Einfache Körper mit konstanter Inhomogenität

Author(s):
Zuber, Rolf

Publication Date:
1972

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000089146

Diss. Nr. 4876

Einfache Körper mit konstanter Inhomogenität

ABHANDLUNG

zur Erlangung
der Würde eines Doktors der Naturwissenschaften
der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZÜRICH

vorgelegt von

ROLF ZUBER
dipl. Phys. ETH
geboren am 2. Februar 1937
von Wattwil (Kt. St. Gallen)

Angenommen auf Antrag von
Herrn Prof. Dr. Ch. Wehrli, Referent
Herrn Prof. Dr. M. Sayir, Korreferent

Juris Druck + Verlag Zürich
1972

11.2. Drehinhomogene Bezugsfunktionen

Satz 2 gab die Gestalt $\mathbf{A} = \mu\tilde{\mathrm{I}} \oplus 0$ als notwendige Bedingung für die konstante Inhomogenität einer drehinhomogenen Bezugsfunktion. Nach Satz 3 ist diese auch hinreichend (vgl. obigen Spezialfall 2). Zusammen mit Satz 4 und der Bedingung (5.42) ergibt sich sogar

Satz 6: Es gibt (unendlich viele) drehinhomogene Bezugsfunktionen mit der konstanten Inhomogenität $\mathbf{A} = \mu\tilde{\mathrm{I}} \oplus 0$ (7.21), und lokal ist jede Bezugsfunktion mit der konstanten Inhomogenität (7.21) drehinhomogen. Es gibt keine krummlinig drehinhomogenen Bezugsfunktionen mit konstanter Inhomogenität.

12. Kontrollierbare Konfigurationen und Deformationen

Unter einer kontrollierbaren Konfiguration $\boldsymbol{\kappa}$ eines Körpers verstehen wir eine Gleichgewichtskonfiguration bei verschwindenden Raumkräften, d.h. eine Konfiguration, für die das zugehörige Spannungstensorfeld T_κ der Gleichgewichtsbedingung

$$\mathrm{div}_\kappa\, T_\kappa = 0 \qquad (12.1)$$

genügt. (Eine solche kann durch Oberflächenkräfte allein aufrechterhalten werden.) Eine Deformation φ heisst kontrollierbar, wenn sie von der Form $\varphi = \lambda \circ \kappa^{-1}$ mit kontrollierbaren Konfigurationen κ, λ ist.

Ist $\mathcal{M}$ eine Menge von Materialfunktionen M eines Körpers $\mathcal{K}$, so heisst eine Konfiguration bzw. Deformation von $\mathcal{K}$ universell kontrollierbar für $\mathcal{M}$ oder kurz $\mathcal{M}$-kontrollierbar, wenn sie für alle $M \in \mathcal{M}$ möglich und kontrollierbar ist (vgl. Petroski - Carlson(9) und Wang (8)).

Hier soll die Menge $\mathcal{E}$ der Materialfunktionen diskutiert werden, welche einen Körper $\mathcal{K}$ zu materiell uniformen, inkompressiblen, elastischen und isotropen Festkörpern machen, die eine unverzerrte uniforme Bezugsfunktion $\mathbf{B}$ mit der konstanten ebenen Inhomogenität (7.12) zulassen, nach Satz 4' also eben inhomogen geschichtet sind (vgl. (1), §§ 54, 56-58; Wang (8)). Für diese ist

$$\zeta_B(F) = |\det F| - 1 \qquad (F \in \ell) \qquad (12.2)$$

$$R_B(F) = T_k(p) + d(p)I \qquad (F \in u, \qquad (12.3)$$

$T_k(p)$ Spannungstensor in p in einer Konfiguration k mit $\nabla k(p)\, B(p)^{-1} = I$ $d(p)$ unbestimmter hydrostatischer Druck - vgl. (1), § 30 - $g_B = o$). Nach Satz 4 und dem zweiten Teil von dessen Beweis ist B lokal von der Form

$$B = L\nabla\lambda = P\nabla k$$

mit

$$L^{-1} = e^{\alpha Z}\begin{bmatrix} \cos\tau Z & \frac{\mu}{\tau}\sin\tau Z \\ -\frac{\nu}{\tau}\sin\tau Z & \cos\tau Z \end{bmatrix} \oplus 1 \quad (\tau = \sqrt{\mu\nu}), \quad \lambda = (X, Y, Z), \qquad (8.9)_2$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha x - \mu y \\ 0 & 1 & \nu x - \alpha y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ (9.13)_2 \qquad k = (x, y, z) = L\lambda \qquad (9.14)$$

(vgl. (9.17)). Wir fragen nach den Bedingungen für α, μ, ν, unter denen die Konfigurationen λ bzw. k $\mathscr{C}$-kontrollierbar sind.

