

Prom. Nr. 3180

**Analogieverfahren zur Bestimmung
von magnetischen Feldern
in nichtlinearen nichtisotropen Medien**

Von der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN
HOCHSCHULE IN ZÜRICH

zur Erlangung
der Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften
genehmigte

PROMOTIONSARBEIT

vorgelegt von

PETER TSCHOPP

dipl. El.-Ing. E. T. H.

von Leukerbad (VS)

Referent: Herr Prof. Dr. M. J. O. Strutt

Korreferent: Herr P.-D. Dr. A. P. Speiser

Juris-Verlag Zürich

1961

Leer - Vide - Empty

Inhaltsverzeichnis

	Seite
VORWORT	
1. EINLEITUNG	9
1.1. Allgemeines	9
1.1.1. Bisherige Methoden	9
1.1.2. Grenzen der bisherigen Methoden	10
1.2. Differentialgleichungen für das magnetische Potential	10
1.2.1. Das Skalarpotential	10
1.2.2. Das Vektorpotential	11
1.3. Spezielle Eigenschaften des magnetischen Feldes bzw. der magnetischen Materialien	14
1.3.1. Nichtlinearität des magnetischen Mediums	14
1.3.2. Magnetische Hysterese	15
1.3.3. Nichtisotropie	16
1.3.4. Streuflussbildung	16
1.3.5. Feldlinien-Brechungsgesetz	16
1.3.6. Analytische Darstellung der magnetischen Kennlinie	18
2. GRAPHISCHES VERFAHREN ZUR BESTIMMUNG VON MAGNETISCHEN FELDERN BEI OERTLICH VARIABLER PERMEABILITAET	20
2.1. Allgemeines	20
2.2. Grundlagen	21
2.2.1. Allgemeines	21
2.2.2. Anwendung auf Kreisring	23
2.2.3. Anwendung auf Winkelprofil	28
2.3. Erweiterung des Verfahrens	35
3. ELEKTRISCHE ANALOGIENETZWERKE ZUR BESTIMMUNG MAGNETISCHER FELDER	37
3.1. Allgemeines	37
3.1.1. Bisherige Arbeiten	37
3.1.2. Prinzip der elektrischen Analogie	38

3.2. Analogie mit einem Netz aus variablen Widerständen	38
3.2.1. Ableitung der Analogie	38
3.2.2. Eindimensionaler Fall	43
3.2.3. Ausführung, Anwendung, Eigenschaften	45
3.3. Analogie mit einem Netz aus konstanten Widerständen und zusätzli- chen Einspeiseströmen	47
3.3.1. Ableitung der Analogie	47
3.3.2. Eindimensionaler Fall	48
3.3.3. Ausführung, Anwendung, Eigenschaften	50
3.3.4. Automatisierung des Iterationsprozesses	50
3.4. Analogie mit einem Netz aus Induktivitäten	51
3.4.1. Konstante und gesteuerte Induktivitäten	51
3.4.2. Feldabhängige Induktivitäten	52
3.5. Vergleich der verschiedenen elektrischen Analogien	55
4. DAS ANALOGIENETZWERK MIT KONSTANTEN WIDERSTAENDEN UND ZUSAETZLICHEN EINSPEISESTROEMEN	56
4.1. Randwerte, Randabschlüsse, Uebergänge	56
4.1.1. Randwerte	58
4.1.2. Randabschlüsse	60
4.1.3. Zusammenschaltung von Abschnitten verschiedener Maschenweite	62
4.1.4. Simulierung eines unendlich ausgedehnten Feldes	63
4.2. Genauigkeit der Netzwerkmethod	65
4.2.1. Fehler durch endliche Maschenweite	65
4.2.2. Fehler durch Widerstandstoleranzen	68
4.2.3. Externe Fehler	86
4.3. Reduzierte Einspeisung	88
4.4. Stabilität und Konvergenz	89
4.5. Beschreibung des Netzwerkes	91
4.5.1. Aufbau des eigentlichen Netzwerkes	91
4.5.2. Stromeinspeisanlage	92
4.5.3. Verwendete Instrumente	93

5. ANWENDUNGEN AUF MAGNETISCHE FELDPROBLEME	94
5.1. Eindimensionaler Fall	94
5.2. Das rechtwinklige Winkelprofil	97
5.2.1. Allgemeines	97
5.2.2. Berechnung des Profils	97
5.2.3. Schenkellänge und Maschenweite für die Nachbildung	108
5.2.4. Nachbildung und Messungen	111
LITERATURVERZEICHNIS	120
LEBENS LAUF	

Abkürzungen, Symbole, Einheiten

Sämtliche Einheiten sind im rationalisierten Giorgi - Kalantaroffschen Masssystem angegeben. Die verwendeten Symbole und Abkürzungen stimmen durchwegs mit den Empfehlungen

"Regeln und Leitsätze für Buchstabensymbole und Zeichen"
SEV-Publ. Nr. 192 df, 2. Aufl. Zürich 1953

des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins überein.

Leer - Vide - Empty

VORWORT

Die bisher bekannten Methoden zur Behandlung magnetischer Feldprobleme sind lediglich dann anwendbar, wenn die Inhomogenitäten des magnetischen Feldes ausschliesslich aus vollkommen permeablen Körpern bestehen. Im Gegensatz hierzu werden in der vorliegenden Untersuchung erstmals Verfahren beschrieben, welche die Lösung der Poisson'schen Differentialgleichung

$$\nabla^2 V_m + \frac{1}{\mu} (\text{grad } \mu \cdot \text{grad } V_m) = 0$$

des magnetischen Potentials V_m für beliebige geometrische Konfigurationen und beliebige Randbedingungen ermöglichen. Gleichzeitig soll diese Arbeit auch einen Beitrag zur allgemeinen Theorie der Analogienetzwerke liefern: Erstens indem die Lösbarkeit der obigen Differentialgleichung mittels eines elektrischen Analogienetzwerkes bis heute anscheinend nicht bekannt war und zweitens durch Behandlung einiger spezieller Fragen dieser Theorie.

Die Anregung zu dieser Untersuchung verdanke ich meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. sc. techn. Dr. ing. h. c. M. J. O. Strutt. Unter seiner Leitung entstand die Arbeit; seine stete Unterstützung, seine wertvollen Ratschläge und seine aufbauende Kritik haben daran grossen Anteil. Ebenso gilt mein Dank Herrn Privatdozent Dr. sc. techn. A. P. Speiser für die freundliche Uebernahme des Korreferats. Schliesslich danke ich auch der Direktion des Aluminium-Fonds Neuhausen, welche durch die notwendige finanzielle Unterstützung die Arbeit ermöglichte.

Zürich, im Juli 1961

Peter A. Tschopp

Leer - Vide - Empty

1. EINLEITUNG

1.1. Allgemeines

Infolge seiner vielfältigen Anwendungen in der Technik beanspruchte das magnetische Feld von jeher einen wichtigen Platz in der Elektrodynamik. Die genaue Kenntnis der differentiellen Struktur magnetischer Felder war daher bald ein dringendes Problem. Neben den klassischen Anwendungen in Elektromotoren, Generatoren, Transformatoren und Kleingeräten wie Relais, Messinstrumenten, elektroakustischen Apparaten usw. ergaben sich in jüngerer Zeit neue Anwendungen und damit neue Probleme: moderne Hochleistungs-Magnetronröhren, Massenspektrographen, Magnetsysteme und Ablenkeinheiten für Partikel-Beschleuniger (Cyclotron usw.), Labormagnete für das Studium von plasmaphysikalischen Fragen u. a. m.

1.1.1. Bisherige Methoden

Die bis anhin bekannten Methoden zur Lösung von magnetischen Feldproblemen können etwa grob in mathematische und in graphische Verfahren aufgeteilt werden.

Der Vorteil der graphischen Verfahren liegt in ihrer Anschaulichkeit, ihrer Leistungsfähigkeit in Fällen, wo die mathematischen Methoden versagen, und nicht zuletzt in ihrem didaktischen Werte. Als Nachteil ist hauptsächlich der prinzipielle Mangel an Einsicht in allgemeine Gesetzmässigkeiten zu nennen, wie diese eben nur die mathematische Analyse zu vermitteln vermag.

Bei den mathematischen Verfahren stehen für die Lösung der Differentialgleichung des magnetischen Potentialfeldes verschiedene Methoden und Hilfsmittel zur Verfügung. Ein erstes dieser Hilfsmittel ist die Wahl des zweckmässigsten Koordinatensystems unter den krummlinigen orthogonalen Koordinaten wie Zylinderkoordinaten, Kugelkoordinaten oder eines der drei auf der Basis zweier ebener, orthogonaler Kreisbüschel gebildeten Systeme (bipolare, toroidale, dipolare-bisphärische Koordinaten). Für die Lösung ebener Probleme dienen verschiedene komplexe Potentialfunktionen der Funktionentheorie und speziell die konforme Abbildung mit der beinahe universell verwendbaren Schwarz-Christoffelschen Abbildungsformel. Für räumliche Felder schliesslich gelangt der in den Greenschen Sätzen enthaltene Lösungsformalismus zur Anwendung. Für die Randwertaufgaben wird dabei hauptsächlich die Methode der Partikulärlösungen benutzt¹⁾.

1.1.2. Grenzen der bisherigen Methoden

Die bekannten analytischen Methoden beschränken sich auf die Lösung der homogenen oder inhomogenen Laplaceschen Differentialgleichung für Potentialfelder, in denen sich die Materialbeschaffenheit nur sprunghaft ändert. Zusätzlich setzen sie voraus, dass die magnetischen Medien eine konstante und gegenüber der umgebenden Luft sehr grosse (unendliche!) relative Permeabilität aufweisen. Mit andern Worten: die Inhomogenitäten des magnetischen Potentialfeldes dürfen nur aus vollkommen permeablen Körpern bestehen; von den für die technischen Magnetmaterialien charakteristischen Eigenschaften der Nichtlinearität, der Nichtisotropie und der Hysterese muss somit abgesehen werden. Dennoch sind mit den mathematischen Methoden eine Vielzahl von Problemen in auch für die Praxis befriedigender Weise zu lösen^{1), 2)}.

Den prinzipiell gleichen Einschränkungen unterliegen die bisher bekannten graphischen Verfahren, wie sie etwa von Th. Lehmann entwickelt wurden^{3), 4), 5)}, während durch ein etwas anderes Vorgehen O. Benedikt⁶⁾ zu einem Verfahren gelangt, welches in dieser Beziehung nur wenig vielseitiger ist.

1.2. Differentialgleichungen für das magnetische Potential

1.2.1. Das Skalarpotential

Zu untersuchen ist die differentielle Struktur des magnetischen Feldes in stromfreien Gebieten. Da die elektrische Stromdichte \vec{J} verschwindet, so muss nach der 1. Maxwell'schen Gleichung die magnetische Feldstärke \vec{H} wirbelfrei sein, d. h.

$$\text{rot } \vec{H} = 0 \quad (1)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gl. (1) lautet:

$$\vec{H} = - \text{grad } V_m \quad (2)$$

worin V_m die skalare Ortsfunktion des magnetischen Potentials bedeutet. Aus dem Zusammenhang zwischen der magnetischen Flussdichte (Induktion) \vec{B} und der magnetischen Feldstärke \vec{H} in seiner speziellen Form

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (3)$$

erhalten wir unter Berücksichtigung des Kontinuitätsgesetzes für die magnetische Flussdichte

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (4)$$

die Differentialgleichung für V_m durch Einsetzen der Gln. (2) und (3) in die Gl. (4):

$$\operatorname{div} [\mu (-\operatorname{grad} V_m)] = 0$$

oder, unter Beschränkung auf ein rechtshändiges Cartesisches Koordinatensystem:

$$\operatorname{grad} \mu \operatorname{grad} V_m + \mu \Delta V_m = 0 \quad (5)$$

Speziell für Felder mit einer skalaren konstanten Permeabilität μ gilt, dass $\operatorname{grad} \mu \equiv 0$ mit $\mu \neq 0$, so dass Gl. (5) in die Laplacesche Gleichung übergeht:

$$\Delta V_m = 0 \quad (6)$$

welche Gleichung sich direkt aus der Quellenfreiheit der magnetischen Feldstärke herleiten lässt gemäss

$$\operatorname{div} \vec{H} = \operatorname{div} (-\operatorname{grad} V_m) = 0$$

1.2.2. Das Vektorpotential

Im wirbelfreien Feld ($\operatorname{rot} \vec{H} = 0$) ist der Feldvektor \vec{H} als Gradient einer skalaren Ortsfunktion V_m darstellbar. Mit dem magnetischen Skalarpotential können damit nur stromfreie Gebiete beschrieben werden.

Zur Darstellung stationärer Magnetfelder beliebiger Art erhalten wir als Lösung der universell gültigen Kontinuitätsdifferentialgleichung (4) den Vektor \vec{V}_m , aus dem die Flussdichte \vec{B} nach

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{V}_m \quad (7)$$

abgeleitet wird. Gegenüber einer skalaren Ortsfunktion beim magnetischen Skalarpotential erhalten wir also deren drei für das Vektorpotential \vec{V}_m .

Aus den Gln. (3) und (7) und der 1. Maxwell'schen Gleichung

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad (8)$$

ergibt sich die Differentialgleichung für das magnetische Vektorpotential unter Annahme einer konstanten skalaren Permeabilität zu

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{V}_m = \mu \vec{J}$$

oder, bezogen auf ein rechtshändiges Cartesisches Koordinatensystem:

$$\Delta \vec{V}_m - \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{V}_m + \mu \vec{J} = 0 \quad (9)$$

Ist die Permeabilität μ im betrachteten Gebiet eine skalare Veränderliche, so ergibt sich aus den Gln. (3), (7) und (8) die Identität

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{V}_m) = \operatorname{rot} (\mu \vec{H})$$

aus welcher durch Entwickeln nach den Regeln der Vektorrechnung die Differentialgleichung

$$\Delta \vec{V}_m + \mu \left[\operatorname{rot} \vec{V}_m, \operatorname{grad} \frac{1}{\mu} \right] - \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{V}_m + \mu \vec{J} = 0 \quad (10)$$

für das Vektorpotential gefunden wird (die eckige Klammer steht für das Vektorprodukt). Diese Gleichung (10) soll zur Berechnung von \vec{V}_m dienen. Die Stromdichte \vec{J} kann mittels Gl. (8) aus \vec{H} gefunden werden. Ist \vec{J} aber gegeben, so muss für die Bestimmung von \vec{H} die Differential-Gl. (8) integriert werden. Ein allgemeiner Lösungsansatz ist Gl. (7) in Verbindung mit Gl. (10), welche \vec{V}_m mit \vec{J} verknüpft.

Das Integral von Gl. (7) ist jedoch nicht eindeutig, da \vec{V}_m noch einen als Gradienten einer beliebigen Funktion darstellbaren Summanden (infolge $\operatorname{rot} \operatorname{grad} F = 0$ für beliebiges F) enthalten könnte. Deshalb setzen wir zusätzlich voraus, dass das Vektorpotential selber quellenfrei sein soll

$$\operatorname{div} \vec{V}_m = 0 \quad (11)$$

und erhalten dann aus Gl. (9) die Differentialgleichung

$$\Delta \vec{V}_m + \mu \vec{J} = 0 \quad (12)$$

für Felder mit konstanter Permeabilität, während aus Gl. (10) die Beziehung

$$\Delta \vec{V}_m + \mu \left[\text{rot } \vec{V}_m, \text{grad } \frac{1}{\mu} \right] + \mu \vec{J} = 0 \quad (13)$$

für Felder mit variabler Permeabilität folgt. Letztere kann unter Berücksichtigung der Identität

$$\text{grad } \frac{1}{\mu} = -\frac{1}{\mu^2} \text{grad } \mu$$

auch in der Form

$$\Delta \vec{V}_m + \frac{1}{\mu} \left[\text{grad } \mu, \text{rot } \vec{V}_m \right] + \mu \vec{J} = 0 \quad (14)$$

geschrieben werden.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass die Gl. (12) genau der Poisson'schen Gleichung

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon} = 0$$

im elektrostatischen Fall entspricht, deren Lösung

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint \frac{\rho}{r} d(\text{Vol})$$

durch Vertauschen von $\frac{\rho}{\epsilon}$ mit $\mu \vec{J}$ formal auf die Gl. (12) ausgedehnt werden kann:

$$\vec{V}_m = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}}{r} d(\text{Vol}) .$$

Obwohl sich in einem Cartesischen Koordinatensystem das Vektorpotential in stromfreien Gebieten für zweidimensionale Probleme auf eine einzige Komponente reduziert, welche ihrerseits die Laplace'sche Gleichung erfüllt, so ist die Anwendung der üblichen Lösungsmethoden doch umständlich, weil aus dem Vektorpotential kein Gradientenfeld für die magnetische Feldstärke resultiert.

1.3. Spezielle Eigenschaften des magnetischen Feldes bzw. der magnetischen Materialien

Bei der Untersuchung von magnetischen Feldern in nichtlinearen und nichtisotropen Medien sind einige Aspekte besonders hervorzuheben. Dies sind die Nichtlinearität, die magnetische Hysterese, die Nichtisotropie und die Streuflussbildung sowie das Brechungsgesetz für die Feldlinien an einer Grenzfläche zwischen zwei Medien.

1.3.1. Nichtlinearität des magnetischen Mediums

Die Materialgleichung für das magnetische Medium setzt im allgemeinsten Fall die Flussdichte \vec{B} zur Feldstärke \vec{H} wie folgt in Beziehung:

$$\vec{B} = \mu_0 (\mathbf{T} \cdot \vec{H}) \quad (15)$$

worin μ_0 die Permeabilitätskonstante für das Vakuum ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ VsA}^{-1} \text{ m}^{-1}$) bedeutet und \mathbf{T} einen Tensor zweiter Stufe darstellt, dessen Komponenten in ziemlich komplizierter Weise von denjenigen von \vec{B} und \vec{H} abhängen.

Gehen wir auf den üblichen Spezialfall einer skalaren veränderlichen Permeabilität μ_r über, so ist

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (3)$$

Die relative Permeabilität μ_r ist nun aber eine Funktion von H , wobei der Zusammenhang zwischen B und H durch die Magnetisierungskennlinie $B(H)$ gegeben ist (Neukurve in Abb. 1).

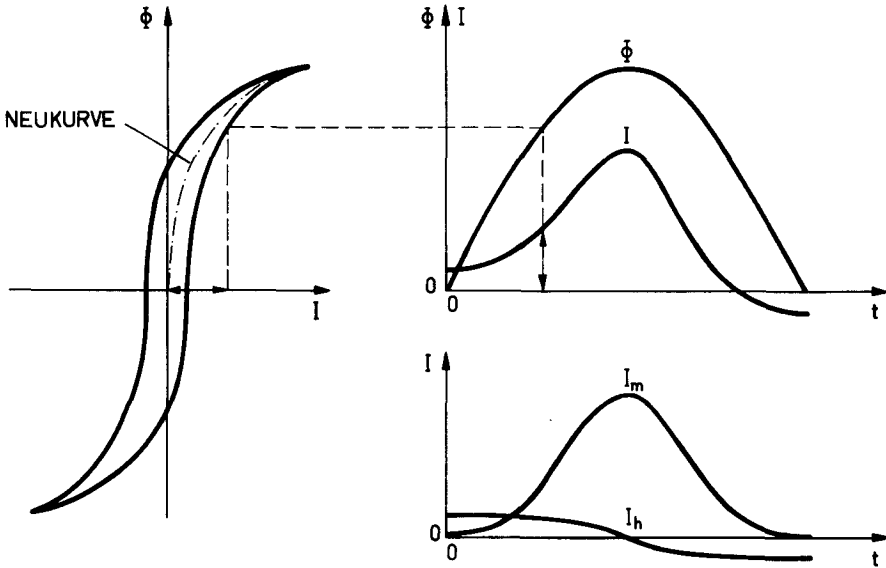


Abb. 1: Magnetisierungskurve und Magnetisierungsstrom-Zerlegung. Links Zusammenhang zwischen dem magnetischen Fluss Φ im magnetischen Medium und dem magnetisierenden Strom I , d. h. Magnetisierungsschleife $B(H)$ in anderem Masstab. Rechts $\Phi(t)$ und $I(t)$, sowie Zerlegung von I in den eigentlichen Magnetisierungsstrom I_m (der durch die Neukurve gegeben ist) und den Hystereseanteil I_h , der gegenüber I_m um $\pi/2$ voreilt.

1.3.2. Magnetische Hysterese

Bei zyklischer Magnetisierung des magnetischen Mediums gehören zu jedem H -Wert infolge der magnetischen Remanenz verschiedene Werte von B , d. h. die Flussdichte ist keine eindeutige Funktion der Feldstärke mehr; sie hängt vielmehr von der bei der vorhergehenden Magnetisierung zurückgebliebenen Remanenz ab. Der Zusammenhang zwischen B und H gehorcht dann der sog. Magnetisierungsschleife. Nehmen wir nach Abb. 1 einen einwelligen, sinusförmigen Fluss Φ an, so ergibt sich der stark verzerrte Magnetisierungsstrom I , dessen Nulldurchgänge gegen die des Flusses voreilen. Dieser Strom I kann in die Komponenten I_m und I_h zerlegt werden. I_m ist dann mit dem Fluss in Phase, I_h hingegen ist die durch die Hysterese bedingte,

um $\frac{\pi}{2}$ voreilende Komponente. Bei konstanter d. h. feldunabhängiger Permeabilität ist $B(H)$ eine Ellipse und die Neukurve eine Gerade. In diesem Falle entfällt die Verzerrung von I_m .

1.3.3. Nichtisotropie

Im Falle der Nichtisotropie ist die Permeabilität μ_r in einem bestimmten Feldpunkt nicht nur vom Betrag der dort herrschenden Feldstärke abhängig, sondern auch noch von deren Richtung, d. h. die Materialgleichung hat die Form der Gl. (15). Solche Medien sind z. B. die kaltgewalzten Magnetbleche für den Transformatorenbau. In zunehmendem Masse finden dort doppelt-kornorientierte Ni-Fe-Bleche mit Würfeltextur Eingang, während einfach-kornorientierte Fe-Si-Bleche mit Goss textur seit mehr als 10 Jahren in grossem Masstab verwendet werden. Für die Auswertung stehen bei diesen Blechen Magnetisierungskurven zur Verfügung in Abhängigkeit des Winkels α zwischen Walzrichtung und Magnetisierungsrichtung⁷⁾.

1.3.4. Streuflussbildung

In elektrischen Maschinen und Geräten wird der magnetische Fluss Φ durch die Verwendung von Magnetmaterialien in bestimmte Wege geführt, um die gewünschten Wirkungen zu erzielen. Infolge der endlichen Permeabilität des Materials gibt es jedoch Feldlinien, welche - besonders bei stark gesättigten Gebieten - den vorgeschriebenen Weg verlassen; diese bilden den Streufluss Φ_σ . Seine Kenntnis ist für die Berechnung der magnetischen Kennlinie $B(H)$ bzw. $\Phi(I)$ in den meisten Fällen notwendig, da die Erregung für den totalen Fluss Φ (Nutz- oder Hauptfluss Φ_h plus Streufluss Φ_σ) dimensioniert werden muss.

1.3.5. Feldlinien-Brechungsgesetz

An Grenzflächen zwischen 2 Medien verschiedener Permeabilität werden die magnetischen Feldlinien gebrochen. Fliessen in der Grenzfläche keine Ströme, so gelten für eine in dieser gelegene, geschlossene Kurve die Gln. (1) und (4) für die Wirbelfreiheit von \vec{H} bzw. die Quellenfreiheit von \vec{B} . Es folgt daraus, dass die Normalkomponenten von \vec{B} und die Tangentialkomponenten von \vec{H} entsprechend

$$B_{n1} = B_{n2} \quad (16)$$

$$H_{t1} = H_{t2}$$

stetig ineinander übergehen. Gemäss Gl. (3) bedingt dies Sprünge der Komponenten B_t und H_n nach den Beziehungen

$$B_{t1} : B_{t2} = \mu_1 : \mu_2 \quad (17)$$

$$H_{n1} : H_{n2} = \mu_2 : \mu_1$$

Aus (16) und (17) folgt gemäss Abb. 2 das Brechungsgesetz:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 : \operatorname{tg} \varphi_1 = \mu_2 : \mu_1 \quad (18)$$

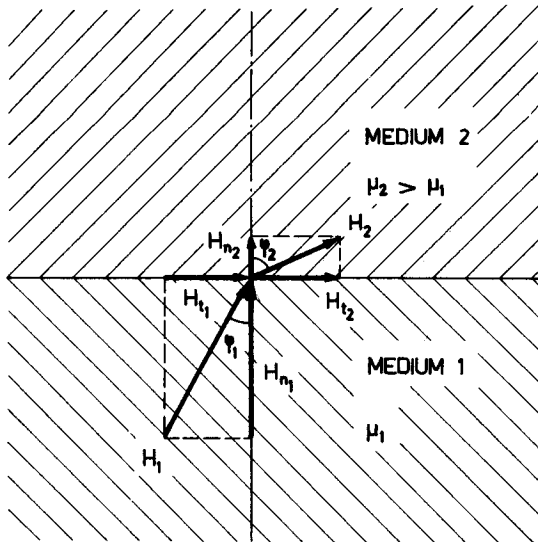


Abb. 2: Brechungsgesetz an einer Grenzfläche. Komponenten der magnetischen Feldstärke zwischen zwei Medien mit $\mu_2 : \mu_1 = 4$.

1.3.6. Analytische Darstellung der magnetischen Kennlinie

Im Laufe der Zeit sind ausserordentlich zahlreiche Versuche gemacht worden, um eine gegebene Magnetisierungskurve analytisch durch einen möglichst einfachen Ausdruck anzunähern. Verschiedene dieser Ausdrücke werden heute verwendet. So kann nach Fröhlich geschrieben werden:

$$B = \frac{H}{a + bH} \quad (19)$$

wobei a und b aus 2 Punkten der Magnetisierungskurve berechnet werden. Den verwandten Ausdruck

$$B = B_0 \cdot \exp\left(\frac{H}{a + bH}\right) \quad (20)$$

schlägt A. Köpse⁸⁾ vor. Gemäss einer Zusammenstellung von J. Fischer und H. Moser⁹⁾ ergeben sich wohl als für viele Zwecke am brauchbarsten Ausdrücke der Form

$$B = a + bH^m + cH^n \quad (21)$$

mit aus der Magnetisierungskennlinie zu berechnenden Werten a , b , c , m und n . Beispiele für die Formel (21) finden sich etwa in⁷⁾.

Mit allen diesen Formeln wird jeweils nur ein bestimmter interessierender Bereich der Magnetisierungskurve dargestellt, wobei dann allerdings bei entsprechender Wahl der Konstanten eine hohe Genauigkeit (z. B. 1%) erreicht werden kann.

Zur Darstellung des ganzen Verlaufs der magnetischen Kennlinie kann beispielsweise nach F. Ollendorff¹⁰⁾ die Beziehung

$$H = \alpha B + \beta B^3 \quad (22)$$

verwendet werden, während eine weitere Darstellungsmöglichkeit durch die Gleichung

$$B = B_0 \operatorname{Th}\left(\frac{H}{H_0}\right) \quad (23)$$

gegeben ist. Es ist einleuchtend, dass die erreichbare Genauigkeit bei diesen Ersatzdarstellungen meistens nur für grobe Näherungen ausreicht.

Die analytische Formulierung der Hystereseschleife ist sehr schwierig. Für den quasistationären Zustand, d. h. für gleichbleibende Aussteuerung kann man als erste Näherung eine Ellipse äquivalenten Flächeninhalts verwenden. Man setzt dann

$$\begin{aligned} H &= H_{\max} \cdot \cos(\omega t) \\ B &= B_{\max} \cdot \cos(\omega t - \varphi) \end{aligned} \quad (24)$$

worin die Phasenverschiebung φ von B gegen H der Hysteresewinkel ist. Man erhält dann den Zusammenhang

$$\frac{B}{B_{\max}} = \left(\frac{H}{H_{\max}} \right) \cos \varphi + \sqrt{1 - \left(\frac{H}{H_{\max}} \right)^2} \cdot \sin \varphi$$

mithin eine Ellipse mit dem Flächeninhalt A vom Betrag

$$A = H_{\max} B_{\max} \cdot \pi \sin \varphi . \quad (25)$$

Dies bedeutet, dass man den Hysteresewinkel φ durch Planimetrieren der Hystereseschleife B(H) erhalten kann.

2. GRAPHISCHES VERFAHREN ZUR BESTIMMUNG VON MAGNETISCHEN FELDERN BEI OERTLICH VARIABLER PERMEABILITAET

2.1. Allgemeines

Graphische Verfahren zur Bestimmung von magnetischen Feldern bei konstanter Permeabilität sind seit langem bekannt. Für die Praxis sind sie deshalb attraktiv, weil sie bei geringem Aufwand an Material und Zeit meist brauchbare Lösungen ergeben für Feldanordnungen, die sich einer analytischen Behandlung entziehen. Die Entwicklung der graphischen Verfahren für Magnetfelder nahm ihren Anfang durch die Arbeiten von Th. Lehmann^{3), 4), 5)}, die von mehreren Autoren wie R. Richter^{11), 12)} u. a. übernommen und in Einzelheiten weiterentwickelt wurden.

Prinzipiell handelt es sich um ein zunächst approximatives Unterteilen des Feldraumes durch Aequipotentiallinien (Niveaulinien) und dazu senkrechte Feldlinien. In weitem Schritten wird dann das erhaltene Feldbild korrigiert, bis das Verhältnis von Länge Δl zu Breite Δb eines jeden Flussröhrenabschnitts dasselbe ist. Es gilt dann:

$$\Delta \Phi = B_{\text{mittel}} \cdot \text{Fläche} = \mu_0 \frac{\Delta \theta}{\Delta l} \cdot \Delta b \cdot 1 \quad (26)$$

wenn $\Delta \Phi$ den Teilfluss bzw. $\Delta \theta$ die Teildurchflutung zwischen den 2 aufeinanderfolgenden Feldlinien bzw. Niveaulinien bedeutet, welche den betrachteten Flussröhrenabschnitt (mit der Tiefe 1) begrenzen. Der Einfachheit halber setzt man meistens $\Delta l = \Delta b$, sodass dann:

$$\Delta \Phi = \mu_0 \Delta \theta \quad (27)$$

Bei n Niveaulinien zwischen den Randlinien der magnetischen Leiter und m Flussröhren erhält man so für die totale Durchflutung θ bzw. den Gesamtfluss Φ die Größen:

$$\theta = (n+1) \Delta \theta \quad (28)$$

$$\Phi = m \mu_0 \Delta \theta$$

Dieses graphische Verfahren kann in einem weitem Sinne ebenfalls als Analogiemethode für die Feldbestimmung betrachtet werden. Dies gilt jedoch nicht mehr für

das in neuester Zeit von O. Benedikt⁶⁾ beschriebene graphische (von ihm "nomographisch" genannte) Verfahren. Durch die Zurückführung einer beliebigen geometrischen Konfiguration auf eine Serie- und Parallelschaltung von Einheitskörpern kann diese Methode aber über die klassische Bestimmung der magnetischen Potentialverteilung bei gegebener geometrischer Anordnung und gegebener Induktionsverteilung hinausgehen. Sie erlaubt nämlich, zwei beliebige dieser drei Grössen anzunehmen und daraus die dritte zu bestimmen, sobald einmal die entsprechende Schar von Charakteristiken berechnet ist. Diese Berechnung ist allerdings ziemlich umständlich und langwierig, besonders bei komplizierteren magnetischen Kreisen.

2. 2. Grundlagen

2.2.1. Allgemeines

In Ergänzung und Erweiterung der Lehmannschen Verfahren soll das magnetische Feld im Innern eines Ferromagnetikums bei beliebiger Geometrie bestimmt werden. Die Methode beruht auf der Zerlegung des zu untersuchenden Gebietes in einzelne Flussröhrenabschnitte. Zwischen der mittleren Länge Δl eines Abschnittes der Röhre und ihrer mittleren Breite Δb bzw. ihrem mittleren Querschnitt ΔA besteht dann ein aus der Magnetisierungskurve $B(H)$ folgender Zusammenhang, anhand dessen das Feldbild bestimmt werden kann.

