

# Über Synchronisierung von Röhrengeneratoren durch modulierte Signale

VON DER  
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN  
HOCHSCHULE IN ZÜRICH

ZUR ERLANGUNG  
DER WÜRDE EINES DOKTORS DER  
TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

GENEHMIGTE  
PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON  
**FRITZ DIEMER**  
Stallikon (Zch.)

Referent: Herr Prof. Dr. Fr. Tank  
Korreferent: Herr Prof. E. Baumann



ZÜRICH 1947  
Dissertationsdruckerei AG. Gebr. Leemann & Co.

Erscheint als Nr. 7  
der Mitteilungen aus dem Institut für Hochfrequenztechnik  
an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich  
Verlag AG. Gebr. Leemann & Co., Zürich

MEINER LIEBEN FRAU

Leer - Vide - Empty

## Inhaltsverzeichnis

	Seite
I. Einleitung und Aufgabestellung . . . . .	5
Bezeichnungen . . . . .	7
II. Theorie . . . . .	9
1. Gesteuerte Schwingungen in einfachen Schwingkreisen . . . . .	9
2. Die Hill'sche Differentialgleichung . . . . .	12
3. Aufstellung der Differentialgleichung . . . . .	15
4. Gang der Lösung . . . . .	18
a) Überführung der Differentialgleichung in eine Hill'sche . . . . .	18
b) Bestimmung des charakt. Exponenten . . . . .	22
c) Ermittlung eines Partikulärintegrals . . . . .	26
d) Die Hilfsphase $\sigma$ . . . . .	29
5. Abhängigkeit von $\mu$ und $\sigma$ von der Kennlinie und dem Frequenz- verhältnis . . . . .	31
6. Die Stabilität der synchronisierten Schwingung . . . . .	35
7. Der Generator als Vierpol aufgefaßt . . . . .	40
8. Spezialfall: $\frac{n}{m} = 1$ ; rein kubische Kennlinie . . . . .	41
9. Die Verzerrungen der Modulation eines frequenzmodulierten Signales beim Durchgang durch ein Einkreisfilter . . . . .	55
10. Aussagen der Theorie . . . . .	58
III. Experiment . . . . .	62
1. Bezeichnungen und Erklärungen . . . . .	62
2. Die Versuchsapparate . . . . .	63
3. Messungen bei frequenzmoduliertem Fremdsignal . . . . .	71
4. Messungen bei amplitudenmoduliertem Fremdsignal . . . . .	77
5. Aussagen des Experimentes . . . . .	83
IV. Anwendung in der Technik . . . . .	85
V. Zusammenfassung . . . . .	87
VI. Nachtrag . . . . .	89
Verzeichnis der Formeln und Zeichnungen . . . . .	95

Leer - Vide - Empty

## Literaturverzeichnis

1. *M. Mercier*, Sur la synchronisation harm. des Oscillations électriques. C. R. Acad. Sci. Paris 174, 1922.
2. *E. V. Appleton*, Automatic Synchronisation of Triode Oscillations. Camb. Phil. Soc. Proc. 21, 1923.
3. *Ollendorj*, Erzwungene Schwingungen in angefachten Systemen. Arch. El. Techn. 16, 1926.
4. *Koga*, A new frequency transformer or frequency changer. Proc. Inst. Radio Eng. 15, 1927.
5. *van der Pol*, Frequency Demultiplication. Nature 120, 1927.
6. — Forced Oscillations in a circuit with non linear resistance. Phil. Mag. 3, 1927.
7. *Andronow und Witt*, Zur Theorie des Mitnehmens von P. van der Pol. Arch. El. Techn. 24, 1930.
8. *Groszkowski*, Frequency Division. Proc. Inst. R. Eng. 18, 1930.
9. *Andronow und Witt*, Zur mathem. Theorie des Mitnehmens. Journal of Applied Physics, Moskau 1930.
10. *Winter-Günther*, Über die Mitnahmeerscheinungen an Röhrengeneratoren bei verschiedenen Frequenzverhältnissen. HF-Techn. El. Ak. 37, 1931.
11. *Mandelstam und Papalexi*, Über Resonanzerscheinungen bei Frequenzteilung. Zeitschr. Physik 73, 1931.
12. *U. Bab*, Graphische Behandlung von Mitnahmeerscheinungen. ENT. 11, 1934.
13. *Jelonek*, Eine neue Auffassung der Mitnahmeerscheinungen. HF. Techn. El. Ak. 46, 1935.
14. *Sterky*, Frequenzmultiplikation und -division. Proc. Inst. R. Eng. 25, 1937.
15. *Rocard*, Relaxation, synchronisation et démultiplication de Fréquence. L'onde électrique 16, 1937.
16. *Urtel*, Mitnahme und Synchronisation selbsterregter Röhre sender. Zeitschr. techn. Physik 19, 1938.
17. *Oltze und Schlicke*, Beeinflussung der Selbsterregung einer Frequenz durch eine zweite Frequenz. Verh. d. D. Phys. Ges. 19, 1938.
18. *Golicke*, Teilung und Vervielfachung von Frequenzen. Veröff. a. d. Geb. d. Nachr. Techn. 8, 1938.
19. *H. Schlicke*, Über die Synchronisierung selbsterregter Röhre sender. Diss. 1938, T. H. Dresden.
20. *Kober*, Die Selbsterregung von Schwingungen. Mathem. Theorie der Rückkopplung und der Mitnahme von Schwingungskreisen. Arch. El. Techn. 32, 1938.
21. *N. Bartin*, On the Theorie of Synchronisation. Journ. techn. Phys. 9, 1938.
22. *Fortescue*, Quasi-stable frequency-dividing circuits. Journ. Inst. El. Eng. 84, 1939.

23. *W. Wenke*, Die Instabilität linearer und nichtlinearer Schwingungen (Mitnahmeerscheinungen). HF. Techn. El. Ak. 55, 1940.
24. *H. Samulon*, Über die Synchronisierung von Röhrengeneratoren. Helv. Phys. Acta 14, 1941.
25. *Kirschstein*, Die Mitnahme selbsterregter Schwingungen und ihre techn. Verwertung. ENT. 20, 1943.
26. *F. Stäblein* und *W. Stäblein*, Stationäre erzwungene Schwingungen in Schwingkreisen mit periodisch veränderlichen Koeffizienten. Arch. El. Techn. 18, 1927.
27. Unstetige periodische Bewegungen und die Theorie des Multivibrators. Comptes Rendus de l'académie des Sciences de l'USSR, 1930.
28. *Kaiser*, Beitrag zur Theorie der Eigenfrequenzen und der Selbsterregung in elektrischen Schwingkreisen. ENT. 10, 1933.
29. *Straub*, Über selbsterregte nichtlineare Röhrenschwingungen. Helv. Phys. Acta 6, 1933.
30. *A. Erdélyi*, Über freie Schwingungen in Kondensatorkreisen mit veränderlicher Kapazität. Annalen der Phys. 19, 1934.
31. — Über freie Schwingungen in Schwingkreisen mit periodisch veränderlicher Selbstinduktivität. HF. Techn. El. Ak. 46, 1935.
32. — Über die rechnerische Ermittlung von Schwingungsvorgängen in Kreisen mit periodisch schwankendem Parameter. Arch. El. Techn. 29, 1935.
33. — Über Schwingungskreise mit langsam pulsierender Dämpfung. (Zur Theorie des Pendelrückkopplers.) Annalen der Physik 23, 1935.
34. *Bödewadt*, Schwingungen bei periodisch veränderlichem Widerstand. Zeitschr. angew. Math. u. Mech. 19, 1939.
35. *O. Schemmrich*, Untersuchung an Kreisen mit variabler Kapazität. Arch. El. Techn. 33, 1939.
36. *Traeger*, Die Entdämpfung von Schwingungskreisen durch Eisendrosseln. Arch. El. Techn. 35, 1941.
37. *Kamke*, Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. Akad. Verlagsges. Becker, Erler, Leipzig 1943.
38. *M. J. O. Strutt*, Lamésche-Mathieusche und verwandte Funktionen in Physik und Gegenwart. Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete. Springer, Berlin 1932.
39. *Aigner, Kober*, Die Theorie der Modulation und Demodulation. HF. Techn. El. Ak. 48, 1936.
40. *P. van der Pol*, The nonlinear theory of electric oscillations. Proc. Inst. Radio Eng. 22, 1934.
41. *Wittaker* und *Watson*, A course of modern analysis. Camb. Un. Press. 1927.
42. *E. L. Ince*. Proc. Edinb. Math. Soc. 52, 1932.
43. *M. Kulp*, Spektra und Klirrfaktoren amplituden- und frequenzmodulierter Schwingungen. ENT. 19, 1942.
44. *T. Vellat*, Empfang frequenzmodulierter Wellen. ENT. 18, 1941.



## I. Einleitung und Aufgabestellung

Es ist bekannt, daß man einen selbsterregten Generator durch eine eingeprägte Fremdspannung synchronisieren kann, sofern die Frequenz des Fremdsignales angenähert in einem einfachen rationalen Verhältnis zur Frequenz des selbsterregten Signales steht und die Nichtlinearitäten im Generator bestimmte Forderungen erfüllen. Unter diesen Voraussetzungen existiert immer eine bestimmte Synchronisierungsbreite, welche außer von den Daten des Generators noch von der Größe des Fremdsignales abhängt. Das Problem findet sich in der Literatur theoretisch, graphisch und anschaulich ausführlich behandelt [1—25].

In der vorliegenden Arbeit wird nun das Problem der Synchronisierung durch ein moduliertes Fremdsignal untersucht. Amplitude oder Frequenz des Fremdsignales sollen also periodischen Schwankungen unterworfen sein.

Folgende zwei Beispiele mögen die praktische Bedeutung dieses Problemles erläutern:

1. Bisweilen verwendet man für drahtlose Übertragungen amplitudenmodulierte Signale, bei welchen, zum Zwecke einer guten energetischen Ausnützung der Senderstufe, der Träger reduziert ist. Auf der Empfangsseite muß dem empfangenen Signal ein frequenz- und phasenrichtiger Träger so zugesetzt werden, daß ein im Verhältnis zu den Seitenbändern ursprünglich gleicher, eventuell größerer Träger entsteht. Dadurch wird bei der Demodulation eine gute Qualität des niederfrequenten Signales gewährleistet. Bei der Erzeugung des Hilfsträgers geht man in der Weise vor, daß man durch Quarzfilter die Seitenbänder des empfangenen Signales wegfiltert und mit dem verbleibenden Trägerrest einen lokalen Generator synchronisiert. Eine solche Übertragung ist nun im UKW-Gebiet nicht durchführbar, da mit der bestehenden UKW-

Filtertechnik die sehr nahe beim Träger liegenden Seitenbänder nicht wegfiltert werden können. Es stellen sich daher die Fragen:

- a) Läßt sich mit dem amplitudenmodulierten Fremdsignal, ohne Wegfilterung der Seitenbänder, ein lokaler Generator synchronisieren, auch wenn die Modulationstiefe 100 % übersteigt?
- b) Welche Eigenschaften besitzt ein durch ein moduliertes Signal erzeugter Träger (Phase, Amplitude)?
- c) Wie wird der Synchronisationsbereich durch die Modulation beeinflusst?

2. Für die Übertragung von UKW-Signalen auf große Entfernung wird eine Kette von Relaisstationen aufgestellt. Zur Vermeidung unerwünschter Rückkopplungen muß eine Frequenztransponierung durch Überlagerung vorgenommen werden. Ist das UKW-Signal frequenzmoduliert, so stellen sich die Fragen:

- a) Wäre es möglich, um diese Transponierung zu umgehen, mit dem empfangenen Signal direkt einen lokalen Generator zu synchronisieren, dessen Frequenz in einem einfachen rationalen Verhältnis zur Frequenz des Empfangssignales steht?
- b) In welcher Qualität wird die Modulation dem neuen Signal aufgedrückt?
- c) In welchem Umfange sind bei der Synchronisierung des lokalen Generators durch das frequenzmodulierte Signal Verstärkungen erreichbar?

In allgemeiner Formulierung lautet unsere Aufgabe:

Gegeben sei ein selbsterregter Röhrengenerator und ein modulierte Fremdsignal, welches dem Generator zwecks Synchronisation eingeprägt wird.

Untersucht werden sollen die Amplitude, Phase und Frequenz der erregten Spannung im Generator.

Feste Parameterwerte sind dabei

- a) die Schwingkreiselemente,
- b) die Nichtlinearität der Kennlinie der Schwingröhre.

Als variable Parameterwerte sind zu betrachten:

- c) die Rückkopplung,
- d) die Amplitude des Fremdsignales,

- e) die Abweichung der Frequenz des Fremdsignales von der Resonanzlage (letztere sei definiert durch ein einfaches rationales Verhältnis zur Resonanzfrequenz des selbsterregten Signales bei Abwesenheit des Fremdsignales),
- f) die Modulationstiefe oder der Frequenzhub des modulierten Fremdsignales,
- g) die Modulationsfrequenz.

Diskutiert werden sollen die Anforderungen, die an den Generator, also an die festen Parameterwerte zu stellen sind, damit die Synchronisierung im Sinne technischer Anwendung im Hinblick auf Konstruktion und Qualität befriedigt.