Die zu allen Materialfunktionen $M \in \mathscr{C}$ gehörigen relativen Responsfunktionen R_B - vgl. (3.11), (4.3), (4.6) - haben bekanntlich die Gestalt

$$R_B(F) = h_1(\mathrm{sp}\, E, \mathrm{sp}\, E^{-1})\, E + h_{-1}(\mathrm{sp}\, E, \mathrm{sp}\, E^{-1})\, E^{-1} \qquad (E := F F^T) \qquad (12.4)$$

(vgl.(1), (49.5)). Eine Konfiguration k ist nach (12.1-4) also genau dann $\mathscr{C}$-kontrollierbar, wenn

$$|\det(\nabla k\, B^{-1})| = 1 \qquad (12.5)$$

ist und für beliebige Funktionen h_ϱ ($\varrho = 1, -1$) ein Druckfeld $d_k : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ existiert, das der Differentialgleichung

$$\nabla_k d_k = \mathrm{div}_k \sum_\varrho h_\varrho(\mathrm{sp}\, E, \mathrm{sp}\, E^{-1})\, E^\varrho \qquad (E = \nabla k B^{-1}(\nabla k B^{-1})^T) \qquad (12.6)$$

genügt.

Wegen $L^{-1}L^{-1T} = \widehat{L^{-1}L^{-1T}} \oplus 1$ und $L = \hat{L}(Z)$ (vgl. (8.9)) ist jeder materielle Körper $(\mathcal{K}, M)$ mit $M \in \mathscr{C}$ von Wangs Typ $\mathcal{B}$ (vgl. (8), (1.8) und Anhang 4, sowie (1), (23.5)), so dass sich Wangs vergleichende Betrachtungen von homogenen und eben inhomogen geschichteten Körpern auf unsere durch $\mathscr{C}$ definierte speziellere Menge von Körpern anwenden lassen. Insbesondere ist die Konfiguration $\boldsymbol{\lambda}$ $\mathscr{C}$-kontrollierbar, wenn sie nur möglich ist, was wegen $\det \mathbf{L}^{-1} = e^{2\alpha Z}$ und (12.5) genau dann zutrifft, wenn α verschwindet, d.h. wenn die Inhomogenität $\boldsymbol{A}$ symmetrisch ist. Das zugehörige, durch (12.6) geforderte Druckfeld hat die Form $d_\lambda = \hat{d}_\lambda(Z)$ (Wang (8), (2.12)).

Wann ist auch die Konfiguration $\boldsymbol{k}$ $\mathscr{C}$-kontrollierbar? Für diese ist

$$\mathbf{E} = \bar{\mathbf{P}}^{1} \bar{\mathbf{P}}^{1T} = \begin{bmatrix} 1 + (\alpha x + \mu y)^2 & -(\alpha x + \mu y)(\nu x - \alpha y) & -(\alpha x + \mu y) \\ \cdot & 1 + (\nu x - \alpha y)^2 & \nu x - \alpha y \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}, \quad (12.7)$$

$$\bar{\mathbf{E}}^{1} = \mathbf{P}^T \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha x + \mu y \\ \cdot & 1 & -\nu x + \alpha y \\ \cdot & \cdot & 1 + (\alpha x + \mu y)^2 + (\nu x - \alpha y)^2 \end{bmatrix}, \quad (12.8)$$

$$sp\,\mathbf{E} = sp\,\bar{\mathbf{E}}^{1} = 3 + (\alpha x + \mu y)^2 + (\nu x - \alpha y)^2. \quad (12.9)$$