Betrachtet man einen Feldröhrenabschnitt nach Abb. 3, so folgt aus den Gln. (2), (3) und den Beziehungen

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (29)$$

$$\theta = \int \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (30)$$

dass der Teilfluss $\Delta\Phi$ innerhalb der Flussröhre konstant ist gemäss

$$\Delta\Phi = B \cdot \Delta A = B \cdot \Delta b \cdot d = K_2 \quad (31)$$

wenn d die betrachtete Abmessung des Ferromagnetikums normal zur Zeichenebene bedeutet; ebenso ist nach

$$\Delta\theta = -\Delta V_m = H \cdot \Delta l = K_1 \quad (32)$$

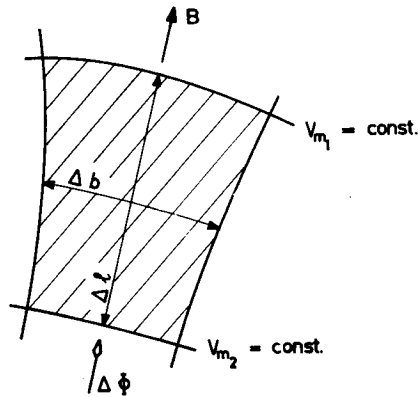


Abb. 3: Flussröhrenabschnitt mit dem Teilfluss $\Delta\Phi$ und der Teildurchflutung $\Delta\theta = V_{m1} - V_{m2}$

die Teildurchflutung $\Delta\theta$ zwischen 2 aufeinanderfolgenden Potentiallinien bzw. -flächen konstant. Die Grössen K_1 [A] und K_2 [Vs] beschreiben den Flussröhrenabschnitt und zusammen mit der Magnetisierungskurve den Feldverlauf. Aus den Gln. (31) und (32) folgt nun unter Berücksichtigung der Gl. (3) der Zusammenhang zwischen Δl und Δb zu

$$\Delta l = \frac{K_1}{H} = \mu \frac{K_1}{B} = \frac{K_1}{K_2} \cdot \Delta A$$

$$\Delta l = \mu \frac{K_1}{K_2} d \cdot \Delta b \quad (33)$$

worin speziell für die Permeabilität μ die Abhängigkeit

$$\mu = \mu(B) = \mu \left(\frac{K_2}{\Delta A} \right) \quad (34)$$

gilt, während K_1 und K_2 in bestimmten Grenzen frei wählbare Parameter darstellen.

2.2.2. Anwendung auf Kreisring

Als einfaches Anwendungsbeispiel betrachten wir einen Kreisringkern, von welchem ein Sektorausschnitt mit einem Zentriwinkel $\alpha = 10^\circ \cong \frac{\pi}{18}$ in Abb. 4 dargestellt ist. Der radial durchflossene Ring bestehe aus Si-Fe-Blech mit einer Dicke $d = 0,5 \text{ mm}$ und einer Verlustleistung von $1,7 \text{ Watt/kg}$, dessen Gleichstrom-Magnetisierungskurve in Abb. 5 und 6 gegeben ist. Aus der angenommenen Flussdichte

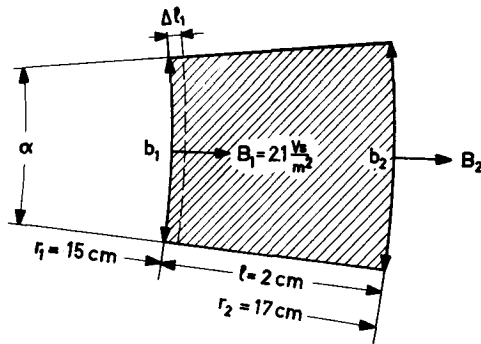


Abb. 4: Zur Anwendung der graphischen Methode auf einen radial durchflossenen Kreisring.

$B_1 = 2,1 \text{ Vsm}^{-2}$ für $r = r_1$, entsprechend einer Feldstärke $H_1 = 10,6 \cdot 10^4 \text{ Am}^{-1}$ (Abb. 5, 6) ergibt sich anhand Abb. 4 mit

$$b_1 = \frac{\pi}{18} r_1 = 2,618 \text{ cm}$$

$$b_2 = \frac{\pi}{18} r_2 = 2,965 \text{ cm}$$

für den Parameter K_2 der Wert

$$K_2 = \Delta \Phi_1 = B_1 \cdot \Delta A_1 = B_1 b_1 d$$

$$K_2 = 2,747 \cdot 10^{-4} \text{ Vs}$$

Die Länge Δl_1 des ersten Abschnittes nehmen wir zu

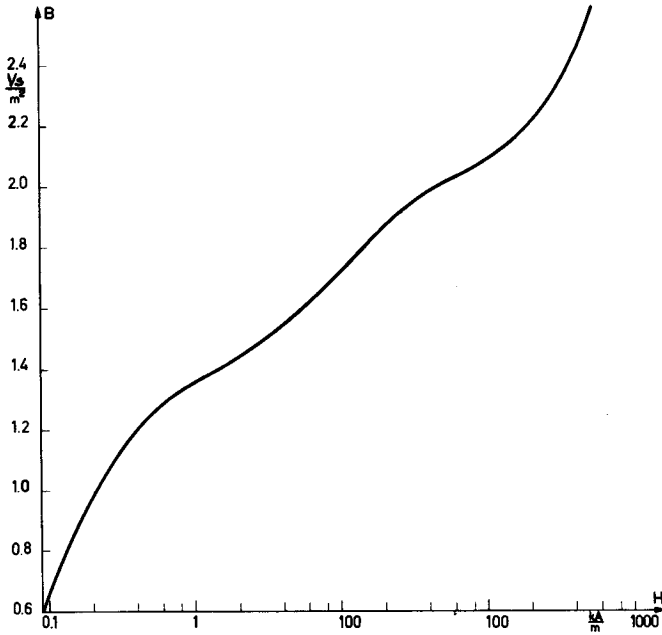


Abb. 5: Gleichstrom-Magnetisierungskurve für Fe-Si-Blech mit 1,7 Watt/kg Verlustleistung.

$$\Delta l_1 = \frac{1}{50} = \frac{r_2 - r_1}{50} = 0,4 \text{ mm}$$

an, wodurch der Parameter K_1 den Wert

$$K_1 = H_1 \cdot \Delta l_1 = 42,4 \text{ A}$$

erhält. Nun kann der Zusammenhang $\Delta l = \Delta l(b)$ nach folgendem Schema berechnet werden:

1. Annahme von b
2. Berechnen von $B = \frac{B_1 b_1}{b}$
3. Ablesen von $H(B)$ aus Abb. 5, 6
4. Berechnen von Δl nach der Beziehung

$$\Delta l = \mu \frac{K_1}{K_2} \Delta A = \frac{B}{H} \frac{K_1}{K_2} d \cdot b = K_1 \frac{\Delta \Phi_1}{K_2} \frac{1}{H} = \frac{K_1}{H}$$

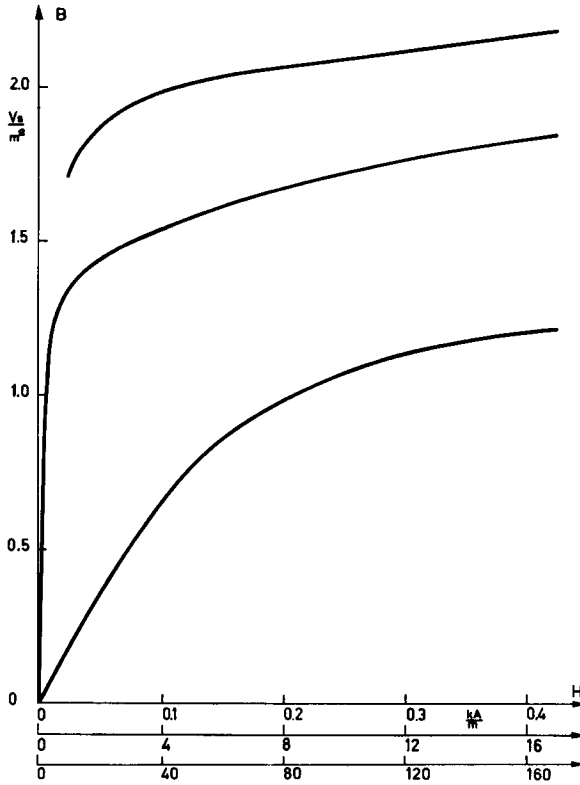


Abb. 6: Wie Abb. 5, aber mit linearem Masstab für H .

Die so berechneten Werte sind in der folgenden Tabelle 1 zusammengestellt und in Abb. 7 aufgetragen.

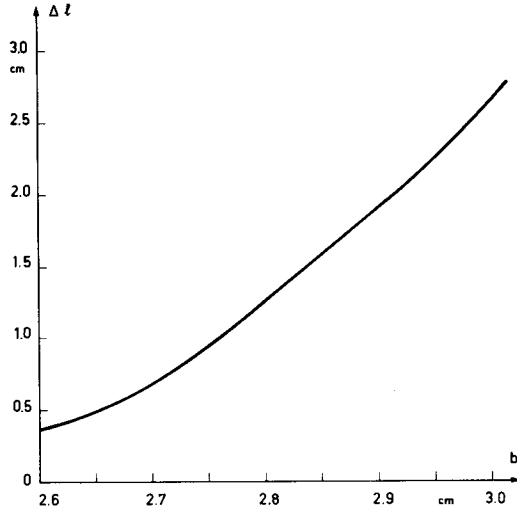


Abb. 7: Nichtlinearer Zusammenhang $\Delta l(b)$ für das kreisringförmige Si-Fe-Blech nach den Abb. 4 und 5 und für die Parameterwerte $K_1 = 42,4 \text{ A}$ und $K_2 = 2,747 \cdot 10^{-4} \text{ Vs}$.

Tabelle 1

b	cm	2,60	2,65	2,70	2,75	2,80	2,85	2,90	2,95	3,00
B	$\frac{Vs}{m^2}$	2,112	2,073	2,035	1,995	1,960	1,925	1,893	1,862	1,830
H	$10^4 \frac{A}{m}$	11,6	8,6	6,2	4,6	3,4	2,65	2,23	1,90	1,60
Δl	mm	0,365	0,493	0,6845	0,944	1,246	1,60	1,90	2,23	2,65

Die Auswertung geschieht dann gemäss der Beziehung

$$\Delta l \cdot H = \Delta l_1 \cdot H_1 = K_1$$

durch Aufteilen von l in einzelne Flussröhrenabschnitte mit in Richtung r konstanter

magnetischer Potentialdifferenz; dies ist in Abb. 8 durchgeführt. Dabei wird jeweils die mittlere Breite b jedes folgenden Elementes abgeschätzt, dann die dazugehörige Länge Δl des Abschnittes der Abb. 7 entnommen und in Abb. 8 aufgetragen. Wir erhalten total 21 Abschnitte; die gesamte Durchflutung beträgt damit

$$\theta = 21 \cdot K_1 = 890 \text{ A}$$

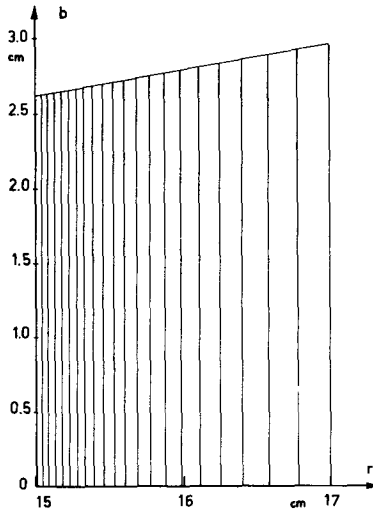


Abb. 8: Cartesische Darstellung $b=b(r)$ des Kreisringsektors nach Abb. 4 zur Aufsummierung der K_1 -Abschnitte.

Wird die Durchflutung aus dem linearen Mittelwert der Induktion berechnet, so ergibt sich (s. Abb. 4) mit $B_1 = 2,1 \text{ Vsm}^{-2}$ und

$$B_m = \frac{B_1 + B_2}{2} = \frac{B_1}{2} = \frac{B_1}{2} \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) = 1,976 \text{ Vsm}^{-2}$$

$$H_m = 3,9 \cdot 10^4 \text{ Am}^{-1} \quad (\text{aus Abb. 5, 6})$$

der Wert

$$\theta = H_m (r_2 - r_1) = 780 \text{ A}$$

was einer auf den Wert 890 A bezogenen Abweichung von -13% entspricht.

Bei Anwendung der Simpson'schen Regel erhält man die Durchflutung

$$\theta = \frac{H_1 + 4H_m + H_2}{6} (r_2 - r_1) = \frac{(10,6 + 4 \cdot 3,9 + 1,8) 10^4}{6} 2 \cdot 10^{-2} = 932 \text{ A}$$

d. h. eine bezogene Abweichung von +5%.

Schliesslich folgt bei Anwendung der doppelten Simpson'schen Regel mit

$B_1 = 2,1 \text{ Vsm}^{-2}$	$H_1 = 10,6 \cdot 10^4 \text{ Am}^{-1}$
$B_2 = 2,03$	$H_2 = 6,0 \cdot 10^4$
$B_3 = 1,97$	$H_3 = 3,65 \cdot 10^4$
$B_4 = 1,91$	$H_4 = 2,45 \cdot 10^4$
$B_5 = 1,855$	$H_5 = 1,80 \cdot 10^4$

für die Durchflutung der Wert:

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{H_1 + 4H_2 + H_3}{6} \left(\frac{r_2 - r_1}{2} \right) + \frac{H_3 + 4H_4 + H_5}{6} \left(\frac{r_2 - r_1}{2} \right) = 879 \text{ A}$$

oder eine bezogene Abweichung von -1,3%. Für den aus der graphischen Methode erhaltenen Wert von 890 A kann demnach eine Genauigkeit von rund 1% angenommen werden.

2.2.3. Anwendung auf Winkelprofil

Um das beschriebene graphische Verfahren an einer komplizierteren Geometrie zu demonstrieren, untersuchen wir das in Abb. 9 dargestellte Winkelprofil. Es bestehe aus demselben Si-Fe-Blech wie der Kreisring von Abb. 4 und habe eine Flussdichte $B_1 = 1 \text{ Vsm}^{-2}$ (entsprechend einer Feldstärke $H = 210 \frac{\text{A}}{\text{m}}$) im homogenen Teil, wo die Flussröhrenbreite Δb_1 zu $\frac{a}{8}$ und die Länge der ersten Abschnitte zu $\frac{b}{10}$ angenommen wird. Mit den aus diesen Daten resultierenden Werten

$$K_2 = B_1 \cdot \Delta A_1 = B_1 \cdot \Delta b_1 \cdot d = 6,25 \cdot 10^{-6} \text{ Vs}$$

$$K_1 = H_1 \cdot \Delta l_1 = H_1 \cdot \Delta l_1 (\Delta b_1) = 2,1 \text{ A}$$

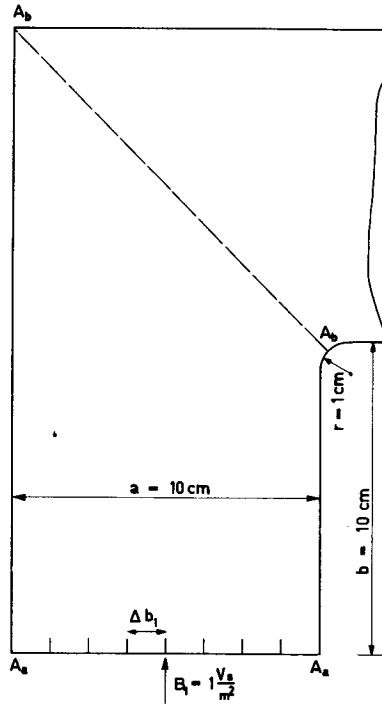


Abb. 9: Rechtwinkliges Winkelprofil aus Fe-Si-Blech nach den Abb. 5 und 6. Blechdicke $d = 0,5$ mm. Bezüglich des Schnittes A_b-A_b sei das Profil symmetrisch; im Schnitt A_a-A_a sei das Feld homogen.

für die Parameter wird nun der Zusammenhang $\Delta l(\Delta b)$ analog wie bei der Tabelle 1 berechnet; er ist in der Tabelle 2 zusammengefasst und in Abb. 10 aufgetragen.

Tabelle 2

Δb	mm	6	8	10	12,5	15	20	30	40	50
B	$\frac{V_s}{m^2}$	2,085	1,563	1,250	1,000	0,834	0,625	0,417	0,3125	0,250
H	$\frac{A}{m}$	$9,5 \cdot 10^4$	$4,63 \cdot 10^3$	500	210	144	94	59,5	43	34
Δl	mm	0,022	0,454	4,20	10	14,58	22,35	35,30	48,80	61,75

↑
angenommene Werte

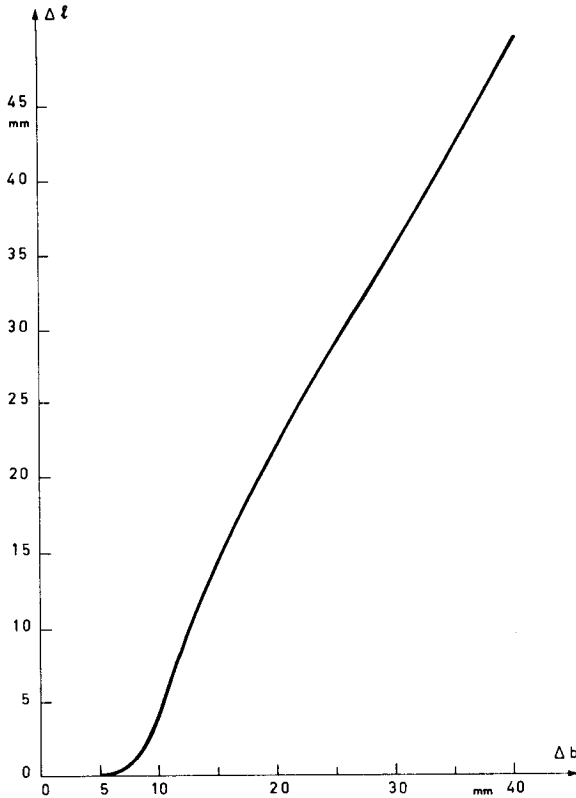


Abb. 10: Nichtlinearer Zusammenhang $\Delta l = \Delta l(\Delta b)$ für das Winkelprofil von Abb. 9 und für die Parameterwerte $K_1 = 2,1 \text{ A}$ und $K_2 = 6,25 \cdot 10^{-6} \text{ Vs}$.

Das Vorgehen zur Bestimmung der Feldlinien und der Potentiallinien ist nun iterativ. Die einzelnen Iterationsschritte sind dabei die folgenden:

Nullter Schritt: Aufteilen des Profils in $a/\Delta b_1 = 8$ Flussröhren durch Annahme von plausiblen Feldlinien (Abb. 11); diese stehen normal auf $A_a - A_a$ und $A_b - A_b$.

Erster Schritt: Unterteilen jeder Flussröhre anhand des Zusammenhangs $\Delta l = \Delta l(\Delta b)$ aus Abb. 10 in Abschnitte konstanter magnetischer Potentialdifferenz, beginnend im homogenen Bereich. Es resultieren Treppenfunktionen (Abb. 11) für V_m ; offenbar weicht die nullte Näherung vom wahren Feldverlauf ab.

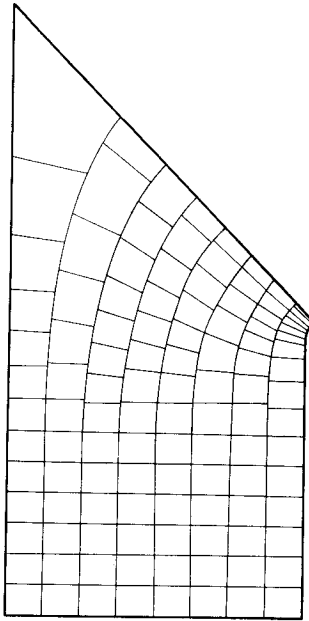


Abb. 11: Angenommene Feldlinien (nullter Iterationsschritt) und V_m -Treppenfunktion (erster Schritt).

Zweiter Schritt: Einzeichnen von Potentiallinien in Abb. 13 gemäss Abb. 12 als mittlere stetige Kurven der V_m -Treppenfunktionen aus Abb. 11. Die Potentiallinien stehen normal auf den Feldlinien und den Rändern A_a - A_b .

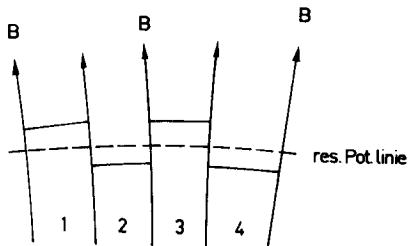


Abb. 12: Bestimmung der resultierenden stetigen Potentiallinie aus der Treppenfunktion für V_m .

Dritter Schritt: Einzeichnen von treppenförmigen B-Linien (8 Abschnitte gemäss Abb. 11) in Abb. 13 anhand der Funktion $\Delta l(\Delta b)$ aus Abb. 10.

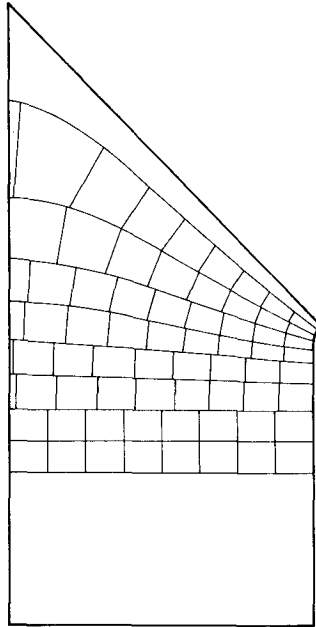


Abb. 13: Mittlere stetige Potentiallinien (zweiter Iterationsschritt) gemäss Abb. 12 aus der V_m -Treppenfunktion von Abb. 11 und treppenförmige B-Linien (dritter Schritt).

Vierter Schritt: Ausgleichen der B-Treppenfunktionen analog zum zweiten Schritt.

Weitere Schritte: Wiederholung der Schritte 1, 2, 3, 4, wobei die Sprünge in den Treppenfunktionen für V_m und B immer kleiner werden (Abb. 14, 15). Das iterative Verfahren wird abgebrochen, sobald die Treppensprünge in die Grössenordnung der Bleistift-Strichdicke gelangen.

Zweckmässig wird für das Aufzeichnen der fortlaufenden Schritte Null und Eins, Zwei und Drei, usw. Pauspapier benutzt, so dass das Einzeichnen der mittleren stetigen Kurven aus den Treppenfunktionen einfach wird. Abb. 16 zeigt den Feldverlauf nach Abbruch des Verfahrens. Die Durchflutung θ beträgt

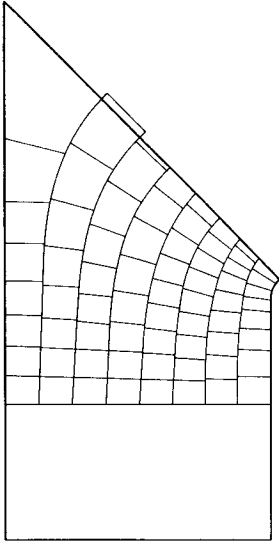


Abb. 14: Mittlere stetige B-Linien (vierter Schritt) und neue V_m -Treppenfunktionen (fünfter Schritt).

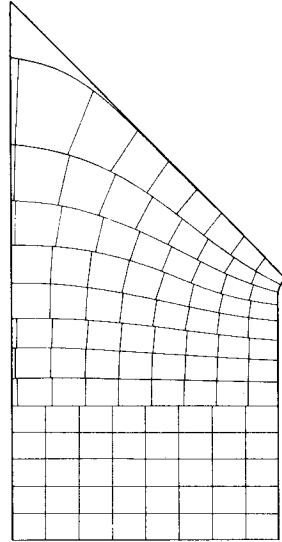


Abb. 15: Mittlere stetige Potentiallinien (sechster Schritt) und treppenförmige B-Linien (siebenter Schritt).

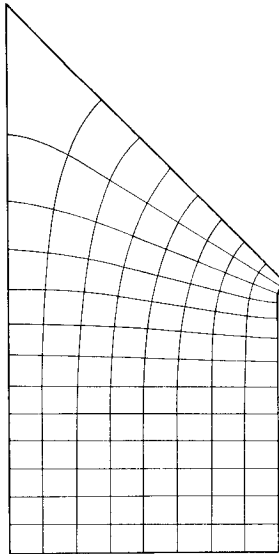


Abb. 16: Feldverlauf im Winkelprofil für einen Fluss $\Phi = 5 \cdot 10^{-5}$ Vs und eine Durchflutung $\theta = 27,3$ A (halbes Profil).

$$\theta = 13 \cdot K_1 = 27,3 \text{ A}$$

für das halbe Profil; mit dem totalen Fluss

$$\bar{\Phi} = \frac{a}{\Delta b_1} K_2 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Vs}$$

zusammen legt sie einen Punkt der magnetischen Kennlinie $\theta = \theta(\bar{\Phi})$ fest.

Der Feldverlauf kann auch mittels eines zweiten Iterationsverfahrens bestimmt werden. Dazu wird der zu untersuchende Bereich durch Feldlinien und Potentiallinien in plausibler Weise in Flussröhrenabschnitte aufgeteilt. Für jeden Abschnitt wird dann das Verhältnis $\Delta l / \Delta b$ berechnet und anhand der Abb. 10 festgestellt, ob und wie der betreffende Abschnitt geändert werden muss. Liegt der Punkt $(\Delta b, \Delta l)$ unterhalb der Kurve $\Delta l(\Delta b)$, so muss der Abschnitt schmaler und/oder länger gemacht werden. Liegt hingegen der Punkt $(\Delta b, \Delta l)$ oberhalb der Kurve, so ist der dazugehörige Abschnitt zu schmal und/oder zu lang. Dieses Iterationsverfahren wird in einzelnen Schritten so lange durchgeführt, bis der Zusammenhang $\Delta l(\Delta b)$ für jeden Abschnitt erfüllt ist. Wegen der gleichzeitigen doppelten Veränderung der Abschnitte gelingt es nun aber nur bei genügender Routine, mit diesem zweiten Verfahren ein bestimmtes Felddbild schneller zu bestimmen als mit dem 1. Iterationsverfahren.

Das beschriebene graphische Verfahren ist wohl sehr rasch, aber nicht übermässig genau. Sofern jedoch die Parameter K_1 und K_2 , d.h. die angenommenen Abmessungen Δl_1 bzw. Δb_1 dem zu bestimmenden Felddbild angepasst sind, kann der resultierende Fehler leicht innerhalb der Grenze von wenigen Prozenten gehalten werden. Dabei ist die durch die Annahme von Δb_1 und Δl_1 festgelegte Grösse der Flussröhrenabschnitte zweifach begrenzt: nach oben durch die erforderliche Genauigkeit und nach unten durch den Zeitaufwand für die Auswertung. In dieser Hinsicht bedingen starke Nichtlinearität und/oder komplizierte Ränder möglichst kleine Abschnitte, sodass für solche Probleme einige Mehrarbeit erforderlich ist. Weiterhin können starke Nichtlinearitäten das Iterationsverfahren zusätzlich verzögern, da bei den einzelnen Schritten überkorrigiert wird. Andererseits verschwinden gelegentliche Fehler, wie etwa falsches Ablesen von Δl oder Δb aus der Kurve $\Delta l(\Delta b)$ usw., im Laufe des Verfahrens durch den für diese Methode charakteristischen Ausgleichsprozess von selbst.

2.3. Erweiterung der Verfahrens

Das graphische Verfahren in seiner bisher beschriebenen Form eignet sich zur Bestimmung des magnetischen Feldes im Innern eines isotropen, nichtlinearen Mediums von beliebiger geometrischer Form. Eine Erweiterung des Verfahrens zum Einbezug der Nichtisotropie des Mediums ist ohne besondere Schwierigkeit möglich. Ist nämlich - wie dies für die technischen Werkstoffe üblich - die Magnetisierungskurve $B(H)$ in Funktion des Winkels α zwischen der Feldrichtung und einer bestimmten Bezugsrichtung (z. B. Walzrichtung bei kaltgewalzten Fe-Si-Blechen) gegeben, so muss dieser Winkel α als Parameter in die Darstellung $\Delta l = \Delta l(\Delta b)$ übernommen werden. Bei der Auswertung wird dann einfach das Wertepaar $(\Delta l, \Delta b)$ für einen bestimmten Feldröhrenabschnitt aus derjenigen Kurve $\Delta l(\Delta b, \alpha)$ bestimmt, die der mittleren Feldrichtung des betreffenden Abschnitts entspricht. Durch den unvermeidlichen Fehler bei der Bestimmung dieser Feldrichtung nimmt dabei die Genauigkeit des Verfahrens u. U. etwas ab.

Im Gegensatz zur Nichtisotropie bereitet der Einbezug des Streuflusses einige Schwierigkeiten. Dazu müssen erst einmal die Verhältnisse an einer Grenzfläche untersucht werden. Für die Bestimmung des Brechungsverhältnisses der Feldlinien gemäss Abschnitt 1.3.5 wird die Kenntnis der Permeabilitäten an der Grenzfläche vorausgesetzt; diese können aus den Abmessungen $\Delta l, \Delta b$ des betreffenden Feldröhrenabschnittes berechnet werden. Mit $\mu = \mu_0 \mu_r$ folgt nämlich aus der Gl. (33) der Zusammenhang

$$\mu_r = \left(\frac{K_2}{\mu_0 K_1 d} \right) \frac{\Delta l}{\Delta b} = k \frac{\Delta l}{\Delta b}$$

worin beispielsweise für das oben untersuchte Winkelprofil die dimensionslose Konstante k den Wert

$$k \approx 4,74 \cdot 10^3$$

annimmt. Für die Auswertung ist es vorteilhaft, statt der Funktion $\mu_r = \mu_r(\Delta l/\Delta b)$ die Zusammenhänge $\mu_r = \mu_r(\Delta l)$ und $\mu_r = \mu_r(\Delta b)$ anhand der Beziehung $\Delta l = \Delta l(\Delta b)$ zu berechnen und diese 2 Funktionen im Diagramm $\Delta l(\Delta b)$ aufzutragen. Für ein beliebiges Δl bzw. Δb im Zuge der Iteration kann dann neben dem entsprechenden Δb bzw. Δl das zugehörige μ_r auf derselben Ordinate bzw. Abszisse abgelesen werden.

Damit können beliebige magnetische Kreise aus der Hintereinanderschaltung von Medien verschiedener Permeabilität ohne weiteres behandelt werden.

Komplizierter werden die Verhältnisse erst, wenn die Parallelschaltung von verschiedenen Medien untersucht werden muss, wie dies bei der Bestimmung des Streuflusses in einem magnetischen Kreis (infolge der zum Eisenweg parallelen Luftstrecken) notwendig ist. Das oben beschriebene graphische Verfahren muss dann mit den bekannten zeichnerischen Methoden [3, 4, 5, 11, 12] unter Berücksichtigung der Verhältnisse an den Grenzflächen (Abschnitt 1.3.5) kombiniert werden. Für einfache geometrische Konfigurationen ist so eine Lösung bereits etwas kompliziert, doch durchaus noch durchführbar. Für kompliziertere Strukturen wird hingegen der Iterationsvorgang dermassen in die Länge gezogen, dass der notwendige Zeitaufwand bald eine vernünftige Grenze überschreitet. Deshalb wird hier nicht weiter auf Einzelheiten eingegangen, umso mehr als mit den später zu beschreibenden elektrischen Analogien Mittel zur Verfügung stehen, die diesem Problem besser angepasst sind.