### **Bezeichnungen** (Allg. gültig ab Kapitel II<sub>3</sub>)

Zeitliche Momentanwerte:

$u$  Wechselspannungen

$v = \frac{u}{U_s}$  auf die Sättigungsspannung normierte Spannung  $u$

$w$  modulierte Amplitude von  $v$

$\varphi$  modulierte Phase von  $v$

$i$  Wechselstrom

Indices:

$a$  bezieht sich auf die Anode (Schwingkreis)

$\varrho$  bezieht sich auf die Rückkopplung (rückgekoppelt)

$g$  bezieht sich auf das Gitter

$f$  bezieht sich auf das Fremdsignal

Schaltenelemente:

$L$  Induktivität des Schwingkreises

$C$  Kapazität des Schwingkreises

$R$  Widerstand des Schwingkreises

$Q$  Kreisgüte

$q$   $Q^*/Q$

$\varrho$  Rückkopplungsfaktor (Spannungsteilung)

$\varrho_0$  Rückkopplungsfaktor (kritische Einstellung)

$S$  Steilheit der Röhre

$R_t$	Innenwiderstand der Röhre
$U_s$	Sättigungsspannung der Kennlinie
$\gamma$	Koeffizient aus der math. Kennliniendarstellung
$g$	Verstärkung = $\frac{\text{Amplitude der Anodenwechselspannung}}{\text{Amplitude des Fremdsignales}}$

Kreisfrequenzen:

$\omega_0$  Resonanzfrequenz des Schwingkreises

$\omega$  Frequenz des Fremdsignales

$\Omega$  Parameterfrequenzen

$p$  Modulationsfrequenz

$\frac{m}{n}$  Frequenzverhältnis

$t, \tau$  Zeit, unabhängige Variable

$' = \frac{d}{dt}$  Ableitung nach der Zeit

$\eta = 2 \frac{\omega - \omega_0}{\omega}$  Verstimmung

$V$  relative Verstimmung

$x$  auf  $Q^*$  normierte Verstimmung (124)

$y$  auf  $Q^*$  normierter Frequenzhub (126)

$h$  relativer Frequenzhub

Indices bei Summationen:

$\nu, \alpha, \beta, p, q, r, x$

im Laufe der Theorie sich ergebende Bezeichnungen:

$\delta(t)$  Dämpfungsdekrement und (23)

$f(t)$  Störfunktion der Schwingungsgleichung (24)

$\Phi(\omega t)$  periodische Funktion (39)

$k$  } und Koeffizienten (40)

$\lambda$  } in der Hillschen Differentialgleichung (41)

$\sigma$  } charakteristische Größen der (51)

$\mu$  } Lösung der Hillschen Differentialgleichung (52)

$e, \varepsilon$  Koeffizienten (Momentanwerte) der Reihenentwicklung von  $\Phi(\omega t)$

$x, y, z, \xi, \eta, \varepsilon$  Hilfsgrößen in den Kapiteln II<sub>4d</sub> und II<sub>b</sub>.

Die in eckigen Klammern [] angeführten Zahlen beziehen sich auf das unter dieser Ziffer angeführte Werk im Literaturverzeichnis.

## II. Theorie

### 1. Gesteuerte Schwingungen in einfachen Schwingkreisen

Wir betrachten einen elektrischen Schwingungskreis, der in einen gegebenen Stromkreis eingeschaltet ist (Fig. 1). Die Differentialgleichung für die Spannung lautet:

$$u_a'' + u_a' \cdot \left( \frac{1}{R_i \cdot C} + \frac{R}{L} \right) + u_a \cdot \frac{1}{L \cdot C} \cdot \left( 1 + \frac{R}{R_i} \right) + i_a \cdot \frac{R}{L \cdot C} + i_a' \cdot \frac{1}{C} = 0 \quad (1)$$

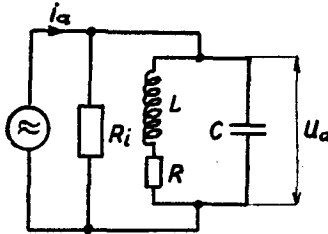


Fig. 1.

Die Schwingung  $u_a$  kann nun auf die folgenden Arten gesteuert werden:

- a)  $i_a = i(t)$ ;  $R_i, R, L, C$  sind konstant  
(Einschalt- und Filterprobleme)
- b)  $i_a = f(u_a)$ ;  $R_i, L, R, C$  sind konstant  
(Rückkopplungsprobleme)
- c)  $i_a = \text{konstant}$ ;  $R_i, R, L$  sind konstant,  $C = C_0 + C_1(t)$   
 oder  $R_i, R, C$  „ „  $L = L_0 + L_1(t)$   
 „  $R_i, L, C$  „ „  $R = R_0 + R_1(t)$   
 „  $R, L, C$  „ „  $R_i = R_{i0} + R_{i1}(t)$   
 „ irgend eine Kombination dieser Möglichkeiten  
(Resonanzerscheinungen).

- d)  $a$  und  $c$  kombiniert  
(Modulation)
- e)  $b$  und  $c$  kombiniert  
(Modulation)
- f)  $a$ ,  $b$  und  $c$  kombiniert  
(Modulation, Synchronisation, Superregenerativvorgang).

Allgemein kann also die gesteuerte Schwingung in einem einfachen Schwingungskreis durch die Differentialgleichung:

$$L[u_a] + S[u_a, t] = 0 \quad (2)$$

angeschrieben werden. Darin stellt  $L[u]$  den Differentialausdruck für den Vorgang im schwingungsfähigen System dar und lautet:

$$L[u_a] = u_a'' + u_a' \left( \frac{1}{R_{i0} \cdot C_0} + \frac{R_0}{L_0} \right) + u_a \cdot \frac{1}{L_0 \cdot C_0} \cdot \left( 1 + \frac{R_0}{R_{i0}} \right) \quad (3)$$

Unter  $S[u_a, t]$  verstehen wir die Steuerfunktion. Sie ist eine Funktion des Stromes  $i_a$  und der zeitlich veränderlichen Anteile der Schaltelemente. Je nach der Gestalt der Steuerfunktion unterscheiden wir die drei folgenden Fälle [39]:

1. Die erzwungene Schwingung

$$S[u_a, t] = S(t) \quad (4)$$

2. Die quasiharmonische Schwingung

$$S[u_a, t] = \lambda \cdot f(t) \cdot u_a^{(n)} \quad (5)$$

wo  $\lambda$  eine Eigenwertskonstante,  $f(t)$  eine periodische Zeitfunktion und  $u_a^{(n)}$  eine zeitliche Ableitung ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) von  $u_a$  bedeuten.

Unter diesen Fall gehören z. B. alle jene Schwingkreisprobleme, bei welchen nur die Schaltelemente periodischen Änderungen unterworfen werden [26, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36].

3. Die pseudoharmonische Schwingung

$$S[u_a, t] = P(u_a, t) \cdot u_a^{(n)}$$

Sonderfall: 
$$S[u_a, t] = P(u_a) \cdot u_a^{(n)} \quad (6)$$

wo  $P(u_a)$  eine Potenzreihe in den  $u_a$  bedeutet.

Hierunter fallen z. B. die rückgekoppelten Schwingungsprobleme mit nichtlinearem Rückkopplungsweig [20, 29, 39, 40].

Es sind nun natürlich noch alle Kombinationen mit diesen drei Fällen möglich. So führt z. B. das Problem der Modulation oder Synchronisierung eines selbsterregten Generators auf eine Schwingungsgleichung, die eine Kombination der Typen der erzwungenen, der quasiharmonischen und der pseudoharmonischen Schwingung darstellt. Dieser Schwingungsgleichung sieht man nicht an, ob sie das Modulations- oder Synchronisationsproblem beschreibt. Nur die spezielle Wahl der Parameter hebt das eine oder andere Problem hervor.

Es ist sehr schwierig, für den rechnenden Techniker oft unmöglich, befriedigende allgemeine Lösungen aufzufinden. In vorliegender Arbeit wird nun versucht, einen Weg zu zeigen, der nicht unbedingt zu formelfertigen Lösungen führt, uns aber befähigt, die Probleme befriedigend zu diskutieren.

Setzt man in der quasiharmonischen Schwingungsgleichung  $n = 0$  oder  $n = 1$ , so kann sie überführt werden in eine Hillsche Differentialgleichung von der Form:

$$y'' + \omega_0^2 [1 + k \cdot \Phi(\omega t)] \cdot y = 0 \quad (7)$$

Es ist bekannt, daß die Lösungen der Hillschen Differentialgleichung (vom trivialen Fall  $k = 0$  und einigen ganz speziellen Funktionen  $\Phi(\omega t)$  abgesehen), nicht in geschlossener Form dargestellt werden können [38]. Hingegen wurden verschiedene brauchbare Näherungsverfahren entwickelt, die relativ bescheidenen mathematischen Aufwand verlangen [30]. Es ist daher verlockend, möglichst viele Schwingungsgleichungen auf eine Hillsche Differentialgleichung zurückführen zu können.

So sehen wir, daß dies z. B. mit der pseudoharmonischen Schwingungsgleichung möglich ist, wenn  $n = 0$  oder  $n = 1$  ist, und wir für  $u_a$  einen periodischen Ansatz machen.

Wird also der Schwingungsvorgang allgemein dargestellt durch die Differentialgleichung:

$$u_a'' + u_a' \cdot \delta(u_a, \omega t) + u_a \cdot \omega_0^2 [1 + g(u_a, \omega t)] = f(\omega t) \quad (8)$$

so kann der homogene Ausdruck durch die Transformation:

$$u_a = e^{-\frac{1}{2} \int_0^t \delta(u_n(\tau), \omega\tau) \cdot d\tau} \cdot y(t) \quad (9)$$

überführt werden in

$$y'' + [\omega_0^2(1 + g(u_a, \omega t)) - \frac{1}{2} \delta'(u_a, \omega t) - \frac{1}{4} \delta^2(u_a, \omega t)] \cdot y = 0 \quad (10)$$

Wird nun für  $u_a$  ein periodischer Ansatz in  $(\omega t)$  gemacht, so geht Gleichung (10) über in die Hillsche Differentialgleichung (7).  $\omega$  ist die Kreisfrequenz der Steuerfunktion.

## 2. Die Hill'sche Differentialgleichung

Eine zusammenfassende Darstellung der mathematischen Theorie der Hillschen Differentialgleichungen findet sich im Lehrbuch von *Whittaker und Watson* [41] und in der Monographie von *Strutt* [38].

Für die praktische Rechnung leistet das Tafelwerk von *Ince* [42] gute Dienste. Besonders hervorgehoben seien hier die Arbeiten von *Erdélyi* [30, 31, 32, 33]. Der Zweck derselben besteht darin, in Anlehnung an die allgemeine mathematische Theorie Lösungsmethoden und Näherungsverfahren von Hillschen Differentialgleichungen zu entwickeln, um dem rechnenden Techniker die Behandlung der im vorigen Abschnitt zum Teil aufgeführten Schwingungsprobleme zu ermöglichen.

### *Allgemeines über die Lösungen*

Gegeben ist die Hillsche Differentialgleichung

$$y'' + \omega_0^2 [1 + k \cdot \Phi(\omega t)] \cdot y = 0 \quad (7)$$

Darin bedeutet  $\omega_0$  eine Eigenwertskonstante,  $k$  einen Parameter und  $\Phi(\omega t)$  eine im Endlichen beschränkte, zweimal differenzierbare, reelle periodische Funktion mit der Periode der Steuerfunktion:  $\frac{2\pi}{\omega}$ .

Es wird gezeigt, daß die Hillsche Differentialgleichung immer eine Lösung von der Form

$$e^{\mu \omega t} \cdot F(\omega t) \quad (11)$$



besitzt, wo  $F(\omega t)$  eine periodische Funktion in  $2\pi$  bedeutet,

$$F(\omega t + 2\pi) = F(\omega t) \quad (12)$$

und  $\mu$  als der „charakteristische Exponent“ bezeichnet wird.

$$\text{Ist } \mu \neq 0; \quad \mu \neq \frac{1}{2}j; \quad j = \sqrt{-1},$$

so besitzt ein zweites von dem ersten linear unabhängiges Integral die Form:

$$e^{-\mu\omega t} \cdot G(\omega t) \quad (13)$$

mit einer ebenfalls periodischen Funktion von der Periode  $2\pi$

$$G(\omega t + 2\pi) = G(\omega t) \quad (14)$$

Die beiden Lösungen sind eindeutig bestimmt bis auf je eine multiplikative Konstante und ihre Vertauschung.

Bei einer vorgegebenen Funktion  $\Phi(\omega t)$  hängt der Wert  $\mu$  von  $\omega_0^2$  und  $k$  ab.  $\mu$  kann rein imaginär, komplex oder rein reell sein.

Ist  $\mu$  rein imaginär, so sind die beiden Lösungen (11) und (13) für alle Zeiten  $t$  beschränkt, weil  $e^{\mu\omega t}$  eine periodische Funktion der reellen Periode  $\frac{2\pi}{|\mu\omega|}$  darstellt. Die Lösung für beliebige Anfangsbedingungen ist eine lineare Kombination von (11) und (13) und wird also immer beschränkt sein, wie auch die Anfangsbedingungen beschaffen sein mögen. Daher werden diese Lösungen als *stabil* bezeichnet. Man beachte die sehr wesentliche Tatsache, daß neben der gegebenen Periodizität  $\omega$  diejenige von  $|\mu\omega|$  neu auftritt.

Ist dagegen  $\mu$  rein reell oder komplex, so besitzt  $\mu$  einen von Null verschiedenen Realteil. Somit wächst eine der Lösungen (11) oder (13) unbegrenzt an, während die andere abklingt. Die Lösung für beliebige Anfangsbedingungen wird somit unbegrenzt zunehmen, und man bezeichnet diese Lösungen als *instabil*. Man beachte auch hier, daß für komplexes  $\mu$  dieses aufgeteilt werden kann in einen Realteil  $\mu_r$  und einen Imaginärteil  $\mu_i$ , so daß also neben der gegebenen Periodizität  $\omega$  eine solche von  $|\mu_i\omega|$  auftritt.