Bezeichnet man die analog zu (5.8-9) definierten partiellen Ableitungen bezüglich $\boldsymbol{k}$ durch ein Komma, so ist die Gleichung (12.6) wegen (12.9) gleichwertig mit

$$d_{,k} = \sum_\varrho h_\varrho (sp\,\mathbf{E}, sp\,\bar{\mathbf{E}}^{1})\, \mathbf{E}^{\varrho}_{km,m} + \sum_\varrho [(\partial_1 + \partial_2) h_\varrho](sp\,\mathbf{E}, sp\,\bar{\mathbf{E}}^{1})\, \mathbf{E}^{\varrho}_{km} (sp\,\mathbf{E})_{,m}. \quad (12.10)$$

Damit die Integrabilitätsbedingung

$$d_{,kl} - d_{,lk} = 0 \quad (12.11)$$

für beliebige Funktionen h_ϱ erfüllt ist, müssen insbesondere die beim Einsetzen von (12.7-10) in (12.11) auftretenden Koeffizienten

$$E_{km,ml} - E_{lm,mk} \quad (12.12)$$

und

$$E_{km} (sp\,\mathbf{E})_{,m} (sp\,\mathbf{E})_{,l} - E_{lm} (sp\,\mathbf{E})_{,m} (sp\,\mathbf{E})_{,k} \quad (12.13)$$

von

$$h_1 (sp\,\mathbf{E}, sp\,\bar{\mathbf{E}}^{1}) \qquad \textbf{bzw.} \qquad (\partial_1 + \partial_2)^2 h_1 (sp\,\mathbf{E}, sp\,\bar{\mathbf{E}}^{1})$$

verschwinden. Die erste Bedingung mit $(k,l)=(1,2)$ führt auf $\alpha(\mu+\nu) = 0$ und die zweite, mit $(k,l)=(2,3)$ und $\alpha(\mu+\nu) = 0$, auf $\alpha = \mu\nu(\mu-\nu) = 0$.

Um zu zeigen, dass die für die $\mathscr{C}$-Kontrollierbarkeit von $\boldsymbol{k}$ notwendigen Bedingungen

$$\alpha = \mu\nu(\mu-\nu) = 0 \quad (12.14)$$

auch hinreichen, kann man direkt das Verschwinden sämtlicher Koeffizienten nachprüfen. Zweckmässiger vereinfacht man aber zuerst (12.10) mittels (12.14) und bildet erst dann die gemischten Ableitungen:

$$\left.\begin{aligned} d_{,1} &= -h_1(\mathrm{sp}\,\mathbf{E}, \mathrm{sp}\,\dot{\mathbf{E}})\mu\nu x + 2\sum_\varrho(\partial_1+\partial_2)h_\varrho(\mathrm{sp}\,\mathbf{E}, \mathrm{sp}\,\dot{\mathbf{E}})\nu^2 x, \\ d_{,2} &= -h_1(\mathrm{sp}\,\mathbf{E}, \mathrm{sp}\,\dot{\mathbf{E}})\mu\nu y + 2\sum_\varrho(\partial_1+\partial_2)h_\varrho(\mathrm{sp}\,\mathbf{E}, \mathrm{sp}\,\dot{\mathbf{E}})\mu^2 y, \\ d_{,3} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (12.15)$$

Damit lässt sich (12.11) mühelos verifizieren. Die Differentialgleichungen (12.15) zeigen auch, dass man wie zu erwarten mit einem "ebenen" Druckfeld $d_{\mathbf{k}} = \hat{d}_{\mathbf{k}}(x,y)$ auskommt.

Wegen $\det \mathbf{P} = 1$ lassen sich die angestellten Betrachtungen mit Satz 4 zusammenfassen in