Ebenfalls gestattet das beschriebene graphische Verfahren keine direkte Berücksichtigung der Hysterese. Doch wiegt dieser Nachteil weniger schwer, da bei gegebener Induktionsverteilung die durch die zyklische Magnetisierung des Materials bedingten Ummagnetisierungsverluste mittels einfacher Formeln berechnet werden können.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass diese für die Gleichung

$$\Delta V_m + \frac{1}{\mu} \text{grad } \mu \cdot \text{grad } V_m = 0 \quad (5)$$

des magnetischen Skalarpotentials V_m gefundene Lösung nicht allgemein auf die Behandlung der Poisson'schen Differentialgleichung

$$\Delta P + f(P) = 0 \quad (35)$$

erweitert werden kann. Auch in diesem Punkte reichen die elektrischen Analogieverfahren weiter.

3. ELEKTRISCHE ANALOGIENETZWERKE ZUR BESTIMMUNG MAGNETISCHER FELDER

3.1. Allgemeines

Elliptische partielle Differentialgleichungen sind die wichtigste Klasse von partiellen Differentialgleichungen in nahezu allen Gebieten der angewandten Physik. Zumindest vom Standpunkt des Ingenieurs überragen die Laplaceschen und Poissonschen Gleichungen dabei alle andern an Wichtigkeit, denn alle sog. Randwertprobleme sind aus Feldern gegeben, die durch diese beiden Gleichungstypen beschrieben sind. Es ist daraus verständlich, dass für die Lösung dieser Gleichungen neben analytischen und graphischen Verfahren auch numerische und verschiedene Analogiemethoden entwickelt wurden.

3.1.1. Bisherige Arbeiten

Die Möglichkeit, mittels elektrischer Impedanznetzwerke gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen zu lösen, wurde erstmals in grösserem Masstab in den Jahren 1939 ... 1945 von G. Kron^{13), 14)} hauptsächlich am Beispiel der Wellengleichungen aufgezeigt. In den Zeitraum 1949 ... 1956 fallen die zahlreichen Arbeiten von G. Liebmann über die Anwendung dieser Methode auf viele Probleme der Physik und Technik; ihm kommt zweifellos das Verdienst zu, diese Analogieverfahren zu dem vielseitigen und genauen Instrumente gemacht zu haben, das sie heute darstellen.

Mit der Lösung der Laplaceschen und der Poissonschen Differentialgleichung befassten sich zuerst 1947 D. C. De Packh¹⁵⁾ und 1948 S. C. Redshaw¹⁶⁾, später G. Liebmann^{17), 18)}, R. Hechtel¹⁹⁾ und G. Čremošnik²⁰⁾; umfangreiche Literaturangaben über diese frühern Veröffentlichungen finden sich in den zusammenfassenden Arbeiten von W. W. Soroka²¹⁾ und W. J. Karplus²²⁾. Daneben bewiesen hauptsächlich G. Čremošnik^{20), 23)} und M. J. O. Strutt²³⁾, dass eindimensionale, der Poissonschen Differentialgleichung gehorchende Potentialfelder mittels einfacher Widerstandketten untersucht werden können.

3.1.2. Prinzip der elektrischen Analogie

Die durch die Differentialgleichungen beschriebenen Felder im physikalischen Raume zeichnen sich aus durch eine kontinuierliche Verteilung der Feldgrößen und Feldparameter. Für die Darstellung eines solchen Feldes durch ein Netzwerk aus diskreten elektrischen Elementen muss deshalb die Differentialgleichung durch eine Differenzgleichung approximiert werden, damit der "physikalische Raum" mit dem "elektrischen Raum" in Übereinstimmung gebracht werden kann, d. h. das physikalische Feld wird diskretisiert durch Aufteilen in endliche Raum- bzw. Flächenelemente. Die Feldwerte werden dann in einzelnen diskreten Maschenpunkten approximiert; der durch diese Annäherung entstehende Fehler muss durch entsprechende Wahl der Maschenweite innerhalb zulässiger Grenzen gehalten werden.

Für magnetische Felder in stromfreien Gebieten mit den Beziehungen

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0 \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

wird dabei durch die entsprechenden Gleichungen

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad \operatorname{div} \vec{J} = 0 \quad \vec{J} = \gamma \vec{E}$$

eine Analogiebeziehung zu dem stationären elektrischen Strömungsfeld hergestellt; hierauf basieren alle in der Folge abgeleiteten Analogieverfahren.

3.2. Analogie mit einem Netz aus variablen Widerständen

3.2.1. Ableitung der Analogie

Beschränken wir uns auf die Untersuchung von magnetischen Feldern in Gebieten verschwindender elektrischer Stromdichte (wo also $\operatorname{rot} \vec{H} \equiv 0$), so gehorcht die Feldstruktur der Differentialgleichung (5). Zunächst sei der Fall einer konstanten (feldunabhängigen) und als Funktion des Ortes stetigen Permeabilität entsprechend Gl. (6) betrachtet.

Nach Abb. 17 unterteilen wir das untersuchte Gebiet in äquidistante Maschenpunkte mit der Maschenweite d . Der Laplace'sche Operator Δ wird in Differenzenform angeschrieben und ergibt die Beziehung

$$\frac{k_0}{R_0} \sum_{i=1}^4 (V_{m_i} - V_{m_0}) = 0 \quad (36)$$

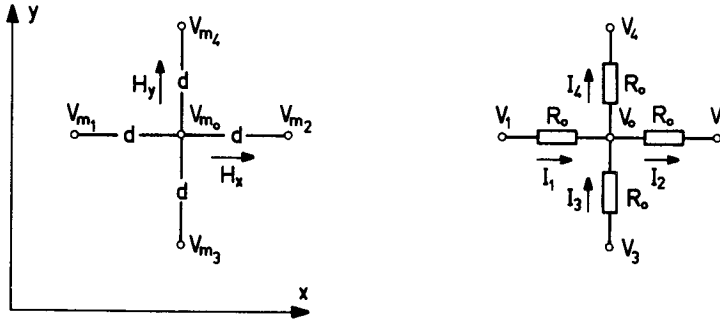


Abb. 17: Vergleich der "magnetischen Ebene" (links) mit der analogen elektrischen Ebene (rechts) bei stetiger und konstanter Permeabilität.

für die "magnetische Ebene". Die Übereinstimmung der Gl. (36) mit der Kirchhoffschen Knotenregel

$$\frac{1}{R_0} \sum_{i=1}^4 (V_i - V_0) = 0 \quad (37)$$

für die analoge "elektrische Ebene" wird durch die Gleichung

$$k_0 V_m = V \quad (38)$$

hergestellt: Die Konstante k_0 [Ω] verknüpft das magnetische Potential V_m mit dem elektrischen Potential V . Die Komponenten

$$H_x = - \text{grad}_x V_m = - \frac{V_{m_2} - V_{m_0}}{d} \quad (39)$$

$$H_y = - \text{grad}_y V_m = - \frac{V_{m_4} - V_{m_0}}{d}$$

der magnetischen Feldstärke \vec{H} berechnen sich zu:

$$H_x = \frac{1}{k_0 d} (V_0 - V_2) = \left(\frac{R_0}{k_0 d} \right) I_2 \quad (40)$$

$$H_y = \frac{1}{k_0 d} (V_0 - V_4) = \left(\frac{R_0}{k_0 d} \right) I_4 \quad .$$

Im Falle der Unstetigkeit von μ gelten an der Sprungfläche zwischen Medium 1 und Medium 2 die Beziehungen (16), (17), (18); ausserdem muss ein aus identischen Widerständen zusammengesetztes Netzwerk am Rande mit dem doppelten Netzwerkwiderstand abgeschlossen sein, damit keine Randeffekte auftreten^{20), 22)}. Betrachten wir nun gemäss Abb. 18 den speziellen Fall eines Ueberganges von einem Medium 1 mit

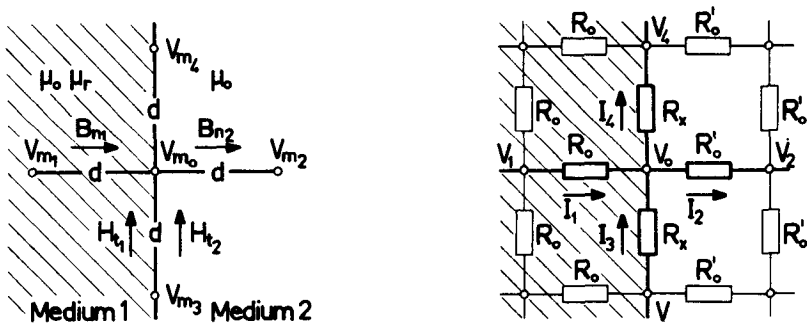


Abb. 18: Analogie entsprechend Abb. 17 bei un stetiger Permeabilität μ .

der relativen Permeabilität μ_r auf ein Medium 2 mit $\mu_r = 1$, so berechnet sich der Widerstand R_x nach der Formel

$$R_x = 2 \frac{R_0 R'_0}{R_0 + R'_0} \quad (41)$$

Durch Betrachtung der Differenzenflächenelemente ergibt sich, dass die Bedingung für H_t a priori erfüllt ist, denn der Grenzstrom I (I_3 bzw. I_4) ist derselbe für beide angrenzenden Flächenelemente, und nach $k_0 d H_y = R I$ kann an der Grenzfläche

nur eine und dieselbe y-Komponente von \vec{H} herrschen. Die Forderung für B_n ergibt aus

$$\mu_0 \mu_r \left(\frac{R_0 I_1}{k_0 d} \right) = \mu_0 \left(\frac{R'_0 I_2}{k_0 d} \right)$$

schliesslich die Berechnungsvorschrift

$$R_0 = \frac{R'_0}{\mu_r} \tag{42}$$

für den Widerstand R_0 im Medium 1.

Für den Fall der örtlich veränderlichen (feldabhängigen) Permeabilität lautet die durch μ_0 dividierte Gl. (5)

$$\text{grad } \mu_r \cdot \text{grad } V_m + \mu_r \cdot \Delta V_m = 0 \tag{43}$$

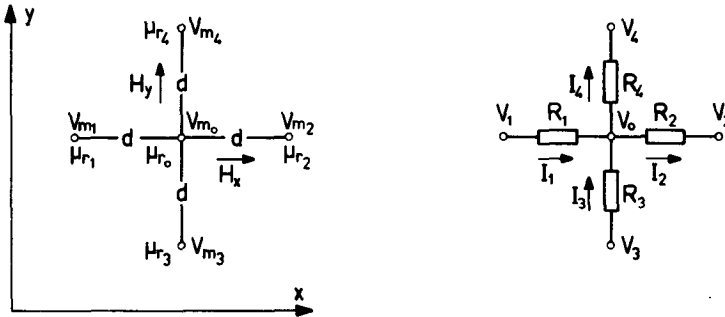


Abb. 19: Analogie entsprechend Abb. 17 bei örtlich variabler Permeabilität μ .

Zuerst behandeln wir wieder den Fall der örtlichen Stetigkeit von μ . Nach Einführen der Komponenten

$$\begin{aligned} \text{grad}_x \mu_r &= \frac{\mu_{r2} - \mu_{r1}}{2d} & \text{grad}_y \mu_r &= \frac{\mu_{r4} - \mu_{r3}}{2d} \\ \text{grad}_x V_m &= \frac{V_{m2} - V_{m1}}{2d} & \text{grad}_y V_m &= \frac{V_{m4} - V_{m3}}{2d} \end{aligned} \tag{44}$$

von grad μ_r und grad V_m ergibt sich aus (43) die Beziehung

$$\frac{(\mu_{r_2} - \mu_{r_1})(V_{m_2} - V_{m_1})}{2d} + \frac{(\mu_{r_4} - \mu_{r_3})(V_{m_4} - V_{m_3})}{2d} + \frac{\mu_{r_0}}{d^2} \sum_{i=1}^4 (V_{m_i} - V_{m_0}) = 0 \quad (45)$$

und nach kleiner Zwischenrechnung die Gleichung

$$\sum_{i=1}^4 \mu_{r_{0i}} (V_{m_i} - V_{m_0}) = 0 \quad (46)$$

worin $\mu_{r_{0i}}$ die auf die Maschenmitte bezogene relative Permeabilität zwischen den Potentialpunkten V_{m_0} und V_{m_i} bedeutet, also:

$$\begin{aligned} \mu_{r_{01}} &= \mu_{r_0} - \frac{1}{4} (\mu_{r_2} - \mu_{r_1}) \\ \mu_{r_{02}} &= \mu_{r_0} + \frac{1}{4} (\mu_{r_2} - \mu_{r_1}) \\ \mu_{r_{03}} &= \mu_{r_0} - \frac{1}{4} (\mu_{r_4} - \mu_{r_3}) \\ \mu_{r_{04}} &= \mu_{r_0} + \frac{1}{4} (\mu_{r_4} - \mu_{r_3}) \end{aligned} \quad (47)$$

Die Uebereinstimmung der Relation (46) mit der Kirchhoffschen Knotenregel

$$\sum_{i=1}^4 \frac{V_i - V_0}{R_i} = 0 \quad (48)$$

wird hergestellt durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} k_0 V_m &= V \\ R_i &= \frac{R'_0}{\mu_{r_{0i}}} \end{aligned} \quad (49)$$

worin R'_0 den Widerstand für die Nachbildung der Luft ($\mu_{r_{0i}} \equiv 1$) bezeichnet; mit dessen Annahme ist die Grösse der Netzwidestände festgelegt. Die Komponenten der magnetischen Feldstärke gehorchen den Gln. (39) und (40), wenn R_0 durch R_i ersetzt wird.

Für eine Unstetigkeit von μ stellen sich bei einem Uebergang von Medium 1 ($\mu_0 \mu_r$) auf Medium 2 (μ_0) die Bedingungen der Gln. (16). Dabei ist die Forderung für H_t wiederum a priori erfüllt, während jene für B_n auf die bereits erhaltene Relation $\mu_{r_{0i}} \cdot R_i = R'_0$ führt.

3.2.2. Eindimensionaler Fall

Für den eindimensionalen Fall reduziert sich die Differentialgleichung (5) auf

$$\frac{d^2 V_m}{dx^2} + \frac{1}{\mu} \left(\frac{d\mu}{dx} \right) \left(\frac{dV_m}{dx} \right) = 0 \quad (50)$$

Sie kann mit einer ebenen Kette gelöst werden. Der allgemeinste Fall hierfür ist die Hintereinanderschaltung von n Medien der relativen Permeabilitäten μ_{r_i} . Da sich diese jedoch in y - und z -Richtung ins Unendliche erstrecken müssen (d.h. die Grenzflächen sind geometrische Ebenen), ergibt sich über x keine stetige Variation von μ , sondern nur Strecken konstanter (feldabhängiger!) Permeabilität und Sprünge an den Grenzflächen. Damit vereinfacht sich Gl. (50) auf den ersten Term, während an einer Unstetigkeitsstelle gemäss Abb. 20 die Gl. (49b) gilt.

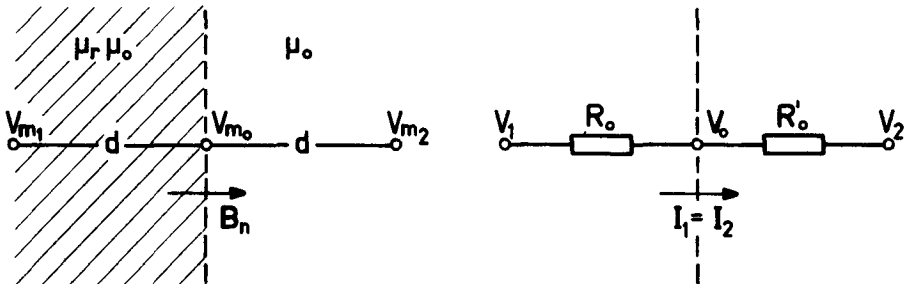


Abb. 20: Analogie entsprechend Abb. 17 bei unstetigem μ im linearen Fall.

Für den Spezialfall der Hintereinanderschaltung von zwei Medien der Längen $l_1 = md$ und $l_2 = nd$ und der Permeabilitäten μ_1 und μ_2 ergibt sich Abb. 21, welche gemäss den Beziehungen

$$V'_b - V'_a = (V_b - V_a) \frac{R_1 + R_2}{mR_1 + nR_2}$$

$$V'_b - V'_a = (V_b - V_a) \frac{\mu_1 + \mu_2}{n\mu_1 + m\mu_2}$$

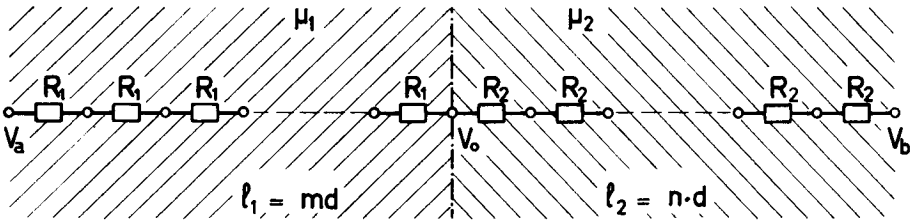


Abb. 21: Nachbildung der Hintereinanderschaltung von Medium μ_1 der Länge l_1 mit Medium μ_2 der Länge l_2 im linearen Fall.

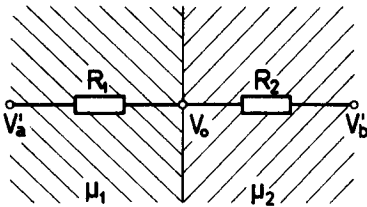


Abb. 22: Reduzierung der $(m+n)$ Widerstände von Abb. 21 auf 2 Widerstände.

vereinfacht nach Abb. 22 dargestellt wird: Die reduzierte Spannung $(V'_b - V'_a)$ gestattet das Ersetzen von $(m + n)$ durch nur 2 Widerstände.

Mit den Gl. (29) und (40a) und einem Flächenelement der Breite d und der Tiefe 1 erhält man schliesslich die Beziehung

$$\Phi = \mu_0 \mu_r H A = \mu_0 \mu_r \frac{R_1 I}{k_0 d} d \tag{51}$$

$$\Phi = \mu_0 \frac{R'_0}{k_0} I$$

als Zusammenhang zwischen dem magnetischen Fluss Φ und dem elektrischen Strom I im Modell.

3.2.3. Ausführung, Anwendung, Eigenschaften

Eine primäre Frage bei der Ausführung dieses Analogiemodells ist die Wahl der variablen Widerstände. Ideal wäre die Verwendung von Vielgang-Wendelpotentiometern mit entsprechenden anzeigenden Knöpfen, wie sie in Werten von etwa $10 \dots 10^5 \Omega$, Widerstandtoleranzen von 1% und Linearitäten bis 0,5 % von verschiedenen Herstellern angeboten werden. Erinnern wir uns jedoch, dass ein rechteckiges Netzwerk mit $m \cdot n$ Punkten exakt $2mn - (m + n)$ Verbindungswiderstände aufweist, dass demzufolge für die bescheidene Grösse $m = n = 30$ bereits 1740 Potentiometer mit einem Stückpreis von rund SFr. 50.-- erforderlich sind, so verbietet sich diese Lösung leider von selbst.

Verwendet man hingegen normale lineare Kohlepotentiometer, so muss für jeden Iterationsschritt jedes einzelne Potentiometer einpolig abgeschaltet, der erforderliche Widerstandswert mittels einer genauen Brücke eingestellt und das Potentiometer wieder zugeschaltet werden. Falls ein genügend genaues Widerstandsmessgerät zur Verfügung steht, bietet dabei die Einstellung eines bestimmten Wertes $R \pm 1\%$ keine besonderen Schwierigkeiten. Die Wahl des Potentiometerennwiderstandes R_N ist abhängig von der gegebenen Variation von μ_r : der Nullwiderstand des Potentiometers muss kleiner als $R_0' \mu_{r\max}^{-1}$, der Vollwiderstand grösser als $R_0' \mu_{r\min}^{-1}$ sein. Als Null- oder Anspringwiderstand bezeichnen wir den Widerstandswert, den ein Potentiometer aufweist, wenn der Schleifer am Anfang der stetigen Widerstandsbahn liegt. In Funktion des Gesamtwiderstandes R_G beträgt er üblicherweise

$$R_A \approx a_0 R_G^{1/2}$$

mit

$$a_0 = 1 \Omega^{1/2}$$

und der Gesamtwiderstand ist

$$R_G = R_N \pm \Delta R_N = R_N \left(1 \pm \frac{\Delta R_N}{R_N} \right)$$

mit

$$\frac{\Delta R_N}{R_N} = p = 0,1 \dots 0,3$$

Unter Einbezug der Toleranz p gilt somit:

$$a_0 \sqrt{R_N (1+p)} < \frac{R'_0}{\mu_{r \max}}$$

$$R_N (1-p) > \frac{R'_0}{\mu_{r \min}}$$

oder zusammengefasst

$$\left(\frac{1}{1-p}\right) \cdot \frac{1}{\mu_{r \min}} < \frac{R_N}{R'_0} < \left(\frac{1}{1+p}\right) \frac{R'_0}{\mu_{r \max}^2} \cdot \frac{1}{a_0^2} \quad (52)$$

Das Vorgehen zur Lösung eines Feldproblems ist das folgende: Die Durchflutung $\theta = V_{m_a} - V_{m_b}$ wird als Spannung $V = -k_0 \cdot \theta$ an das Netzwerk angelegt, wobei alle variablen Widerstände einen gewissen, gleich grossen Wert haben, der vorzugsweise zu $R'_0 \mu_{r \max}^{-1}$ gewählt wird. Nach Ausmessen des entstehenden Potentialfeldes wird für die einzelnen Maschenmittelpunkte P die dort herrschende Feldstärke H_P gemäss Abb. 23 berechnet:

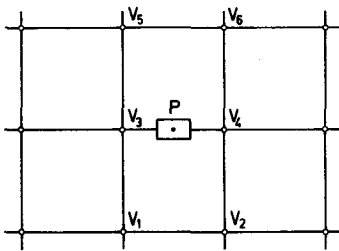


Abb. 23: Netzwerkausschnitt zur Berechnung der magnetischen Feldstärke H_P im Punkt P.

$$H_P = \sqrt{\left(\frac{\partial V_m}{\partial x}\right)_P^2 + \left(\frac{\partial V_m}{\partial y}\right)_P^2}$$

$$H_P = \sqrt{\left(\frac{V_4 - V_3}{k_0 d}\right)^2 + \left(\frac{V_5 + V_6 - V_1 - V_2}{4k_0 d}\right)^2} \quad (53)$$

Aus der Kurve $\mu_r = \mu_r(H)$ erhält man μ_r in P. Mit diesem Wert μ_r wird der Netz-
widerstand R_i in P nach der abgeleiteten Formel $R_i = R'_0 \cdot \mu_r^{-1}$ korrigiert.
Dies wird solange wiederholt, bis sich die Potentiale nicht mehr ändern. Zwischen

dem gesamten, ins Netzwerk fließenden Strom I und dem Fluss Φ im physikalischen Raum besteht dann Proportionalität, sodass man direkt einen Punkt der Kurve $\Phi = \Phi(\theta)$, d. h. der magnetischen Charakteristik für den betrachteten Kreis, erhält.

In Bezug auf die in 1.3.1. bis 1.3.4. angeführten Punkte ergibt sich folgendes für dieses Analogieverfahren: Die Streuflussbildung wird automatisch berücksichtigt, während die Nichtlinearität durch das iterative Vorgehen über die Magnetisierungskurve einbezogen ist. Da bei jedem Iterationsschritt das gesamte Feldbild erhalten wird, kann auch die Nichtisotropie dargestellt werden. Man muss dann einfach bei jedem Schritt den Netzwidestand R_i aus $\mu_{r_{ik}}$ mittels derjenigen Kurve $\mu_r(H)$ berechnen, die der Feldrichtung in der betreffenden Maschenmitte entspricht. Hingegen kann auch hier die Hysterese nicht direkt berücksichtigt werden. Wie beim graphischen Verfahren muss man deshalb die Ummagnetisierungsverluste aus dem Feldbild berechnen.

3.3. Analogie mit einem Netz aus konstanten Widerständen und zusätzlichen Einspeiseströmen

3.3.1. Ableitung der Analogie

Die aus der Differentialgleichung (5) bzw. (43) folgende Differenzengleichung (45) kann bei anderer Zusammenfassung auch in der Form

$$\sum_{i=1}^4 (V_{m_i} - V_{m_0}) + \frac{V_{m_2} - V_{m_1}}{\left(\frac{4\mu_{r0}}{\mu_{r2} - \mu_{r1}}\right)} + \frac{V_{m_4} - V_{m_3}}{\left(\frac{4\mu_{r0}}{\mu_{r4} - \mu_{r3}}\right)} = 0 \quad (54)$$

dargestellt werden. Der Vergleich dieser Relation mit der Kirchhoffschen Knotenregel (Abb. 24) erheischt dann infolge der Bedingung $R_i = \text{konstant} = R_0$ die Beziehungen

$$k_0 V_m = V$$

$$I_0 = \frac{1}{4R_0} \left[\frac{V_2 - V_1}{\left(\frac{\mu_{r0}}{\mu_{r2} - \mu_{r1}}\right)} + \frac{V_4 - V_3}{\left(\frac{\mu_{r0}}{\mu_{r4} - \mu_{r3}}\right)} \right] \quad (55)$$

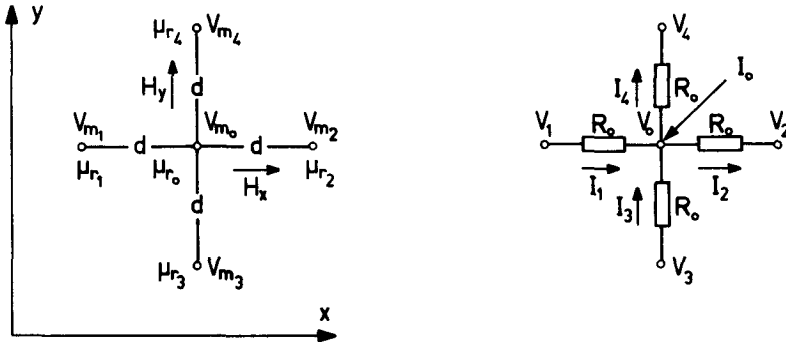


Abb. 24: Analogie entsprechend Abb. 17 bei zusätzlichem Einspeisestrom I_0 .

worin I_0 den in Abb. 24 dargestellten zusätzlichen Einspeisestrom im Potentialpunkt V_{m0} bezeichnet.

Die magnetische Feldstärke \vec{H} hat im Potentialpunkt V_{m0} nach Abb. 24 infolge $\vec{H} = - \text{grad } V_m$ den Betrag

$$H = \sqrt{\left(\frac{V_2 - V_1}{2k_0 d}\right)^2 + \left(\frac{V_4 - V_3}{2k_0 d}\right)^2} \quad (56)$$

und bildet mit der positiven x-Richtung den Winkel

$$\psi = \arctg \left(\frac{V_4 - V_3}{V_2 - V_1} \right) \quad (57)$$

Für eine Grenzfläche zwischen zwei Medien verschiedener Permeabilität gilt das in Abschnitt 3.2.1. Gesagte; der Einspeisestrom ist dabei für alle Punkte eines freien Randes die Hälfte des nach Gl. (55) berechneten^{20), 22)}.

3.3.2. Eindimensionaler Fall

In analoger Weise zu Abschnitt 3.2.2. erhalten wir anhand der Abb. 25 aus der Bedingung für B_n die Identitäten:

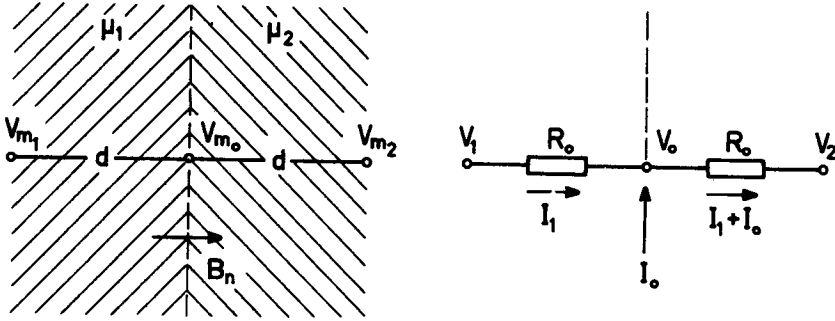


Abb. 25: Analogie entsprechend Abb. 20 bei zusätzlichem Einspeisestrom I_0 .

$$\mu_1 H_{n1} = \mu_1 \frac{R_0 I_1}{k_0 d} = \mu_2 \frac{R_0 (I_1 + I_0)}{k_0 d} = \mu_2 H_{n2}$$

und daraus den Einspeisestrom:

$$I_0 = I_1 \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2}$$

$$I_0 = \frac{1}{2R_0} \left[\frac{V_2 - V_1}{\left(\frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \right)} \right] \quad (58)$$

Ist beispielsweise $\mu_1 = \mu_0 \mu_r$ und $\mu_2 = \mu_0$ und ausserdem $l_1 = l_2$, so erhält man:

$$I_0 = \frac{V_b - V_a}{2R_0} (\mu_r - 1) \quad (59)$$

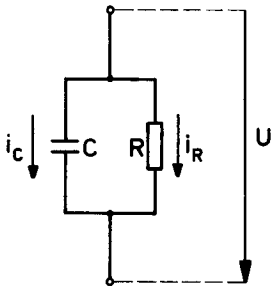
$$H_2 = \mu_r H_1 = \frac{V_b - V_a}{2k_0 d}$$

d. h. die Feldstärke im Medium μ_0 ist μ_r -mal grösser.

3.3.3. Ausführung, Anwendung, Eigenschaften

Die Ausführung eines derartigen Widerstandsnetzes und der zugehörigen Strom-einspeiseapparatur ist in²⁰⁾ beschrieben und kann deshalb hier unterbleiben. Das Vorgehen für die Bestimmung eines Feldbildes ist auch hier iterativ. Mit den vorgegebenen Randwerten wird auf dem Netz die Laplacesche Gleichung (6) gelöst und dann für jeden Punkt die Feldstärke H nach (56) berechnet. Die Kennlinie $\mu_r(H)$ liefert die zugehörigen μ_r , mit denen die Ströme I_0 nach (55) bestimmt werden. Nach Einspeisung dieser Ströme ergibt sich eine neue Potentialverteilung, mit welcher neue I_0 berechnet werden usw. Dies wird solange fortgesetzt, bis sich die V_{m_i} nicht mehr ändern.

Hinsichtlich der in 1.3.1. bis 1.3.4. behandelten Gesichtspunkte hat diese Analogie dieselben Eigenschaften wie jene mit variablen Widerständen. Für den Fall konstanter Permeabilität kann dazu der Einfluss der Hysterese für Wechselflüsse direkt nachgebildet werden. Für die RC-Schaltung nach Abb. 26 lässt sich nämlich die Beziehung



$$i_C = j\omega C \cdot U = j\omega RC \cdot i_R \quad (60)$$

angeben, d. h. der Strom i_C eilt gegenüber i_R um $\frac{\pi}{2}$ vor. Setzt man nun $i_R = I_m$ und $i_C = I_h$ gemäss Abschnitt 1.3.2., so wird durch die Parallelschaltung RC das Hystereseverhalten dargestellt. Bei festem R muss dabei C von Fall zu Fall anhand $B(H)$ berechnet werden. Statt mittels der Parallelschaltung RC kann das Hystereseverhalten naturgemäss auch durch die dazu duale Serieschaltung RL nachgebildet werden. Die der Gl. (60) entsprechende Beziehung besteht dann zwischen den Spannungen $U_R = RI$ und $U_L = j\omega LI$, wobei wie im vorigen Fall U und I mit dem Zeitfaktor $\exp(j\omega t)$ behaftet sind.