Stabile und instabile Lösungen sind durch solche getrennt, für welche

$$\mu = 0 \quad \text{oder} \quad \mu = \frac{1}{2}j$$

ist. Für diese beiden Fälle fallen (11) und (13) im wesent-

lichen zusammen und ergeben eine in  $2\pi$  (für  $\mu = 0$ ) bzw. in  $4\pi$  (für  $\mu = \frac{1}{2}j$ ) periodische Funktion. Bezeichnen wir diese für den Augenblick mit  $y_1(\omega t)$ , so ist die zweite linear unabhängige Lösung der Differentialgleichung (7) von der Form:

$$y_2(\omega t) = C \cdot t \cdot y_1(\omega t) + z(\omega t) \quad (15)$$

wo  $z(\omega t)$  eine in  $2\pi$  periodische Funktion bedeutet.

Wir sehen daraus, daß für eine vorgegebene Funktion  $\Phi(\omega t)$  jedem Punkte der Ebene, dessen rechtwinklige Koordinaten  $\omega_0^2$  und  $k$  sind, ein Wert von  $\mu$  entspricht. Jene Punkte, zu denen ein rein imaginärer Wert von  $\mu$  gehört, erfüllen die Stabilitätsbereiche. Jene Punkte dieser Ebene aber, denen ein  $\mu$ -Wert mit nichtverschwindendem Realteil zugeordnet ist, ergeben die Bereiche der Instabilität. Beider Bereiche gibt es unendlich viele. Getrennt voneinander sind sie durch Grenzkurven, für die  $\mu = 0$  oder  $\mu = \frac{1}{2}j$  ist.

Wird nun der homogene Ausdruck der Gleichung (8) durch die Transformation (9) und einen periodischen Ansatz für  $u_a$  in eine Hillsche Differentialgleichung überführt, so erhalten wir als allgemeine Lösung des homogenen Teiles der Gleichung (8):

$$\begin{aligned} u_a &= e^{-\frac{1}{2} \int_0^t \delta \cdot dt} \cdot y(\omega t) \\ &= C_1 \cdot e^{-\frac{1}{2} \int_0^t \delta \cdot d\tau + \mu \omega t} \cdot F(\omega t) + C_2 \cdot e^{-\frac{1}{2} \int_0^t \delta \cdot d\tau - \mu \omega t} \cdot G(\omega t) \quad (16) \end{aligned}$$

Wir können somit aus dem Gesagten folgende Schlüsse ziehen:

In den Stabilitätsgebieten, in denen  $\mu$  rein imaginär ist, wird die zeitliche Veränderung der Schwingungsamplitude einer Schwingung mit der natürlichen Dämpfung  $\delta$  entsprechen, wobei der Charakter von  $\delta$  bestimmt, ob die Schwingung abklingt oder nicht. Neben der Periodizität der Steuerfunktion tritt noch eine neue Periodizität  $|\mu\omega|$  auf, so daß wir es mit Schwebungen zu tun haben. Im Instabilitätsgebiet aber, wo  $\mu$  einen von Null verschiedenen Realteil besitzt, erfährt das Schwingungssystem eine Entdämpfung. Nur wenn  $\mu$  einen rein reellen Wert annimmt, verschwindet die zusätzliche Periodizität, und das System schwingt genau mit der Frequenz der Steuerfunktion oder einem Vielfachen davon. Die Steuerfunktion zwingt dem System seine Frequenz auf.

Aus diesem Grunde werden die Bereiche, in denen  $\mu$  rein reell ist, als Mitnahme- oder Synchronisationsbereiche bezeichnet. Ist  $\delta(\mu_a, \omega t) > 0$ , so kann je nach der Größe  $\delta$  im Innern jedes Entdämpfungsbereiches ein größerer oder kleinerer Teilbereich existieren, in welchem  $2\mu\omega \geq \delta$  ist. Dieser Teilbereich ist als Selbsterregungsbereich bekannt. Dem Anwachsen der Schwingamplitude bei Entdämpfung wird praktisch immer eine Grenze gesetzt durch irgend eine Nichtlinearität in den Schaltelementen.

Diese Ausführungen zeigen, wie elegant Schwingungsprobleme, welche auf Hillsche Differentialgleichungen überführt sind, diskutiert werden können. Es liegt dann hauptsächlich die meist etwas schwierige Aufgabe der Aufsuchung des charakteristischen Exponenten  $\mu$  vor.  $\mu$  kann in den wenigsten Fällen exakt dargestellt werden. Es müssen fast immer Näherungsverfahren eingeschlagen werden.

Es sei hier noch erwähnt, daß die Hillsche Differentialgleichung in eine gleichwertige Volterrasche Integralgleichung überführt werden kann. Letztere wird durch Iteration gelöst. Ist dann z. B.  $k \ll \omega_0^2$  oder  $\omega \ll \omega_0$ , so kann die Iteration schon nach wenigen Schritten abgebrochen werden.

Für das Auffinden von  $\mu$  gibt es z. B. den Weg, daß man mit Gleichung (11) oder (13) in Gleichung (7) eingeht und  $\Phi(\omega t)$  als Fourierreihe darstellt. Berücksichtigt man noch, daß  $F(\omega t)$  oder  $G(\omega t)$  eine in  $2\pi$  periodische Funktion ist, so erhält man ein Gleichungssystem, welches  $\mu$  bestimmt. Allgemein wird dieses System unendlich viele Glieder enthalten, kann aber für Näherungslösungen stark vereinfacht werden.

### 3. Aufstellung der Differentialgleichung

Gegeben ist ein rückgekoppelter Röhrengenerator gemäß Fig. 2. Die Anodenwechselspannung  $u_a$  wird über einen Vierpol, welcher die Spannung genau um  $180^\circ$  in der Phase dreht, dem Gitter der Schwingröhre zugeführt. In Serie zu dieser Spannung  $u_g$  wird das Fremdsignal  $u_f$  eingekoppelt. Die Kennlinie der Schwingröhre besitze eine beliebige Krümmung.

Gleichung (1) beschreibt die Anodenspannung  $u_a$  in Funktion des Anodenstromes

$$u_a'' + u_a' \cdot \left( \frac{1}{R_i \cdot C} + \frac{R}{L} \right) + u_a \cdot \frac{1}{L \cdot C} \cdot \left( 1 + \frac{R}{R_i} \right) + i_a \cdot \frac{R}{L \cdot C} + i_a' \cdot \frac{1}{C} = 0 \quad (17)$$

Nun setzen wir voraus, daß

1. die Kreisgüte  $Q$  relativ groß sei,
2.  $R_i$  gegenüber der Kreisimpedanz vernachlässigt werden darf,
3. die Anodenrückwirkung nicht berücksichtigt werden muß, und
4. die Steilheit  $S$  phasenrein sei.

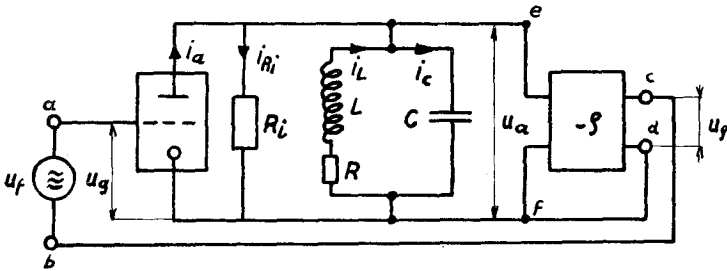


Fig. 2.

Die Bedingungen 2 und 3 sind meistens erfüllt, wenn als Schwingröhre eine Penthode benützt wird. Unter der Berücksichtigung dieser Bedingungen und mit der Beziehung:

$$u_o = -\varrho \cdot u_a$$

wo  $\varrho$  der Rückkopplungsfaktor ist, geht Gleichung (17) über in:

$$u_o'' + u_o' \cdot \frac{R}{L} + u_o \cdot \frac{1}{L \cdot C} = \frac{\varrho}{C} \cdot i_a' \quad (18)$$

Die Kennlinie der Schwingröhre stellen wir allgemein dar durch

$$i_a = S \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} q_{\nu} \cdot u_g \quad (19)$$

wobei sich  $u_g$  zusammensetzt aus den beiden Spannungen:

$$u_g = u_o + u_f \quad (20)$$

Somit erhalten wir für

$$i'_a = S \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} q_{\nu} \cdot \nu \cdot (u_{\varrho} + u_f)^{\nu-1} \cdot (u'_{\varrho} + u'_f) \quad (21)$$

Nehmen wir noch eine Spannungsnormierung vor, indem wir mit  $U_s$  eine durch die Kennlinie bedingte Sättigungsspannung bezeichnen

$$v_{\varrho} = u_{\varrho}/U_s; \quad v_f = u_f/U_s \quad q_{\nu} \rightarrow \gamma_{\nu}$$

so werden die Variablen dimensionslos, und wir erhalten die Ausgangsdifferentialgleichung:

$$\begin{aligned} v''_{\varrho} - v'_{\varrho} \cdot \left[ \frac{\varrho \cdot S}{C} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_{\nu} \cdot \nu \cdot (v_{\varrho} + v_f)^{\nu-1} - \frac{R}{L} \right] + v_{\varrho} \cdot \frac{1}{L \cdot C} \\ = v'_f \cdot \frac{\varrho S}{C} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_{\nu} \cdot \nu (v_{\varrho} + v_f)^{\nu-1} \end{aligned} \quad (22)$$

Liegen die Parameterwerte so, daß das System selbsterregte Schwingungen ausführt, so beschreibt die Differentialgleichung (22) je nach dem Charakter des Fremdsignales  $v_f$  folgende Schwingungstypen:

- für  $v_f = 0$ : die Selbsterregung des Generators;
- für  $v_f =$  eine langsame periodische Funktion:  
die Modulation des Generators;
- für  $v_f =$  eine schnelle periodische Funktion, wobei die Frequenz in keinem einfachen rationalen Verhältnis zur selbsterregten Frequenz steht:  
die Schwebungen;
- für  $v_f =$  eine schnelle periodische Funktion, wobei die Frequenz ungefähr in einem einfachen rationalen Verhältnis zur Generatorfrequenz steht:  
die Synchronisierung;  
ist das Fremdsignal noch moduliert:  
die Synchronisierung durch modulierte Signale;  
ist zusätzlich noch irgend ein Parameterwert, z. B.  $S$ , moduliert:  
die Schwingungen des Superregeneratorempfängers (Pendelrückkopplungsempfänger).

Liegen die Parameterwerte so, daß für  $v_f = 0$  keine Selbsterregung eintritt, so lauten die obigen Formulierungen auf Mit-

nahme und Erregung von Schwingungen im Schwingkreise. Mancher Autor glaubte, für diesen Fall die Krümmung der Kennlinie vernachlässigen zu dürfen, wobei also die Steilheit der Schwingröhre als spannungsunabhängig betrachtet wird. Der Rechnungsgang ist dann wesentlich einfacher, kann aber hauptsächlich für den Fall der zusätzlichen Entdämpfung durch  $\nu$ , mehr oder weniger falsche Lösungen liefern. Denn gerade in diesem Fall setzt die Nichtlinearität der Kennlinie der infolge der Entdämpfung wachsenden Schwingungsamplitude eine Grenze.

Es soll hier noch erwähnt sein, daß das Problem des Superregenerativempfängers folgendermaßen beschrieben werden kann:

Synchronisierung eines pulsierend erregten Röhrengenerators durch modulierte Signale.

In den bisherigen Arbeiten über die Theorie des Pendelrückkopplers wird das Problem so stark vereinfacht, um es der Behandlung zugänglich zu machen, daß die Resultate kein getreues Bild der Vorgänge geben. Beachtenswert ist die Arbeit von *Erdélyi* [33]. Da er aber die Kennlinie der Schwingröhre als linear betrachtet und das Problem z. T. statisch behandelt, ist es ihm entgangen, daß der charakteristische Exponent  $\mu$ , wie der Phasenhilfsparameter  $\sigma$  periodische Funktionen der Zeit werden. Die Frage nach der Phase und der Amplitude der gesuchten Schwingung, also die Kernfragen, kann er nicht zur vollen Befriedigung beantworten.

Durch die allgemeine Behandlung des Problems der Synchronisierung von Röhrengeneratoren durch modulierte Signale kann auch das Problem des Pendelrückkopplungsempfängers aufschlußreich beleuchtet werden.

