Kreisringträger und Wendelfläche

Author(s):
Menn, Christian

Publication Date:
1956

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000088605

Prom. Nr. 2538

Kreisringträger und Wendelfläche

VON DER

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN ZÜRICH

ZUR ERLANGUNG DER WÜRDE EINES

DOKTORS DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

GENEHMIGTE

PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON

Christian Menn

Dipl. Bauing. ETH

von Zillis (GR)

Referent: Herr Prof. Dr. P. Lardy

Korreferent: Herr Prof. Dr. H. Favre

Zürich 1956

Dissertationsdruckerei Leemann AG

entwickelt. Für die stabförmigen Tragwerke (Kreisringträger und schraubenlinienförmiger Balken) ist dabei im Hinblick auf das für die freitragende Wendelfläche vorgeschlagene Näherungsverfahren erstmals die genaue Differentialgleichung abgeleitet worden. Im übrigen beruht die statische Berechnung dieser Tragwerke weitgehend auf bereits bekannten Ansätzen von *F. Fuchssteiner*. Über die Flächentragwerke (Kreisringsektorplatte und Wendelfläche) sind bisher nur sehr wenige theoretische Arbeiten erschienen. Es lag deshalb nahe, das Problem von Grund auf neu zu behandeln, ohne auf die oft etwas unvollständigen Ergebnisse früherer Arbeiten Bezug zu nehmen. Dabei gelang es, für die an den Enden frei aufliegende und für die fest eingespannte Kreisringsektorplatte sowie für die unendlich lange Wendelfläche eine strenge Lösung anzugeben, während für die verschiedenen Stützungsverhältnisse der endlich langen Wendelfläche Näherungslösungen entwickelt wurden. Es ist klar, daß das Problem der Wendelfläche damit nicht vollständig gelöst ist. Ausgehend von den im vierten Kapitel abgeleiteten Differentialgleichungen wären deshalb weitere schalentheoretische Untersuchungen durchaus wünschenswert, wobei vor allem abzuklären wäre, ob bei derart komplizierten Differentialgleichungen numerische Methoden nicht einfacher zum Ziele führen könnten.

Zu den einzelnen Lösungen ist noch beizutragen, daß es nicht immer möglich war, gebrauchsfertige Formeln anzugeben. Der Grund dafür liegt darin, daß eine Berechnung auf allgemeiner Grundlage oft auf viel zu komplizierte Ausdrücke geführt hätte; der Berechnungsgang ist jedoch immer soweit entwickelt, daß für einen praktischen Fall die Lösung des Problems auf numerischem Weg ohne weiteres gefunden werden kann.

Rückblickend auf die verschiedenen Lösungen, die die vorliegende Arbeit enthält, kann nun auch die einleitend gestellte Frage, was für Vereinfachungen getroffen werden müssen, damit für ein bestimmtes Schalenproblem eine zweckmäßige Näherungslösung entwickelt werden kann, beantwortet werden. Es wurde dabei zwischen statischen und geometrischen Vereinfachungen unterschieden, Vereinfachungen, die sich im ersten Fall auf den Spannungsverlauf im Querschnitt, im zweiten Fall dagegen auf die geometrischen Verhältnisse des Tragwerks beziehen. Auf Grund der durchgeführten Berechnungen und im Hinblick auf die Vergleiche, die stets zwischen dem ebenen und räumlichen Tragwerk angestellt wurden, kann nun gesagt werden, daß die Art der vorzunehmenden Vereinfachungen weitgehend von den Stützungsverhältnissen abhängen. Es ist selbstverständlich, daß eine statische Vereinfachung, eine Berechnung nach der Balkentheorie, nur bei einem zweiseitig gestützten Tragwerk gegeben ist. In diesem Falle erhält man damit allerdings sehr gute Näherungen für die Hauptschnittkräfte und Verformungen. Geometrische Vereinfachungen sind dagegen im allgemeinen unzweckmäßig. Wie Vergleiche zwischen Kreisringträger und schraubenlinienförmigem Balken zeigen, führen sie bei zweiseitig gestützten Tragwerken zu vollständig verfälschten Ergebnissen. Ihre Anwendung bleibt deshalb auf drei- und vierseitig gestützte Tragwerke beschränkt und kann, wie die Berechnungen an der Wendelfläche zeigen, auch da nur bei relativ kleinen Krümmungen den Charakter einer ersten Näherungslösung haben.