Abb. 26: Parallelschaltung RC zur Nachbildung der Hysterese bei konstanter Permeabilität. Es ist: $U = U_0 \exp(j\omega t)$ mit $j = (-1)^{1/2}$

3.3.4. Automatisierung des Iterationsprozesses

Für verschiedene einfache Formen der Poisson'schen Differentialgleichung (35) ist bisher mit Erfolg versucht worden, die Ausführung der sukzessiven Iterationen auf dem elektrischen Netzwerk automatisch zu gestalten²²⁾. Die Einspeiseströme werden dann von Speiseeinheiten geliefert, in welchen Bausteine (aus Servo- und Rechenverstärkern, Wendepotentiometern, Servomotoren) von elektronischen Analogrechnern die entsprechende Berechnung des Einspeisestromes aus dem Potential des betreffenden Punktes vornehmen.

Im vorliegenden Problem hängt jedoch der Einspeisestrom I_0 nach (55) auch von den vier umliegenden Potentialen ab; dazu muss für die Bestimmung der μ_{r_i} über die komplizierte Beziehung $\mu_r(H)$ vorgegangen werden. Wohl kann bei Einführung eines zusätzlichen Fehlers von einigen % die Magnetisierungskurve durch einen analytischen Ausdruck (Abschnitt 1.3.6) angenähert werden, doch wird der Aufwand für die Speiseeinheiten dann so gross, dass er jedes vernünftige Mass überschreitet. Am gleichen Einwand scheitert auch die - im Prinzip ebenfalls mögliche - Automatisierung des Iterationsprozesses für das Netz mit variablen Widerständen. Dort hängt ja der Widerstand R_i neben der Magnetisierungskurve von 6 umliegenden Potentialen ab.

3.4. Analogie mit einem Netz aus Induktivitäten

3.4.1. Konstante und gesteuerte Induktivitäten

Es ist leicht einzusehen, dass die Ersetzung der konstanten Widerstände gemäss Abschnitt 3.3. durch ebensolche Induktivitäten keine wesentlich neuen Gesichtspunkte ergibt. Insbesondere berechnen sich der Einspeisestrom I_0 nach (55) und die magnetische Feldstärke \vec{H} nach (56) und (57) nach den genau gleichen Formeln, in denen einfach R_0 durch ωL_0 ersetzt wird. Ausserdem muss jetzt das Netz mit Wechselstrom betrieben werden.

Nicht viel anders verhält es sich, wenn die variablen Widerstände nach Abschnitt 3.2. durch gesteuerte Induktivitäten ersetzt werden. Die Widerstände R_i gehen dann über in die Induktivitäten L_i , welche nach dem Gesetz $L_i = L'_0 \mu_{r_{ik}}^{-1}$ mit $L'_0 = \text{konstant}$ zu verändern sind. Bei entsprechender Wahl der Induktivitäten kann dies beispielsweise durch Gleichstromvormagnetisierung mit dem Strom I_V mittels einer zusätzlichen Wicklung geschehen. Von diesen gesteuerten Induktivitäten müssen dann für die Auswertung genaue Eichkurven $L = f(I_V)$, d. h. $I_V = f(\mu_{r_{0i}})$ zur Verfügung stehen. Die Herstellung solcher gleichstromvormagnetisierter Spulen mit dem notwendigen grossen Steuerbereich für L_i dürfte dabei einige Schwierigkeiten bereiten.

Da der Endeffekt, nämlich das exakte Einstellen eines Gleichstromes (I_V) genau derselbe ist wie für das Modell mit konstanten Widerständen und zusätzlichem Einspeisestrom (I_0), so muss wegen des bedeutend kleineren Aufwandes die letztere Lösung wohl vorgezogen werden.

3.4.2. Feldabhängige Induktivitäten

Anders verhält es sich, wenn an Stelle von konstanten oder von gesteuerten Induktivitäten solche mit einem Kern aus dem betreffenden Medium verwendet werden. Unter allen bisher behandelten elektrischen Analogien ist diese die am weitesten gehende, weil hier jedes Flächen- bzw. Volumenelement des betrachteten Mediums durch ein Netzwerkelement dargestellt wird, dessen Charakteristik genau der Magnetisierungsschleife $B(H)$ entspricht.

Für die Dimensionierung der Induktivitäten stellen sich verschiedene Forderungen, die wir am Beispiel eines normalen warmgewalzten (also isotropen) Dynamo-blechs betrachten wollen. Einmal muss der Querschnitt des geblechten Kerns so festgelegt werden, dass bei den im Netz verwendeten und zulässigen Strömen die notwendigen Induktionen im Blech erreicht werden. Zum andern muss der magnetische Kreis der Induktivitäten mit einem Material geschlossen werden, das auch bei hohen Kerninduktionen (bis etwa $2 \dots 2,5 \text{ Vsm}^{-2}$) nur so schwach gesättigt wird und so niedrige Verlustkoeffizienten aufweist, dass die dadurch bedingten zusätzlichen Hysterese- und Wirbelstromverluste innerhalb der zulässigen Fehlergrenze bleiben. Schliesslich muss die gesamte Induktivität nach aussen möglichst vollkommen abgeschirmt sein, um eine gegenseitige Beeinflussung der Netzwerkelemente durch unerwünschte Kopplung zu vermeiden.

Alle diese Forderungen werden in einfacher Weise erfüllt durch die Verwendung von Topfkernen aus keramischen halbleitenden Ferritmaterialien wie z. B. das Ferroxcube von Philips, das Siferit von Siemens u. a. m. Geeignet sind etwa die Philips-Topfkern D 36/22 bzw. die kleinere Ausführung D 25/16, beide aus Ferroxcube 3B2. Neben dem Spulenhalter setzen sich diese Topfkern zusammen aus zwei Platten, einem Ring und einem Spulenkörper mit dem Ferroxcube-Kern, der nun durch einen geblechten Kern ersetzt wird.

Das Ferroxcube-Material hat sehr kleine Verluste: Bei niedriger Aussteuerung liegt der bezogene Verlustwinkel $\text{tg } \delta / \mu_r$ noch für Frequenzen von einigen kHz in der Grössenordnung 10^{-6} . Die relative Anfangspermeabilität ist etwa 10^3 , während für die Sättigungsinduktion B_s der Wert $0,45 \text{ Vs/m}^2$ (4500 Gauss) bei einer Feldstärke $H_s = 160 \text{ kA/m}$ (≈ 2000 Oersted) eingesetzt werden kann. Demgegenüber liegen übliche Si-C-Magnetbleche mit Verlustziffern $v_{10} = 0,9 \dots 3,0 \text{ W/kg}$ bei einer Induktion von $1,5 \text{ Vs/m}^2$ mit entsprechenden Feldstärken $H = 3,3 \dots 1,8 \text{ kA/m}$ schon stark im Sättigungsgebiet.

Bei der Herstellung der geblechten Kerne muss der Einfluss der Bearbeitung auf die magnetischen Eigenschaften des Blechs berücksichtigt werden. Es wurde nämlich experimentell festgestellt²⁴⁾, dass bei Schneiden in Streifen von unter 10 mm

Breite b die Permeabilität des Bleches beträchtlich abfällt, während die Verluste stark ansteigen (z. B. um 30% bei $b=5$ mm). Allerdings kann dieser Bearbeitungseinfluss durch nachträgliches Glühen (etwa bei 800° C in Stickstoffatmosphäre) zumindest teilweise wieder rückgängig gemacht werden.

In Bezug auf die in 1.3.1. bis 1.3.4. aufgeführten Punkte ergibt sich folgendes: Die Nichtlinearität und die Hysterese des magnetischen Mediums sind automatisch berücksichtigt, ebenso (bei Nachbildung der Luft durch konstante Induktivitäten bezw. entsprechende Widerstände) die Streuflussbildung. Schwierigkeiten entstehen hingegen beim Einbezug der Nichtisotropie. Dies umso mehr, als die Abhängigkeit der Eisenverluste P von α (Winkel zwischen B und Walzrichtung) allgemein einen ziemlich komplizierten Verlauf aufweist: Die Kurve 1 in Abb. 27 stellt einen repräsentativen Zusammenhang dar. Eine angenäherte Berücksichtigung ist dadurch möglich, dass man die "vertikalen" und die "horizontalen" Netzwerkelemente verschieden

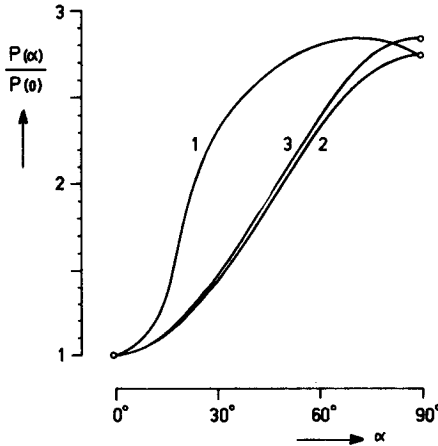


Abb. 27: Repräsentativer Verlauf (Kurve 1) für die Richtungsabhängigkeit der Eisenverluste für kornorientierte Magnetbleche, gemessen bei $B = 1,5 \text{ Vsm}^{-2}$, und Verlauf (Kurve 2, bzw. Kurve 3) gemäss Gl. (65) bzw. Gl. (66).

macht gemäss den Werten für $\alpha = 90^{\circ}$ und $\alpha = 0^{\circ}$ durch entsprechenden Schnitt der Kerne. Näherungsweise sind nämlich die Eisenverluste dem Quadrat der Flussdichte proportional ¹²⁾, S. 150 ff. Teilen wir angenähert diese Verluste laut

$$P(\alpha) = c(\alpha) \cdot B^2 \tag{61}$$

$$P(\alpha) = P_x + P_y = c_x B_x^2 + c_y B_y^2$$

in die Koordinatenrichtungen x und y auf, so folgt mit den Komponenten

$$B_x = B \cos \alpha \quad (62)$$

$$B_y = B \sin \alpha$$

der Flussdichte gemäss dem Zusammenhang

$$\frac{P(\alpha)}{B^2} = c_x \cos^2 \alpha + c_y \sin^2 \alpha = c_x + (c_y - c_x) \sin^2 \alpha \quad (63)$$

für die bezogenen Verluste $P(\alpha) / P(\alpha = 0)$ die Abhängigkeit

$$\frac{P(\alpha)}{P(0)} = 1 + \left(\frac{c_y}{c_x} - 1\right) \sin^2 \alpha \quad (64)$$

welche mit den Werten für $\alpha = 0$ (Elemente in x -Richtung) und $\alpha = 90^\circ$ (Elemente in y -Richtung) aus der Kurve 1 (Abb. 27) die numerische Form

$$\frac{P(\alpha)}{P(0)} = 1 + 1,74 \sin^2 \alpha \quad (65)$$

annimmt. Diese Abhängigkeit (65) ist als Kurve 2 in Abb. 27 aufgetragen; der entstehende Fehler in Bezug auf die Kurve 1 ist sehr gross. Er wird durch Wahl der vertikalen Elemente gemäss $\alpha = 72^\circ$ (wo das Maximum der Kurve 1 liegt) nur unwesentlich verkleinert; der entsprechende Zusammenhang

$$\frac{P(\alpha)}{P(0)} = 1 + 1,83 \sin^2 \alpha \quad (66)$$

ist als Kurve 3 in Abb. 27 eingezeichnet. Dieses Verfahren ist demnach ungeeignet, es sei denn, dass der entstehende Fehler durch Einführung von Diagonalelementen im Netzwerk verkleinert werde. Nur werden dann die Verhältnisse ziemlich übersichtlich, ganz abgesehen vom beinahe verdoppelten Aufwand an Elementen: Statt $2mn - (m+n)$ Netzwerkelemente für ein Netz mit $m \cdot n$ Maschenpunkten brauchen wir jetzt deren $4mn - 3(m+n) + 2$, also z. B. 3422 gegenüber 1740 für $m=n=30$.

3.5. Vergleich der verschiedenen elektrischen Analogien

Von den bisher behandelten elektrischen Analogien

- a) variable R
- b) konstante R mit I_0
- c) konstante L mit I_0
- d) gesteuerte L
- e) L mit Blechkern

müssen einmal aus den weiter oben erwähnten Gründen die Möglichkeiten c) und d) weggelassen werden. Die Analogie e) gestattet keine Berücksichtigung der Nichtisotropie mit vernünftigem Aufwand, zusätzlich muss man sich vor Augen halten, dass das ganze, ziemlich kostspielige Modell jeweils nur für ein bestimmtes Medium gebraucht werden kann. Die nötige Universalität im Verband mit kleinem Materialaufwand und relativer Einfachheit der Auswertung ist deshalb nur durch die Analogien a) und b) gegeben. In Bezug auf diese Punkte und auch auf die erreichbare Genauigkeit entsprechen sich diese zwei Verfahren weitgehend, sodass nicht zuletzt mit Rücksicht auf eine bereits vorhandene Stromspeiseanlage mit zugehörigem Netzwerk²⁰⁾ der Analogie b) der Vorzug gegeben wird. Diese soll im weitern näher untersucht werden.

4. DAS ANALOGIENETZWERK MIT KONSTANTEN WIDERSTAENDEN UND ZUSAETZLICHEN EINSPEISESTROEMEN

4.1. Randwerte, Randabschlüsse, Uebergänge

Für eine Anordnung nach Abb. 28 entwickeln wir die Potentiale $V_1 \dots V_4$ als Taylorreihen in Funktion des Potentials V_0 , wobei $d_1 \dots d_4$ je voneinander ver-

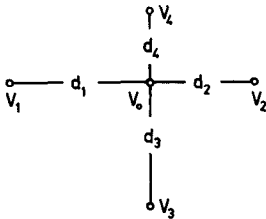


Abb. 28: Zur Ableitung des Laplace-schen Operators bei verschiedenen Maschenweiten $d_1 \dots d_4$.

schieden sind. Werden in dieser Entwicklung

$$\begin{aligned}
 V_1 &= V_0 - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_0 d_1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_0 d_1^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^3} \right)_0 d_1^3 + \dots \\
 V_2 &= V_0 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_0 d_2 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_0 d_2^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^3} \right)_0 d_2^3 + \dots \\
 V_3 &= V_0 - \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_0 d_3 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)_0 d_3^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 V}{\partial y^3} \right)_0 d_3^3 + \dots \\
 V_4 &= V_0 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_0 d_4 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)_0 d_4^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 V}{\partial y^3} \right)_0 d_4^3 + \dots
 \end{aligned} \tag{67}$$

die Glieder dritter und höherer Ordnung vernachlässigt, die Ausdrücke durch die entsprechenden d_i^2 dividiert und nach den 2. Ableitungen aufgelöst, so lässt sich durch Summieren die Beziehung

$$\Delta V = \sum_{i=1}^4 \left(\frac{V_i - V_0}{d_i^2} \right) + \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_0 + \left(\frac{1}{d_3} - \frac{1}{d_4} \right) \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_0 \tag{68}$$

für den Laplace-schen Operator angeben. Infolge der Parabelapproximation für V gemäss Gl. (67) d.h. der Linearisierung von $\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)$ bzw. $\left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)$ erhält man die Werte

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 = \frac{\frac{d_1}{d_2} (V_2 - V_0) + \frac{d_2}{d_1} (V_0 - V_1)}{d_1 + d_2} \quad (69)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 = \frac{\frac{d_3}{d_4} (V_4 - V_0) + \frac{d_4}{d_3} (V_0 - V_3)}{d_3 + d_4}$$

für die ersten Ableitungen in V_0 . Einsetzen von (69) in (68) und Vereinfachen führt dann auf den Ausdruck

$$\Delta V = \left(\frac{1}{d_1 + d_2}\right) \left(\frac{V_1}{d_1} + \frac{V_2}{d_2}\right) + \left(\frac{1}{d_3 + d_4}\right) \left(\frac{V_3}{d_3} + \frac{V_4}{d_4}\right) - \left(\frac{1}{d_1 d_2} + \frac{1}{d_3 d_4}\right) V_0 \quad (70)$$

für den Laplace'schen Operator, aus welchem die Beziehungen für rechteckige und quadratische Maschennetze als Spezialfälle hervorgehen.

Für die Behandlung aller Fragen von Randwerten, von Randabschlüssen bei unregelmässigen (d. h. nicht längs Maschenlinien verlaufenden gerad- oder krummlinigen) Rändern, der Zusammenschaltung von Abschnitten mit verschiedenen Maschenweiten, der Simulierung eines unendlich ausgedehnten Feldes usw. geht man mit Vorteil vom einfachen Fall der Aufteilung eines Gebietes durch Ueberdeckung mit einem äquidistanten Maschennetz aus. Der Anschaulichkeit halber beschränken wir uns auf ein ebenes Cartesisches Netz mit der Maschenweite d , dessen Analogon ein Widerstandsnetz mit konstanten Widerständen (bezw. Impedanzen) ist. Zusätzlich führen wir den Begriff des Differenzenflächenelements ein. Gemäss dem schraffierten Element in Abb. 29 wird nämlich R nach der Formel

$$R = \varphi \frac{\text{Länge}}{\text{Breite} \cdot \text{Tiefe}} = \varphi \frac{d}{d \cdot d} = \frac{\varphi}{d} \quad (71)$$

berechnet, wenn wir uns auf ein homogenes Medium der Tiefe d und des spezifischen Widerstandes φ beziehen.

Mit Hilfe des allg. Ausdrucks (70) für den Laplace'schen Operator können nun mit dem Begriff des Differenzenflächenelementes alle oben angeführten Fragen behandelt werden.

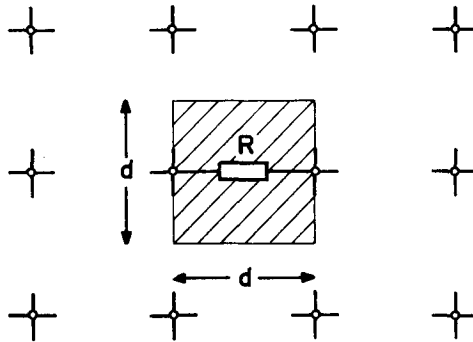


Abb. 29: Zum Begriff des Differenzenflächenelementes: R stellt das schraffierte Element dar.

4.1.1. Randwerte

Gegeben sei ein Netzwerk mit der Maschenweite d , das durch einen längs einer Maschenlinie verlaufenden geraden Rand abgeschlossen ist. Der Randwiderstand R ist durch das in Abb. 30 schraffierte Flächenelement der Länge d und der Breite $\frac{d}{2}$ zu

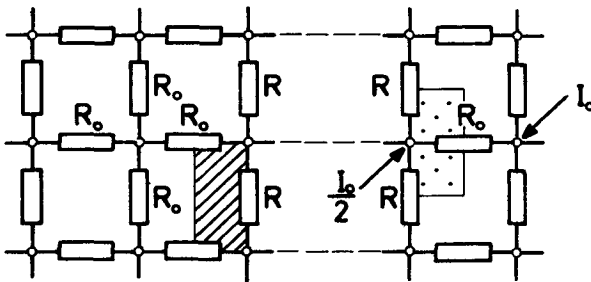


Abb. 30: Bestimmung des Randwertes für ein homogenes R -Netzwerk.

$$R = \rho \frac{d}{\frac{d}{2} \cdot d} = 2 \frac{\rho}{d} = 2 R_0$$

bestimmt. Anschaulich geht dies aus Abb. 30 hervor: Schneiden wir ein homogenes Netzwerk längs einer Maschenlinie auf, so muss bei Wiederverbinden (gestrichelt)

der entsprechenden Maschenpunkte des doppelten freien Randes am Rande zwischen 2 Maschenpunkten wieder R_0 vorhanden sein. Aus Symmetriegründen muss dann $R = 2R_0$ sein.

G. Čremošnik²⁰⁾, S.31-35, hat im Anschluss an Arbeiten von G. Liebmann^{26), 27)} berechnet, dass der für die Lösung der Poisson'schen Gleichung (35) erforderliche Einspeisestrom I_0 für einen Punkt V_0 am Rande nur den halben Betrag dessen hat, der aus den vier umliegenden Potentialen berechnet würde. Für das nichtvorhandene Potential V_2 wird dabei der am Rande gespiegelte Wert V_1 eingesetzt, wie dies aus der Differentialgleichung abgeleitet werden kann²⁰⁾, S.28-33. Gemäss Abb.30 ist ja das entsprechende Flächenelement (punktiert) nur die Hälfte $\frac{d}{2} \cdot d$ von d^2 und der Strom ist hierzu proportional.

Weist zusätzlich jeder Potentialpunkt eine Impedanz auf Erde auf, wie etwa zur Lösung der Diffusionsgleichung²⁸⁾

$$\nabla^2 \Phi = k \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (72)$$

eine dem Flächenelement proportionale Kapazität C, so erhält man für einen Rand nach Abb. 31 die dort eingetragenen Werte.

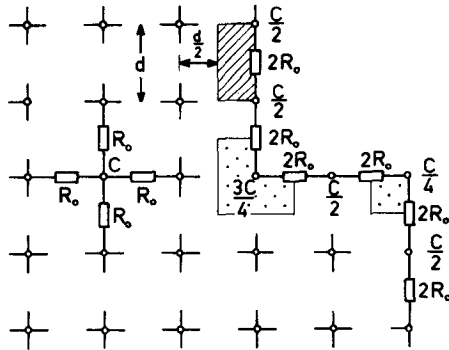


Abb. 31: Werte der Netzwerkelemente für ein RC-Netz an einem mit Maschenlinien zusammenfallenden Rand.

4.1.2. Randabschlüsse

Ein geradliniger Rand B-B verlaufe gemäss Abb. 32 parallel zu einer Maschenlinie A-A. Aus den schraffierten Flächenelementen erhält man dann für $\frac{d}{2} < d' < d$

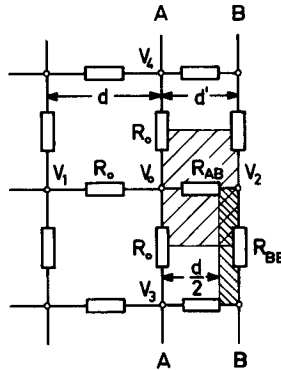


Abb. 32: Randelemente für einen Rand parallel zur Maschenlinie.

die Werte

$$R_{BB} = \frac{\rho}{d} \cdot \frac{d}{d' - \frac{d}{2}} = R_0 \frac{1}{\left(\frac{d'}{d}\right) - \frac{1}{2}}$$

$$R_{AB} = \frac{\rho}{d} \frac{d'}{d} = R_0 \left(\frac{d'}{d}\right)$$

für die zu verändernden Widerstände, mithin die Beziehung

$$V_1 + \left(\frac{d}{d'}\right) V_2 + V_3 + V_4 - \left(3 + \frac{d}{d'}\right) V_0 = 0$$

für den Laplaceschen Operator ΔV . Wenn hingegen $0 < d' < \frac{d}{2}$ ist, so lässt man mit Vorteil V_0 und V_2 zusammenfallen und erhält dann einen vergrösserten Widerstand

$$R'_{AB} = R_0 \left(1 + \frac{d'}{d}\right)$$

zwischen V_1 und V_0 , während R_{BB} den Wert

$$R_{BB}^i = R_0 \frac{1}{\left(\frac{d'}{d}\right) + \frac{1}{2}}$$

annimmt.

Für in Bezug auf Maschenlinien schief verlaufende Ränder bestimmt man die veränderten Widerstände analog nach Gl. (71) mittels der äquivalenten mittleren Breite bzw. Länge des entsprechenden Flächenelementes. Für einen Rand nach Abb. 33 erhält man so einmal

$$R_1 = R_7 = 2R_0$$

$$R_4 = R_0$$

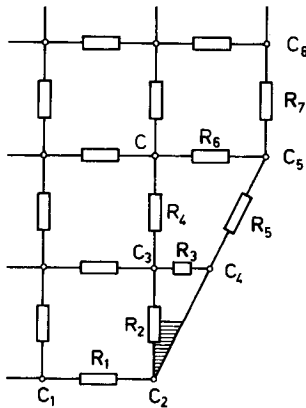


Abb. 33: Beliebiger Rand als gebrochener Linienzug.

und für die Widerstände R_2, R_3, R_5, R_6 die Flächenelemente laut Abb. 34 mit den mittleren Längen

$$l_2 \approx 0,7d, \quad l_3 \approx 0,5d, \quad l_5 \approx 0,5d, \quad l_6 \approx 0,9d$$

und den mittleren Breiten

$$b_2 \approx 0,75d, \quad b_3 \approx 0,6d, \quad b_5 \approx 0,25d, \quad b_6 \approx 0,9d$$

woraus die Widerstandswerte nach Gl. (71) zu

$$R_2 \approx 0,95 R_0, \quad R_3 \approx 0,85 R_0, \quad R_5 \approx 2 R_0, \quad R_6 \approx R_0$$

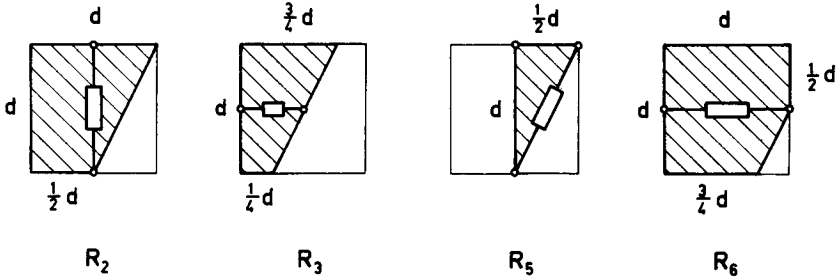


Abb. 34: Flächenelemente zur Berechnung der Widerstände R_2 , R_3 , R_5 und R_6 aus Abb. 33.

berechnet werden. Das in Abb. 33 schraffierte kleine "horizontale" Flächenelement wird vernachlässigt. Die Ableitkapazitäten C gemäss Abb. 33 für ein RC-Netzwerk erhält man in bereits beschriebener Weise zu

$$\begin{aligned} C_1 &= C & C_2 &= \frac{3}{8} C & C_3 &= \frac{7}{8} C \\ C_4 &= \frac{C}{8} & C_5 &= \frac{3}{8} C & C_6 &= \frac{C}{2} \end{aligned}$$

entsprechend den der Abb. 33 zu entnehmenden Flächenelementen.

Bei der Darstellung krummliniger Ränder wird je nach dem Verhältnis von Krümmungsradius zu Maschenweite der Rand durch eine längs Maschenlinien verlaufende gebrochene Linie oder durch einzelne gerade Teilstücke approximiert; im letztern Fall sind die zu verändernden Randwiderstände gemäss dem oben angeführten Beispiel zu berechnen.

4.1.3. Zusammenschaltung von Abschnitten verschiedener Maschenweite

Die einfachste Methode zur Zusammenschaltung von zwei Netzwerken bzw. Netzwerkabschnitten mit verschiedenen Maschenweiten d_1 und $d_2 > d_1$ ist, die Trennlinie als doppelten freien Rand (also Verdoppelung der Randwiderstände) zu deuten und dann die entsprechenden Maschenpunkt miteinander zu verbinden. Ohne Einführung eines zusätzlichen Fehlers ist dies jedoch nur möglich, wenn d_2 ein ganz-

zahliges Vielfaches von d_1 beträgt. Ist hingegen das Verhältnis d_2/d_1 gebrochen, so muss der Uebergang zur Reduktion des dort entstehenden Fehlers mittels Diagonalwiderständen gemacht werden, wie dies von G. Liebmann²⁶⁾ u. a. vorgeschlagen wird.

4.1.4. Simulierung eines unendlich ausgedehnten Feldes

Bei vielen Problemen ist das zu untersuchende Feld nicht begrenzt, sondern erstreckt sich in einer oder in beiden Koordinatenrichtungen ins Unendliche, wobei dann die entsprechende Feldgrösse eine homogene Verteilung annimmt. Je nach dem Feldverlauf wird man die eine oder andere Form der Netzwerk-Fortsetzung wählen.

Die Abb. 35 zeigt den Uebergang auf m-fache Dehnung in x-Richtung. Die Widerstände R_x und R_y erhält man dann zu:

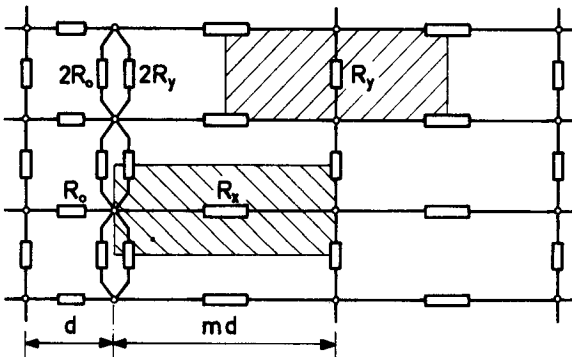


Abb. 35: Uebergang auf m-fache Dehnung in x-Richtung.

$$R_x = \frac{\rho}{d} \frac{md}{d} = m \cdot R_0$$

$$R_y = \frac{\rho}{d} \frac{d}{md} = \frac{R_0}{m}$$

d. h. $R_x R_y = R_0^2$

In Abb. 36 ist eine sukzessive Dehnung in x- und y-Richtung dargestellt; diese wird durch jeweilige Verdoppelung der Maschenweite erhalten und hat den Vorteil, dass infolge

$$R_1 = R_2 = R_3 = \dots = R_0$$

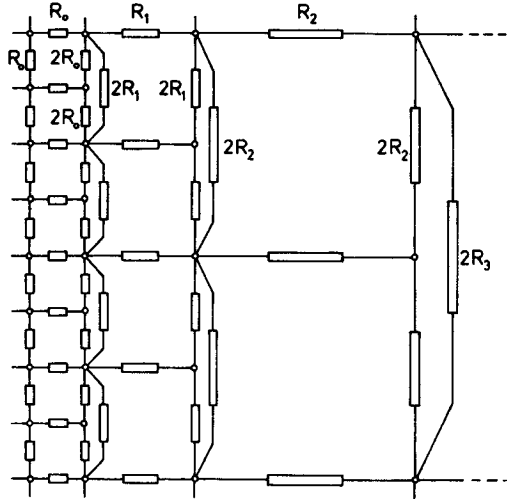


Abb. 36: Sukzessive Verdoppelung der Maschenweite in x- und y-Richtung

nur Widerstände derselben Grösse R_0 gebraucht werden. (Die Tiefe wird gleichbleibend zu d angenommen.) In der Variante nach Abb. 37 entfällt dieser Vorteil; aller-

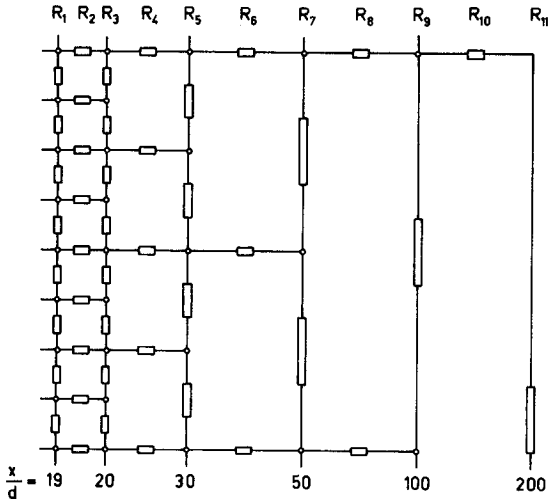


Abb. 37: Schrittweise Verdoppelung der Maschenweite in y-Richtung und sukzessiv zunehmende Dehnung in x-Richtung.

dings kann man hier aber eine beliebig schnell fortschreitende Dehnung mit sehr viel weniger Elementen erreichen. Die einzelnen Widerstände

$$R_1 = R_2 = R_0$$

$$R_3 = \frac{\varphi}{d} \frac{d}{(0,5+5)d} \approx 0,182 R_0$$

$$R_4 = \frac{\varphi}{d} \frac{10d}{2d} = 5 R_0$$

$$R_5 = \frac{\varphi}{d} \frac{2d}{(5+10)d} \approx 0,133 R_0$$

$$R_6 = \frac{\varphi}{d} \frac{20d}{4d} = 5 R_0$$

$$R_7 = \frac{\varphi}{d} \frac{4d}{(10+25)d} \approx 0,114 R_0$$

$$R_8 = \frac{\varphi}{d} \frac{50d}{8d} = 6,25 R_0$$

$$R_9 = \frac{\varphi}{d} \frac{8d}{(25+50)d} \approx 0,117 R_0 \quad \text{usw.}$$

werden dabei in einfacher Weise mittels der entsprechenden Flächenelemente erhalten.