#### 4. Gang der Lösung

a) *Überführung der Differentialgleichung (22) in eine Hillsche Differentialgleichung.*

Gegeben ist die Differentialgleichung (22)

$$v_{\varrho}'' - v_{\varrho}' \cdot \left[ \frac{\varrho S}{C} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_{\nu} \cdot \nu \cdot (v_{\varrho} + v_f)^{\nu-1} - \frac{R}{L} \right] + v_{\varrho} \cdot \frac{1}{L \cdot C} = v_f' \cdot \frac{\varrho S}{C} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_{\nu} \cdot \nu \cdot (v_{\varrho} + v_f)^{\nu-1}$$

Wir setzen:

$$\left[ \frac{\varrho \cdot S}{C} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_{\nu} \cdot \nu \cdot (v_{\varrho} + v_f)^{\nu-1} - \frac{R}{L} \right] = \delta(t) \quad (23)$$

$$v_f' \cdot \frac{\varrho \cdot S}{C} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_{\nu} \cdot \nu \cdot (v_{\varrho} + v_f)^{\nu-1} = f(t) \quad (24)$$

somit schreibt sich Gleichung (22):

$$v_{\varrho}'' - v_{\varrho}' \cdot \delta(t) + v_{\varrho} \cdot \frac{1}{L \cdot C} = f(t) \quad (25)$$

Die allgemeine Lösung dieser linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zeitabhängigen Koeffizienten lautet [37, Seite 117]:

$$v_{\varrho} = c_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot v_2 + v_2 \cdot \int_0^t \frac{v_1(\tau) \cdot f(\tau)}{W(\tau)} \cdot d\tau - v_1 \cdot \int_0^t \frac{v_2(\tau) \cdot f(\tau)}{W(\tau)} \cdot d\tau \quad (26)$$

mit 
$$W(t) = v_1(t) \cdot v_2'(t) - v_1'(t) \cdot v_2(t) \quad (27)$$

dabei bedeuten  $v_1(t)$  und  $v_2(t)$  die beiden linear unabhängigen Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung:

$$v_{\varrho}'' - v_{\varrho}' \cdot \delta(t) + v_{\varrho} \cdot \frac{1}{L \cdot C} = 0 \quad (28)$$

Wir müssen also zum ersten die beiden linear unabhängigen Lösungen der homogenen Differentialgleichung aufsuchen. Zu diesem Zwecke unterziehen wir Gleichung (28) der Transformation

$$v_{\varrho} = e^{\frac{1}{2} \int_0^t \delta(\tau) \cdot d\tau} \cdot y(t) \quad (29)$$

und erhalten:

$$y'' + \left[ \frac{1}{L \cdot C} + \frac{1}{2} \delta'(t) - \frac{1}{4} \delta^2(t) \right] \cdot y = 0 \quad (30)$$

$$\delta'(t) = \frac{\varrho \cdot S}{C} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_{\nu} \cdot \nu \cdot (\nu-1) \cdot (v_{\varrho} + v_f)^{\nu-2} \cdot (v_{\varrho}' + v_f')$$
(31)

Jetzt müssen wir  $v_f$  definieren und für  $v_{\varrho}$  einen Ansatz wählen:

Wir setzen

$$v_f = w_f \cdot \sin \frac{n}{m} (\omega t + \varphi_f) \quad (32)$$

$\frac{n}{m}$  sei ein einfaches rationales Zahlenverhältnis und  $\omega$  sei eine Frequenz von der näheren Umgebung der Resonanzfrequenz des Schwingkreises. Die Amplitude  $w_j$  oder die Phase  $\varphi_j$  oder beide zusammen sind durch die Modulation langsam variierende Zeitfunktionen.

Um einen Ansatz für  $v_e$  treffen zu können, betrachten wir zuerst  $\delta(t)$  von Gl. (23). Wir schreiben:

$$\delta(t) = \frac{e \cdot S}{C} \cdot \left[ \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_{\nu} \cdot \nu \cdot (v_e + \nu f)^{\nu-1} - \frac{R \cdot C}{e \cdot S \cdot L} \right]$$

und formen um:

$$\begin{aligned} \frac{e \cdot S}{C} &= \omega_0 \cdot e \cdot S \cdot \frac{1}{\omega_0 \cdot C} = \omega_0 \cdot e \cdot S \cdot d_0 \cdot Z_R \\ d_0 &= \frac{1}{Q} = \text{Dämpfung des Schwingkreises} \\ Z_R &= \text{Resonanzwiderstand des Schwingkreises} \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \text{Resonanzfrequenz des Schwingkreises.} \end{aligned}$$

Da wir einen Schwingkreis mit relativ großer Güte  $Q > 50$  voraussetzen, ist also  $d_0 < 0,02 \ll 1$ , und die Darstellung von  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$  ist zulässig. Nach *Barkhausen* gilt nun:

$$e_0 \cdot S \cdot Z_R = 1$$

wenn  $S$  die Steilheit im Arbeitspunkt ist ( $\gamma_{\nu} = 1; \nu = 1$ ) und mit  $e_0$  derjenige Rückkopplungsfaktor bezeichnet wird, bei welchem die Selbsterregung beginnt. Es folgt somit:

$$\frac{e \cdot S}{C} = \omega_0 \cdot e/e_0 \cdot 1/Q \quad (33)$$

analog 
$$\frac{R \cdot C}{e \cdot S \cdot L} = \frac{1}{e \cdot S \cdot Z_R} = e_0/e$$

Bezeichnen wir mit:

$$s = \frac{d i_a}{d u_g} = S \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_{\nu} \cdot \nu \cdot (v_g + \nu f)^{\nu-1}$$



die Schwingsteilheit, so erhalten wir:

$$\delta(t) = \left[ \frac{q}{C} \cdot s - \frac{R}{L} \right] = \frac{\omega_0}{Q} \cdot \left[ \frac{s}{S} \cdot \frac{q}{q_0} - 1 \right] \quad (34)$$

In  $\delta(t)$  ist  $\frac{R}{L}$  ein Maß für die Dämpfung des Schwingkreises und  $\frac{q}{C} \cdot s$  ein solches für die Entdämpfung durch die Rückkopplung, unterstützt durch das Fremdsignal. Der Entdämpfung wird durch die Nichtlinearität der Kennlinie eine Grenze gesetzt. Wir erkennen aus (34):

$$\delta(t) \ll \omega_0 \quad (35)$$

so daß  $v_\varrho$  also im wesentlichen durch die Differentialgleichung:

$$v_\varrho'' + v_\varrho \cdot \omega_0^2 = 0$$

bestimmt wird. Wir dürfen daher in erster Näherung für  $v_\varrho$  den folgenden Ansatz machen

$$v_\varrho = w_\varrho \cdot \sin(\omega t + \varphi_\varrho) \quad (36)$$

Damit für  $v_\varrho$  alle Freiheit in bezug auf Amplitude und Phase gewährt ist, werden  $w_\varrho$  und  $\varphi_\varrho$  als langsam variierende Zeitfunktionen gesetzt. Dadurch, daß wir dem selbsterregten Signal  $v_\varrho$  die Frequenz  $\omega$  geben, welche in einem einfachen rationalen Verhältnis zur Fremdfrequenz steht, dürfen  $w_\varrho$  und  $\varphi_\varrho$ , im Falle der Synchronisation des Generators durch  $v_f$ , nur die Periodizität der Modulation enthalten. Kommt eine Synchronisation nicht zustande, so tritt neben der Modulationsfrequenz noch eine Schwebungsfrequenz auf.

Wir bilden noch  $v_\varrho'$  und  $v_f'$

$$v_\varrho' = w_\varrho' \cdot \sin(\omega t + \varphi_\varrho) + w_\varrho (\omega + \varphi_\varrho') \cdot \cos(\omega t + \varphi_\varrho)$$

$$v_f' = w_f' \cdot \sin \frac{n}{m} (\omega t + \varphi_f) + w_f \cdot \frac{n}{m} (\omega + \varphi_f') \cdot \cos \frac{n}{m} (\omega t + \varphi_f)$$

Voraussetzung (Kreisfrequenz der Modulation =  $p$ ):

$$p \ll \frac{\omega}{m} \quad (37)$$

Somit gilt die Näherung:

$$\begin{aligned} v'_o &= \omega \cdot w_o \cdot \cos(\omega t + \varphi_o) \\ v'_f &= \frac{n}{m} \cdot \omega \cdot w_f \cdot \cos \frac{n}{m}(\omega t + \varphi_f) \end{aligned} \quad (38)$$

Nun gehen wir mit  $v_o$ ,  $v_f$ ,  $v'_o$  und  $v'_f$  in die Gleichungen (23), (24) und (31) ein. Dabei sehen wir sofort, daß wegen (35)  $\delta^2(t) \ll \delta'(t)$  ist, und somit  $\frac{1}{2}\delta^2(t)$  gegenüber  $\delta'(t)$  in Gleichung (30) vernachlässigt werden darf.

Entwickeln wir noch  $\delta'(t)$  in eine Fourierreihe:

$$\delta'(t) = \frac{q}{C} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{q \cdot S}{C} \cdot \omega \cdot \Phi(pt, \omega t)$$

mit 
$$\Phi(pt, \omega t) = \sum_{\substack{\alpha=0 \\ \beta=0}}^{\infty} e_{\alpha\beta} \cdot \cos \left[ \left( \alpha \frac{n}{m} \pm \beta \right) \omega t - \varepsilon_{\alpha\beta} \right] \quad (39)$$

und setzen wir:

$$\frac{1}{2} \frac{q \cdot S}{\omega C} = k \quad (40)$$

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \lambda \quad (41)$$

so geht Gleichung (30) über in die Differentialgleichung

$$y'' + [\omega_0^2 + \omega^2 \cdot k \cdot \Phi(pt, \omega t)] \cdot y(t) = 0 \quad (42a)$$

Wegen der Voraussetzung (37) kann in  $\Phi(pt, \omega t)$ ,  $e_{\alpha\beta}$  und  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ , welche Funktionen von  $(p, t)$  sind, als konstant gegenüber

$$\cos \left[ \left( \frac{n}{m} \alpha \pm \beta \right) \omega t \right]$$

betrachtet werden, so daß also  $\Phi(pt, \omega t)$  eigentlich eine Funktion  $\Phi(\omega t)$  ist. Daher dürfen wir Gleichung (42a) als Hillsche Differentialgleichung behandeln und schreiben sie in der Form

$$y'' + \omega^2 \cdot [\lambda + k \cdot \Phi(\omega t)] \cdot y = 0 \quad (42b)$$

*b) Bestimmung des charakteristischen Exponenten.*

Die Lösung der Differentialgleichung (42b) hat die Form:

$$e^{\mu \omega t} \cdot F(\omega t)$$

worin  $F(\omega t)$  eine in  $2\pi$  periodische Funktion

$$F(\omega t + 2\pi) = F(\omega t) \quad (43)$$

sei. Da voraussichtlich  $\mu$  eine Funktion der Zeit wird, nehmen wir den zeitlichen Mittelwert des Exponenten und schreiben demgemäß die Lösung:

$$y_1 = e^{\omega \cdot \int_0^t \mu(\tau) \cdot d\tau} \cdot F(\omega t) \quad (44)$$

Gehen wir mit Gleichung (44) in Gleichung (42) ein, so erhalten wir:

$$F'' + 2\mu\omega \cdot F' + \omega^2 \left[ \mu^2 + \frac{\mu'}{\omega} + \lambda + k \cdot \Phi(\omega t) \right] F = 0 \quad (45)$$

In Gleichung (42) ist  $\lambda$  von der Größenordnung 1 und  $k \ll 1$ , so daß wir für  $F(\omega t)$  auf Grund des Postulates (43) in erster Näherung

$$F(\omega t) = c \cdot \sin(\omega t + \alpha) \quad (46)$$

schreiben dürfen.

$C$  ist eine multiplikative Konstante, die durch Anfangsbedingungen bestimmt ist, uns hier aber noch nicht interessiert. Die Phase  $\alpha$  sei eine langsam variierende Zeitfunktion. Mit (46) geht Gleichung (45) über in:

$$\begin{aligned} & \left[ 2\mu \left( 1 + \frac{\alpha'}{\omega} \right) + \frac{\alpha''}{\omega^2} \right] \cdot \cos(\omega t + \alpha) + \\ & + \left[ \mu^2 + \frac{\mu'}{\omega} + \lambda + k \cdot \Phi(\omega t) - 1 - 2 \frac{\alpha'}{\omega} - \left( \frac{\alpha'}{\omega} \right)^2 \right] \cdot \sin(\omega t + \alpha) = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

Wir entwickeln:

$$\begin{aligned} \Phi(\omega t) \cdot \sin(\omega t + \alpha) &= \sum_{\substack{\alpha=0 \\ \beta=0}}^{\infty} e_{\alpha\beta} \cdot \cos \left[ \left( \frac{n}{m} \alpha \pm \beta \right) \omega t - \varepsilon_{\alpha\beta} \right] \cdot \sin(\omega t + \alpha) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha=0 \\ \beta=0}}^{\infty} e_{\alpha\beta} \cdot \left\{ \sin \left[ \left( \frac{n}{m} \alpha \pm \beta + 1 \right) \omega t + \alpha - \varepsilon_{\alpha\beta} \right] - \sin \left[ \left( \frac{n}{m} \alpha \pm \beta - 1 \right) \omega t - \alpha - \varepsilon_{\alpha\beta} \right] \right\} \end{aligned}$$

Gleichung (47) enthält somit Glieder mit  $\sin(\omega t + \alpha)$ ,  $\cos(\omega t + \alpha)$

$$\sin \left[ \left( \frac{n}{m} \alpha \pm \beta + 1 \right) \omega t + \alpha - \varepsilon_{\alpha\beta} \right] \quad \text{und} \quad \sin \left[ \left( \frac{n}{m} \alpha \pm \beta - 1 \right) \omega t - \alpha - \varepsilon_{\alpha\beta} \right]$$

Von den Frequenzen  $(\frac{n}{m} \alpha \pm \beta \pm 1) \omega$  berücksichtigen wir nur jene Kombinationen, welche die Grundfrequenz  $\omega$  ergeben. Alle anderen Frequenzen  $\neq \omega$  können wir wegen (46) [guter Schwingkreis] vernachlässigen. So bezeichnen wir im weitern:

$$\begin{aligned} \text{für} \quad & \left(\frac{n}{m} \alpha \pm \beta\right) = 0 \quad : \quad e_{\alpha\beta} = e_0; \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_0 \\ \text{und für} \quad & \left(\frac{n}{m} \alpha \pm \beta\right) = 2 \quad : \quad e_{\alpha\beta} = e_2; \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (48)$$

Setzen wir eine schwache Nichtlinearität der Kennlinie voraus, so dürfen wir, wie Abschnitt II 5 zeigt, die Glieder mit  $e_0$  vernachlässigen.

