



Doctoral Thesis

## La Topologie algébrique des origines à Poincaré

**Author(s):**

Pont, Jean-Claude

**Publication Date:**

1974

**Permanent Link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000087901> →

**Rights / License:**

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

BIBLIOTHÈQUE DE PHILOSOPHIE CONTEMPORAINE  
FONDÉE PAR FÉLIX ALCAN

# LA TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE

*des origines à Poincaré*

PAR

JEAN-CLAUDE PONT  
*Docteur ès Sciences mathématiques*

PRÉFACE DE RENÉ TATON



*Ouvrage réalisé et publié avec le concours  
du Fonds national suisse de la Recherche scientifique  
et de la Fondation pour l'Avancement des Mathématiques en Suisse*



PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE  
108, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS  
1974

## *Postface*

# RÉFLEXIONS SUR L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

« C'est donc un service à rendre à la Géométrie, que de suppléer par une fiction au fait historique dont les traces se sont effacées. »

(LOUIS BERTRAND.)

Si ces réflexions ont été suggérées par les problèmes techniques et philosophiques qui se sont posés à l'auteur durant la rédaction de cet ouvrage, c'est l'état catastrophique de l'enseignement de l'histoire des mathématiques dans son pays qui l'a amené à les exposer. Le lecteur sera conscient qu'elles proviennent d'un homme dont la formation est celle d'un mathématicien, qui s'est par la suite dirigé vers la recherche historique, sans apprentissage préalable, mais aussi sans préjugé d'aucune sorte. Par conséquent, les idées de ce chapitre sont parfois banales, souvent fort connues, quelquefois peut-être originales. Quoi qu'il en soit, il est permis, pour enfoncer un clou, d'utiliser un marteau qui a déjà servi.

En cette deuxième moitié du  $xx^e$  siècle, l'histoire des mathématiques répond à de multiples besoins qui sont apparus aux différents stades d'évolution de la pensée humaine ; nous ne discuterons pas des plus anciens, devenus évidents, pour nous attacher particulièrement à deux d'entre eux, d'origine récente, dont les spécialistes n'ont pas toujours pris conscience.

1. D'abord, c'est là une question à incidence pratique, il devient de plus en plus difficile de concevoir un enseignement des mathématiques qui ne fasse pas appel à l'histoire. Cette constatation, qui à d'aucuns semblera une lapalissade, est loin d'être universellement admise ; nous en voulons pour preuve le fait qu'aucune école supérieure de Suisse ne propose à ses étudiants des cours réguliers d'histoire des mathématiques.

Aussi n'est-il pas inutile de développer cette observation. Prenons un exemple : imaginons une contrée habitée par une population active et curieuse de connaître le pays que le destin lui a choisi. Longtemps, de vastes étendues d'eau, de puissantes chaînes de montagnes et de vieux tabous arrêtent toutes les tentatives d'exploration. Puis soudain, plus chanceuse ou mieux inspirée, une caravane parvient à forcer le passage. Celles qui suivront, mises en confiance par ce succès, s'efforceront de simplifier le chemin. Petit à petit, elles remplaceront la périlleuse voie originale par une route directe et large. On doit toutefois se garder de penser que cette manière de voyager présente seulement des avantages. Alors que les longs et pénibles chemins d'autrefois développaient chez le voyageur qualités physiques et morales, sens de l'itinéraire et facultés d'observation, à peine ceux d'aujourd'hui laissent-ils un vague souvenir. Cela est insuffisant lorsque le voyage est prétexte à former des explorateurs.

Pour employer les termes de cet exemple, il semble que de nos jours on considère trop l'enseignement comme un véhicule rapide et confortable amenant les étudiants d'une région à l'autre. Si, bien sûr, on ne peut exiger de l'élève qu'il parcoure le chemin des pionniers, tout au moins devrait-on s'efforcer de le lui décrire, en faisant ressortir comment certains problèmes ont surgi et comment on les a résolus. Il en découle que l'historien a pour mission première, lorsqu'il se place dans la perspective de l'enseignement, la recherche des voies originales qui ont amené un auteur à telle découverte, à telle théorie. Ce problème difficile, peut-être le plus ardu de la recherche historique, n'obtient que rarement une solution représentant à coup sûr la démarche de l'auteur. Cependant, cette tentative de reconstitution est toujours intéressante ; car elle vise à découvrir la façon la plus naturelle d'introduire une théorie. C'est là une conception pragmatique de l'histoire, nous en convenons, mais « la vérité n'est pas toujours ce qui se démontre, c'est parfois aussi ce qui simplifie » (1).

Si on condamne toutes les ouvertures de la citadelle, demeurant sur le terrain strictement mathématique, le besoin d'histoire se limite à ce que nous venons de dire ; que l'on élève le débat en se plaçant dans la perspective de la pensée humaine du milieu du *xx<sup>e</sup>* siècle, et l'on voit cette question prendre une ampleur nouvelle.

(1) A. de Saint-Exupéry.