Die Bestimmung von Ableitimpedanzen (s. oben) an den Trennlinien bietet nach dem in den obigen Abschnitten Gesagten keine Schwierigkeiten; auf weitere Beispiele wird deshalb verzichtet.

4.2. Genauigkeit der Netzwerkmethod

4.2.1. Fehler durch endliche Maschenweite

Im Prinzip ist die Maschenweite d bei der Nachbildung eines Feldproblems ein frei wählbarer Parameter. Nach oben ist sie jedoch durch den maximal zulässigen Fehler, nach unten durch die Gesteungskosten des Modells und den Zeitaufwand zur Messung und Auswertung begrenzt. In jedem einzelnen Fall ist für die Dimensionierung von d eine optimale Lösung im Hinblick auf Aufwand und verlangte Genauigkeit

anzustreben, d. h. man wählt für einen maximalen zulässigen Fehler die grösstmögliche Maschenweite.

Der zu untersuchende Fehler entsteht durch die Vernachlässigung der höhern Ableitungen bei der Umsetzung der Differential- in eine Differenzengleichung; er kann anhand der Taylorentwicklung als Funktion der Maschenweite berechnet werden. Dazu setzen wir in den Gln. (67) für die Maschenweite $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d$ und erhalten durch Multiplizieren mit $\frac{1}{d}$, paarweise Subtraktion und Auflösen die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{V_2 - V_1}{2d} - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} d^2 - \frac{1}{5!} \frac{\partial^5 V}{\partial x^5} d^4 - \dots \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{V_4 - V_3}{2d} - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 V}{\partial y^3} d^2 - \frac{1}{5!} \frac{\partial^5 V}{\partial y^5} d^4 - \dots \end{aligned} \quad (73)$$

für die ersten Ableitungen von V ; Multiplikation mit $\frac{1}{d^2}$, paarweise Addition und Auflösen führt analog auf die Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{V_1 - V_0}{d^2} + \frac{V_2 - V_0}{d^2} - \frac{2}{4!} \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} d^2 - \frac{2}{6!} \frac{\partial^6 V}{\partial x^6} d^4 - \dots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \frac{V_3 - V_0}{d^2} + \frac{V_4 - V_0}{d^2} - \frac{2}{4!} \frac{\partial^4 V}{\partial y^4} d^2 - \frac{2}{6!} \frac{\partial^6 V}{\partial y^6} d^4 - \dots \end{aligned} \quad (74)$$

für die zweiten Ableitungen. Die Fehler umfassen sämtliche ungeraden bzw. geraden Ableitungen höherer Ordnung und können in der Form

$$\begin{aligned} \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} d^2 + \frac{1}{5!} \frac{\partial^5 V}{\partial x^5} d^4 + \dots &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^{2n}}{(2n+1)!} \frac{\partial^{(2n+1)} V}{\partial x^{(2n+1)}} = F_{x1}(V) \\ \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 V}{\partial y^3} d^2 + \frac{1}{5!} \frac{\partial^5 V}{\partial y^5} d^4 + \dots &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^{2n}}{(2n+1)!} \frac{\partial^{(2n+1)} V}{\partial y^{(2n+1)}} = F_{y1}(V) \end{aligned} \quad (75)$$

$$\frac{2}{4!} \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} d^2 + \frac{2}{6!} \frac{\partial^6 V}{\partial x^6} d^4 + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d^{(2n-2)}}{(2n)!} \frac{\partial^{(2n)} V}{\partial x^{(2n)}} = F_{x2}(V) \quad (76)$$

$$\frac{2}{4!} \frac{\partial^4 V}{\partial y^4} d^2 + \frac{2}{6!} \frac{\partial^6 V}{\partial y^6} d^4 + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d^{(2n-2)}}{(2n)!} \frac{\partial^{(2n)} V}{\partial y^{(2n)}} = F_{y2}(V)$$

geschlossen dargestellt werden. Demzufolge ergibt sich exakt die Identität

$$\Delta V = \sum_{i=1}^4 \left(\frac{V_i - V_0}{d^2} \right) - F_2(V) \quad (77)$$

für den Laplaceschen Operator, wenn $F_2(V)$ die Summe

$$F_2(V) = F_{x2}(V) + F_{y2}(V) \quad (78)$$

darstellt. Zur Abschätzung dieses Fehlers in einem konkreten Fall müssen die höhern Ableitungen in Differenzenform ausgedrückt werden²⁰⁾S. 26-30, 29), 30).

Ersetzen wir in den Gln. (73) und (75) das Potential V durch die Permeabilität μ , so resultieren die Ausdrücke

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{2d} - F_{x1}(\mu) \quad (79)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\mu_4 - \mu_3}{2d} - F_{y1}(\mu)$$

für die Komponenten von grad μ , sodass neben dem Fehler $F_2(V)$ für den Laplaceschen Operator auch ein durch die endliche Maschenweite bedingter Fehler $F_1(\mu, V)$ für den Einspeisestrom I_0 angegeben werden kann. Durch Einsetzen der Beziehungen (73) und (79) in die Differentialgleichung (5) und Vergleichen mit der Formel (55) kann dieser Fehler leicht berechnet werden, jedoch sind für den Einspeisestrom diese Abweichungen im Vergleich zu den im Abschnitt 4.2.3. zu behandelnden "externen" Fehlern vernachlässigbar klein.

4.2.2. Fehler durch Widerstandstoleranzen

Jede Abweichung eines Widerstandes im Netzwerk von seinem Sollwert ergibt einen Fehler in der Potentialverteilung. Der Einfluss der Widerstandstoleranzen kann anhand der Differenzenform (48) für die Laplacesche Gleichung (6) unter gewissen vereinfachenden Annahmen berechnet werden. Interessant ist dabei vor allem die statistische Verteilung der Widerstandsabweichungen im praktischen Fall; mit dieser wollen wir uns im folgenden befassen.

Gegeben sei ein Kollektiv von N_0 Widerständen vom Sollwert R_0 mit individuellen Abweichungen $\pm \Delta R \ll R_0$; der Istwert

$$R = R_0 \left(1 \pm \frac{\Delta R}{R_0} \right) = R_0 (1 \pm \alpha) \quad (80)$$

sei eine stochastische Variable ξ mit kontinuierlicher Verteilung; diese Verteilung sei normal und die maximale Abweichung α entspreche der Toleranzgrenze α_0 . Für die in üblicher Weise durch $m = 0$ und $\sigma = 1$ charakterisierte normierte Verteilung kann dann die Variable

$$x = \frac{\xi - m}{\sigma} \quad (81)$$

mit $m =$ Mittelwert
 $\sigma =$ Standardabweichung (Varianz)

angeschrieben werden. Nehmen wir vorerst keine Toleranzbegrenzung an, so gilt die Beziehung

$$\frac{c}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = cI = 1 \quad (82)$$

für die normierte Verteilung, aus welcher die Konstante c berechnet werden kann. Mit den Relationen

$$I^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

(x) (y)

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r d\varphi dr = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = \frac{\pi}{4}$$

erhält dann die Gl. (82) die Form

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 1 \quad (83)$$

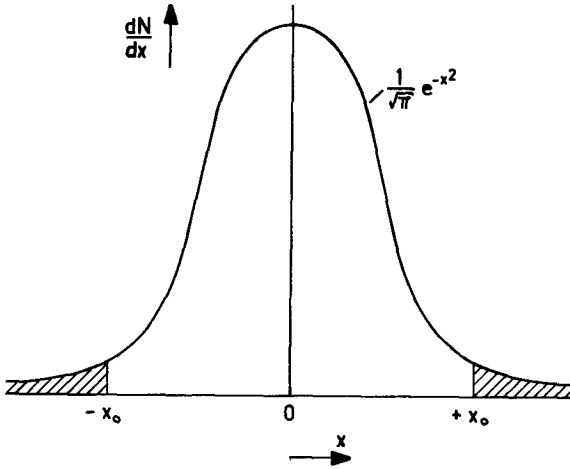


Abb. 38: Normierte Normalverteilung mit den Grenzen $\pm x_0$ für x entsprechend den Toleranzgrenzen $R_0(1 \pm \alpha_0)$ für R .

Dies ist jedoch nicht anderes als das Fehlerintegral, welches als

$$E_2(x_0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x_0} e^{-x^2} dx \quad (84)$$

in ³¹⁾ tabelliert ist. Sind nun $\pm x_0$ die Toleranzgrenzen, so darf ausserhalb dieser Grenzen kein Widerstandswert R liegen: Für die schraffierten Restflächen in Abb. 38

bedeutet dies die Ungleichung

$$2 \frac{N_0}{\sqrt{\pi}} \int_{x_0}^{\infty} e^{-x^2} dx \leq 1 \quad (85)$$

welche sich unter Berücksichtigung der mit N_0 multiplizierten Gl. (83) auch in der Form

$$N_0 \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x_0} e^{-x^2} dx \right] \leq 1 \quad (86)$$

darstellen lässt. Aus dieser Gl. (86) entnimmt man schliesslich die Forderung

$$E_2(x_0) \geq 1 - \frac{1}{N_0} \quad (87)$$

für das tabellierte Fehlerintegral; mithin wächst x_0 mit zunehmendem N_0 . Nimmt man beispielsweise

$$\begin{aligned} N_0 &= 200 \\ \alpha_0 &= 10^{-2} \text{ (Toleranz 1\%)} \\ R_0 &= 1000 \Omega \end{aligned}$$

so erhält man mit den Gln. (81), (87) und der Tabelle ³¹⁾ im Grenzfall die Grössen

$$\begin{aligned} E_2(x_0) &= 0,995 \\ x_0 &\approx 1,985 \\ \sigma(\alpha_0) &= \frac{\frac{1}{2} - m}{x} = \frac{R_0(1 \pm \alpha_0) - R_0}{x_0} \approx \pm 5 \Omega \end{aligned}$$

d. h. eine auf den Sollwert R_0 bezogene Standardabweichung von

$$\sigma \approx 5 \cdot 10^{-3}$$

In der Abb. 39 ist die bezogene Varianz σ in Funktion der Gesamtzahl N_0 der Elemente mit α_0 als Parameter aufgetragen. Mittels Ausmessung eines Kollektivs von im Netzwerk verwendeten Widerständen soll nun untersucht werden, ob die Ver-

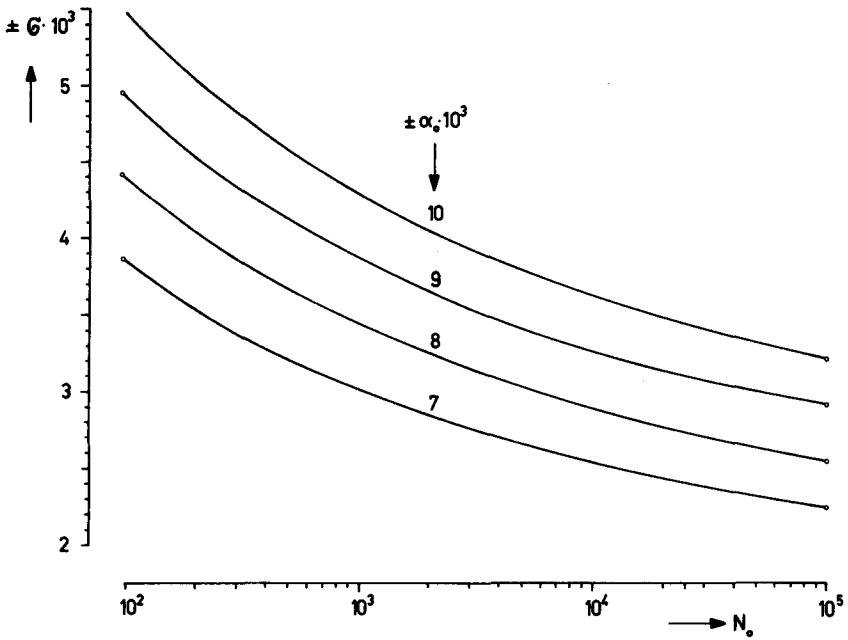


Abb. 39: Standardabweichung $\sigma(N_0)$ mit der Toleranzgrenze α_0 als Parameter.

teilung der stochastischen Variablen $R = \xi$ normal sei. Gemessen werden $N_0 = 600$ Widerstände vom Sollwert $R_0 = 1 \text{ k}\Omega$ und einer fabrikmässigen Toleranz von 1%; die Messgenauigkeit beträgt rund $5 \cdot 10^{-4}$ relativ und etwa 10^{-3} absolut. Diese 600 Elemente werden aufgeteilt in total 16 Klassen mit den Mittelpunkten 993 bis 1008 in Schritten von Eins und dann die Gewichte der einzelnen Klassen ausgezählt; die resultierende Verteilung ist aus der Abb. 40 ersichtlich und in der Tabelle 3 eingetragen. Darin bedeuten:

- ξ = stochastischer Istwert = R
- i = Nummer der Klasse
- ξ_i = Klassenmittelpunkt
- n_i = Anzahl Elemente der Klasse ξ_i
- p_i = Gewicht der Klasse ξ_i (auf Grundgesamtheit bezogene Wahrscheinlichkeit für das Antreffen von ξ in der Klasse ξ_i)

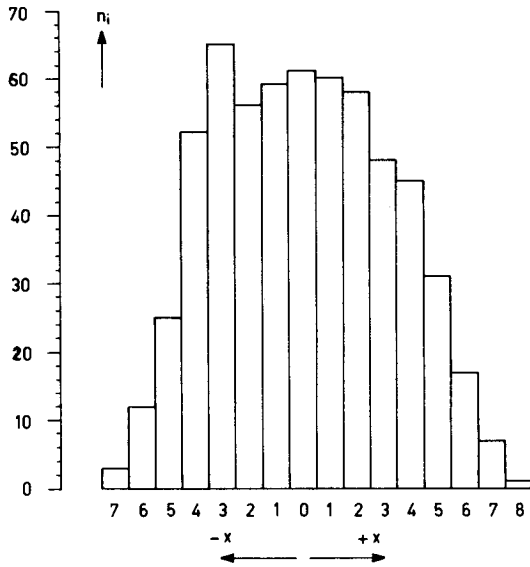


Abb. 40: Gemessene Verteilung der Widerstandsabweichungen nach Tabelle 3. Horizontal ist $(\frac{1}{2}i-1000)$ und vertikal ist n_i aufgetragen.

Tabelle 3

i	ξ_i	$\xi_i - 1000$	n_i	$n_i(\xi_i - 1000)$	$(\xi_i - 1000)^2$	$n_i(\xi_i - 1000)^2$
1	993	-7	3	-21	49	147
2	994	-6	12	-72	36	432
3	995	-5	25	-125	25	625
4	996	-4	52	-208	16	832
5	997	-3	65	-195	9	585
6	998	-2	56	-112	4	224
7	999	-1	59	-59	1	59
8	1000	0	61	0	0	0
9	1001	1	60	60	1	60
10	1002	2	58	116	4	232
11	1003	3	48	144	9	432
12	1004	4	45	180	16	720
13	1005	5	31	155	25	775
14	1006	6	17	102	36	612
15	1007	7	7	49	49	343
16	1008	8	1	8	64	64

Aus der Tabelle berechnen sich die Summen

$$\sum_{i=1}^{16} n_i = \sum_{i=1}^{16} 600 p_i = N_0$$

$$\sum_{i=1}^{16} n_i (\xi_i - 1000) = 22$$

$$\sum_{i=1}^{16} n_i (\xi_i - 1000)^2 = 6142$$

für die Ermittlung des Mittelwertes (mathematische Erwartung) und der Standardabweichung der gemessenen Verteilung.

Für den Mittelwert $E(\xi) = m$ erhalten wir aus der Definition

$$E(\xi) = \sum_{i=1}^k p_i \xi_i$$

entsprechend der Umformung

$$\begin{aligned} m &= \sum_{i=1}^{16} \frac{n_i}{600} (\xi_i - 1000 + 1000) \\ &= \frac{1}{600} \sum_{i=1}^{16} n_i (\xi_i - 1000) + \sum_{i=1}^{16} \frac{n_i}{600} \cdot 1000 \end{aligned}$$

die Grösse

$$m = 1000 + \frac{22}{600} \approx 1000,0366\dots$$

$$m \approx 1000 \Omega$$

Die Varianz σ^2 bestimmt sich als 2. Zentralmoment der Verteilung. Allgemein gilt für ein Moment μ_ν der Ordnung ν die Gleichung

$$\mu_\nu = E(\xi - c)^\nu \quad (88)$$

worin

c = beliebige Konstante

ν = positiv ganz

und speziell $c = m$ für die Zentralmomente, von denen uns das zweite ($\nu = 2$) interessiert; aus ihm berechnet sich nämlich die Varianz σ nach

$$\sigma^2 = \mu_2 = E(\xi - m)^2. \quad (89)$$

Beziehen wir das Zentralmoment auf eine beliebige Konstante c , so folgt aus der Gl. (88) die Beziehung

$$\begin{aligned} E(\xi - c)^2 &= E(\xi - m + m - c)^2 \\ &= E(\xi - m)^2 + 2(m - c) E(\xi - m) + (m - c)^2 \end{aligned}$$

worin speziell

$$E(\xi - m) = E(\xi) - E(m) = m - m = 0$$

ist und damit für μ_2 die Gleichung

$$\mu_2 = E(\xi - c)^2 - (m - c)^2 \quad (90)$$

resultiert. Wählen wir $c = 1000$, so kann der letzte Term in Gl. (90) vernachlässigt werden und es folgt:

$$\begin{aligned} \mu_2 &\approx E(\xi - 1000)^2 = \sum_{i=1}^{16} p_i (\xi_i - 1000)^2 \\ \mu_2 &\approx \frac{1}{600} \sum_{i=1}^{16} n_i (\xi_i - 1000)^2 = \frac{6142}{600} \\ \mu_2 &\approx 10,2366\dots \end{aligned}$$

und damit für die auf m bzw. $c = R_0$ bezogene Varianz der Wert

$$\underline{\sigma \approx 3,24 \cdot 10^{-3}}$$

Unter der Annahme, dass die gemessene Verteilung genau einer Normalverteilung entspricht, entnehmen wir der Abb. 39 für $N_0 = 600$ und $\xi_{\max} = 1008$ d. h. $\alpha_0 = 8 \cdot 10^{-3}$ ein σ_{\max} von $3,6 \cdot 10^3$, während für $\xi_{\min} = 993$ d. h. $\alpha_0 = -7 \cdot 10^{-3}$ ein $\sigma_{\min} = 3,14 \cdot 10^{-3}$ resultiert und mithin ein Mittel:

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})$$

$$\underline{\sigma \approx 3,36 \cdot 10^{-3}}$$

also im wesentlichen der aus den Messwerten erhaltene Wert.

Zusätzlich kann noch geprüft werden, inwieweit die gemessene Verteilung normal ist. Man benutzt dazu ein von R. A. Fisher³²⁾ angegebenes Verfahren, nach welchem aus dem dritten Zentralmoment der gemessenen Verteilung die Schiefe der Verteilung berechnet wird; eine Grösse, welche im wesentlichen die Abweichung der Verteilung von einer streng symmetrischen Verteilung misst. Aus dem 4. Zentralmoment wird schliesslich der Exzess der Verteilung bestimmt; dieser Exzess ist ein Mass für die Ueberhöhung einer (symmetrischen) Verteilung im Vergleich zu einer Normalverteilung.

Für die gemessene Verteilung ergibt sich, dass sowohl für die Schiefe wie auch für den Exzess die entsprechende Standardabweichung grösser ist als die betreffende Grösse selber. Man darf deshalb gemäss A. Linder³³⁾ annehmen, dass die Verteilung der gemessenen Widerstandswerte mit ziemlicher Genauigkeit einer Normalverteilung entspricht.

Aus der stochastischen Verteilung der Widerstandsabweichungen in einem Netzwerk resultiert nun ein entsprechend verteilter Potentialfehler, den wir im folgenden berechnen wollen. Dazu betrachten wir ein aus identischen Widerständen R_0 bestehendes rechteckiges Netzwerk nach Abb. 41 mit den Abmessungen $l_x = k_x d$ resp. $l_y = k_y d$ und mit den Randwerten $2R_0$ gemäss Abschnitt 4.1.1. Werden darin alle Maschenpunkte $y = 0$ resp. $y = k_y d$ miteinander verbunden und eine Spannung $V_1 = 10 k_y$ angelegt, so entsteht über jeder Masche in y -Richtung ein Spannungsabfall von $\Delta V = 10 V$, während dieser in x -Richtung gleich Null ist. In einem Netzwerk mit $k_x = 46$ und $k_y = 45$ habe nun der zentrale Widerstand (Abb. 41) einen vom Sollwert R_0 abweichenden Wert R nach Gl. (80); über ihm entsteht dann ein zusätzlicher Spannungsabfall δV mit dem Vorzeichen der Widerstandsänderung $\Delta R = \alpha R_0$. In der Beziehung

$$\frac{\delta V}{\Delta V} = k_r \frac{\Delta R}{R_0} \quad (91)$$

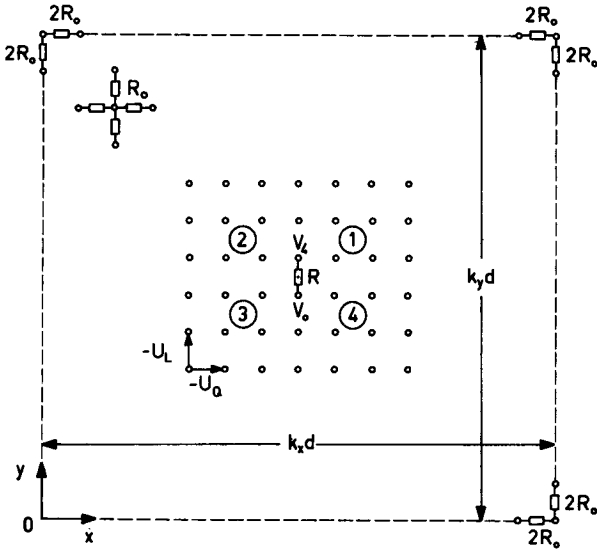


Abb. 41: Netzwerk und -ausschnitt zur Bestimmung der Potentialabweichungen in den Punkten rund um einen einzelnen vom Sollwert verschiedenen Widerstand.

für die bezogene Aenderung von ΔV ist im linearen Fall (Widerstandskette) $k_r = 1$, im zweidimensionalen Fall hat k_r jedoch einen kleinern Wert; diesen wollen wir nun experimentell bestimmen. Da jedoch im zur Verfügung stehenden Netzwerk die einzelnen Widerstände mit Abweichungen α derselben Größenordnung behaftet sind, wie wir sie für den zentralen Widerstand vorauszusetzen haben, müssen wir dabei indirekt vorgehen: Wir messen die Potentialabweichungen für eine Reihe grösserer Abweichungen α und extrapolieren dann nach den uns interessierenden Werten.

Ohne Einbusse an Allgemeingültigkeit können wir uns dabei auf die einfacher herzustellenden Fälle mit $R < R_0$ aus Gl. (80) beschränken: Der zwischen den Potentialpunkten V_0 und V_4 der Abb. 41 liegende zentrale Widerstand R_0 wird dann durch Parallelschalten von

$$R_p = \frac{1-\alpha}{\alpha} R_0$$

auf den Wert $R = (1-\alpha)R_0$ verändert entsprechend den Werten der Tabelle 4; zudem untersuchen wir den Fall $R = \infty$.

Tabelle 4

α	0,025	0,05	0,1	0,2	0,5	1
$\frac{R_p}{R_0}$	39	19	9	4	1	0
$\frac{R}{R_0}$	0,975	0,95	0,9	0,8	0,5	0

In einem $7.6 = 42$ Maschenpunkte umfassenden Ausschnitt (Abb. 41) rund um den zentralen Widerstand messen wir nun sämtliche Maschenspannungen d. h. 35 Längsspannungen U_L (Größenordnung 10 V) und 36 Querspannungen U_Q (Größenordnung mV) zuerst einmal für den Fall $\alpha = 0$ und anschliessend für die Fälle $\alpha \neq 0$. Für einen beliebigen Fall $\alpha \neq 0$ ist dann das Vorgehen für die Auswertung das folgende: Aus den Querspannungen $U_Q(\alpha)$ werden anhand der $U_Q(\alpha = 0)$ korrigierte Querspannungen $U'_Q(\alpha)$ berechnet und dann die sich entsprechenden (zum Mittelpunkt des Ausschnitts zentrisch-symmetrischen) $U''_Q(\alpha)$ der vier Quadranten 1...4 nach Abb. 41 als $U''_Q(\alpha)$ gemittelt. Ebenso werden aus den Längsspannungen $U_L(\alpha)$ korrigierte $U'_L(\alpha)$ anhand der $U_L(\alpha = 0)$ berechnet und dann die $U''_L(\alpha)$ als Mittel aus den sich entsprechenden $U'_L(\alpha)$ der vier Quadranten erhalten. Für die Bestimmung der auf Null bezogenen Maschenpunktpotentiale muss nun ein Punkt des Ausschnitts festgelegt werden; logischerweise wählen wir dazu den Mittelpunkt des Ausschnitts. Ausgehend von den Längsspannungen $U''_L(\alpha)$ der zentralen Vertikalen werden die Potentiale nun anhand der korrigierten gemittelten Querspannungen $U''_Q(\alpha)$ berechnet, wobei die weitem $U''_L(\alpha)$ lediglich zur Kontrolle dienen.

Infolge der Symmetrie der Anordnung beschränken wir uns auf die Aufzeichnung der Potentiale im ersten Quadranten und geben dabei der Anschaulichkeit halber nur die Abweichung (in Volt) vom Sollpotential des idealen Netzes (mit $R \equiv R_0$) für $R \neq R_0$ an. Diese Abweichungen ergeben nach Multiplikation mit einem Faktor 10 direkt die prozentualen Fehler der Potentiale, bezogen auf die Maschenspannung von 10 Volt; sie sind in den Abb. 42...48 dargestellt.

Um die Abhängigkeit der Potentialfehler von der Lage des veränderten Widerstandes im Netz zu bestimmen, wird ein Widerstand in unmittelbarer Nähe des Randes variiert und die ganze Messerie wiederholt; d. h. die eine seitliche Begrenzung des Ausschnittes auf Abb. 41 fällt mit dem Netzwerkrand zusammen. Mit dem Unterschied, dass die Potentialabweichungen auf der Seite des freien Randes besonders für grössere α bedeutend langsamer abnehmen, ändert jedoch interessanterweise in Bezug auf den symmetrischen Fall wenig; insbesondere hat die Potentialabweichung ΔV

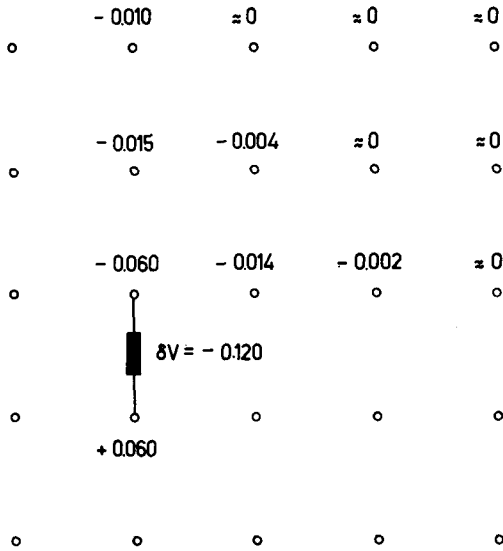


Abb. 42: Erster Quadrant des Ausschnitts von Abb. 41 mit den approximativen Potentialänderungen in Volt für den Fall $\alpha = 0,025$ d.h. $R/R_0 = 0,975$ in einem idealen Netz.

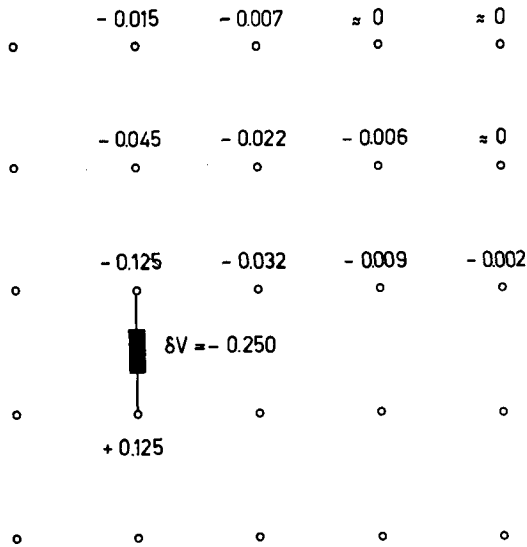


Abb. 43: Wie Abb. 42, aber für $\alpha = 0,05$ entsprechend $R/R_0 = 0,95$.

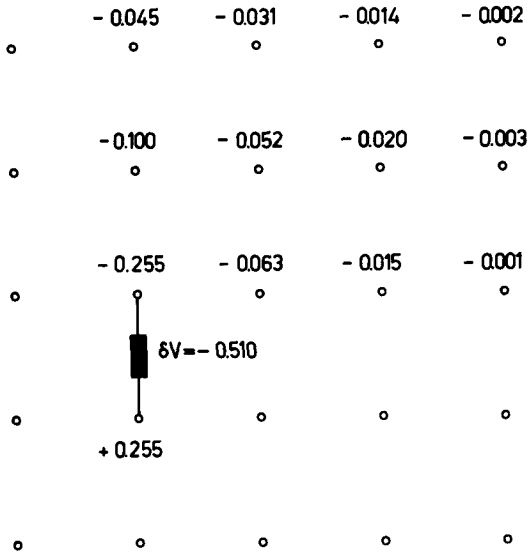


Abb. 44: Wie Abb. 42, jedoch für $\alpha = 0,1$ d. h. $R/R_0 = 0,9$.

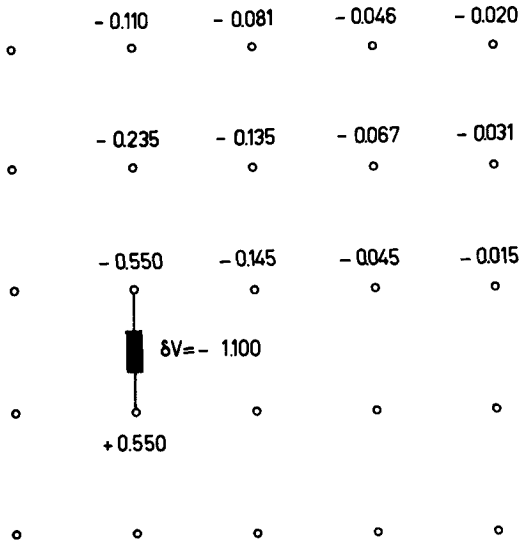


Abb. 45: Wie Abb. 42, aber für $\alpha = 0,2$ entsprechend $R/R_0 = 0,8$.

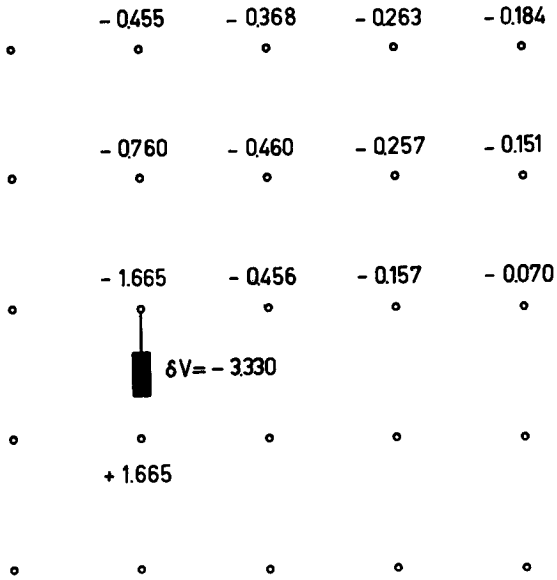


Abb. 46: Wie Abb. 42, jedoch für $\alpha = 0,5$ d. h. $R/R_0 = 0,5$.