Ordnen wir nun nach Gliedern von  $\sin(\omega t)$  und  $\cos(\omega t)$ , und beachten wir, daß Gleichung (47) für alle Zeiten erfüllt sein muß, so erhalten wir zwei Bestimmungsgleichungen für  $\mu$  und  $\kappa$ :

$$\left[2\mu \left(1 + \frac{\kappa'}{\omega_2}\right) + \frac{\kappa''}{\omega^2}\right] + \frac{1}{2} k \cdot e_2 \cdot \sin(2\kappa + \varepsilon_2) = 0 \quad (49)$$

$$\left[\lambda - 1 + \mu^2 + \frac{\mu'}{\omega} - 2 \frac{\kappa'}{\omega} - \left(\frac{\kappa'}{\omega}\right)^2\right] - \frac{1}{2} k \cdot e_2 \cdot \cos(2\kappa + \varepsilon_2) = 0 \quad (50)$$

Die  $e$  und  $\varepsilon$  sind langsame Zeitfunktionen und liefern obige Bestimmungsgleichungen für  $\mu$  und  $\kappa$ . Somit werden letztere auch langsame Zeitfunktionen, wodurch wir:

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa'}{\omega} \quad \text{gegenüber} \quad 1 \\ & \frac{\kappa''}{\omega^2} \quad \quad \quad \text{''} \quad \mu \\ & \left(\frac{\kappa'}{\omega}\right)^2 \quad \quad \quad \text{''} \quad \frac{\kappa'}{\omega} \\ \text{und} \quad & \mu^2 + \frac{\mu'}{\omega} \quad \quad \quad \text{''} \quad k \end{aligned}$$

vernachlässigen dürfen. Setzen wir noch für:

$$\kappa = -\left(\sigma + \frac{1}{2} \varepsilon_2\right) \quad (51)$$

so gehen (49) und (50) über in

$$\mu = \frac{1}{4} k \cdot e_2 \cdot \sin 2\sigma \quad (52)$$

$$\lambda = 1 + \frac{1}{2} k \cdot e_2 \cdot \cos 2\sigma - 2 \frac{\sigma'}{\omega} - \frac{\varepsilon_2'}{\omega} \quad (53)$$

Gleichung (53) stellt eine Bestimmungsgleichung für die Hilfsphase  $\sigma$  dar, so daß  $\mu$  vollständig bestimmt ist. Da  $k$ ,  $e_2$  und  $\varepsilon_2$  reell sind, so bestimmt allein  $\sigma$  den Charakter von  $\mu$ . Ist  $\sigma$  reell, wird auch  $\mu$  reell sein, ist hingegen  $\sigma$  komplex, so wird es auch  $\mu$  sein. Daraus ersehen wir, daß Gleichung (53) ein Kriterium ist für die Erfüllung der Phasenbilanz.

$$(1 - \lambda) = \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$$

ist bekannt unter der Bezeichnung Verstimmung  $\eta$ , welche für kleine Werte durch:  $\frac{2\Delta\omega}{\omega}$  angenähert werden darf, worin

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0$$

bedeutet. Gleichung (53) stellt somit folgende Differentialgleichung in  $\sigma$  dar:

$$\sigma' - \frac{1}{4} k \cdot \omega \cdot e_2 \cdot \cos 2\sigma = \Delta\omega - \frac{1}{2} \varepsilon_2' \quad (54)$$

Da wir das Problem der Synchronisierung zu behandeln haben, interessieren wir uns nur für reelle Werte von  $\sigma$ , resp.  $\mu$  (siehe Seite 14)

Gleichung (44) in Verbindung mit (46) lautet nun:

$$y_1 = e^{\omega \int_0^t \mu \cdot d\tau} \cdot \sin(\omega t - \frac{1}{2} \varepsilon_2 - \sigma)$$

Ein zweites von  $y_1$  linear unabhängiges Integral  $y_2$  hat die Form:

$$y_2 = e^{-\omega \int_0^t \mu \cdot d\tau} \cdot G(\omega t)$$

Man überlegt sich leicht, daß  $G(\omega t)$  aus  $F(\omega t)$  dadurch entsteht, daß  $\sigma$  mit  $-\sigma$  vertauscht wird, also

$$y_2 = e^{-\omega \int_0^t \mu \cdot d\tau} \cdot \sin(\omega t - \frac{1}{2} \varepsilon_2 + \sigma)$$

Machen wir die Transformation (29) rückgängig, so erhalten wir zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen Differential-

gleichung (28) zu:

$$v_1 = e^{\frac{1}{2} \int_0^t [\delta + 2\mu\omega] \cdot d\tau} \cdot \sin(\omega t - \frac{1}{2} \varepsilon_2 - \sigma) \quad (55)$$

$$v_2 = e^{\frac{1}{2} \int_0^t [\delta - 2\mu\omega] \cdot d\tau} \cdot \sin(\omega t - \frac{1}{2} \varepsilon_2 + \sigma) \quad (56)$$

*c) Aufsuchung des Partikulärintegrals der inhomogenen Differentialgleichung.*

Da wir nun zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen Differentialgleichung (28) kennen, erhalten wir die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (25) gemäß (26).

Sehen wir vom Einschwingvorgang ab, so interessiert uns nur noch das partikuläre Integral

$$v_{\varrho} = v_2 \cdot \int_0^t \frac{v_1 \cdot f}{W} \cdot d\tau - v_1 \cdot \int_0^t \frac{v_2 \cdot f}{W} \cdot d\tau \quad (57)$$

$f$  ist gegeben durch (24).  $W$  bestimmen wir aus (27) zu:

$$W = e^{\int_0^t \delta \cdot d\tau} \cdot \{ \mu \cdot \omega [\cos 2\sigma - \cos(2\omega t - \varepsilon_2)] + \sigma' \cdot \sin(2\omega t - \varepsilon_2) - (\omega - \frac{1}{2} \varepsilon_2') \sin 2\sigma \}$$

Da  $\mu\omega$ ,  $\sigma'$  und  $\varepsilon_2' \ll \omega$  sind, dürfen wir für  $W$  die Näherung benutzen:

$$W = -e^{\int_0^t \delta(\tau) \cdot d\tau} \cdot \omega \cdot \sin 2\sigma \quad (58)$$

Wir können somit die beiden Integranden von (57) in Fourierreihen entwickeln, welche die Form haben:

$$\frac{v \cdot f}{W} = \frac{e^{-\frac{1}{2} \int_0^t (\delta \pm 2\mu\omega) d\tau}}{\sin 2\sigma} \cdot \sum_{\substack{\alpha=0 \\ \beta=0}}^{\infty} w_{\alpha\beta} \cdot \cos \left[ \left( \frac{n}{m} \alpha \pm \beta \right) \omega t - \varphi_{\alpha\beta} \right] \quad (59)$$

mit  $w_{\alpha\beta}$  und  $\varphi_{\alpha\beta}$  als langsam variierenden periodischen Funktionen.

Stellen wir die Bedingung auf, daß immer  $\sin 2\sigma \neq 0$  und reell sei, was nichts anderes heißt, als daß wir uns nur in den Synchronisierungsgebieten mit Ausschluß deren Ränder [ $\sin 2\sigma = 0$ ]

bewegen dürfen, so stellen die Integranden stetige und reguläre Funktionen dar. Wir dürfen daher summandenweise integrieren. (Um das Verhalten auf den Rändern der Synchronisationsgebiete diskutieren zu können, müssen zuerst zwei linear unabhängige Lösungen gemäß den Ausführungen von Abschnitt II 2 gefunden und in Gl. (57) verwendet werden.) Die Summanden sind quasi-periodische Funktionen, welche für  $\left(\frac{n}{m} \alpha \pm \beta\right) = 0$  eine tiefe Frequenz und für  $\left(\frac{n}{m} \alpha \pm \beta\right) \neq 0$  eine hohe Frequenz besitzen. Infolge der Integration kommt die Frequenz im Nenner vor, so daß wir diejenigen Summanden mit Hochfrequenzcharakter gegenüber jenen mit Niederfrequenzcharakter vernachlässigen dürfen. Die Integrale stellen somit nur langsam variierende quasiperiodische Funktionen dar, und die hochfrequente Schwingung wird durch  $v_1$  und  $v_2$ , welche vor den Integralen stehen, verkörpert.

Bezeichnen wir mit:

$$\begin{aligned}
 Ex_1 &= \frac{1}{2} \int_0^t [\delta(\tau) + 2u(\tau) \cdot \omega] \cdot d\tau && \text{(Exponent)} \\
 Ex_2 &= \frac{1}{2} \int_0^t [\delta(\tau) - 2u(\tau) \cdot \omega] \cdot d\tau && \\
 Int_1 &= \int_0^t \frac{v_1 \cdot f}{W} \cdot d\tau && \text{(Integral)} \\
 Int_2 &= \int_0^t \frac{v_2 \cdot f}{W} \cdot d\tau && 
 \end{aligned} \tag{60}$$

so schreibt sich das partikuläre Integral (57):

$$v_q = -e^{Ex_1} \cdot Int_1 \cdot \sin(\omega t - \frac{1}{2} \varepsilon_2 - \sigma) + e^{Ex_2} \cdot Int_2 \cdot \sin(\omega t - \frac{1}{2} \varepsilon_2 + \sigma) \tag{61}$$

Teilen wir diese Schwingung auf in sinus- und cosinus-Glieder von  $(\omega t)$  und bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned}
 w_C &= [+ e^{Ex_2} \cdot Int_2 \cdot \sin(\sigma - \frac{1}{2} \varepsilon_2) + e^{Ex_1} \cdot Int_1 \cdot \sin(\sigma + \frac{1}{2} \varepsilon_2)] \\
 w_S &= [e^{Ex_2} \cdot Int_2 \cdot \cos(\sigma - \frac{1}{2} \varepsilon_2) - e^{Ex_1} \cdot Int_1 \cdot \cos(\sigma + \frac{1}{2} \varepsilon_2)]
 \end{aligned} \tag{62}$$

so lautet (61):

$$v_q = w_S \cdot \sin \omega t + w_C \cdot \cos \omega t \tag{63}$$

Diese Schwingung stellt nun also die rückgekoppelte Spannung  $v_\varrho$  dar, für welche wir am Anfang des Lösungsganges den Ansatz (36) machten:

$$\begin{aligned} v_\varrho &= w_\varrho \cdot \sin(\omega t + \varphi_\varrho) \\ v_\varrho &= w_\varrho \cdot \cos \varphi_\varrho \cdot \sin \omega t + w_\varrho \cdot \sin \varphi_\varrho \cdot \cos \omega t \end{aligned}$$

Wir setzen daher Gleichung (63) identisch gleich der Gleichung (36) und erhalten daraus zwei Bestimmungsgleichungen für die beiden Unbekannten  $w_\varrho$  und  $\varphi_\varrho$ :

$$\begin{aligned} w_S &= w_\varrho \cdot \cos \varphi_\varrho \\ w_C &= w_\varrho \cdot \sin \varphi_\varrho \end{aligned} \tag{64}$$

(64) stellt ein System von zwei Integralgleichungen mit den drei Unbekannten  $w_\varrho$ ,  $\varphi_\varrho$  und  $\sigma$  dar. Es steht uns aber noch die Differentialgleichung (54) zur Bestimmung von  $\sigma$  zur Verfügung, so daß also durch (64) mit (54) die Unbekannten bestimmt sind.

Es ist oft bequemer, den Vorgang durch ein System von Differentialgleichungen beschrieben zu haben. Um (64) in eine solche überführen zu können, müssen wir  $\text{Int}_1$  und  $\text{Int}_2$  isolieren. Zu diesem Zwecke multiplizieren wir (62) oben und unten abwechselungsweise mit  $\sin(\sigma \pm \frac{1}{2}\varepsilon_2)$  und  $\cos(\sigma \pm \frac{1}{2}\varepsilon_2)$  und erhalten mit (64) zusammen:

$$\begin{aligned} \text{Int}_1 &= e^{-Ex_1} \cdot w_\varrho \cdot \frac{\sin(\varphi_\varrho - \sigma + \frac{1}{2}\varepsilon_2)}{\sin 2\sigma} \\ \text{Int}_2 &= e^{-Ex_2} \cdot w_\varrho \cdot \frac{\sin(\varphi_\varrho + \sigma + \frac{1}{2}\varepsilon_2)}{\sin 2\sigma} \end{aligned} \tag{65}$$

Differenzieren wir die Gleichungen (65) nach der Zeit, so stehen links die niederfrequenten Glieder der Integranden  $\frac{v \cdot f}{W}$  und rechts die Unbekannten und deren erste Ableitungen.  $\text{Int}_1'$ ,  $\text{Int}_2'$  und (54) zusammen bilden somit ein System von drei nichtlinearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit periodischen Koeffizienten und den unbekanntenen Variablen  $w_\varrho$ ,  $\varphi_\varrho$  und  $\sigma$ . Dieses System wird nur näherungsweise lösbar sein.