VI. Anhang

Ableitung der Differentialgleichungen der Wendelfläche

Die der Ableitung der Differentialgleichung zu Grunde gelegten Voraussetzungen wurden bereits im Abschnitt IV/1 besprochen. Außerdem wurde darauf hingewiesen, daß das Differentialgleichungssystem nicht mehr mit den üblichen, anschaulichen Methoden ermittelt werden kann. Alle erforderlichen Gleichungen und Beziehungen werden deshalb mit Hilfe der Differentialgeometrie [39] und Tensorrechnung [40, 41] auf formalem Wege hergeleitet, wobei man sich am besten auf eine der bekannten Arbeiten über die allgemeine Biegetheorie von Schalen stützt [42, 43, 44]. Den folgenden Berechnungen liegt eine Abhandlung von *W. Zerna* [45] zu Grunde, die die Ermittlung der Differentialgleichung in übersichtlicher Art gestattet. Allerdings müssen zahlreiche Begriffe und Rechenoperationen der Vektor- und Tensoranalysis, die dem Bauingenieur im allgemeinen fremd sind, als bekannt vorausgesetzt werden.

Hinsichtlich der Schreibweise der verwendeten Formeln sei noch bemerkt, daß lateinische Buchstaben als Indizes stets die Zahlen 1 und 2 durchlaufen, die der Einfachheit halber an Stelle der Koordinaten φ und r gesetzt werden. Außerdem ist zu beachten, daß über doppelt auftretende Indizes summiert werden muß, ohne daß das Summenzeichen ausdrücklich angeschrieben wird; Ausnahmen von dieser Regel werden immer besonders gekennzeichnet. So bedeutet zum Beispiel:

$$\vec{e}^{\,k} = g^{ik}\,\vec{e}_i = g^{1k}\,\vec{e}_1 + g^{2k}\,\vec{e}_2 .$$

1. Berechnung des Verzerrungstensors

a) Differentialgeometrie der Wendelschale

In geometrischer Hinsicht ist eine Schale durch ihre Dicke $(2\,\delta)$ und die Form ihrer Mittelfläche, die am einfachsten durch die von zwei Parametern ϑ_i (1, 2) abhängige Gleichung ihres Ortsvektors $\vec{r} = \vec{r}\,(\vartheta_i)$ beschrieben wird, bestimmt. Da Wendelflächen im allgemeinen durch Kreisränder begrenzt sind, führt man als Parameter am zweckmäßigsten die Polarkoordinaten r und φ ein.

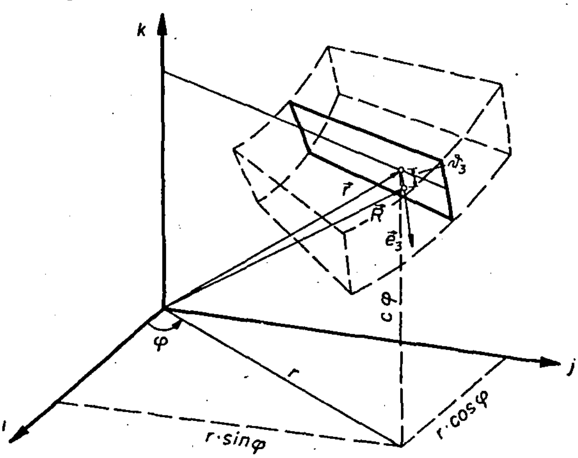

Abb. 8

Mit H als Ganghöhe der Wendelfläche lautet sodann die Vektorgleichung des Ortsvektors $\vec{r}$, bezogen auf ein rechtwinklig-rechtshändiges Koordinatensystem (i, j, k) Abb. 8: