

**Diss. Nr. 4305**

# **Zur Konvergenz eines Jacobiverfahren für gewöhnliche und verallgemeinerte Eigenwertprobleme**

ABHANDLUNG

zur Erlangung der Würde eines Doktors der Mathematik

der

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE  
ZÜRICH

vorgelegt von

**KATHARINA ZIMMERMANN**

dipl. Math. ETH

geboren am 24. November 1941

von Schwändi (Kt. Glarus)

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. P. Henrici, Referent

Prof. Dr. E. Stiefel, Korreferent

Juris Druck + Verlag Zürich  
1969

### Einleitung.

Die vorliegende Arbeit behandelt das nach Kolonnen zyklische Jacobiverfahren für reelle, symmetrische Matrizen mit dem Ziel, die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix bezüglich einer symmetrischen, positiv definiten Matrix asymptotisch zu bestimmen.

Das allgemeine Jacobiverfahren ermöglicht durch eine i.A. unendliche Anzahl von Schritten, die Eigenwerte einer symmetrischen, reellen Matrix zu berechnen. Es gibt auch modifizierte Jacobiverfahren für Hermitesche Matrizen, siehe Forsythe und Henrici [3], Hansen [5] und [6], Henrici [7], und ebenso für nichtsymmetrische Matrizen, siehe Duleau [1], Falk und Langemeyer [2]. Die Konvergenz für letztere ist nicht in allen Fällen bewiesen, obschon das Verfahren auf Rechenautomaten in Gebrauch ist und befriedigende Resultate zu liefern scheint.

Das ursprüngliche Jacobiverfahren wurde erstmals von Jacobi [8] für symmetrische, reelle Matrizen verwendet, der als Pivot (= das bei einem beliebigen Jacobiverfahren während eines bestimmten Schrittes ausgezeichnete Aussendiagonalelement der jeweils vorliegenden Matrix) ein // dem Betrage nach grösstes Aussendiagonalelement wählte. Diese Wahl des Pivots ist für das Handrechnen sehr praktisch und ergibt nebenbei die beste Konvergenz. Eine genaue Beschreibung findet sich in Wilkinson [13], S. 266 - 269, wo auch der Beweis für die Konvergenz und Eindeutigkeit des ursprünglichen Jacobiverfahrens steht.

Für das Rechnen mit Automaten ist es angenehmer, die Pivots in einer festen Reihenfolge zu wählen. Solche Jacobiverfahren nennt man zyklisch, siehe Forsythe und Henrici [3], Hansen [5] Henrici [7], Schröder [11] und Wilkinson [15]; sie erübrigen das Bestimmen des jeweils grössten Aussendiagonalelements, ergeben aber eine langsamere Konvergenz, da es möglich ist, dass man bei zyklischer Wahl der Pivot solche antrifft, die sehr klein sind und deswegen kaum merklich zur Konvergenz beitragen. Diesem Nachteil versucht die "Threshold Jacobi Method" oder die Jacobimethode mit Schwellwerten beizukommen, indem sie aus der fest vorgegebenen zyklischen Reihenfolge nur diejenigen Pivots nimmt, deren Betrag über einem gewissen Schwellwert liegt, und im Laufe des Prozesses den Schwellwert verkleinert, siehe Falk und Langemeyer [2], Schröder [11].

Falk und Langemeyer [2] geben auch eine Methode an, die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix bezüglich einer symmetrischen, positiv definiten Matrix zu bestimmen und zwar mit Schwellwerten. Schwellwerte haben aber den Vor- und Nachteil, dass sie willkürlich sind und sehr von den konkret gegebenen Matrizen abhängen. Deshalb soll das Problem hier ohne Schwellwerte nach Kolonnen zyklisch behandelt werden.