Wenn wir den Einschwingvorgang mitberücksichtigen, so lauten die Gleichungen (65):



$$\begin{aligned}
 Int_1 &= e^{-Ex_1} \cdot w_\varrho \cdot \frac{\sin(\varphi_\varrho - \sigma + \frac{1}{2}\varepsilon_2)}{\sin 2\sigma} + C_1 \\
 Int_2 &= e^{-Ex_2} \cdot w_\varrho \cdot \frac{\sin(\varphi_\varrho + \sigma + \frac{1}{2}\varepsilon_2)}{\sin 2\sigma} - C_2
 \end{aligned}
 \tag{66}$$

worin  $C_1$  und  $C_2$  zwei durch Anfangsbedingungen bestimmte Integrationskonstanten sind. Stabilitätsbetrachtungen der synchronisierten Schwingung zeigen, daß die Glieder mit  $C_1$  und  $C_2$  mit dem Einschwingen verschwinden.

#### d) Die Hilfsphase $\sigma$ .

Nach den Gleichungen (48), (54) hängt  $\sigma$  ab von  $k$ ,  $e_2$ ,  $e_0$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_0$  und  $\Delta\omega$ .  $e_2$ ,  $e_0$ ,  $\varepsilon_2$  und  $\varepsilon_0$  sind Funktionen von  $w_\varrho$ ,  $w_j$ ,  $\varphi_2$  und  $\varphi_j$ . Sind diese Größen zeitabhängig, so wird es auch  $\sigma$  sein, und es gilt dann:  $\sigma' \neq 0$ . Letzteres ist also immer der Fall, wenn der Einschwingvorgang oder die Modulation einer nichtlinearen Schwingung betrachtet wird. Die Modulation bedeutet somit nichts anderes als eine fortwährende Störung der stationären Schwingung. Diese sucht sich dem momentan herrschenden, durch die Modulation ständig ändernden Zustand anzupassen. Die Differentialgleichung (54) beschreibt den Mechanismus dieses Vorganges.

Will man den Hilfsparameter  $\sigma$  aus dem im vorigen Kapitel abgeleiteten Differentialgleichungssystem eliminieren, so geht dieses näherungsweise über in ein System von zwei nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten und den beiden abhängigen Variablen  $w_\varrho$  und  $\varphi_\varrho$ . Es wird möglich sein, dieses System für Spezialfälle zu reduzieren und zu vereinfachen, so daß asymptotische Lösungen gefunden werden können.

So hat z. B. *van der Pol* den Fall der Synchronisierung eines Röhrengenerators mit kubischer Kennlinie durch ein unmoduliertes Fremdsignal, dessen Frequenz ungefähr der Resonanzfrequenz des Generators entsprach, behandelt [6, 7, 21]. Er erhält, über verschiedene Vernachlässigungen hinweg, ein einfaches System zweier nichtlinearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstan-

ten Koeffizienten. Dieses System liefert sicher für den stationären Fall brauchbare Lösungen. Will jedoch das Problem des Einschwingvorganges behandelt sein, so ist Vorsicht am Platze.

Es ist nun noch interessant,  $\sigma$  in expliziter Darstellung zu haben. Zu diesem Zwecke wollen wir versuchen, die Differentialgleichung (54) zu lösen:

$$\sigma' - \Omega_1 \cdot \cos 2\sigma = \Omega_2 \quad (67)$$

mit

$$\Omega_1 = \frac{1}{4} k \cdot \omega \cdot e_2 \quad (68)$$

und

$$\Omega_2 = \Delta \omega - \frac{1}{2} \varepsilon_2'$$

$\Omega_1$  und  $\Omega_2$  sind reelle Koeffizienten (Kreisfrequenzen) und enthalten periodische Summanden mit der Periodizität der Modulation.  $\sigma$  kann reell, komplex oder imaginär sein. Mit der Abbildungsfunktion

$$x(t) = \operatorname{tg} \sigma \quad (69)$$

geht (67) über in

$$x' + x^2(\Omega_1 - \Omega_2) - (\Omega_1 + \Omega_2) = 0 \quad (70)$$

Wir normieren:

$$x(t) = y(\xi) \quad \text{mit} \quad \xi = \int_0^t (\Omega_1 - \Omega_2) d\tau \quad (71)$$

und erhalten:

$$y'(\xi) + y^2(\xi) = \frac{\Omega_1(\xi) + \Omega_2(\xi)}{\Omega_1(\xi) - \Omega_2(\xi)} \quad (\text{Riccati}) \quad (72)$$

und als letzte Abbildung benutzen wir:

$$z = C \cdot e^{\int_0^t y \cdot dx}; \quad y(\xi) = \frac{z'(\xi)}{z(\xi)} \quad (73)$$

(72) geht über in

$$z'' - z \cdot \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{\Omega_1 - \Omega_2} = 0 \quad (74)$$

Nun setzen wir

$$\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{\Omega_1 - \Omega_2} = \eta + H(\xi) \quad (75)$$

worin  $\eta$  der konstante und  $H(\xi)$  der periodische Teil sei. Somit schreibt sich (74) als Hillsche Differentialgleichung:

$$z'' - z(\eta + H(\xi)) = 0 \quad (76)$$

Wir führen sie über in die gleichwertige Volterrasche Integralgleichung:

$$z(\xi) = \cos \sqrt{-\eta} (\xi + \varepsilon) + \frac{1}{\sqrt{-\eta}} \cdot \int_0^{\xi} H(x) \cdot z(x) \cdot \sin \sqrt{-\eta} (\xi - x) \cdot dx \quad (77)$$

Im Abschnitt II 6 wird gezeigt, daß für den Fall der Synchronisation  $\eta > 0$  sein muß. Gleichung (77) wird durch Iteration gelöst. Machen wir die Voraussetzung

$$H_{max} \ll \eta \quad (78)$$

so dürfen wir nach dem zweiten Schritte abbrechen und erhalten:

$$z(\xi) = \text{Cos} \sqrt{\eta} \cdot (\xi + \varepsilon) + \frac{1}{\sqrt{\eta}} \int_0^{\xi} H(x) \cdot \text{Cos} \sqrt{\eta} (x + \varepsilon) \cdot \text{Sin} \sqrt{\eta} \cdot (\xi - x) dx \quad (79)$$

Mit (73) und der weiteren Benützung von (78) erhalten wir die Näherung:

$$y(\xi) = \text{Tg} \sqrt{\eta} (\xi + \varepsilon) \cdot \left\{ \sqrt{\eta} + \frac{2}{\text{Sin} 2 \sqrt{\eta} (\xi + \varepsilon)} \int_0^{\xi} H(x) \cdot \text{Cos}^2 \sqrt{\eta} (x + \varepsilon) \cdot dx \right.$$

$\varepsilon$  ist eine durch Randwerte bestimmte Integrationskonstante. Mit wachsendem  $\xi$  strebt  $y$  gegen:

$$y(\xi) = \sqrt{\eta} + e^{-2\sqrt{\eta} \cdot \xi} \cdot \int_0^{\xi} H(x) \cdot e^{2\sqrt{\eta} \cdot x} \cdot dx \quad (80)$$

## 5. Abhängigkeit von $\mu$ und $\sigma$ von der Kennlinie und dem Frequenzverhältnis

Wenn wir nochmals den Abschnitt II<sub>4b</sub> durchgehen, so fällt uns auf, daß an der Bildung von  $\mu$  und  $\sigma$  in erster Näherung nur die Glieder  $e_0$ ,  $e_2$ ,  $\varepsilon_0$  und  $\varepsilon_2$  (48) der Fourierentwicklung von  $\delta'(t)$  beteiligt sind. Das heißt aber (wie wir erkennen, wenn wir die Entwicklung von  $\delta(t)$  verfolgen), daß nur diejenigen Kombinationsfrequenzen im Anodenstrom  $i_a$  für das Problem von Bedeutung sind, welche die Frequenz  $\omega$  haben. Es interessiert uns daher, zu wissen, welche Nichtlinearität die Kennlinie aufzuweisen hat, damit für ein bestimmtes Frequenzverhältnis  $\frac{n}{m}$  Synchronisation möglich ist.

Zur Beantwortung dieser Frage müssen wir

$$\omega \cdot \Phi(\omega t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_{\nu} \cdot \nu(\nu-1) \cdot (v_{\varrho} + v_f)^{\nu-2} \cdot (v'_{\varrho} + v'_f) \quad (81)$$

in eine Binomialreihe entwickeln und die Additionstheoreme trigonometrischer Funktionen anwenden. So erhalten wir mit der Binomialentwicklung:

$$\omega \cdot \Phi(\omega t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_{\nu} \cdot \nu \cdot (\nu-1) \cdot \sum_{p=0}^{\nu-2} \binom{\nu-2}{p} \cdot v_{\varrho}^{\nu-2-p} \cdot v_f^p \cdot (v'_{\varrho} + v'_f) \quad (82)$$

Nun setzen wir ein für:  $v_{\varrho}$ : Gleichung (36),  $v_f$ : Gleichung (32), und für  $v'_{\varrho}$ ,  $v'_f$  die Ausdrücke (38)

$$\begin{aligned} \omega \cdot \Phi(\omega t) = & \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_{\nu} \cdot \nu \cdot (\nu-1) \cdot \sum_{p=0}^{\nu-2} \binom{\nu-2}{p} \cdot \omega \\ & \left\{ w_{\varrho}^{\nu-1-p} \cdot w_f^p \cdot \sin^{\nu-2-p}(\omega t + \varphi_{\varrho}) \cdot \sin^p \frac{n}{m}(\omega t + \varphi_f) \cdot \cos(\omega t + \varphi_{\varrho}) \right. \\ & \left. + \frac{n}{m} \cdot w_{\varrho}^{\nu-2-p} \cdot w_f^{p+1} \cdot \sin^{\nu-2-p}(\omega t + \varphi_{\varrho}) \cdot \sin^p \frac{n}{m}(\omega t + \varphi_f) \right\} \quad (83) \end{aligned}$$

Die Potenzen der sinus-Glieder stellen wir durch Summen dar:

$\nu - 2 - p =$  gerade Zahl

$$\begin{aligned} \sin^{\nu-2-p}(\omega t + \varphi_{\varrho}) = & \frac{(-1)^{\frac{\nu-2-p}{2}}}{2^{\nu-3-p}} \cdot \sum_{q=0}^{\frac{\nu-4-p}{2}} (-1)^q \cdot \binom{\nu-2-p}{q} \cdot \cos(\nu-2-p-2q)(\omega t + \varphi_{\varrho}) \\ & + \binom{\nu-2-p}{\frac{\nu-2-p}{2}} \cdot \frac{1}{2^{\nu-p-2}} \end{aligned}$$

$\nu - 2 - p =$  ungerade Zahl

$$\sin^{\nu-2-p}(\omega t + \varphi_{\varrho}) = \frac{(-1)^{\frac{\nu-3-p}{2}}}{2^{\nu-3-p}} \cdot \sum_{q=0}^{\frac{\nu-3-p}{2}} (-1)^q \cdot \binom{\nu-2-p}{q} \cdot \sin(\nu-2-p-2q)(\omega t + \varphi_{\varrho}) \quad (84)$$

$p =$  gerade Zahl

$$\sin^p \frac{n}{m}(\omega t + \varphi_f) = \frac{(-1)^{p/2}}{2^{p-1}} \cdot \sum_{r=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^r \binom{p}{r} \cdot \cos(p-2r) \cdot \frac{n}{m}(\omega t + \varphi_f) + \binom{p}{p/2} \cdot \frac{1}{2^p}$$

$p =$  ungerade Zahl

$$\sin^p \frac{n}{m}(\omega t + \varphi_f) = \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{2^{p-1}} \cdot \sum_{r=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^r \cdot \binom{p}{r} \cdot \sin(p-2r) \cdot \frac{n}{m}(\omega t + \varphi_f)$$

Werden noch die Multiplikationen in Gleichung (83) ausgeführt, so erhalten wir schlußendlich:

$$\begin{aligned} \text{für } \nu = \text{gerade Zahl} & : \text{cosinus - Glieder} \\ \nu = \text{ungerade Zahl} & : \text{sinus - Glieder} \end{aligned}$$

von der Frequenz:

$$\left[ (\nu - 2 - p - 2q \pm 1)(\omega t + \varphi_e) \pm (p - 2r) \frac{n}{m}(\omega t + \varphi_f) \right] \quad (85a)$$

und

$$\left[ (\nu - 2 - p - 2q)(\omega t + \varphi_e) \pm (p - 2r \pm 1) \frac{n}{m}(\omega t + \varphi_f) \right] \quad (85b)$$

Darin sind also  $p, q, r$  ganze positive Zahlen  $0, 1, 2, 3 \dots$ , welche den Grenzen der Summationszeichen von (83) und (84) gehorchen müssen.

