRAGER, *Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design*, Q. appl. Math. *10*, 157–165 (1952).

[5] W. PRAGER, *Probleme der Plastizitätstheorie* (Birkhäuser-Verlag, Basel 1955).

[6] V. V. SOKOLOVSKII, *Statics of Granular Media* (Pergamon Press, Oxford 1965).

[7] A. CAQUOT und J. KERISEL, *Traité de mécanique des sols* (Gauthier-Villars, Paris 1956).

2. Ausserdem beigezogene Literatur

K. TERZAGHI, *Theoretische Bodenmechanik*, übersetzt von R. Jelinek (Springer-Verlag, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1954).

D. C. DRUCKER, *Limit Analysis of Two and Three Dimensional Soil Mechanics Problems*, J. Mech. Phys. Solids *1*, 217–226 (1953).