

**Variationsformeln zur Lösung von gestörten  
Randwertproblemen in der Astrodynamik und  
ein Beitrag zum Lambert Problem**

ABHANDLUNG

zur Erlangung  
des Titels eines Doktors der Mathematik  
der  
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE  
ZÜRICH

vorgelegt von

JIRI KRIZ  
Dipl. Math. ETH  
geboren am 24. August 1947  
in Trebic (Tschechoslowakei)

Angenommen auf Antrag von  
Prof. Dr. E. Stiefel, Referent  
Prof. Dr. P. Läuchli, Korreferent

## ABSTRACT

Methods for solving boundary-value problems in astrodynamics are developed and applied to interplanetary transfer- and flyby-trajectories.

A new uniform method (with respect to the type of the conic section) for the classical Lambert Problem is presented and results in the solution of one nonlinear equation only. The uniformly valid state-transition matrix of the Keplerian motion is established by means of the KS-transformation.

Perturbed boundary-value problems are treated by integrating the perturbed trajectory numerically and by performing the differential correction technique using the analytical state-transition matrix of the unperturbed motion. Feasibility and efficiency of this procedure are demonstrated by several realistic, in part strongly perturbed and ill-conditioned transfer- and flyby-trajectories.

## ZUSAMMENFASSUNG

Unter einem astrodynamischen Randwertproblem versteht man die Bestimmung der Bahn eines Mobils im Gravitationsfeld (des Sonnensystems), sodass sie gewisse vorgeschriebene Bedingungen erfüllt. Zur Behandlung dieses komplexen Problems werden in der vorliegenden Arbeit theoretische Methoden untersucht und entwickelt. Es werden semi-numerische Verfahren erarbeitet und auf die Berechnung von realistischen interplanetaren Transfer- und Flyby-Bahnen angewandt. Dabei zeigt sich eine deutliche Verbesserung und Abkürzung der Rechenzeit gegenüber klassischen numerischen Methoden.

Die Basis der Untersuchungen bildet die ungestörte Bewegung. Dieses analytisch lösbare Zweikörperproblem (Sonne - Mobil) wird zweckmässig mit Hilfe der Kustaanheimo/Stiefel-Transformation behandelt. Durch Verwendung der sog. Stumpff-Funktionen erhält man eine uniform gültige, d.h. vom speziellen Bahntypus (elliptisch, parabolisch, hyperbolisch) unabhängige Lösung (Kap. 1.1).

Die Bahnberechnung einer interplanetaren Sonde, die ausgehend von der Erde einen Zielplaneten (unter eventuell nahem Vorbeiflug an einem Zwischenplaneten) erreichen und zusätzliche Randbedingungen erfüllen soll, wird in folgender Form gelöst:

a) Es wird eine Ausgangsnäherung ermittelt, indem die Bahn aus heliozentrischen ungestörten Keplerbogen zusammengesetzt wird (4.2). Die Bestimmung eines solchen Bogens erfordert die Lösung des sog. Lambert Problems, d.h. es ist eine Keplerbahn durch zwei Punkte mit vorgeschriebener Laufzeit zu konstruieren. Für diese klassische Randwertaufgabe der Himmelsmechanik wird eine neue Lösungsmethode entwickelt, welche das Problem auf eine einzige nicht-lineare algebraische Gleichung reduziert (1.2, und Literaturhinweis [6]).

b) Die heliozentrischen Bogen werden an den Flyby-Planeten durch planetozentrische Hyperbeln verknüpft (4.2). Für die Berechnung der approximativen Startgeschwindigkeit in einem gegebenen Punkt des Erdsystems, sodass eine Abflughyperbel mit vorgeschriebener asymptotischen Geschwindigkeit resultiert, wird eine allgemein gültige Lösungsformel hergeleitet (1.3).

c) Die zusätzlichen Nebenbedingungen werden differentiell durch Variation der Anfangswerte, resp. durch Unterwegs-Korrekturen befriedigt. Die dazu benötigte sog. Uebergangsmatrix wird mit Hilfe der KS-Transformation einfach hergeleitet und kompakt und uniform dargestellt (2). Mittels der kanonischen Mechanik wird auch die Inverse der KS-Uebergangsmatrix analytisch berechnet (2.1) und als Nebenresultat ergeben sich die Störungsgleichungen für die Elemente der Keplerbahn (3.1).

d) Für realistische Bahnberechnung müssen die Störungen der Planeten berücksichtigt werden. Statt die Uebergangsmatrix durch rechenaufwendige numerische Integration der Variationsgleichungen, resp. benachbarter Bahnen, zu berechnen, machen wir den folgenden Versuch: Die Bahn wird zwar unter Berücksichtigung der Störungen numerisch integriert, für ihre Verbesserung (Variation) benutzen wir jedoch die analytische Uebergangsmatrix der ungestörten Bewegung (4.2). Dieses Vorgehen und seine Auswirkung auf die Konvergenz des iterativen (Newton-) Prozesses wird theoretisch untersucht (3.3) und an realistischen Beispielen der Weltraumfahrt getestet (5). Es erweist sich selbst bei schwierigen, stark gestörten Flyby Problemen als erfolgreich und kostensparend (5.2).

In der Arbeit wird auch auf die auftretenden numerischen und programmiertechnischen Probleme eingegangen, z.B. auf die "Instabilität" der Iteration (3.3), die schlechte Kondition (3.3), die Berechnung von Stumpff-Funktionen (5.1), usw.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. E. Stiefel herzlich danken für sein stetes Interesse, das er dieser Arbeit entgegengebracht hat, für seine Unterstützung und viele Anregungen. Mein Dank geht auch an Herrn Prof. Dr. P. Läuchli für die Uebernahme des Korreferates und endlich an die Herren Dr. U. Kirchgraber und Dr. J. Nötzli für viele anregende Diskussionen.