Satz 8: Ist $\mathscr{C}$ die Menge der Materialfunktionen, die einen Körper zu materiell uniformen, inkompressiblen, elastischen und isotropen Festkörpern machen, die eine unverzerrte uniforme Bezugsfunktion $\mathbf{B}$ mit konstanter ebener Inhomogenität $\mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{A}} \oplus 0$ (7.12) zulassen, so sind die durch Satz 4 und (9.13) ausgezeichneten Konfigurationen $\boldsymbol{\lambda}$ und $\mathbf{k}$ (lokal) genau dann $\mathscr{C}$-kontrollierbar, wenn $\widetilde{\mathbf{A}}$ symmetrisch ($\alpha = 0$) bzw. axial ($\alpha = \mu\nu = 0$) oder eine uniforme Dilatation ($\alpha = \mu - \nu = 0$) ist. Die durch $\mathbf{k} = \mathbf{L}\boldsymbol{\lambda}$ (9.14) beschriebenen Deformationen $\mathbf{k} \circ \boldsymbol{\lambda}^{-1}$ und $\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{k}^{-1}$ sind also genau dann $\mathscr{C}$-kontrollierbar, wenn $\widetilde{\mathbf{A}}$ axial oder eine uniforme Dilatation ist (vgl. (10.2-3)). Die für das Gleichgewicht nötigen Druckfelder haben die Form

$$d_\lambda = \hat{d}_\lambda(Z), \qquad d_{\mathbf{k}} = \hat{d}_{\mathbf{k}}(x,y).$$

Wang (8) hat gezeigt, dass einige altbekannte, für homogene, inkompressible und isotrope Körper universell kontrollierbare Deformationen ((1), §§ 54-56) auch universell kontrollierbar sind für gewisse inhomogen geschichtete Körper aus demselben Material. Im Anschluss daran hat er die Vermutung geäussert, dass es Deformationen gibt, die für gewisse inhomogene Körper universell kontrollierbar sind, aber nicht für die entsprechenden homogenen Körper aus demselben Material. Satz 8 liefert ein Beispiel dafür:

Satz 9: Bezeichnen $\mathscr{C}_h$ und $\mathscr{C}_i$ die Mengen der durch (12.2-4) mit

$$\mathbf{B} = \nabla\boldsymbol{\lambda} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{B} = \mathbf{L}\nabla\boldsymbol{\lambda}, \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -\mu Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus 1, \quad \boldsymbol{\lambda} = (X, Y, Z)$$

definierten Materialfunktionen, die einen Körper zu inkompressiblen, elstischen, isotropen, homogenen bzw. inhomogen geschichteten Körpern mit der axialen Inhomogenität $\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus 0$ machen, so ist die durch $\boldsymbol{k} = \mathbf{L}\boldsymbol{\lambda}$ definierte Deformation $\boldsymbol{k} \circ \boldsymbol{\lambda}^{-1}$ $\mathscr{C}_i$-kontrollierbar, aber nicht $\mathscr{C}_h$-kontrollierbar.

Beweis: Zunächst sind $\mathscr{C}_h$ und $\mathscr{C}_i$ sicher verschieden - sogar disjunkt; denn hätten sie nur eine Materialfunktion gemeinsam, so wären $\nabla\boldsymbol{\lambda}$ und $\mathbf{B}$ beides unverzerrte uniforme Bezugsfunktionen eines isotropen Festkörpers, so dass nach Nolls Satz 10 mit $\overset{*}{\mathbf{R}}_{\nabla\lambda}$ auch $\overset{*}{\mathbf{R}}_{\mathbf{B}}$ verschwinden würde, im Widerspruch zu (7.17) mit $\mu + \nu = \alpha = 0$. (Dies gilt nicht für den Fall $\alpha = \mu - \nu = 0$, weil dann nach den durch (4.9) und (4.10) ausgedrückten Sätzen mit $\mathbf{B}$ auch $\nabla\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{B}$ eine unverzerrte uniforme Bezugsfunktion eines isotropen Festkörpers ist.) - Wegen Satz 8 genügt es zu zeigen, dass $\boldsymbol{k}$ nicht $\mathscr{C}_h$-kontrollierbar ist. Nach (9.15) ist

$$\mathbf{F} = \nabla\boldsymbol{k}\,(\nabla\boldsymbol{\lambda})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\mu z & -\mu y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

also

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} 1 + \mu^2(y^2 + z^2) & -\mu z & -\mu y \\ \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}, \quad sp\,\mathbf{E} = 3 + \mu^2(y^2 + z^2).$$

Wieder muss der Koeffizient (12.13) verschwinden, was die Bedingung $\mu = 0$ liefert.//