Am Aufbau von  $e_0$  und  $\varepsilon_0$  sind gemäß (85) nur Glieder beteiligt, für welche gilt:

$$(\nu - 2 - p - 2q \pm 1) \pm (p - 2r) \frac{n}{m} = 0 \quad (86a)$$

und

$$(\nu - 2 - p - 2q) \pm (p - 2r \pm 1) \frac{n}{m} = 0 \quad (86b)$$

und analog erhalten wir für  $e_2, \varepsilon_2$  die Bedingung

$$(\nu - 2 - p - 2q \pm 1) \pm (p - 2r) \frac{n}{m} = \pm 2 \quad (87a)$$

$$(\nu - 2 - p - 2q) \pm (p - 2r \pm 1) \frac{n}{m} = \pm 2 \quad (87b)$$

Daraus geht die Forderung nach Ganzzahligkeit hervor

$$(p - 2r) = x \cdot m \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (88a)$$

$$(p - 2r \pm 1) = x \cdot m \quad (88b)$$

Nun wollen wir (88) in (86) anwenden. Ist  $x \cdot m$  eine gerade Zahl  $0, 2, 4 \dots$ , so muß im Falle a)  $p$  gradzahlig, im Falle b) ungradzahlig sein.  $\nu$  ist somit in beiden Fällen ungerade für  $n =$  gerade, und gerade für  $n =$  ungerade. Umgekehrt sind die Verhältnisse für  $x \cdot m =$  ungerade. Daraus schließen wir:

für  $(n+m) = \text{gerade Zahl} : \nu = \text{ungerade} \rightarrow \sin x \cdot n (\varphi_g - \varphi_f)$  (89)  
für  $(n+m) = \text{ungerade Zahl} : \nu = \text{gerade} \rightarrow \cos x \cdot n (\varphi_g - \varphi_f)$

Insbesondere sehen wir, daß für  $x = 0$  oder für  $\varphi_g = \varphi_f$  bei  $\nu = \text{ungerade}$  keine Stromanteile entstehen.

Nun interessiert uns noch die niedrigste Potenz der Kennliniendarstellung, welche einen Anteil an unserem  $e_0$ ,  $\varepsilon_0$  liefert. Wir eliminieren  $p$  in (86), setzen  $q = 0$ ,  $r = 0$  und erhalten:

$$\nu_{min} = m + n + 2 \pm 1 \quad (90)$$

Allgemein gilt das  $-1$ , nur im Falle  $m = n$  nicht, denn dann herrscht unter den Summationsgliedern Symmetrie, so daß sie sich für  $\nu = m + n + 1$  gegenseitig aufheben.

(88) auf (89) angewendet, erlaubt folgende Schlüsse: Es gilt analog (89) die Beziehung zwischen  $(m+n)$  und  $\nu$ .

Wenn wir nach der niedrigsten Potenz der Kennlinie fragen, welche einen Anteil an  $e_2$ ,  $\varepsilon_2$  liefert, so finden wir:

$$\nu_{min} = (m+n) \pm 1 > 2 \quad (91)$$

Setzen wir  $x = 0$ , so erkennen wir noch, daß alle ungeraden Potenzen  $\nu > 1$  Anteile liefern, wie auch  $\frac{n}{m}$  sei. Diese Anteile sind zum größten Teil für die Selbsterregung und die Begrenzung der erregten Schwingamplitude verantwortlich.

Fassen wir zusammen, so erkennen wir, daß an der Bildung von  $e_2$  eine wesentlich größere Anzahl und dazu noch potenzniedrigere Glieder beteiligt sind als an  $e_0$ .

Wenn wir voraussetzen, daß die Koeffizienten  $\gamma$  der Potenzreihendarstellung der Kennlinie mit wachsender Potenz rasch abnehmen, so dürfen wir in unserer Näherungsrechnung  $e_0$  gegenüber  $e_2$  vernachlässigen.

Im weiteren ist es für das Zustandekommen der Synchronisation unbedingt notwendig, daß ein nicht vernachlässigbares Partikulärintegral existiert. Wie in  $\Pi_{3c}$  gezeigt wird, müssen die Produkte

$$\begin{aligned} \nu \cdot f = \frac{q \cdot S}{C} \cdot \omega \cdot \frac{n}{m} \cdot e^{Ex} \cdot w_f \cdot \sin(\omega t - \frac{1}{2} \varepsilon_2 \pm \sigma) \cdot \cos \frac{n}{m} (\omega t + \varphi_f) \cdot \\ \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_{\nu} \cdot \nu \cdot \left[ \sin(\omega t + \varphi_g) + \sin \frac{n}{m} (\omega t + \varphi_f) \right]^{\nu-1} \end{aligned} \quad (92)$$

Glieder mit  $\omega = 0$  aufweisen. Wir entwickeln daher in analoger Weise, wie bei  $\omega \cdot \Phi(\omega t)$ ,  $\nu \cdot f$  in eine Summe von periodischen Summanden. Diese haben, allgemein geschrieben, die Frequenz:

$$\left[ (\nu - 1 - p - 2q \pm 1) \pm (p - 2r \pm 1) \frac{n}{m} \right] \cdot \omega \quad (93)$$

Als niedrigste Potenz, welche Glieder mit  $\omega = 0$  liefert, finden wir

$$\nu_{min} = (m + n) - 1 \quad (94)$$

$\nu = 3$  liefert Glieder, unabhängig vom Verhältnis  $\frac{n}{m}$ .

Allgemein geht aus den Ausführungen hervor, daß für  $\frac{n}{m} = 1$ ,  $\frac{n}{m} = 2$ ,  $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$  mit kubischer Kennlinie, gute Synchronisationsmöglichkeiten vorliegen müssen.

## 6. Die Stabilität der synchronisierten Schwingung

Voraussetzung: Die Schwingsteilheit der Röhre sei mit wachsender Schwingamplitude monoton abnehmend.

Bei Schwingungsproblemen wendet man oft die Methode der gestörten Schwingung an, um die Stabilität diskutieren zu können. In unserem Falle führt diese Methode nicht zum Ziele, da ja wegen der Modulation die Schwingung ohnehin schon dauernd gestört wird. Im weitern begrenzt die Nichtlinearität der Kennlinie die Schwingungsamplitude, so daß alle Schwingungen, ob synchronisiert oder moduliert, als stabil zu betrachten sind.

Wir interessieren uns daher nur für die Bedingungen, unter welchen der Synchronisierungsvorgang stabil verläuft.

In der vorliegenden Arbeit wird am Anfang gezeigt, wie man einen guten Überblick erhält über die verschiedenen Schwingungsprobleme, wenn man die schwingungsbeschreibende Differentialgleichung in eine Hillsche Differentialgleichung überführt.

Es wird dargelegt, daß der charakteristische Exponent  $\mu$  der Lösung reell sein muß, wenn neben der Frequenz der Steuerfunktion und solchen, welche in einfachem rationalem Verhältnis zu ihr stehen, keine anderen beliebigen Frequenzen auftreten sollen. Als Kriterium für stabilen Synchronisierungsvorgang gilt also

$$\mu = \text{reell}; \quad |\mu| > 0$$

Der Hilfsparameter  $\sigma$  darf sich somit gemäß (52) nur in den folgenden Grenzen bewegen:

$$k \cdot \pi/2 < \sigma < (k + 1) \cdot \pi/2; \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (95)$$

Für die weiteren Betrachtungen stützen wir uns auf Abschnitt II<sub>4d</sub>.

In den Abbildungen  $x$  und  $y$  sind mit (95) nur Werte auf der reellen Achse mit Ausschluß des Nullpunktes und des  $\infty$  fernen Punktes zulässig. In der Abbildungsfunktion (73) dürfen wir  $C = +1$  setzen, da  $C$  auf (74) keinen Einfluß hat.  $z$  stellt dann immer einen reellen positiven Wert dar. Definieren wir das Intervall von  $\sigma$  so, daß  $y$  auf die positive reelle Achse fällt, so wird auch  $z'$  immer positiv sein.

Es gilt dann also:

$$\begin{aligned} 0 < z < \infty \\ 0 < z' < \infty \end{aligned} \quad (96)$$

Nun können wir folgende Feststellungen machen:

a)  $z(\xi)$  kann nur eine hyperbolische Funktion sein, wegen reellem  $y$  in (73).

b) In der Gleichung (77) muß daher

$$\eta > 0 \quad (97)$$

sein. Wir schreiben sie um in:

$$z(\xi) = \text{Cos} \sqrt{\eta} (\xi + \varepsilon) + \frac{1}{\sqrt{\eta}} \cdot \int_0^{\xi} H(x) \cdot z(x) \cdot \text{Sin} \sqrt{\eta} (\xi - x) \cdot dx \quad (98)$$

und bilden die Ableitung:

$$z'(\xi) = \sqrt{\eta} \cdot \left\{ \text{Sin} \sqrt{\eta} (\xi + \varepsilon) + \frac{1}{\sqrt{\eta}} \cdot \int_0^{\xi} H(x) \cdot z(x) \cdot \text{Cos} \sqrt{\eta} (\xi - x) \cdot dx \right\} \quad (99)$$

c) Die ersten Summanden von  $z$  und  $z'$  sind monoton zunehmende Funktionen. Die zweiten Summanden sind wegen  $H(x)$  zusätzlich periodisch. Damit also (96) erfüllt ist, müssen die zweiten Summanden für alle  $\xi$ -Werte kleiner sein als die ersten.

d)  $\varepsilon$  ist eine durch Anfangsbedingungen bestimmte + Größe.



e) Der Integrand ist eine periodische Funktion mit einer komplexen Periode. Letztere hat im wesentlichen die Form [siehe (71) und (79)]:

$$\frac{p}{|\Omega_1 - \Omega_2|} + j 2 \sqrt{\eta} \quad (100)$$

Durch die Integration steht im Nenner des zweiten Summanden der genäherte Ausdruck:

$$\left( \left( \frac{p}{\Omega_1 - \Omega_2} \right)^2 + 4 \eta \right)^{\frac{1}{2}} \quad (101)$$

Im weitem bezeichnen wir diejenige Frequenz  $p$  mit:

$\Omega_C$  = charakteristische Parameterfrequenz des Generators, bei welcher die reelle gleich der imaginären Periode ist. Bei dieser Frequenz ist der Einfluß des periodischen Gliedes auf den  $\sqrt{2}$ -ten Teil gefallen.

Nun können wir die folgenden Schlüsse ziehen:

1. Ist  $p \ll \Omega_C$ , so kann  $H(x)$  über eine imaginäre Periode näherungsweise als konstant betrachtet und daher vor das Integralzeichen genommen werden.  $H$  spielt in der Funktion  $z$  nurmehr die Rolle einer multiplikativen Konstanten mit der Größe seines Momentanwertes. Auf (67) übertragen bedeutet das:

Die Berechnung von  $\sigma$  ist ein statisches Problem. Die momentanen Werte von  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  bestimmen allein  $\sigma$ . Wir können also  $\sigma'$  gegenüber  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  vernachlässigen und erhalten so:

$$\cos 2 \sigma = - \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$$

und daraus die Bedingung:

$$|\Omega_2(t)| < |\Omega_1(t)| \quad (102)$$

2. Lassen wir  $p$  anwachsen, so wird, sobald

$$p > \Omega_C \text{ ist,}$$

das Integral merklich abnehmen.

3. Für  $p \gg \Omega_C$  ist es schon so klein geworden, daß es gegenüber dem ersten Summanden vernachlässigt werden darf. Somit erhalten wir:

$$y = \sqrt{\eta} \cdot \text{Tg} \sqrt{\eta} \cdot (\xi + \varepsilon) \rightarrow \sqrt{\eta} \quad (103)$$

$\text{Tg} \sqrt{\eta} (\xi + \varepsilon)$  strebt mit wachsendem  $\xi$  gegen 1.

Wir erkennen also, daß in diesem Falle  $\sigma$  angenähert durch den konstanten Anteil von

$$\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{\Omega_1 - \Omega_2}$$

bestimmt wird.

$$\operatorname{tg} \sigma \cong \sqrt{\eta} \quad (104)$$

oder 
$$\cos 2\sigma \cong \frac{1 - \eta}{1 + \eta} \quad (105)$$

Gleichung (105) sagt aus:  $\sigma \cong$  konstant, also  $\sigma' \cong 0$ . Weil nun aber zugleich  $\sigma$  der Gleichung (54) gehorcht, stehen wir vor der Tatsache, daß in  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  die durch die Modulation bedingte Periodizität stark reduziert ist.

Machen wir uns ein Bild von  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  (68):

$\Omega_1 = \frac{1}{4}k\omega e_2$  ist eine Frequenz, die durch die festen Parameterwerte des Generators und durch die Stärke des Fremdsignales bestimmt wird.  $e_2$ , welches nach  $\Pi_5$  berechnet werden kann, stellt eine normierte Größe der pulsierenden Entdämpfung dar.

$\Omega_2 = \Delta\omega - \frac{1}{2}\varepsilon_2'$  setzt sich zusammen aus der Frequenzabweichung  $\Delta\omega$  und der Ableitung von  $e_2$ .  $\varepsilon_2$  ist die Phase der pulsierenden Entdämpfung.

Ist also das Fremdsignal moduliert, so entsteht neben  $\Delta\omega$  eine zusätzliche pulsierende Frequenzabweichung  $\varepsilon_2'$ .  $\Omega_2$  ist somit die resultierende Frequenzabweichung.

Wir stellen fest:

1. Der konstante Anteil des Quotienten  $\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{\Omega_1 - \Omega_2}$  muß immer größer als Null sein.

2. Ist die Modulationsfrequenz  $p \ll \Omega_C$ , so darf die maximale Frequenzabweichung nicht größer sein als die charakteristische Frequenz. Je größer  $\Delta\omega$  ist, um so kleiner muß also der Modulationsgrad sein. Der Generator kann sich genügend gut auf den durch das Fremdsignal bedingten, wegen der Modulation ständig, aber langsam variierenden Zustand einschwingen.