2. Ignorer l'histoire, c'est ignorer l'homme avec ses luttes, ses joies, ses peines, ses rêves même ; ignorer l'histoire, c'est donner à notre science une forme inhumaine et pétrifiée : on s'attache à une construction, certes magnifique, mais d'où la vie a disparu depuis longtemps. A vouloir donner aux théories qui la constituent un visage qui serait indépendant de l'homme et de son milieu, on en fait une science qui paraît sèche et sans âme, alors qu'on pourrait lui insuffler force et vie en montrant comment une théorie naît, fleurit et parfois meurt.

Cet état d'esprit s'oppose fondamentalement à l'idéal du nouvel humanisme qui tend à mettre l'homme total au centre de ses préoccupations, et à réaliser ainsi un pas important vers une certaine unité de but, si ce n'est de nature et de moyen, dans le savoir humain. A ce propos, nous citons volontiers une phrase de R. Godement [58, p. 326] à laquelle nous souscrivons pleinement :

« ... et que Hilbert réalisant la décomposition spectrale des opérateurs linéaires, Perrin analysant le bleu du ciel, Monet, Debussy et Proust recréant pour notre émerveillement le scintillement de la lumière sur la mer, travaillaient tous dans le même but, qui sera aussi celui de l'avenir : la connaissance de l'univers total. »

Cette unité, de prime abord artificielle ou purement verbale, existe souvent, surtout lorsque les différentes disciplines sont considérées dans leur développement ; on remarque en effet, avec A. Denjoy [22, p. 13-14], que réellement :

« Par de mystérieux accords résonnant aux âmes d'un temps, mathématiques, arts plastiques et de plume, poésie, musique, présentent à peu près dans les mêmes années des transfigurations essentielles et analogues. Un même bouillonnement, une même révolte soulèvent les esprits. Franchise de l'inspiration, toutes entraves brisées, et de l'expression aussi bien. C'est le pareil cri poussé. Peinture, poésie, mathématiques ouvrent des temps nouveaux avec Delacroix, Baudelaire, Riemann. »

Dans cet ordre d'idées, nous allons voir que l'évolution des mathématiques, dans la deuxième moitié du XIX<sup>e</sup> siècle, présente des analogies remarquables avec l'évolution de l'art au cours de la même période.

Essayons, pour commencer, de mettre en évidence les éléments qui caractérisent le passage de l'art traditionnel à l'art moderne, et penchons-nous plus particulièrement sur la peinture. En ce domaine, la création s'opère à peu près selon le schéma suivant : l'image d'une certaine partie du réel se forme sur la rétine de l'artiste ; elle passe ensuite dans le cerveau où elle subit

des transformations, régies par des facteurs affectifs, intellectuels, sociaux, etc. ; puis une dernière transformation ramène dans le monde extérieur le réel ainsi transfiguré ; en notation symbolique on écrirait :

$$\text{Réal} \xrightarrow{\varphi_1} \text{rétine} \xrightarrow{\varphi_2} \dots \xrightarrow{\varphi_n} \text{tableau.}$$

Dans la période traditionnelle, le produit  $\varphi_n \dots \varphi_2 \cdot \varphi_1$  était, continuons à employer le langage de la géométrie, une isométrie ou plutôt une homothétie ; l'artiste cherchait à reproduire le plus fidèlement possible ce qu'il voyait ; si bien qu'on a pu dire de cet art :

« Il est réellement un moyen de représenter les choses telles qu'elles apparaissent à nos yeux lorsque nous les considérons d'un certain point de vue et en prenant soin de ne pas bouger » [67, p. 19].

Dans le naturalisme, chacun reconnaîtra l'objet que l'artiste a décrit ou représenté ; les formes qu'on y rencontre surprennent rarement le sens commun.

Dans la période suivante, le schéma reste le même, mais le produit  $\varphi_n \dots \varphi_2 \cdot \varphi_1$  n'est en général plus une homothétie, ou, en d'autres termes :

« En passant du domaine de la nature à celui de l'art, les objets ne restent pas les mêmes. Ils changent, pour le moins en partie, de fonction et de signification » [67, p. 26].

A la question de savoir quels sont le but et le sens d'un tel art, on doit répondre que, entre autres choses, il essaye de dégager de l'objet qu'il étudie des propriétés qui ne sont pas immédiatement visibles ; ou pour citer encore J. E. Muller :

« Il [cet art] a pour but de révéler non pas l'objet en lui-même, mais la signification qu'il a prise sous un regard singulier... L'art moderne par contre remet en question les idées que nous avons coutume de nous faire, il les ébranle, il nous invite à découvrir aux objets des aspects inédits. Se plaisant à nous dépayser, il nous conduit à affronter l'inconnu là où l'objet réel se serait signalé par sa rassurante banalité » (p. 45).

Donc l'identité extérieure entre l'objet et sa représentation ne caractérise plus une œuvre d'art ; au point que :

« La déformation est devenue l'un des traits distinctifs de l'art moderne, aussi bien dans la sculpture que dans la peinture » [67, p. 51].