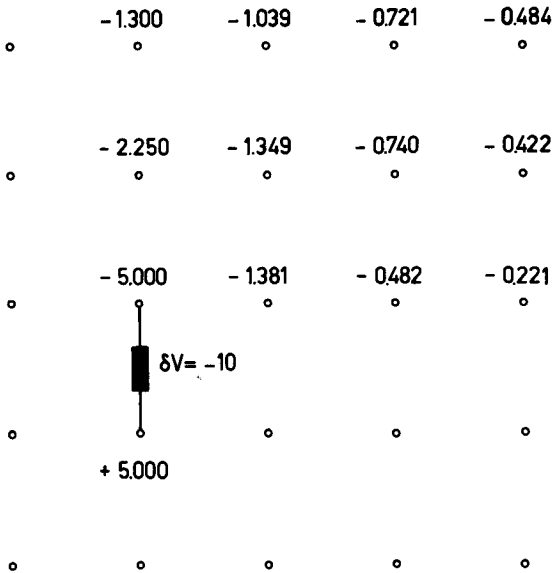


Abb. 47: Wie Abb. 42, aber für $\alpha = 1$ entsprechend $R = 0$.

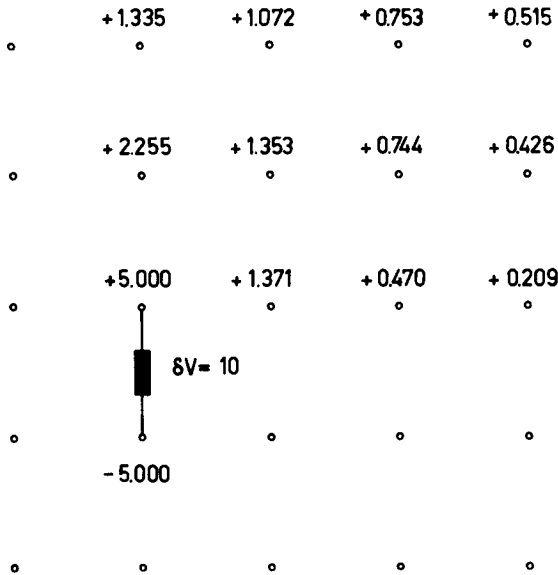


Abb. 48: Wie Abb. 42, jedoch für $R = \infty$.

über dem veränderten Widerstand bis auf einige Prozente denselben Wert, den wir also für die weitere Rechnung benutzen. Auf doppelt-logarithmischem Papier ist die Funktion $\delta V = \delta V(\alpha)$ für den Bereich $\alpha < 0,2$ mit sehr guter Näherung eine Gerade, sodass mit der Masstabsänderung $a = 100\alpha$ der Zusammenhang

$$\delta V = k_v a^m \tag{92}$$

gelten muss. Die beiden Konstanten k_v und m werden etwa mittels der Beziehungen

$$k_v = \delta V(a = 1)$$

$$m = \log \frac{\delta V(a = 10)}{\delta V(a = 1)}$$

bestimmt, sodass die Gl. (92) nun in numerischer Form als

$$\delta V \approx 0,046a^{1,044} \text{ Volt} \tag{93}$$

angeschrieben wird. Mit $k_v = 0,05$ und für die uns interessierenden Werte $a < 1$ auch mit $m = 1$ begeben wir uns auf die sichere Seite, sodass wir nach Normierung

mit der Maschenspannung $\Delta V = V_{04} = 10V$ anstelle der Gl. (93) die einfache Formel

$$\frac{\delta V}{\Delta V} = \frac{1}{2} \frac{\Delta R}{R_0} \quad (94)$$

eingeführen. Es sei noch bemerkt, dass durch eine einfache Betrachtung nahezu derselbe Wert für k_r erhalten wird. Nimmt man nämlich

$$\begin{aligned} R_1 &= R_2 = R_3 = R_0 \\ R_4 &= R_0(1 + \alpha) \\ V_1 &= V'_1 \quad V_2 = V'_2 \quad V_3 = V'_3 \\ V_4 &= V'_4 + \frac{\delta V}{2} \quad V_0 = V'_0 - \frac{\delta V}{2} \end{aligned}$$

für die Anordnung nach Abb. 19, setzt in den Ausdruck (48) für den Laplaceschen Operator ein, subtrahiert hievon die Gl. (37) und vernachlässigt in der Differenz

$$\frac{5}{2} \delta V - \alpha(V'_4 - V'_0) - \alpha \delta V = 0$$

den letzten Term als von 2. Ordnung klein, so gilt die Beziehung

$$\frac{\delta V}{\Delta V} = \frac{2}{5} \frac{\Delta R}{R_0}$$

für die bezogene Abweichung δV . Sie ergibt Unterschiede von 10...20% gegenüber den Formeln (93) bzw. (94) d.h. die Potentialabweichungen in der weitem Umgebung sind nur von geringem Einfluss.

Die Gl. (94) ergibt also den lokalen Fehler aus der Aenderung eines einzelnen Widerstandes. Gehorcht nun $\left(\frac{\Delta R}{R_0}\right)$ einer statistischen Verteilung mit der Varianz $\sigma\left(\frac{\Delta R}{R_0}\right)$, so gehorcht der R_0 entsprechende Lokalfehler einer proportionalen R_0 statistischen Verteilung mit der Varianz

$$\sigma\left(\frac{\delta V_x}{V_1}\right) = \frac{\sigma(\alpha)}{2 k_x}$$

für die x-Richtung und der Varianz

$$\sigma\left(\frac{\delta V_y}{V_1}\right) = \frac{\sigma(\alpha)}{2 k_y}$$

für die y-Richtung, wenn wir die Fehler auf die gesamte Spannung von je V_1 über den k_x bzw. k_y Maschen beziehen und in beiden Richtungen ein homogenes Feld mit konstantem Potentialgradienten annehmen. Nach dem Satz von Pythagoras für die Überlagerung unabhängiger Funktionen ist dann

$$\sigma_A \left(\frac{\delta V}{V_1} \right) = \sqrt{2 \sigma_x^2 + 2 \sigma_y^2}$$

$$\sigma_A \left(\frac{\delta V}{V_1} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma(\alpha) \sqrt{k_x^{-2} + k_y^{-2}} \quad (95)$$

die Varianz des lokalen Fehlers für V_0 aus der Abweichung aller 4 umliegenden Widerstände. Die statistische Häufung der Lokalfehler für das ganze Netzwerk ergibt nun einen dem lokalen Fehler überlagerten mittleren Fehler der Feldverteilung, dessen Varianz nach der Formel

$$\sigma_B = \sqrt{\sum_{m=1}^{k_x} \sum_{n=1}^{k_y} \frac{\sigma_A^2(m,n)}{k_x k_y}} = \sigma_A \quad (96)$$

berechnet wird, wenn $\sigma_A(m, n)$ die Varianz des Lokalfehlers im Punkt P ($x = md$, $y = nd$) bedeutet. Die Standardabweichung $\sigma_{\text{ges}} \left(\frac{\delta V}{V_1} \right)$ des totalen Fehlers im Punkt P(m, n) entsprechend

$$\sigma_{\text{ges}} \left(\frac{\delta V}{V_1} \right) = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$$

lässt sich dann schliesslich mit den Gln. (95) und (96) als

$$\sigma_{\text{ges}} \left(\frac{\delta V}{V_1} \right) = \sigma(\alpha, N_0) \sqrt{\frac{1}{k_x^2} + \frac{1}{k_y^2}} \quad (97)$$

anschreiben. Gemäss der Untersuchung von G. Liebmann¹⁸⁾ muss man sich hierbei bewusst bleiben, dass diese Beziehung für Felder mit variablem Potentialgradienten nur angenähert gilt. Der wirkliche Fehler ist nämlich in Gebieten mit starkem Feldgradienten d. h. für

$$k_x d \frac{\partial V}{\partial x}, \quad k_y d \frac{\partial V}{\partial y} > V_1$$

grösser und in Gebieten mit schwachem Feldgradienten d. h. für

$$k_x d \frac{\partial V}{\partial x}, \quad k_y d \frac{\partial V}{\partial y} < V_1$$

kleiner als aus Gl. (97) berechnet; diese Gleichung gibt demnach in Feldern mit variablem Potentialgradienten nurmehr eine Abschätzung für den mittleren Fehler, die zwar durchaus brauchbar ist.

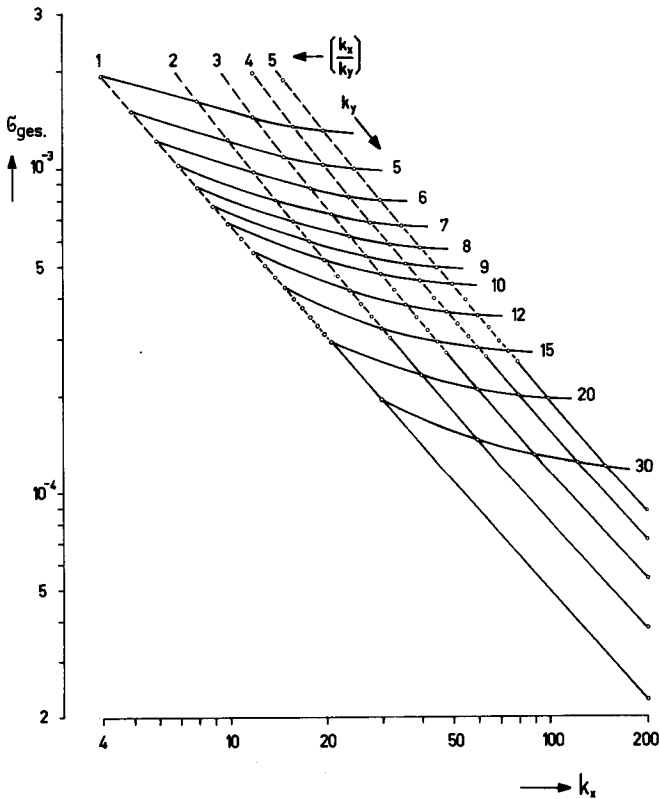


Abb. 49: Totaler Potentialfehler σ_{ges} im allgemeinen Punkt eines Netzwerkes der Abmessungen $k_x \cdot d$, $k_y \cdot d$ in Funktion von k_x mit k_y bzw. k_x/k_y als Parameter.

Die Beziehung (97) ist in Abb. 49 in Funktion von k_x aufgetragen, wobei k_y bzw. das Verhältnis $\left(\frac{k_x}{k_y}\right)$ als Parameter auftritt und die $\sigma(\alpha, N_0)$ der Abb. 39 für $\alpha_{\max} = 0,01$ entnommen sind. Die nicht eingetragenen Kurven mit $\frac{k_x}{k_y} < 1$ können dabei aus den berechneten Kurven mit $\frac{k_x}{k_y} > 1$ herausgezeichnet werden; im übrigen sind ja k_x und k_y jederzeit vertauschbar. Aus dieser Abbildung geht hervor, dass für die uns interessierenden Fälle die Varianz des Fehlers (zum Teil wesentlich) kleiner als $5 \cdot 10^{-4}$ ist, d. h. die durch die Widerstandstoleranzen bedingten Fehler sind vernachlässigbar klein.

4.2.3. Externe Fehler

Neben den zwei internen Fehlermöglichkeiten (endliche Maschenweite; Widerstandstoleranzen) treten bei der Netzwerkmethodem weitere Fehler auf, die wir als "externe" bezeichnen. Sie sollen in ihrer Reihenfolge zeitlich-längs eines Iterations-schrittes betrachtet werden.

a) Angelegte Randwerte (Durchflutung)

Die entsprechenden Gleichspannungspotentiale werden einem Hochkonstant-Netzgerät (Steinlein HK 101) entnommen, wobei die Netzspannung zur Erhöhung der Stabilität zusätzlich mit Hilfe eines Wechsellspannungsreglers (Sorensen 500 - 2S) konstant gehalten wird. Die Potentiale werden mittels eines digitalen Voltmeters (Hewlett-Packard 405-AR) mit einer absoluten Genauigkeit von $\pm 0,2\% \pm 1$ digit gemessen.

b) Berechnung der Feldstärke

Die magnetische Feldstärke H wird aus den Gln. (56) und (57) berechnet. Dabei werden die Potentialdifferenzen direkt gemessen ($\pm 0,2\%$) und H mittels Rechenschieber bzw. Logarithmentafel (max. $\pm 0,3\%$) bestimmt, sodass H mit einem maximalen Fehler von $\pm 0,5\%$ behaftet ist.

c) Berechnung der Einspeiseströme

Der Magnetisierungskurve (über die Permeabilitätskurve, μ_r als Funktion von H) entnimmt man zunächst die μ_{r1} mit einem schwer abzuschätzenden Fehler. Die eigentliche Ablesegenauigkeit von etwa $\pm 1\%$ fällt dabei kaum ins Gewicht; vielmehr muss man beachten, dass die genauen magnetischen Eigenschaften des betrachteten Materials bei der Vorausberechnung praktisch nie bekannt sind. Schliesslich werden diese innerhalb eines nicht kleinen Streubereiches möglichen Abweichungen

(von den mittleren Werten) oft noch übertroffen durch Ungenauigkeiten, die durch die graphisch gegebene sogenannt "genaue" Magnetisierungskurve bedingt werden. Vorsichtigerweise setzen wir für diesen Fehler je nach dem betrachteten Medium 3...5% ein, müssen ihn aber für die Bestimmung der eigentlichen Genauigkeit des Analogieverfahrens nicht einbeziehen, denn vom Netzwerk aus gesehen ist die verwendete $\mu_r(H)$ - Kurve "genau".

Die Einspeiseströme berechnen sich schliesslich aus der Gl. (55); darin sind die $(V_i - V_k)$ wiederum direkt gemessen ($\pm 0,2\%$). Mit den auf $\pm 1,5\%$ gegebenen μ_{ri} erhält man dann unter Berücksichtigung der Rechenschiebergengenauigkeit und des erhöhten Fehlers durch die Differenzbildung im Zähler die Ströme mit einem maximalen Fehler von etwa $\pm 2,7\%$.

d) Messung der Einspeiseströme

Die Ströme werden als Spannungsabfälle an Widerständen der Toleranz $\pm 0,5\%$ (s. Abschn. 4.5.2) mit einer Genauigkeit von $\pm 0,2\%$ gemessen, mithin mit einem grössten Fehler von $\pm 0,7\%$. Der mittlere Fehler reduziert sich durch die stochastische Verteilung der Widerstandsabweichungen auf etwa $\pm 0,5\%$.

Der Gesamtfehler für das Netzwerk ist demzufolge hauptsächlich durch jenen der Einspeiseströme gegeben, die mit einem maximalen Fehler (als Summe der vorstehenden Teilfehler) von $\pm 3,2\%$ behaftet sind. Wir müssen nun aber berücksichtigen, dass diese Ströme nur die Nichtlinearität des magnetischen Mediums d.h. die Störfunktion zur Laplace'schen Differentialgleichung darstellen. In Gebieten schwacher Nichtlinearität wird infolgedessen der maximale Gesamtfehler kleiner sein als dieser Betrag, während in Gebieten starker Linearität der resultierende Gesamtfehler gleich gross oder noch etwas grösser wird, weil dann auch die durch die endliche Maschenweite bedingte Abweichung eine Rolle zu spielen beginnt. Der Gesamtfehler wird demzufolge je nach dem betrachteten Medium in den Grenzen von etwa 2,5...3,5% liegen; hierzu addiert sich jeweils der prinzipielle Fehler von 3...5% aus der Fabrikationstoleranz des Magnetmaterials.

4.3. "Reduzierte" Einspeisung

Bei der Behandlung eines bestimmten Feldproblems ist es oft wünschenswert, die Anzahl der für die Darstellung der Nichtlinearität des magnetischen Mediums benötigten Einspeiseströme bzw. -zweige zu reduzieren, ohne dabei die Maschenweite bei der Nachbildung und damit den Fehler nach den Gln. (76)...(78) zu vergrössern. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn der nichtlineare Feldteil mehr

Maschenpunkte aufweist als Einspeiseweige zur Verfügung stehen (150 nach Abschn. 4.5.2.) oder wenn das untersuchte Feld sich durch nur schwache Nichtlinearität auszeichnet, sodass man ohne Ueberschreitung des üblichen Fehlers auf eine punktweise Einspeisung des Korrekturstromes verzichten und mehrere Speiseweige zusammenfassen kann. Die Zulässigkeit der reduzierten Einspeisung bezw. die dadurch bedingte Vergrößerung des Fehlers kann dabei in jedem Falle anhand des in Abschn. 4.2.1. Ausgeführten abgeklärt werden.

Betrachten wir einmal den in Abb. 50 dargestellten Netzwerkausschnitt. Anstatt nun in jeden Maschenpunkt einen Strom I_0 nach Gl. (55) einzuspeisen, nehmen wir

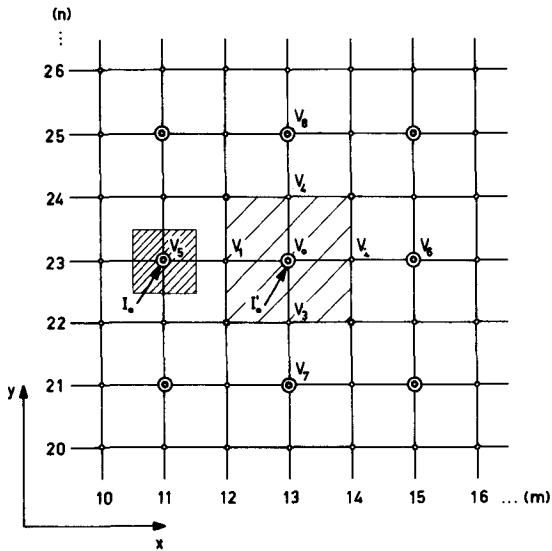


Abb. 50: Netzwerkausschnitt zur Untersuchung der reduzierten Einspeisung.

diese Einspeisung in jeder Richtung (x, y) nur in jedem zweiten Punkte vor, also z. B. für alle Maschenpunkte mit

$$x = md, \quad y = nd$$

für welche m und n ungerade sind (Abb. 50): Im wesentlichen haben wir dann ein Analogon mit verdoppelter Maschenweite bezüglich I_0 bezw. mit einem verdoppelten Netz-
widerstand. Aus den schraffierten Flächenelementen (Einspeisestrom I_0 in V_5 bezw.

I_0' in V_0) folgt dann, dass der neue Einspeisestrom I_0' entsprechend einer verdoppelten Maschenweite $d' = 2d$ zu bestimmen ist, während diese für das Potential unverändert d beträgt; demzufolge könnte der Einspeisestrom I_0' für den Potentialpunkt V_0 aus den Potentialen $V_5 \dots V_8$ mit $d' = 2d$ berechnet werden. Nun nimmt aber das Potential zwischen $V_0 \rightarrow V_i$ und $V_i \rightarrow V_{i+4}$ mit $i = 1, 2, 3, 4$ gemäss den Relationen

$$V_1 \neq \frac{1}{2} (V_0 + V_5)$$

$$V_2 \neq \frac{1}{2} (V_0 + V_6) \text{ usw.}$$

infolge der in Bezug auf $d' = 2d$ zusätzlichen Querverbindungen nicht linear zu, sofern der Potentialgradient zwischen V_0, V_5 bzw. V_0, V_6 usw. nicht sowieso konstant ist. Zur Verbesserung der Genauigkeit bestimmen wir deshalb den Einspeisestrom I_0' in V_0 aus den Potentialen $V_1 \dots V_4$, wobei dann einfach dieser Strom I_0' das vierfache dessen beträgt, der aus diesen vier umliegenden Potentialen bei nicht reduzierter Einspeisung nach Gl. (55) berechnet würde.

Neben dieser beschriebenen Reduktionsmöglichkeit können natürlich noch andere Arten der reduzierten Einspeisung verwendet werden. Beschränken wir beispielsweise die Einspeisung auf die Maschenpunkte für welche die Summe $(m+n)$ gerade ist, so wird die notwendige Anzahl Speiseweige um einen Faktor 2 reduziert statt um einen Faktor 4 wie für den oben beschriebenen Fall.

4.4. Stabilität und Konvergenz

Bei der numerischen Lösung von partiellen Differentialgleichungen (Relaxationsverfahren) werden die Raumkoordinaten - bei nicht zeitfreien wie der Diffusions- oder der Wellengleichung auch die Zeit - mit endlichen Differenzen diskretisiert. Dasselbe geschieht bei dem Analogieverfahren mit einem elektrischen Netzwerk (s. Abschn. 3.1.2.), hier allerdings normalerweise nur für die Raumkoordinaten. In der Entwicklung der numerischen Methoden wurde nun schon früh das Phänomen der numerischen Instabilität beobachtet: Diese besteht darin, dass ein zu einem bestimmten Zeitpunkt des Iterationsverfahrens vorhandener Fehler (z. B. unvermeidbare Rundungsfehler) im Laufe des Verfahrens anwächst und schliesslich die exakte Lösung völlig überschattet; eine solche ungünstige Fehlerfortpflanzung macht die Rechnung natürlich unbrauchbar. Schon früh wurde deshalb nach Bedingungen gesucht, welche die gewünschte gedämpfte Fehlerfortpflanzung gewährleisten. Diese Stabilitätskriterien sind teilweise von L. Collatz³⁴⁾ beschrieben worden; dazu bietet die Arbeit³⁵⁾ von G. G. O'Brien

und Mitarbeitern eine systematische und einheitliche Darstellung sämtlicher bis dahin entwickelter Methoden für Analyse und Verbesserung der Stabilität von Differenzenformen partieller Differentialgleichungen. Nun sind aber diese Kriterien nicht ohne weiteres auf die Netzwerkmethod e anwendbar. Die speziell hierfür angestellten Untersuchungen von W. J. Karplus²²⁾, (S.109-113); ³⁶⁾ und J. N. Franklin³⁷⁾ beziehen sich hauptsächlich auf die Diffusions- und Wellengleichung; für allgemeinere Formen der Poissongleichung ist nur die Arbeit³⁸⁾ von M. E. Fisher bekannt. Diese leitet für die zweidimensionale Gl. (35) eine exakte Stabilitätsbedingung ab, wenn die Störfunktion $f(P)$ linear und nur von P abhängt. Diese Bedingung entartet in eine blosse Abschätzung, wenn $f(P)$ komplizierter wird, z. B. wenn die Störfunktion verallgemeinert eine Abhängigkeit von x bzw. y enthält oder eine Ableitung von P aufweist oder eine nichtlineare Funktion von P ist. Für den uns interessierenden Fall der Gl. (5) sind aber alle diese Verallgemeinerungen erfüllt, sodass mit einer derartigen³⁸⁾ Untersuchung bestenfalls eine rohe Abschätzung einer Stabilitätsbedingung möglich ist. Andererseits aber findet M. E. Fisher, dass "if it is known from physical insight that the required solution of a particular equation is not of an oscillatory nature, then any of the computing schemes will probably be satisfactory" und dieses Kriterium ist für alle uns interessierenden Probleme gültig.

Wenn die Frage der Stabilität auf diese Weise einigermaßen geklärt ist, gilt dies in viel geringerem Masse für die Konvergenz. Eine Differenzenapproximation wollen wir "konvergent" heissen, wenn die Näherungslösung der Differenzgleichung sich mit fortschreitender Iteration der exakten Lösung des Problems betragsmässig monoton nähert. In der Literatur ist nun aber noch kein allgemeines Kriterium für die Konvergenz bekannt und es ist einleuchtend, dass eine Bedingung über das Stabilitätsverhalten noch nichts - wenigstens im mathematischen Sinne - über die Abweichung der Lösung von der exakten aussagt. Hingegen ist es eine empirische Tatsache²²⁾ dass, sofern eine Approximation mit endlichen Differenzen stabil ist, sie auch konvergiert. Stabilität zieht Konvergenz nach sich; die Umkehrung dieses Satzes ist jedoch nicht unbedingt sinnvoll.

Für unsere Zwecke können wir nun nach dem Gesagten annehmen, dass die Stabilität des Verfahrens durch die Natur der untersuchten Probleme gesichert ist, während wir die Konvergenz bzw. deren Güte an einfachen Anwendungsbeispielen untersuchen werden.

4.5. Beschreibung des Netzwerkes

4.5.1. Aufbau des eigentlichen Netzwerkes

Verwendet wird das in ²⁰⁾(S.15-16) beschriebene Netzwerk, welches einen Netzwidehrstand von $3,5 \text{ k}\Omega$ aufweist und rund 50.50 Maschenpunkte umfasst. Für bestimmte Probleme brauchen wir zusätzlich ein Netzwerk, dessen Widerstände einzeln auswechselbar sind. Die Variante mit an den Buchsen angelöteten Widerständen ²⁰⁾ ist dabei nicht vorteilhaft, denn durch das wiederholte Ein- und Auslöten - abgesehen vom Arbeitsaufwand - können infolge der grossen Wärmekapazität der Buchsen leicht irreversible Widerstandsänderungen auftreten. Deshalb wurden für das zweite Netzwerk Schraubbuchsen gemäss Abb. 51 verwendet, die auf einer Hart-

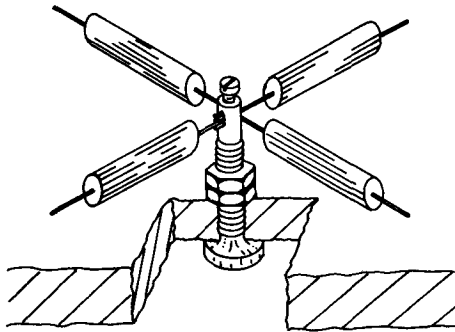


Abb. 51: Schraubbuchse in einem Maschenpunkt V_0 mit den 4 (auswechselbaren) Widerständen $R_1 \dots R_4$ zu den Potentialpunkten $V_1 \dots V_4$.

papierplatte montiert sind. Letztere wird mit einem Rahmen aus gelochtem Profilleisen versehen und an Haken an der Wand aufgehängt. Der Netzwidehrstand beträgt $1 \text{ k}\Omega$ (s. Abschn. 4.2.2.) für das Grundgebiet.

4.5.2. Stromeinspeiseanlage

Die verwendete Stromeinspeiseanlage ist in ²⁰⁾ (S.17) beschrieben. Sie besteht aus 150 Einheiten mit je einem Doppelpotentiometer $5 + 0,5 \text{ M}\Omega$ zur Grob- und Feinregulierung des Stroms. Anstatt jedoch den Strom mit einem jeweils in den betreffenden Speiseweig eingeschalteten Ampèremeter zu messen, verwenden wir für jeden Maschenpunkt die in Abb. 52 dargestellte Einheit. In einer isolierenden Scheibe sind

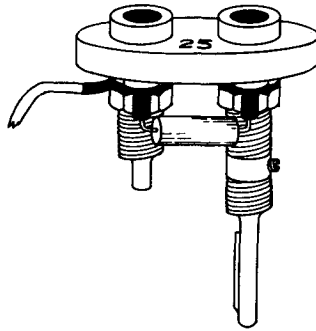


Abb. 52: Einheit zur Messung des Einspeisestromes. Numerierung entsprechend dem zugehörigen Maschenpunkt und dem Doppelpotentiometer zur Strom-einstellung.

zwei Buchsen montiert; die erste ist über ein Kabel mit dem entsprechenden Doppelpotentiometer verbunden, mit der zweiten ist ein Bananenstecker fest verschraubt und zwischen beiden liegt (an Lötösen) ein Widerstand $R_g = 10 \text{ k}\Omega \pm 0,5\%$. Der Einspeisestrom wird dann als Spannungsabfall $R_S I_0$ zwischen den 2 Buchsen bestimmt, während das Potential des Maschenpunktes an der zweiten Buchse gemessen wird. Erstens kann so einmal das lästige Umstecken für die Messung vermieden werden und zweitens können die hohe Präzision und bequeme Ablesbarkeit des verwendeten digitalen Voltmeters (s. nächster Abschnitt) auch hier ausgenützt werden.

4.5.3. Verwendete Instrumente

Neben dem eigentlichen Netzwerk und der Stromspeiseanlage werden nur noch 3 weitere Instrumente verwendet. Zur Erhöhung der Stabilität der Gleichspannungen aus dem Netzgerät wird einmal die Netzspannung mit einem magnetischen Regler Sorensen 500-2S konstant gehalten. Daran angeschlossen sind das Hochkonstant-Netzgerät Steinlein HK 101 und das automatische digitale Röhrevoltmeter Hewlett-Packard 405 AR. Das Netzgerät verfügt über 2 Systeme 120... 400 V, 0...100 mA mit einer Genauigkeit besser als $\pm 0,15\%$ und ein System 0...150 V, 0...25 mA mit einer Genauigkeit besser als $\pm 0,5\%$; alle drei Systeme sind massefrei. Die ersten zwei Systeme werden in Serie geschaltet und für die Stromspeisung verwendet, während das dritte zum Anlegen der Randwerte dient. Das digitale Voltmeter hat eine relative - nach Eichung mit der eingebauten Eichspannungsquelle absolute - Genauigkeit von $\pm 0,2\% \pm 1$ digit. Der hohe Eingangswiderstand von $11\text{ M}\Omega$ erlaubt Messungen zwischen beliebigen Punkten des Netzwerkes, ohne dass man eine Störung des Feldes befürchten muss. Dieser Punkt scheint von andern Autoren (G. Liebmann, G. Čremošnik u.a.m.) nicht beachtet zu sein. Mit diesem Voltmeter wurden sämtliche in dieser Arbeit ausgeführten Messungen durchgeführt, jene von Abschn. 4.2.2. miteingeschlossen.

5. ANWENDUNGEN AUF SPEZIFISCHE MAGNETISCHE FELDPROBLEME

5.1. Eindimensionaler Fall

Ein magnetischer Kreis setze sich aus je einer Strecke Ferromagnetikum und Luft von gleicher Länge zusammen. Wir erhalten damit die eindimensionale Analogie nach Abb. 25 und wählen

$$l_1 = l_2 = d = 10^{-2} \text{ m}$$

$$\mu_1 = \mu_0 \mu_r$$

$$\mu_2 = \mu_0$$

Nach dem in den Abschn. 3.2.2. und 3.3.2. Gesagten entspricht dieser einfache Fall der Hintereinanderschaltung von beliebigen l_1 und l_2 mit $l_1 \neq l_2$.

In Abb. 53 ist die angenommene Permeabilitätskurve $\mu_r(H)$ eines fiktiven Ferromagnetikums dargestellt und in Abb. 54 die daraus berechnete Magnetisierungskurve $\frac{B}{\mu_0} = f(H)$. Der spezielle Verlauf der Permeabilitätskurve (Spitze bei $H = 1000 \frac{\text{A}}{\text{m}}$) ist dabei festgelegt im Hinblick auf Konvergenzuntersuchungen mit verschiedenen Permeabilitätskurven, welche durch Spitzen, grosse $d\mu_r/dH$ usw. konvergenzverschlechternd wirken.

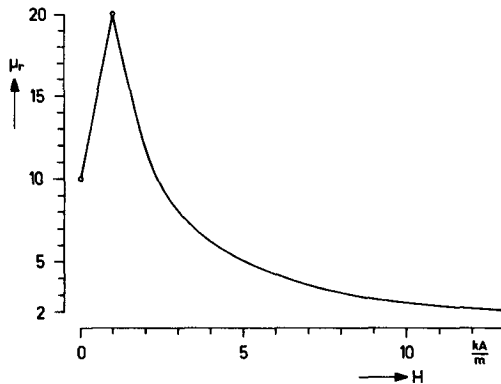


Abb. 53: Angenommene Permeabilitätskurve $\mu_r(H)$ eines fiktiven Ferromagnetikums (s. Text).