Une telle conception de l'art exprime la liberté totale de l'artiste face au modèle ; cela entraîne l'apparition de formes bizarres, qui semblent n'avoir point de racine dans le monde matériel :

« L'artiste dorénavant se soucie moins de ce qu'il peut observer que de ce qu'il ressent, conçoit, imagine. Il commence par user avec liberté des données de la nature ; il a recours aux déformations, aux transpositions, et il pousse au point où les objets deviennent méconnaissables. De plus en plus l'image (naturaliste) se dévalorise au profit des significations dont peuvent être chargées la seule forme et la seule couleur » [67, p. 11].

En conclusion nous dirons, avec J. E. Muller :

« Alors que l'art de la Renaissance, soucieux de définir l'homme par tout ce qui le sépare des autres créatures, s'était appliqué à l'enfermer dans ses particularités physiques les plus distinctives, l'art moderne, en le déformant, le fait sortir de ses limites et lui découvre des affinités avec ce qui existe en dehors de lui... Qu'à l'art dominé par le souci de l'identité succède l'art qui met l'accent sur les analogies » [67, p. 72].

Montrons maintenant que le passage de la géométrie à la topologie, ou plus généralement le passage des mathématiques traditionnelles aux mathématiques modernes, s'effectue selon un mode analogue à celui que nous venons de décrire ; cela est si vrai que les citations précédentes peuvent aussi bien servir à le caractériser. Aux yeux de la géométrie classique, deux figures sont égales lorsqu'on peut passer de l'une à l'autre par une isométrie ou, si l'on veut, lorsque le bon sens nous dit qu'elles sont égales. En topologie, la relation d'égalité est beaucoup plus large, c'est-à-dire que les figures susceptibles d'être prises comme représentation d'un objet sont très variées, et semblent parfois fort différentes de leur modèle. Cette science nous révèle la signification prise par l'objet sous un regard singulier ; elle (et c'est là une conclusion qui vaut également pour les mathématiques modernes) remet en question les idées que nous avons coutume de nous faire, elle les ébranle, elle nous invite à découvrir aux objets des aspects inédits ; se plaisant à nous dépayser, elle nous conduit à affronter l'inconnu là où l'objet « réel » se serait signalé par sa rassurante banalité.

Ainsi, c'est en idéalisant des objets soumis à notre observation quotidienne que les mathématiciens ont obtenu les êtres géométriques fondamentaux : points, lignes, surfaces ; qu'ils ont cru, à la suite d'un nouvel effort d'abstraction, pouvoir remplacer par des expressions analytiques ; cependant, celles-ci se sont révélées plus riches que la réalité qu'elles étaient censées recouvrir ; en d'autres termes, si à chaque ligne ou surface, dont on trouve une image dans le monde extérieur, on peut faire correspondre une expression analytique, la réciproque n'est pas vraie.

enquêtes, d'établir des archives ; par ce moyen, chaque chercheur pourra indiquer comment il voit l'évolution de sa propre science, les buts qu'il poursuit, ses espérances, et ses échecs qui sont souvent aussi instructifs que les succès. Ce même « laboratoire » tentera une première interprétation des documents enregistrés, et écrira ainsi une histoire actuelle. On lui reprochera sans doute de manquer d'objectivité ; on lui saura en revanche gré de contenir des renseignements d'une valeur inestimable, qu'on aura pu recueillir directement auprès des gens qui font l'histoire. Un tel travail ne doit pas être un but en soi, mais bien plutôt un tremplin pour l'historien de l'avenir, qui disposera ainsi d'un fabuleux ensemble de documents classés et analysés. De plus, cette histoire actuelle intéressera également le mathématicien et l'érudit, et c'est là « le seul critère pour reconnaître la vraie histoire, la vraie philosophie d'une science » [55 a, p. 104]. Ces renseignements permettront finalement d'écrire « l'histoire négative », qui est celle où l'on relate les échecs, les impasses, les faux pas de la recherche, et qui peut être autant révélatrice d'un état d'esprit, d'un courant d'idées que sa sœur l'Histoire.

Pour être écrite, cette histoire nécessite d'abord un nouveau type de chercheur, à la fois spécialiste de la branche dont il entend retracer l'évolution, chroniqueur honnête et historien compétent. En second lieu, une collaboration aussi étroite que possible entre le savant et l'historien est indispensable. Actuellement, une coopération efficace de la part du savant est encore problématique, car, trop souvent, il méconnaît le rôle de l'histoire. Absence de conscience historique que l'on comprend aisément si l'on veut bien tenir compte du fait que, pendant ses longues années de formation, le futur savant n'aborde nulle question historique. Ce sont des problèmes dont on le tient à l'écart.

Comment remédier à cette situation ? En inculquant à l'étudiant le goût et le sens de l'histoire par des cours qui montrent l'intérêt de cette science et qui mettent en lumière les problèmes ardues auxquels elle se heurte quotidiennement et qu'elle doit résoudre. Il ne s'agit pas, bien entendu, de faire de ces étudiants des érudits noyés dans un amas de détails. Mais il faut qu'ils puissent suivre la naissance et l'évolution d'une théorie, en un mot sa vie, et être attentifs aux problèmes philosophiques qu'elle ne manque pas de soulever.

Il semble donc que les raisons d'introduire l'histoire comme moyen de formation du futur scientifique ne manquent pas, et pourtant...