Das beschriebene Iterationsverfahren (s. Abschn. 3.3.3.) wird nun auf die Kette angewandt. Für jede angenommene Erregung Θ erhalten wir einen Punkt (μ_r, H_{Fe}) aus welchem die Flussdichte B nach der Formel (3) berechnet wird; hierauf kann aus dem durch die Permeabilität μ_0 des leeren Raumes dividierten B durch eine einfache Masstabsänderung gemäss

$$\Phi = B \cdot A = \left(\frac{B}{\mu_0}\right) \mu_0 d \quad (98)$$

$$\Phi = 4 \pi \cdot 10^{-9} \left(\frac{B}{\mu_0}\right) V \varepsilon$$

(Flächenelement mit Breite d und Tiefe 1) der Fluss Φ erhalten werden. Die in Abb. 55 eingezeichnete magnetische Charakteristik hat das erwartete Aussehen: Für kleine

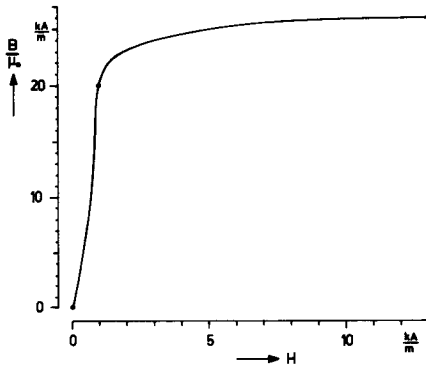


Abb. 54: Aus der Abb. 53 berechnete Magnetisierungskurve $B(H)$, wobei $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am.

Erregungen Θ ist sie linear; der Einfluss der Sättigung macht sich erst bei grösseren Θ bemerkbar. Zur Kontrolle dieser Kennlinie dient die Beziehung

$$\Theta = 10 H (1 + \mu_r)$$

mit Θ in [A] und H in $\left[\frac{kA}{m}\right]$, die man bei der konventionellen Berechnung dieses magnetischen Kreises erhält.

Zur Untersuchung der Konvergenz wurden nun verschiedene Permeabilitätskurven angenommen, die sich durch möglichst komplizierten Verlauf auszeichnen. Da-

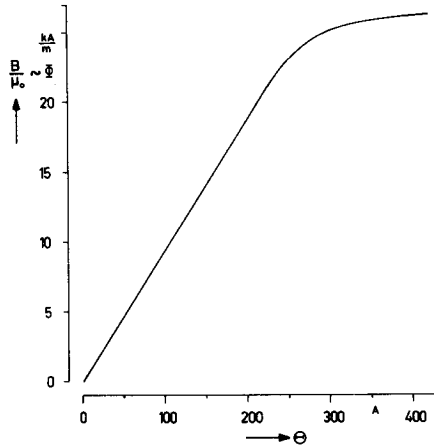


Abb. 55: Magnetische Charakteristik $\bar{\Phi}(\Theta)$ der Serieschaltung Ferromagnetikum - Luft nach Abschn. 5.1.

bei muss jeweils kontrolliert werden, dass die zugehörige Magnetisierungskurve $B(H)$ einen physikalisch sinnvollen Verlauf hat, d.h. kein Gebiet mit $\frac{dB}{dH} < 0$ (fallender Ast d.i. negative reversible Permeabilität) aufweist. Mit dieser Einschränkung zeigte sich - wie erwartet - in keinem Falle Nichtkonvergenz, sondern es traten höchstens Variationen in der Konvergenzgeschwindigkeit auf. Die hiedurch gemessene Güte der Konvergenz kann untersucht werden, indem man etwa für einen Punkt (Φ, Θ) der magnetischen Kennlinie $\bar{\Phi}(\Theta)$ die notwendige Anzahl Iterationsschritte bestimmt in Abhängigkeit vom Werte der nullten Näherung. Als Beispiel wählen wir im vorliegenden Falle den Punkt $\Theta = 100$ A (Abb. 55) und erhalten:

<u>Nullte Näherung</u>	<u>Anzahl Schritte</u>
$H = 0, \mu_r = 10$	7
$H = 13 \frac{kA}{m}, \mu_r = 2$	8
$H = 1 \frac{kA}{m}, \mu_r = 20$	5

d.h. die Konvergenz ist bei der dritten Annahme am besten. Dies ist für den betrachteten Punkt nicht weiter verwunderlich, da die Annahme $H = 1 \frac{kA}{m}$ dem Konvergenzwert $H = 591 \frac{A}{m}$ am nächsten liegt. In der Tat ergibt sich allgemein, dass

für eine gegebene Permeabilitätskurve die Güte der Konvergenz allein von der Abweichung der nullten Näherung abhängt, während der Ort des Konvergenzpunktes auf der Magnetisierungskurve bzw. -kennlinie kaum einen Einfluss hat.

5.2. Das rechtwinklige Winkelprofil

5.2.1. Allgemeines

Die Kenntnis des Feldverlaufes für das bereits in Abschnitt 2.2.3. untersuchte Winkelprofil ist ein zentrales Problem des Transformatorenbaus, welches bis heute noch nicht befriedigend gelöst ist⁷⁾. Dieser Winkelteil bestimmt massgebend die Ummagnetisierungsverluste des Transformators⁷⁾, sodass besonders für die heute meistens verwendeten kaltgewalzten, einfach-kornorientierten Magnetbleche der Ausgestaltung dieses Transformatorsteiles grosse Aufmerksamkeit gewidmet wird³⁹⁾: Durch entsprechende Verzäpfung und Schachtelung, durch Verwendung von Bandkernen und neuerdings Kleben mit Kunstharzen^{7), 25)} können die im Winkelteil erzeugten Verluste reduziert werden, bis sie nur noch etwa das 1,2fache der Epsteinwerte betragen.

5.2.2. Berechnung des Profils

Die Berechnung des in Abb. 56 dargestellten Winkelprofils geschieht unter der Annahme einer über das ganze (schraffierte) Gebiet konstanten Permeabilität. Die Strecke \overline{AOF} habe das Potential $V_m = 0$, die Strecke \overline{EDCB} das Potential $V_m = V_{m1}$; \overline{AB} und \overline{EF} seien Stromlinien. Infolge der Invarianz der Laplaceschen Differentialgleichung gegenüber konformer Abbildung können wir das schraffierte Gebiet der Ebene $z = x + jy$ mittels des Schwarz-Christoffelschen Abbildungssatzes auf die obere Hälfte einer Ebene $t = r + js$ konform⁴⁰⁾ abbilden. Ist $w = u + jv$ eine weitere Abbildungsebene und bedeutet v die Potential- und u die Stromfunktion, so schliesst die Gerade $v = \text{konst.} = V_{m1}$ mit der u -Achse einen Streifen ein, der ebenfalls auf die obere t -Halbebene abgebildet wird. Die Lösung des Potentialproblems ist dann durch die Parameterdarstellung $z(t)$, $w(t)$ gegeben.

Für die Abbildung rücken wir vorerst einmal die Punkte A und B, E und F ins Unendliche ($b_1 = b_2 = \infty$) und lassen C mit D zusammenfallen ($r = 0$). Mit der Tabelle 5 ergibt sich dann für die Abbildung $z(t)$ die Differentialgleichung

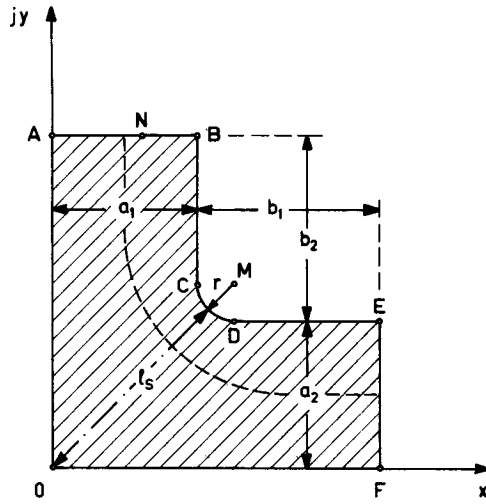


Abb. 56: Winkelprofil für die konforme Abbildung. Die "mittlere Feldlinie" ist gestrichelt eingezeichnet; sie unterteilt l_s im Verhältnis 0,78:0,22 für $r=0$.

Tabelle 5

Punkt z	A	O	F	E	C=D	B
Koordinaten z	$j\infty$	0	∞	$\infty + ja_2$	$a_1 + ja_2$	$a_1 + j\infty$
Punkt t	$-\infty$	0	1		h	∞
$\text{Im}(w) = V_m$	0		V_{m1}			

$$\frac{dz}{dt} = C_1 \frac{\sqrt{h-t}}{(1-t)\sqrt{t}} \quad (99)$$

welche mittels der Substitution

$$t = h \frac{q^2}{1+q^2}$$

integriert werden kann und die Lösung

$$z(t) = 2C_1 \left[\arcsin \sqrt{\frac{t}{h}} + \frac{\sqrt{h-1}}{2} \ln \frac{\sqrt{h-t} + \sqrt{(h-1)t}}{\sqrt{h-t} - \sqrt{(h-1)t}} \right] + C_2$$

ergibt. Die Konstanten C_1 , C_2 und h können darin anhand der Bedingungen

$$z(t=0) = 0$$

$$z(t=h) = a_1 + ja_2$$

bestimmt werden, sodass die Abbildungsfunktion $z(t)$ die Form

$$z(t) = \frac{2a_1}{\pi} \left[\arcsin \sqrt{\frac{t}{\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 + 1}} + \frac{a_2}{2a_1} \ln \frac{\sqrt{\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 + 1-t} + \frac{a_2}{a_1} \sqrt{t}}{\sqrt{\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 + 1-t} - \frac{a_2}{a_1} \sqrt{t}} \right] \quad (100)$$

annimmt; durch Einsetzen folgt daraus der Spezialfall

$$z(t) = \frac{2a_1}{\pi} \left[\arcsin \sqrt{\frac{t}{2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2-t} + \sqrt{t}}{\sqrt{2-t} - \sqrt{t}} \right] \quad (101)$$

für $a_1 = a_2$. Entsprechend erhält man anhand der Tabelle 5 die Relation

$$\frac{dw}{dt} = B_1 \frac{1}{t-1} \quad (102)$$

für die Abbildung $w(t)$ und damit für den Betrag der magnetischen Feldstärke

$$H = \left| \frac{dw}{dt} \right| \cdot \left| \frac{dt}{dz} \right| = \frac{v_{m1}}{a_1} \left| \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 + 1-t}} \right| \quad (103)$$

oder für den Spezialfall $a_1 = a_2 = a$ die Beziehung

$$H = \frac{v_{m1}}{a} \left| \sqrt{\frac{t}{2-t}} \right| \quad (104)$$

aus welcher sich mit $t = r+js$ die Berechnungsvorschrift

$$H_r = \frac{4}{\sqrt{\frac{r^2 + s^2}{(r-2)^2 + s^2}}} \quad (105)$$

für die bezogene Feldstärke $H_r = a \cdot H/V_m$ ableiten lässt.

Speziell interessiert uns noch die Vertikale $t = 1+js$, welche sich auf die in Abb. 56 gestrichelt eingezeichnete Linie abbildet. Längs dieser Linie sind nämlich Feldstärke H und Potential V_m gemäss

$$H_r \equiv 1 \quad \text{und} \quad V_m = \frac{1}{2} V_{m1}$$

konstant; sie stellt somit für den dualen Fall (\overline{AB} und \overline{EF} Aequipotentiallinien) die sog. "mittlere" Feldlinie dar, welche in der Praxis zur Berechnung der Eisenlänge l_{Fe} verwendet wird. Allerdings werden hier ausschliesslich Näherungen mit Kreisbögen verwendet; im Gegensatz hiezu wird uns die Rektifikation dieser Kurve eine exakte Formel liefern.

Aus der Beziehung (101) für $z(t)$ erhält man vorerst die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{z}{a} &= z_r = x_r + jy_r \\ x_r &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{1 + \sqrt{1+s^2}}{s} \\ y_r &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Ar Ch } \sqrt{1+s^2} \end{aligned} \quad (106a)$$

bezw. unter Beizug von zyklometrischen Zusammenhängen vereinfacht

$$\begin{aligned} x_r &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Ar Sh } \frac{1}{s} \\ y_r &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Ar Sh } s \end{aligned} \quad (106b)$$

für die Abbildung der Vertikalen $t = 1+js$ auf die z -Ebene. Mit dem Bogenelement $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ folgt dann der Zusammenhang

$$\int_{z_1}^{z_2} dl = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} ds \quad (107)$$

für die Kurvenlänge zwischen zwei Punkten (z_1, z_2). Aus den Gln. (106) entnimmt man direkt die Beziehungen

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{s^2(1+s^2)} \quad (108)$$

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{1+s^2}$$

und für $y_r = y_0$ und $x_r = x_0$ die beiden Grenzen

$$s_1 = \frac{1}{\text{Sh} \frac{\pi}{2} (2x_0 - 1)} \quad (109)$$

$$s_2 = \text{Sh} \frac{\pi}{2} (2y_0 - 1)$$

worauf aus der Kombination der Gln. (107) bis (109) gemäss Abb. 57 die Relation

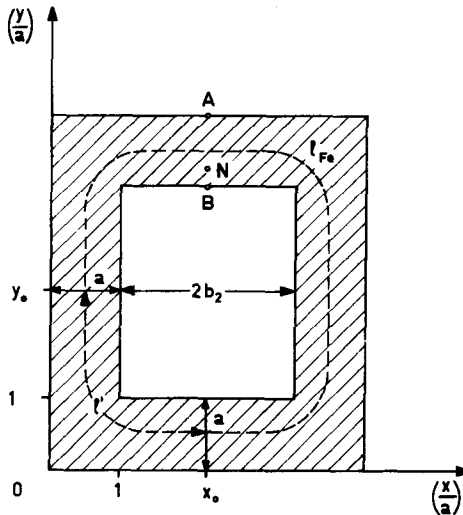


Abb. 57: Profil für die Berechnung der "mittleren" Eisenlänge l_{Fe} . Es sollte $b_2 \geq a$ sein (s. Abschn. 5.2.3.).

$$l' = \frac{1}{\pi} \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{s} = \frac{1}{a} \cdot \frac{l_{Fe}}{4}$$

resultiert; mithin hat der Eisenweg die Länge

$$l_{Fe} = \frac{4a}{\pi} \ln \left[\operatorname{Sh} \frac{\pi}{2} (2y_0 - 1) \operatorname{Sh} \frac{\pi}{2} (2x_0 - 1) \right] \quad (110)$$

also beispielsweise

$$l_{Fe} = \frac{4a}{\pi} \ln \operatorname{Sh}^2 \frac{3\pi}{2} \approx 10,24a$$

für $x_0 = y_0 = 2$ entsprechend Abb. 57.

Ist nun die innere Ecke des in Abb. 56 dargestellten Winkelprofils mit einem Viertelkreis vom Radius r abgerundet (Abb. 56), so wird der ursprünglich in der Schwarz-Christoffelschen Formel enthaltene Faktor durch einen dieser Ab-
rundung entsprechenden ersetzt⁴¹⁾. Mit $a_1 = a_2 = a$ wählen wir dann die Parameter-
verteilung symmetrisch zu \overline{OM} und erhalten nach der Tabelle 6 mit entsprechender

Tabelle 6

Punkt z	O'	F	E	D	C	B	A	O''
Koord. z	$-a-ja$	$\infty-ja$	∞	r	jr	$j\infty$	$-a+j\infty$	$-a-ja$
Punkt t	$-\infty$	-1		$-c^2$	c^2	1		∞
Im (w)	O		V_{m1}				O	

Verschiebung der Achsen die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dt} = -j C_3 \left[\frac{\sqrt{t+c^2}}{t^2-1} + \frac{\sqrt{t-c^2}}{t^2-1} \right] \quad (111)$$

welche mittels der Substitutionen

$$p = \sqrt{t+c^2} \quad q = \sqrt{t-c^2}$$

in zwei Teilen integriert wird und auf die Abbildungsfunktion $z(t)$ gemäss

$$z(t) = z_1(t) + z_2(t) + C_4$$

$$z_1(t) = jC_3 \left[\sqrt{1+c^2} \operatorname{ArTh} \sqrt{\frac{t+c^2}{1+c^2}} - \sqrt{1-c^2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{t+c^2}{1-c^2}} \right]$$

$$z_2(t) = jC_3 \left[\sqrt{1-c^2} \operatorname{ArTh} \sqrt{\frac{t-c^2}{1-c^2}} - \sqrt{1+c^2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{t-c^2}{1+c^2}} \right]$$

führt. Die unbekanntenen Konstanten C_3 , C_4 und c können aus den geometrischen Bedingungen der Tabelle 6 bestimmt werden, worauf für $z(t)$ die Relation

$$z = \frac{2ja}{\pi \left[\sqrt{1+c^2} + \sqrt{1-c^2} \right]} \left[\sqrt{1+c^2} \left(\operatorname{ArTh} \sqrt{\frac{t+c^2}{1+c^2}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{t+c^2}{1+c^2}} \right) + \sqrt{1-c^2} \left(\operatorname{ArTh} \sqrt{\frac{t-c^2}{1-c^2}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{t-c^2}{1-c^2}} \right) \right] \quad (112)$$

entsteht, während die Grösse c aus der transzendenten Gleichung

$$\frac{a}{r} = \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{1+c^2} + \sqrt{1-c^2}}{\sqrt{1+c^2} \operatorname{ArTh} \frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{1+c^2}} - \sqrt{1-c^2} \operatorname{arctg} \frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{1-c^2}}} \quad (113)$$

berechnet werden kann. Für kleine c d. h. für $c^2 \ll 1$ können die Wurzelausdrücke und die Funktionen ArTh , arctg entwickelt werden; dies führt auf die explizite Beziehung

$$c = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{r}{a}} \approx 1,185 \sqrt[3]{\frac{r}{a}} \quad (114)$$

für c . Entsprechend der Parameterverteilung in Tabelle 6 folgt dann

$$\frac{dw}{dt} = B_2 \frac{1}{1-t^2} \quad (115)$$

für die Abbildung $w(t)$ und damit für die Feldstärke

$$H = \frac{V_{m1}}{a} \frac{\sqrt{1+c^2} + \sqrt{1-c^2}}{|\sqrt{t+c^2} + \sqrt{t-c^2}|} \quad (116)$$

und speziell für H_R längs der Abrundung

$$H_R = H_\infty \frac{\sqrt{1+c^2} + \sqrt{1-c^2}}{c\sqrt{2}} = \text{konst.} \quad (117)$$

wenn H_∞ die gleichmässige Feldstärke $H_\infty = \frac{1}{a} V_{m1}$ im Unendlichen bedeutet. Mit der Näherung aus Gl. (114) ergibt dies die Beziehung

$$\frac{H_R}{H_\infty} = \sqrt[3]{\frac{16}{3\pi}} \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{r}} \approx 1,192 \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{r}} \quad (118)$$

welche für $\frac{a}{r} \geq 20$ mit einem Fehler $\leq 2\%$ verwendet werden kann. Das Verhältnis $\frac{H_R}{H_\infty}$ ist in Abb. 58 dargestellt.

Weiterhin interessiert die Feldstärke H_S über der Symmetriegeraden \overline{OM} . Diese wird mit den entsprechenden t -Werten aus der Gl. (116) berechnet und ist in Abb. 59 für ein Verhältnis $\frac{a}{r} = 40$ aufgetragen. Ebenfalls enthält diese Abb. die Kurve H_S/H_∞ für $r = 0$, die sich aus Gl. (105) berechnen lässt; hieraus kann der Einfluss von r abgeschätzt werden. Insbesondere ist der Grenzwert $H_S = 4,1 H_\infty$ für $r = r$ gegenüber $H_S = \infty$ für $r = 0$.

Für die Bestimmung der Feldstärke in einigen zusätzlich interessierenden Punkten müssen wir weiterhin das Winkelprofil mit einem Schenkel endlicher Länge berechnen. Hierfür rücken wir in Abb. 56 die Punkte E und F ins Unendliche und erhalten aus der Tabelle 7 für die Abbildung $z(t)$ die Differentialgleichung

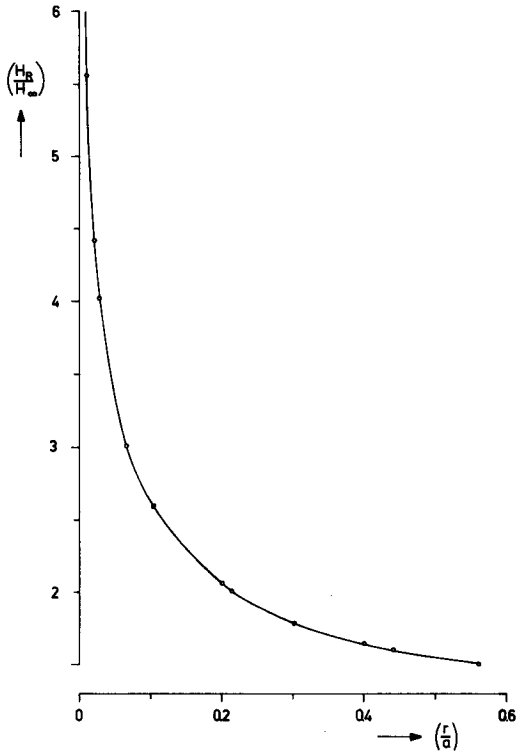


Abb. 58: Aus den Gln. (113), (117) und (118) berechneter Verlauf des Verhältnisses von H der Rundung zu H im Unendlichen für das Winkelprofil nach Abb. 56.

Tabelle 7

Punkt z	E	D	C	B	A	O	F
Koord. z	∞	r	jr	jb_2	$-a+jb_2$	$-a_1-ja_2$	$\infty -ja_2$
Punkt t	$-\infty$	-1	$+1$	c_1	c_2	c_3	∞
Im (w)	v_{m_1}				O		

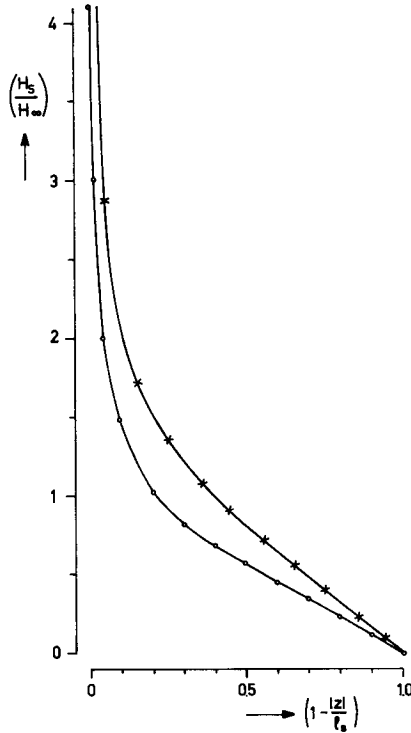


Abb. 59: Untere Kurve: Berechnetes Verhältnis von H_S über der Symmetrieachse \overline{OM} (Abb. 56) zur Feldstärke H_∞ im Unendlichen für $a/r = 40$.
 Obere Kurve: Berechnetes und gemessenes (x) Verhältnis von H_S zu H_∞ für $a/r = \infty$.

$$\frac{dz}{dt} = C_5 \frac{C_6 \sqrt{t+1} + C_7 \sqrt{t-1}}{\sqrt{(t-c_1)(t-c_2)(t-c_3)}} \quad (119)$$

worin wir $C_6 = 0$ und $C_7 = \sqrt{\frac{c_3+1}{c_3-1}}$ setzen, um eine konstante Feldstärke über der Rundung zu erreichen. Entsprechend lässt sich für $w(t)$ der Zusammenhang

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{\sqrt{(t-c_1)(t-c_2)}} \quad (120)$$

anschreiben und infolgedessen für die Feldstärke H die Beziehung

$$H = \frac{1}{C_5} \left| \frac{\sqrt{t-c_3}}{\sqrt{t+1} + \sqrt{\frac{c_3+1}{c_3-1}} \sqrt{t-1}} \right| \quad (121)$$

woraus sich speziell die Feldstärke H_∞ im Unendlichen für $t = \infty$ zu

$$H_\infty = \frac{1}{a_2} V_{m_1} = \frac{1}{C_5} \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{c_3+1}{c_3-1}}}$$

ergibt, während die Feldstärken H_A bzw. H_B in den Punkten A bzw. B für $t = c_2$ bzw. $t = c_1$ aus der Formel (121) berechnet werden. Dabei sind noch die Parameter c_1, c_2, c_3 und C_5 durch die geometrischen Grössen a_1, a_2, r und \overline{CB} (bzw. b_2) auszudrücken. Beschränken wir uns auf Grössenverhältnisse, so kann $C_5 = 1$ gesetzt werden, während man für die direkte Bestimmung von $\frac{a_1}{a_2}$ bzw. $\frac{\overline{CB}}{a_2}$ das Integral

$$\int \frac{\sqrt{t+1} + \sqrt{\frac{c_3+1}{c_3-1}} \sqrt{t-1}}{\sqrt{(t-c_1)(t-c_2)(t-c_3)}} dt$$

mit den Grenzen (c_1, c_2) bzw. $(1, c_1)$ auswerten muss. Diese Integrale können entweder auf elliptische Funktionen reduziert oder aber numerisch abgeschätzt werden; jedenfalls aber ist die Probiermethode, aus festen Werten von a_1 bzw. \overline{CB} passende Werte für c_1, c_2, c_3 zu erhalten, sehr langwierig. Viel einfacher ist es, c_1 und c_2 so zu wählen, dass $\frac{a_1}{a_2}$ ein bestimmtes festes Verhältnis ist, wobei die Formeln für H_A und H_B verwendet werden. So erhält man auch die Feldstärken H_R über $\frac{r}{a_2}$ bei festem $\frac{\overline{CB}}{a_2}$. Diese Werte sind praktisch unabhängig von $\frac{\overline{CB}}{a_2}$ für $\frac{\overline{CB}}{a_2} = 0,8 \dots 3,5$ und dieselben wie für den Fall zweier unendlicher Schenkel (s. Abb. 58). Die Abb. 58 gilt also auch für diesen Fall, wenn man nur $\frac{b_2}{a_2} > 0,6$ und $a_1 = a_2$ setzt. Weiterhin ist in der Abb. 60 die Feldstärke H_B in der Mitte des kurzen Schenkels (s. Abb. 57) bei $a_1 = a_2 = a$ in Funktion von $\frac{2b_2}{a}$ (Abb. 57) aufgetragen und schliesslich gibt die Abb. 61 die Feldstärke H_N im Punkt N über die Mitte des kurzen Schenkels, d. h. zwischen den Punkten A und B der Abb. 57 für ein Verhältnis $\frac{b_2}{a} = 0,6$ und wiederum $a_1 = a_2$. Der Punkt N wird dabei von B nach A verschoben.

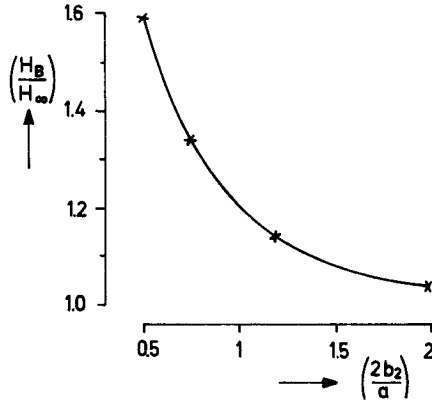


Abb. 60: Berechneter und gemessener (x) Verlauf der Feldstärke H_B im Punkt B der Abb. 57, bezogen auf H_{∞} , für $a_1=a_2=a$ als Funktion von $2b_2/a$.

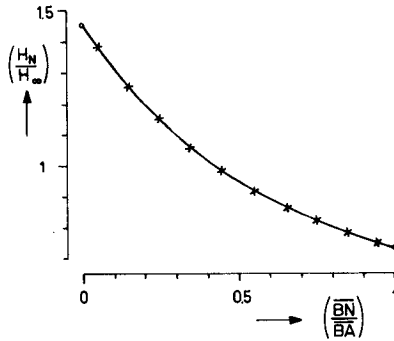


Abb. 61: Berechneter und gemessener (x) Verlauf der Feldstärke H_N im Punkt N der Abb. 57 in Abhängigkeit der Lage des Punktes N auf \overline{AB} , bezogen auf H_{∞} , für $2b_2/a=1, 2$ und $a_1=a_2=a$.

5. 2. 3. Schenkellänge und Maschenweite für die Nachbildung

Damit an den Abschlüssen \overline{AB} und \overline{EF} des Winkelprofils (Abb. 56) der Feldverlauf als homogen angenommen werden kann, muss eine bestimmte Schenkellänge $l_1 = a_1+b_1$ bzw. $l_2 = a_2+b_2$ des Profils nachgebildet werden; diese Länge wird anhand der "mittleren Feldlinie" bestimmt. Aus den Gln. (106) erhalten wir vorerst

$$\lim_{s \rightarrow 0} z_r = \infty + \frac{1}{2} j$$

(122)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} z_r = \frac{1}{2} + j \infty$$

für die Grenzpunkte dieser Linie in x- bzw. jy-Richtung und verlangen, dass die Abweichung vom Grenzwert in beiden Richtungen kleiner, höchstens jedoch gleich 1% sei. Aus diesen Forderungen

$$\frac{y_r - \lim_{s \rightarrow 0} y_r}{\lim_{s \rightarrow 0} y_r} \leq 10^{-2} \quad (\text{Richtung } x)$$

$$\frac{x_r - \lim_{s \rightarrow \infty} x_r}{\lim_{s \rightarrow \infty} x_r} \leq 10^{-2} \quad (\text{Richtung } jy)$$

leiten wir mit Hilfe der Gln. (106) und (122) die Beziehung

$$\text{Ar Sh } s_1 \leq 5\pi \cdot 10^{-3}$$

$$\text{Ar Sh } \frac{1}{s_2} \leq 5\pi \cdot 10^{-3}$$

ab, erhalten daraus die beiden s-Werte zu

$$s_1 = \frac{1}{s_2} = \text{Sh}(5\pi \cdot 10^{-3})$$

und setzen diese in die entsprechenden Gln. (106) ein, woraus gemäss

$$\frac{l_1}{a} ; \frac{l_2}{a} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Ar Sh } \frac{1}{\text{Sh}(5\pi \cdot 10^{-3})} \quad (123)$$

in beiden Koordinatenrichtungen dieselbe Begrenzung

$$l_1 = l_2 \approx 2,04 a$$

resultiert, wie es aus Symmetriegründen nicht anders zu erwarten war. Wir wählen demnach

$$l_1 = l_2 = 2a \quad (124)$$

und erhalten so einen Fehler, der nur knapp über 1% liegt; eine solche Abweichung ist ohne weiteres zulässig. Für die Bestimmung der Maschenweite bei der Nachbildung wollen wir fordern, dass längs der Symmetriegeraden \overline{OM} (Abb. 56) über der ersten Maschendiagonale von der einspringenden Ecke aus nicht mehr als ein Drittel der gesamten Spannung $V_1 = k_0 V_{m1}$ abfalle. Hierzu benützen wir den in Abb. 59 aufgetragenen berechneten Verlauf der Feldstärke H_S über \overline{OM} , wobei r infolge $\frac{r}{a} = 0,025$ gegenüber a vernachlässigt werden kann. Aus dem Zusammenhang

$$V_{m1} = \int_0^{a\sqrt{2}} H_S d|z| \quad (125)$$

zwischen V_{m1} und H_S erhalten wir durch die Masstabänderung

$$\xi = 1 - \frac{|z|}{a\sqrt{2}}$$

wobei ξ die Abszisse in Abb. 59 ist, die Beziehung

$$\sqrt{2} \int_0^1 \left(\frac{H_S}{H_\infty} \right) d\xi = 1 \quad (126)$$

und können alsdann unsere Forderung in der Form

$$\int_0^{\frac{1}{\lambda}} \left(\frac{H_S}{H_\infty} \right) d\xi \leq \frac{\sqrt{2}}{6} \quad (127)$$

anschreiben, wenn $\lambda = \frac{a}{d}$ das Verhältnis zwischen Schenkelbreite a und Maschenweite d misst. Durch Planimetrieren der Kurve $\frac{H_S}{H_\infty} = f(\xi)$ folgt daraus für die obere Grenze des Integrals (127) der Wert $\frac{1}{\lambda} \approx 0,112$, mithin muss $\frac{a}{d} \geq 8,94$ sein.

Deshalb wählen wir

$$d = 0,1 a \quad (128)$$

und unterschreiten damit unsere Forderung gegen die sichere Seite hin.

5.2.4. Nachbildung und Messungen

Untersucht wird das in Abb. 62 dargestellte gleichschenklige Winkelprofil, dessen Schenkel nach Gl. (124) begrenzt sind. Die Maschenweite d ist nach Gl. (128) ge-

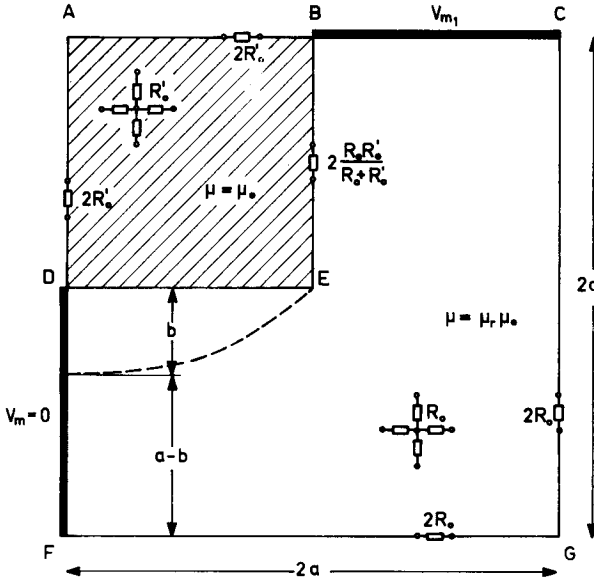


Abb. 62: Winkelprofil für die Nachbildung.

geben und das Profil bestehe aus einem Medium mit der vorerst konstanten (feldunabhängigen) Permeabilität $\mu = \mu_0 \mu_r$, umgeben von Luft mit der Permeabilität μ_0 . Für die uns hier interessierende Ausbildung des Streuflusses Φ_σ ist nur der innere Teil D-E-B des Profils von Belang; ausserhalb F-G-C ist Φ_σ zu vernachlässigen und deshalb wird das dort angrenzende Gebiet nicht in die Nachbildung einbezogen: Der Streufluss bildet sich im Gebiet A-B-E-D-A aus. Die Strecken \overline{DF} bzw. \overline{BC} erhalten die Potentiale $V_m = 0$ bzw. V_{m1} , wobei der Einfachheit halber für die Nachbildung immer $V = k_0 V_{m1} = 100$ Volt gewählt wird.

Da die Permeabilität $\mu_0 \mu_r$ des magnetischen Mediums feldunabhängig ist, wird das gesamte nachgebildete Gebiet A-C-G-F-A gemäss Abschnitt 3.2.1. nur bereichsweise konstante Widerstände erhalten: Das Luftgebiet A-B-E-D-A wird nachgebildet durch Widerstände R'_0 , während für das Mediumsgebiet B-C-G-F-D-E-B konstante

Widerstände $R_o = R'_o / \mu_r$ gebraucht werden. Für die Nachbildung stand das Widerstandsnetz aus ²⁰⁾ zur Verfügung mit $R_o = 3,5 \text{ k}\Omega$. Mit Widerständen von $10 \text{ k}\Omega$, $100 \text{ k}\Omega$ und $1 \text{ M}\Omega$ für das Luftgebiet erhält man so die Nachbildung für die relativen Permeabilitäten $\mu_r = 2,86 \approx 3$, $\mu_r = 28,6 \approx 30$ und $\mu_r = 286 \approx 300$. Dazu kommen noch die beiden Grenzfälle $\mu_r = 1$ (wo $R'_o = R_o = 3,5 \text{ k}\Omega$) und $\mu_r = \infty$ (wo $R'_o = \infty$).

Die gesamte Nachbildung umfasst $\overline{21}^2 = 441$ Maschenpunkte, d. h. rund 800 Widerstände, welche alle eine Toleranz $\leq 1\%$ aufweisen. Mit der daraus folgenden Standardabweichung $\sigma(\alpha, N_0)$ aus Abb. 39 und der entsprechenden Varianz σ_{ges} aus Gl. (97), mit $k_x = k_y = 20$ von der Grösse $\sigma_{\text{ges}} \left(\frac{\Delta V}{V} \right) \approx 2 \cdot 10^{-5}$, darf im ungünstigsten Falle mit einer Genauigkeit von mindestens 10^{-3} für die Knotenpotentiale gerechnet werden, sodass der Fehler durch die Messgenauigkeit ($\pm 2 \cdot 10^{-3}$) des Digitalvoltmeters bestimmt wird.

Für die Auswertung besonders einfach sind die beiden Grenzfälle $\mu_r = 1$ und $\mu_r = \infty$, weil dort die Feldlinien direkt als Potentialkurven des dualen Falles bestimmt werden können. Bei $\mu_r = 1$ liegen dann die Potentiale $V_m = 0$ bzw. V_{m1} an den Strecken F-G-C- bzw. B-A-D anstelle von \overline{DF} bzw. \overline{BC} , während für den Fall $\mu_r = \infty$ die Strecke B-A-D durch B-E-D ersetzt wird, da das Gebiet A-B-E-D-A dann nicht vorhanden ist. Für die übrigen Fälle hingegen müssen die Feldlinien anhand der ausgemessenen Potentialkurven rechnerisch bzw. graphisch bestimmt werden.

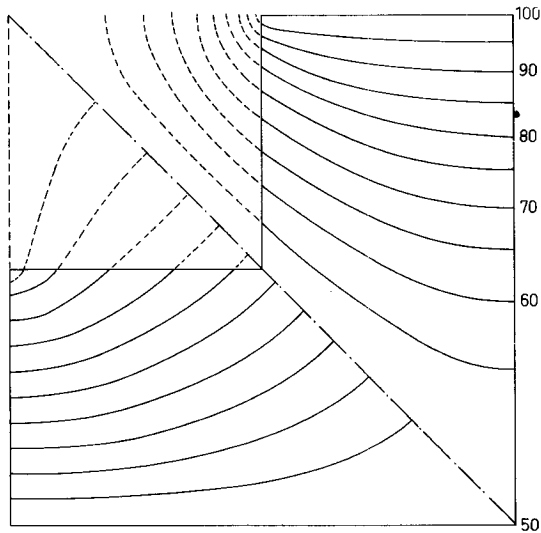


Abb. 63: Potentialkurven und Feldlinien für das Winkelprofil nach Abb. 62 für die relative Permeabilität $\mu_r = 1$.

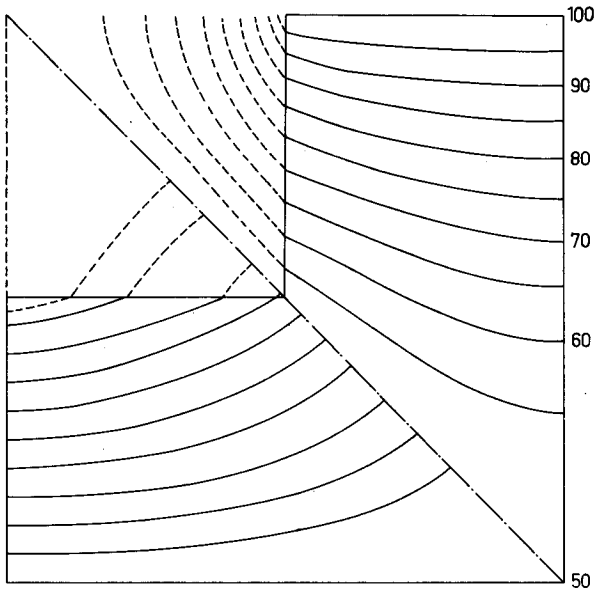


Abb. 64: Feldverlauf für $\mu_r \approx 3$.

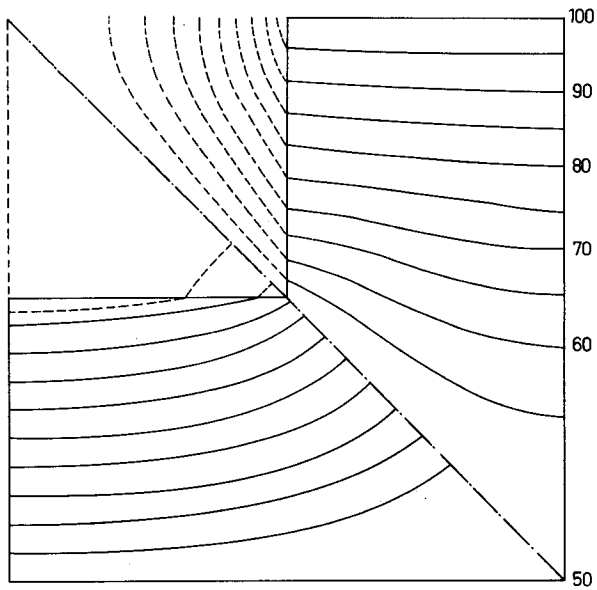


Abb. 65: Feldverlauf für $\mu_r \approx 30$.

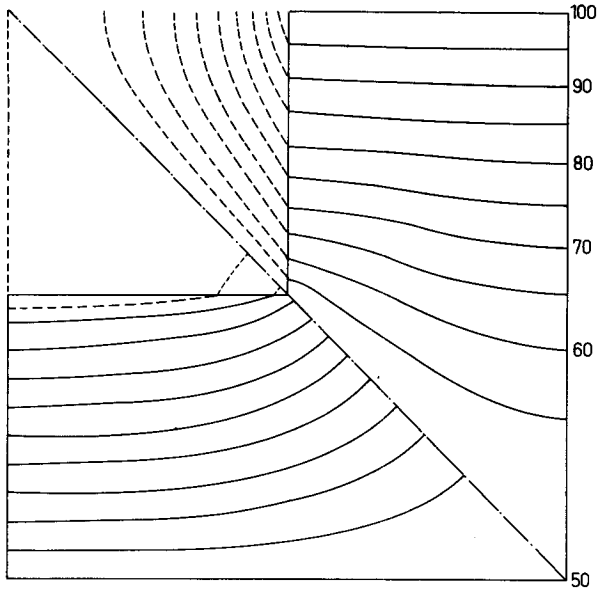


Abb. 66: Feldverlauf für $\mu_r \approx 300$.

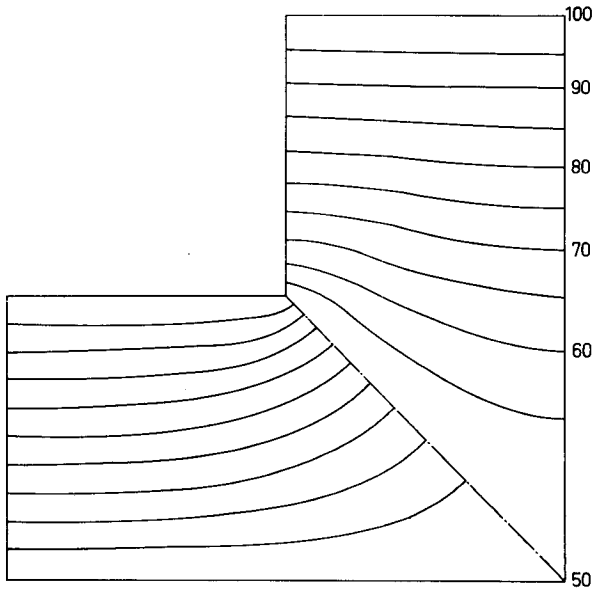


Abb. 67: Feldverlauf für $\mu_r = \infty$.

Aus den in den Abb. 63...67 dargestellten ausgewerteten Feldbildern kann der Streufluss in einfacher Weise bestimmt werden. Die durch die einspringende Ecke E (Abb. 62) des Winkelprofils gehende Feldlinie teilt nämlich die Strecke $\overline{DF} = a$ in zwei Segmente b und $a-b$, welche direkt das prozentuale Verhältnis von Streufluss Φ_σ zu Haupt- (= Nutz-)fluss Φ_h bzw. Totalfluss $\Phi = \Phi_\sigma + \Phi_h$ angeben. Für den Streukoeffizienten σ erhält man dann die Beziehung

$$\sigma = \frac{\Phi_\sigma}{\Phi_h} = \frac{b}{a-b} \quad (129)$$

und entsprechend lässt sich für das Verhältnis von Streufluss zu Gesamtfluss die Relation

$$\frac{\Phi_\sigma}{\Phi} = \frac{\sigma}{1+\sigma} = \frac{b}{a} \quad (130)$$

angeben. Die sich aus den verschiedenen Werten von μ_r ergebenden Streukoeffizienten σ sind in Abb. 68 dargestellt, wobei σ von $\sigma = 0,835$ bei $\mu_r = 1$ auf $\sigma = 0$ bei $\mu_r = \infty$ abnimmt.

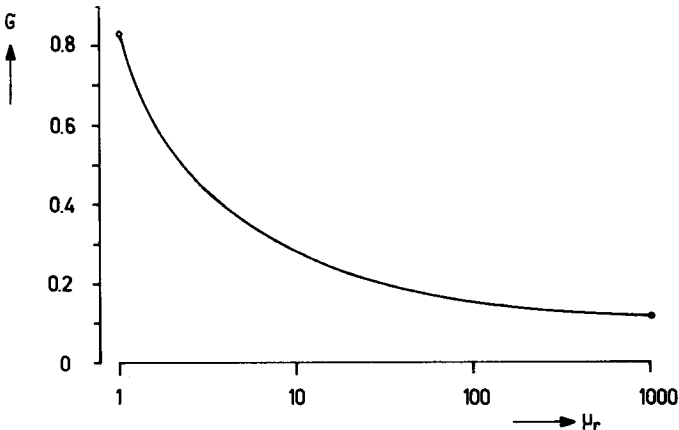


Abb. 68: Streukoeffizient $\sigma = \Phi_\sigma / \Phi_h$ in Funktion von μ_r für das Winkelprofil nach Abb. 62

Infolge der gebietweisen Konstanz der Permeabilität ist die magnetische Charakteristik $\Phi(\theta)$ in allen diesen Fällen linear und interessiert deshalb nicht weiter. Für die Darstellung könnte der zum gesamten ins Netzwerk fließenden Strom I_{ges} .

proportionale Fluss Φ etwa anhand des Falles $\mu_r(\text{Fe}) = \infty$ normiert werden: Dort ist $I_{\text{ges.}} \approx 11,2$ mA für $U = k_0 \cdot \theta = 100$ Volt bei einem Netzwidestand von $R_0 = 3,5$ k Ω . Der gesamte Widerstand $R_{\text{ges}} = U/I_{\text{ges}}$ hat damit den Wert $R_{\text{ges}} \approx 2,55 R_0$; er ist zum gesamten magnetischen Widerstand $R_{m\text{ges}} = \theta/\Phi$ direkt proportional.

Für die nun folgende Untersuchung eines nichtlinearen Feldes betrachten wir wieder das Winkelprofil nach Abb. 62. Dabei wird einmal der Streufluss Φ_σ vernachlässigt d. h. das Luftgebiet A-B-E-D-A wird nicht nachgebildet. Für den Einbezug von Φ_σ müsste man jeweils das Luftgebiet mit Widerständen $R'_0 = \mu_r^* R_0$ nachbilden, wenn μ_r^* die relative Permeabilität bedeutet, welche das magnetische Medium im homogenen Feldteil (erste Masche vor \overline{DF} bzw. \overline{BC} in Abb. 62) aufweist. Diese Permeabilität wird aus der Kurve $\mu_r(H)$ für $H = H^*$ abgelesen, wobei die homogene Feldstärke

$$H^* = \frac{(\Delta V_m)^*}{d} = \frac{\Delta V_1}{k_0 d} \quad (131)$$

mit $\Delta V_1 =$ Spannungsabfall über der ersten Masche, infolge des Zusammenhanges $U = k_0 \theta$ als

$$H^* = \frac{\Delta V_1}{U \cdot d} \theta \quad (132)$$

ihrerseits linear von der Durchflutung θ abhängt. Letztere ist bei konstantem $U = 100$ V mit Annahme der Verknüpfungskonstanten k_0 festgelegt; demnach ändern die Widerstände R'_0 über $\mu_r(H)$ nichtlinear mit k_0 bzw. mit θ . Im praktischen Fall wird man hierfür im interessierenden Bereich von μ_r^* je einen Satz Widerstände für bestimmte Werte μ_r^* bereitstellen und dann k_0 entsprechend wählen; diese Widerstände sind nach den Normreihen R_{12} bzw. R_{24} genügend fein abgestuft. Bei vorgegebenem k_0 hingegen muss der in der Normreihe nächstliegende Widerstand gewählt werden, sodass z. B. für die Reihe R_{24} eine maximale Abweichung bis zu 5% resultieren kann.

Zur Halbierung der Auswertearbeit wird weiterhin das Profil in Abb. 62 längs der Symmetriegeraden \overline{EG} aufgetrennt; auch so entstehen noch 154 Einspeisepunkte. Da nur 150 Einheiten (Abschn. 4.5.2.) vorhanden sind, muss im homogenen Feldbereich (vor \overline{DF}) die Einspeisung gemäss Abschn. 4.3. reduziert werden. Im halben Profil hat nun \overline{DF} das Potential $V = 0$, während an \overline{EG} das Potential $\frac{U}{2} = \frac{1}{2} k_0 \cdot \theta = 50$ Volt angelegt wird. Daraus entsteht dann das in Abb. 67 dargestellte Feldbild als nullte Näherung für ein beliebiges Medium. In unserm Fall bestehe das Profil aus dem Ferromagnetikum, dessen Permeabilitäts- bzw. Magnetisierungskurve in den Abb. 53 bzw. 54 dargestellt ist; die Schenkelbreite betrage $a = 10$ cm und damit die

Maschenweite $d = 10^{-2}$ m, während die Tiefe normal zur Zeichenebene gleich Eins gesetzt wird. Nach Annahme von k_0 können mittels der Formel (56) die Feldstärken H aus den gemessenen Potentialdifferenzen (V_2-V_1) und (V_4-V_3) für jeden Punkt als

$$H = \frac{50}{k_0} \sqrt{(V_2-V_1)^2 + (V_4-V_3)^2} \left[\frac{A}{m} \right] \quad (133)$$

berechnet werden, wenn $[k_0] = \text{Ohm}$ und $[V_i] = \text{Volt}$ gesetzt wird. Speziell ist dabei die y -Komponente H_y gleich Null für alle Punkte auf \overline{DE} , auf \overline{FG} und annähernd auch auf \overline{DF} , während die Beziehung $H_x = H_y$ für alle Punkte auf \overline{EG} gilt.

Für die berechneten H werden die entsprechenden μ_r der Abb. 53 entnommen und hierauf die Einspeiseströme nach

$$I_0 = \frac{0,5}{\mu_{r_0}} \left[(V_2-V_1)(\mu_{r_2}-\mu_{r_1}) + (V_4-V_3)(\mu_{r_4}-\mu_{r_3}) \right] \text{ [mA]} \quad (134)$$

bestimmt. Da je nach dem Grad der Sättigung - d. h. je nach dem angenommenen k_0 , welches ja gemäss Gl. (131) H^* festlegt - der Permeabilitätsgradient grad μ in einzelnen mehr oder weniger ausgedehnten Gebieten negativ ist, wechseln die Einspeiseströme gebietsweise ihr Vorzeichen und die entsprechenden Speiseweige müssen umgepolt werden. Alle positiven I_0 und alle negativen I_0 werden dann zusammengefasst und durch je ein System des Netzgerätes geliefert, welches entsprechend gepolt wird. Nach dem Einspeisen der Ströme - diese sind ausserordentlich stabil und leicht einstellbar - wird das entstehende Potentialfeld der ersten Näherung ausgemessen und darauf die ganze Prozedur wiederholt. Das Verfahren konvergiert ziemlich rasch: Auch bei starker Sättigung (kleinem k_0) sind meistens nicht mehr als 5 Iterationsschritte notwendig; der Zeitaufwand für einen einzelnen Iterationsschritt ist hingegen beträchtlich.

Aus dem definitiven Feldbild für ein gegebenes k_0 muss schliesslich noch der Fluss Φ berechnet werden. Hierzu benutzen wir den homogenen Bereich vor \overline{DF} (Abb. 62). Die Feldstärke H_i^* der i -ten Flussröhre ist dort durch die Gl. (131) zu berechnen und $(\mu_r^*)_i$ der Abb. 53 zu entnehmen. Für den Teilfluss $(\Delta\Phi)_i$ folgt dann gemäss Gl. (31) die Berechnungsvorschrift

$$(\Delta\Phi)_i = 4\pi \cdot 10^{-9} (\mu_r^* H^*)_i \quad [Vs]$$

mit H_i^* in $\left[\frac{A}{m} \right]$; mithin hat der gesamte Fluss die Grösse

$$\Phi = 4\pi \cdot 10^{-3} \sum_{i=1}^{10} (\mu_r^* H^*)_i \quad [mVs] \quad (135)$$

mit H_1^* in $\left[\frac{\text{kA}}{\text{m}}\right]$; er wird erhalten durch Summierung über die 10 Flussröhren längs \overline{DF} . In den meisten Fällen ist H^* längs \overline{DF} praktisch konstant (\pm wenige Prozent), sodass man vereinfacht nach

$$\Phi \approx 4\pi \cdot 10^{-2} (\mu_r^* H^*)_m \quad [\text{mVs}]$$

mit einem Mittelwertpaar $(H_m^*, \mu_{r,m}^*)$ rechnen kann, anstatt über i zu summieren.

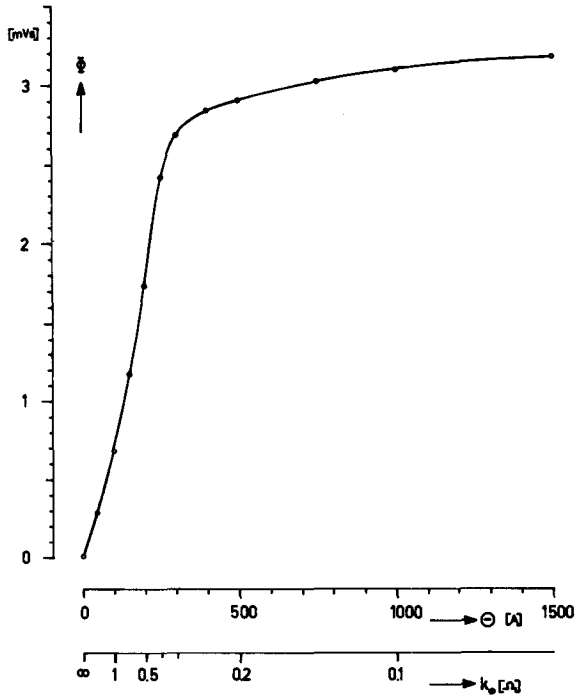


Abb. 69: Gemessene magnetische Charakteristik des Winkelprofils nach Abb. 62, bei Vernachlässigung des Luftgebiets, mit $a = 10$ cm und dem Medium nach Abb. 53 und 54.

Die in der geschilderten Weise bestimmte Kennlinie $\Phi(\theta)$ ist in der Abb. 69 aufgetragen, wobei unter dem horizontalen Masstab für θ auch noch der dazu reziproke für k_0 eingezeichnet ist. Die Durchflutung θ bezieht sich dabei auf das gesamte Profil ($U = k_0 \theta = 100$ V) nach Abb. 62. Die aus dem Iterationsverfahren erhaltenen Feldbil-

der unterscheiden sich nicht prinzipiell von dem in Abb. 67 dargestellten. Für sehr kleine Sättigungen ist lediglich die Stauung der Feldlinien an der einspringenden Ecke E (Abb. 62) ausgeprägter, weil dort die Permeabilität infolge der stark zunehmenden Feldstärke grössere Werte erreicht (vergl. Abb. 53). Für sehr grosse Sättigungen hingegen ist das Gegenteil der Fall: Die Feldlinien werden nach G gedrängt und die Stauung an E verschwindet in zunehmendem Masse.

SCHRIFTTUM

- 1) Buchholz, H. : "Elektrische und magnetische Potentialfelder". Springer-Verlag, Berlin 1957.
- 2) Ollendorff, F. : "Berechnung magnetischer Felder". Springer-Verlag, Wien 1952.
- 3) Lehmann, Th. : "Graphische Methode zur Bestimmung des Kraftlinienverlaufes in Luft". ETZ 30 (1909), 995-998, 1019-1022.
- 4) Lehmann, Th. : "Détermination graphique des champs magnétiques laplaciens et tourbillonnaires à lignes de flux planes". Rev. gén. Electricité 14 (1923), 347-357, 395-403, 530.
- 5) Lehmann, Th. : "La détermination des champs magnétiques partiels et résultants dans les dynamos saturées". Rev. gén. Electricité 22 (1927), 1105-1119.
- 6) Benedikt, O. : "Eine neue Berechnungsmethode für komplizierte, stark gesättigte magnetische Kreise". Acta Technica Acad. Sci. Hungaricae 19 (1957), 169-191.
- 7) Brechna, H. : "Einfluss von Form und Bauart der Transformator-Eisenkörper auf die Ummagnetisierungsverluste". Scientia Electrica 5 (1959), 1-18.
- 8) Koepsel, A. : "Eine neue Formel für die Magnetisierungskurve". ETZ 49 (1928), 1361-1363.
- 9) Fischer, J. und H. Moser : "Die Nachbildung von Magnetisierungskurven durch einfache algebraische oder transzendente Funktionen". Archiv f. Elektrotechn. 42 (1956), 286-299.
- 10) Ollendorff, F. : "Die Grundlagen der Hochfrequenztechnik". Springer-Verlag, Berlin 1926, S. 202.
- 11) Richter, R. : "Das magnetische Feld in den Lufträumen elektrischer Maschinen". Archiv f. Elektrotechn. 11 (1922), 85 ff.
- 12) Richter, R. : "Elektrische Maschinen. Bd. 1. Allgemeine Berechnungselemente. Die Gleichstrommaschinen". Verlag Birkhäuser, Basel 1951, S. 15, S. 190 ff.
- 13) Kron, G. : "Tensor Analysis". John Wiley & Sons Inc., New York 1939.
- 14) Kron, G. : "Numerical solution of ordinary and partial differential equations by means of equivalent circuits". J. Appl. Phys. 16 (1945), 172-186.
- 15) De Packh, D. C. : "A resistor network for the approximate solution of the Laplace equation". Rev. Sci. Instr. 18 (1947), 798-799.
- 16) Redshaw, S. C. : "An electrical potential analyzer". Proc. Inst. Mech. Engrs. London 159 (1948), 55-62.

- 17) Liebmann, G. : "Precise solution of partial differential equations by resistance networks". Nature 164 (1949), 149-150.
- 18) Liebmann, G. : "Solution of partial differential equations with resistance network analogues". Brit. J. Appl. Phys. 1 (1950), 92-103.
- 19) Hechtel, R. : "Ein Widerstandsnetzwerk zur Lösung der Poisson'schen Gleichung". Die Telefunken-Röhre H. 32 (1955), 38-46.
- 20) Čremošnik, G. : "Ermittlung von Raumladungsfeldern und Kapazitäten mit Hilfe eines Widerstandsnetzwerkes mit Stromquellen". Diss. Eidgen. Techn. Hochschule Zürich (1957), Prom. Nr. 2667.
- 21) Soroka, W. W. : "Analog methods in computation and simulation". McGraw-Hill Book Co., New York 1954.
- 22) Karplus, W. J. : "Analog simulation". McGraw-Hill Book Co., New York 1958.
- 23) Čremošnik, G. und M. J. O. Strutt : "Bestimmung von ebenen, kreis- und kugelsymmetrischen Raumladungsfeldern mit Hilfe einfacher Widerstandsketten und mit Stromquellen." Zschr. Ang. Math. Phys. (ZAMP) 8 (1957), 329-360.
- 24) Oberretl, K. : "Die genauere Berechnung des Magnetisierungsstromes von dreiphasigen Asynchronmaschinen". Bull. Oerlikon 335 (1959), 66-84.
- 25) Brechna, H. : "Neue Tendenzen im Bau von Transformatorkernen". Bull. Oerlikon 326 (1958), 6-14.
- 26) Liebmann, G. : "Resistance network analogues with unequal meshes and subdivided meshes". Brit. J. Appl. Phys. 5 (1954), 362-366.
- 27) Liebmann, G. : "Resistance network analogues". Proc. Internat. Analogy Computat. Meeting Brussels (1955), 346-369.
- 28) Frei, A. H. : "Lösung der Diffusionsgleichung einer rotationssymmetrischen Halbleiterdiode unter Berücksichtigung von Raum- und Oberflächenrekombination mit Hilfe eines Analogienetzwerkes". Diss. Eidgen. Techn. Hochschule (1958), Prom. Nr. 2858.
- 29) Gerschgorin, S. : "Fehlerabschätzung für das Differenzenverfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen". Zschr. Ang. Math. Mech. 10 (1930), 373-382.
- 30) Fisher, M. E. : "Higher order differences in the analogue solution of partial differential equations". J. Assoc. Comp. Mach. 3 (1956), 325-347.
- 31) Jahnke, E. und F. E. M. de : "Funktionentafeln". Dover Publ. New York, 4. Aufl. (1945), S. 24.
- 32) Fisher, R. A. : "Statistical methods for research workers". Oliver & Boyd Edinburgh, 12. Aufl. (1954).

- 33) Linder, A. : "Statistische Methoden". Birkhäuser-Verlag Basel, 3. Aufl. (1960), 87-90.
- 34) Collatz, L. : "Numerische Behandlung von Differentialgleichungen". Springer-Verlag, Berlin 1951.
- 35) O'Brien, G. G., M. A. Hyman and S. Kaplan : "A study of the numerical solution of partial differential equations". J. Math. Phys. 29 (1951), 223-251.
- 36) Karplus, W. J. : "An electric circuit theory approach to finite difference stability". Trans. AIEE 77-pt. I (1958), 210-213.
- 37) Franklin, J. N. : "Numerical stability in digital and analog computation for diffusion problems". J. Math. Phys. 37 (1959), 305-315.
- 38) Fisher, M. E. : "Stability and convergence limitations on the use of analog computers with resistance network analogues". Brit. J. Appl. Phys. 9 (1958), 288-291.
- 39) Brechna, H. : "Betrachtungen zum gegenwärtigen Bau des Eisenkörpers von Transformatoren". Bull. Oerlikon 324 (1957), 70-78.
- 40) von Koppenfels, W. und F. Stallmann : "Praxis der konformen Abbildung". Springer-Verlag, Berlin 1959.
- 41) Henrici, P. : "Ueber die Lösung von ebenen Potentialproblemen mit scharfen und abgerundeten Ecken durch konforme Abbildung". Diplomarbeit Di 117, Inst. Höh. Elektrotechn. ETH, Zürich 1948.

Lebenslauf

- 1933 Geboren am 8. August in Brig (VS)
- 1940-1946 Primarschule in Visp (VS)
- 1946-1949 Sekundarschule in Visp (VS)
- 1949-1952 Ecole Industrielle Supérieure (Section Technique) du Collège de Sion (VS)
- 1952 Maturität Typ C, anschliessend Rekrutenschule
- 1953 Vorstudienpraxis in der Maschinenfabrik Oerlikon
- 1953-1957 Studium an den Abteilungen für Maschineningenieurwesen und für Elektrotechnik der ETH, mit diversen Praktika während der Semesterferien
- 1957 Diplomabschluss als Dipl. El. -Ing. ETH
- 1958-1961 Assistent und wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Höhere Elektrotechnik der ETH (Vorstand Prof. Dr. M. J. O. Strutt), mit längern Unterbrüchen wegen Militärdienstes