3. Ist die Modulationsfrequenz  $p \gg \Omega_C$ , so verlieren  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  mit wachsendem  $p$  ihre Periodizität. Das bedeutet, daß  $\varepsilon_2'$  den

Wert Null und  $e_2$  einen bestimmten festen Wert anstrebt. Näherungsweise gilt im vorliegenden Fall also:

$$\eta = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{\Omega_1 - \Omega_2}$$

und wir erhalten durch einsetzen in Gleichung (105):

$$\cos 2\sigma \cong -\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = -\frac{\Delta\omega - \frac{1}{2}\varepsilon_2'}{\frac{1}{4}k\varepsilon_2 \cdot \omega}$$

Wir erkennen, daß der Einfluß der Modulation auf die Synchronisierungsbreite mit wachsender Modulationsfrequenz zurückgeht. Maßgebend für die Breite bleibt der Trägerwert des Fremdsignales. Einen verkleinernden Einfluß hat die Modulationsstärke. Je intensiver sie ist, um so größer wird die Amplitude von  $\varepsilon_2'$ , wodurch  $\Delta\omega$  eingeschränkt wird. Einen unwesentlichen Zuwachs erfährt auch  $e_2$  infolge eines Gleichrichtereffektes an der Kennlinie.  $e_2$  und  $\varepsilon_2'$  sind Funktionen von  $w_\varrho$ ,  $w_f$ ,  $\varphi_\varrho$  und  $\varphi_f$ . Wir ziehen daraus den Schluß, daß  $w_\varrho$  und  $\varphi_\varrho$  mit wachsender Modulationsfrequenz gegen feste Werte streben.

In  $\Omega_1$  ist der Rückkopplungsfaktor enthalten, denn es ist

$$k \cdot \omega = \frac{1}{2} \frac{\varrho \cdot S}{C} = \frac{1}{2} \omega_0 / Q \cdot \varrho / \varrho_0$$

Mathematisch bestehen also auch bei unterkritischer Rückkopplung

$$\varrho < \varrho_0$$

Synchronisierungsgrenzen. Das Experiment stellt solche jedoch nicht fest. Wir finden die Erklärung in der Betrachtung des Lösungsganges der Differentialgleichung (22). Die allgemeine Lösung ist gegeben durch die Gleichungen (26), (55), (56).

Ist  $\varrho > \varrho_0$  und  $\nu_f = 0$ , so beschreibt:

$$\nu_\varrho = C_1 \cdot \nu_1 + C_2 \cdot \nu_2$$

die Selbsterregung des Generators.

Für  $\nu_\varrho \neq 0$  und reelles  $\mu$  herrscht Synchronisation. Die Exponenten von  $\nu_1$  und  $\nu_2$  werden negativ, so daß die Glieder  $C_1 \nu_1$  und  $C_2 \nu_2$  auf Null abklingen und die Lösung nur noch durch das Partikulärintegral gegeben ist. Treten wir aus dem Synchronisationsbereich hinaus, so wird  $\mu$  komplex und die Glieder  $C_1 \nu_1$  und  $C_2 \nu_2$  verschwinden nicht aus der Lösung. Wir haben es mit Schwebungen zu tun.

Ist hingegen

$$\varrho < \varrho_0$$

so werden die Glieder  $C_1\nu_1$  und  $C_2\nu_2$  für jedes  $\mu$  verschwinden, so daß nur das Partikulärintegral, also die mitgenommene Schwingung übrigbleibt.

Die Literatur hat daher die beiden Bezeichnungen

Synchronisation und Mitnahme

geprägt.

Von Synchronisation spricht man, wenn eine Fremdspannung einer andern selbständig bestehenden Schwingung ihre Frequenz aufzwingt. Es tritt dabei der Effekt der Mitnahme der Frequenz der selbständigen Schwingung durch das Fremdsignal auf.

Von Mitnahme spricht man auch bei der Erregung von schwingungsfähigen Systemen durch Fremdsignale, denn die Frequenz der erregten Schwingung steht in einem rationalen Verhältnis zur Frequenz des erregten Signales und kann von der Resonanzfrequenz des Systems mehr oder weniger verschieden sein.

## 7. Der Generator als Vierpol aufgefaßt

Der selbsterregte Generator kann als Vierpol aufgefaßt werden (siehe Fig. 2).  $a$  und  $b$  sind die Eingangsklemmen, an welche das Fremdsignal angeschlossen wird, und  $c, d$  oder  $e, f$  können als Ausgangsklemmen benutzt werden, an welchen das synchronisierte Signal abgegriffen wird. Der Vierpol stellt somit einfach einen entdämpften Schwingungskreis dar, dessen Entdämpfung außer von den festen Parameterwerten des Generators noch von den variablen Parameterwerten des Fremdsignales abhängt. Der Phasen- und Impedanzverlauf des Vierpoles in Funktion der Frequenz hängt also außer von  $L, R$  und  $C$  auch noch von  $\varrho, w_f$  und der Nichtlinearität der Kennlinie ab. Fig. 3 stellt einen möglichen Verlauf von  $w_\varrho$  und  $\varphi_\varrho$  in Funktion von  $\Delta\omega$  dar, bei einer bestimmten Rückkopplung  $\varrho$ , einer bestimmten Stärke  $w_f$  und Frequenzverhältnis  $\frac{n}{m}$  des Fremdsignales. Wird eine dieser Größen geändert, so ergeben sich andere Bilder, die in einem nichtlinearen Zusammen-

hang zu einander stehen. I und II bezeichnen die Grenzpunkte der Synchronisation. Diese Darstellung zeigt deutlich die Filterwirkung des Generators, welche wir schon im vorhergehenden Abschnitt festgestellt haben.

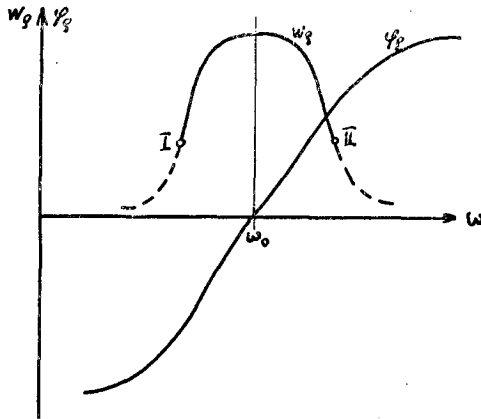


Fig. 3.

### 8. Spezialfall: $\frac{n}{m} = 1$ ; rein kubische Kennlinie

In den allgemeinen Betrachtungen, welche wir bis jetzt anstellten, fanden wir bestimmte Bedingungen, unter welchen Synchronisation stattfindet. Im weiteren stellten wir auch fest, daß der Generator als Filter aufgefaßt werden kann. Diese Bedingungen und Eigenschaften sind Funktionen der Parameterwerte. Um einen Einblick in den Zusammenhang zu erhalten, wollen wir einen einfachen Fall durchrechnen. Wir wählen das Frequenzverhältnis  $\frac{n}{m} = 1$ , und die Kennlinie sei gegeben durch:

$$i_a = S \cdot u_g \cdot \left[ 1 - \frac{u_g^2}{3 U_s^2} \right]$$

In der Fourierdarstellung von  $\delta(t)$  Gleichung (23) ist dann

$$\gamma_1 = 1; \quad \gamma_3 = -\frac{1}{3}; \quad \gamma_\nu = 0 \quad \text{für } \nu = 2, 4, 5, \dots$$

und wir erhalten für Gleichung (31):

$$\delta'(t) = -\frac{e \cdot S}{C} \cdot 2(v_g + v_f) \cdot (v_g' + v_f')$$

Setzen wir für

$$(v_o + v_f) = [w_o \cdot \sin(\omega t + \varphi_o) + w_f \cdot \sin(\omega t + \varphi_f)] = w_g \cdot \sin(\omega t + \varphi_g)$$

mit  $w_g^2 = w_o^2 + w_f^2 + 2 w_o \cdot w_f \cdot \cos(\varphi_f - \varphi_o)$  (106)

und  $\operatorname{tg} \varphi_g = \frac{w_o \cdot \sin \varphi_o + w_f \cdot \sin \varphi_f}{w_o \cdot \cos \varphi_o + w_f \cdot \cos \varphi_f}$  (107)

so geht (31) über in:

$$\delta'(t) = -\frac{\varrho \cdot S}{C} \cdot w_g^2 \cdot \omega \cdot \sin 2(\omega t + \varphi_g) = +\frac{\varrho \cdot S}{C} \cdot \omega \cdot w_g^2 \cdot \cos(2\omega t + 2\varphi_g + \pi/2)$$

Vergleichen wir mit (39), so gilt:

$$e_0 \equiv 0; \quad \varepsilon_0 \equiv 0; \quad e_2 = w_g^2; \quad \varepsilon_2 = -2(\varphi_g + \pi/4)$$

Nun finden wir für (60):

$$Ex_1 = \frac{1}{2} \frac{\varrho \cdot S}{C} \cdot \int_0^t [1 - \varrho_0/\varrho - \frac{1}{2} w_g^2 + \frac{1}{4} w_g^2 \cdot \sin 2\sigma] \cdot d\tau$$

$$Ex_2 = \frac{1}{2} \frac{\varrho \cdot S}{C} \cdot \int_0^t [1 - \varrho_0/\varrho - \frac{1}{2} w_g^2 - \frac{1}{4} w_g^2 \cdot \sin 2\sigma] \cdot d\tau$$

$$Int_1 = -\frac{\varrho \cdot S}{C} \int_0^t e^{-Ex_1} \cdot w_f \cdot \left\{ \left(1 - \frac{3}{4} w_g^2\right) \cdot \sin(\varphi_g - \varphi_f) \cdot \frac{\cos(\pi/4 + \sigma)}{2 \cdot \sin 2\sigma} + \left(1 - \frac{1}{4} w_g^2\right) \cdot \cos(\varphi_g - \varphi_f) \cdot \frac{\sin(\pi/4 + \sigma)}{2 \cdot \sin 2\sigma} \right\} \cdot d\tau$$
 (108)

$$Int_2 = -\frac{\varrho \cdot S}{C} \cdot \int_0^t e^{-Ex_2} \cdot w_f \cdot \left\{ \left(1 - \frac{3}{4} w_g^2\right) \cdot \sin(\varphi_g - \varphi_f) \cdot \frac{\cos(\pi/4 - \sigma)}{2 \cdot \sin 2\sigma} + \left(1 - \frac{1}{4} w_g^2\right) \cdot \cos(\varphi_g - \varphi_f) \cdot \frac{\sin(\pi/4 - \sigma)}{2 \cdot \sin 2\sigma} \right\} \cdot d\tau$$
 (109)

und analog für (65):

$$Int_1 = -e^{Ex_1} \cdot w_o \cdot \left\{ \sin(\varphi_g - \varphi_o) \cdot \frac{\cos(\pi/4 + \sigma)}{\sin 2\sigma} + \cos(\varphi_g - \varphi_o) \cdot \frac{\sin(\pi/4 + \sigma)}{\sin 2\sigma} \right\}$$
 (110)

$$Int_2 = -e^{Ex_2} \cdot w_o \cdot \left\{ \sin(\varphi_g - \varphi_o) \cdot \frac{\cos(\pi/4 - \sigma)}{\sin 2\sigma} + \cos(\varphi_g - \varphi_o) \cdot \frac{\sin(\pi/4 - \sigma)}{\sin 2\sigma} \right\}$$
 (111)

Gleichung (54) schreibt sich:

$$\sigma' - \frac{1}{8} \frac{\varrho \cdot S}{C} \cdot w_g^2 \cdot \cos 2\sigma = \Delta\omega + \varphi_g'$$
 (112)

mit

$$\varphi_g' = \frac{\varphi_e' \cdot [w_e^2 + w_e \cdot w_f \cdot \cos(\varphi_f - \varphi_e)] + \varphi_f' \cdot [w_e^2 + w_f \cdot w_e \cdot \cos(\varphi_f - \varphi_e)]}{w_e^2 + w_f^2 + 2 w_e \cdot w_f \cdot \cos(\varphi_f - \varphi_e)} - \frac{[w_e' \cdot w_f - w_e \cdot w_f'] \cdot \sin(\varphi_f - \varphi_e)}{w_e^2 + w_f^2 + 2 w_e \cdot w_f \cdot \cos(\varphi_f - \varphi_e)}$$

Differenzieren wir die Gleichungen (108)–(111) und setzen die gleichwertigen Ausdrücke einander gleich, so erhalten wir mit (112) ein System von drei nichtlinearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit den unbekanntem Variablen  $w_e$ ,  $\varphi_e$  und  $\sigma$ . Wollen wir  $\sigma$  aus dem System eliminieren, so müssen wir  $\sigma$  aus (112) bestimmen. Ein Weg dafür wurde in Abschnitt II<sub>4d</sub> angegeben. Wir erhalten für die ziemlich einschneidende Bedingung, daß nur schwache Modulation zugelassen sei, eine Integraldarstellung für  $\sigma$  in Gleichung (80). Gehen wir mit diesem  $\sigma$  in unser System ein, so müssen wir nochmals differenzieren, um das Integral wegzuschaffen. Daraus resultiert ein System von zwei nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Will man dieses System lösen, so muß man wieder große Konzessionen machen, wie z. B.  $w_f \ll w_e$  etc., damit man die Gleichungen linearisieren und so mit relativ kleinem Aufwand lösen kann. Die so gewonnenen Lösungen beschreiben aber nur einen sehr kleinen Teil unseres Problem und dazu noch den uninteressantesten: Schwache Modulation, schwaches Fremdsignal. Sobald nun aber diese beiden Parameterwerte kräftig sind, so machen sich die Nichtlinearitäten bemerkbar, und das Aufsuchen von Lösungen stößt auf Schwierigkeiten.

Da es auf dem beschriebenen direkten Weg unmöglich erscheint, Lösungen zu finden, wählen wir eine indirekte Lösungsmethode, welche sich auf die folgende Erkenntnis stützt:

Der Generator kann als Vierpol mit Filtereigenschaft betrachtet werden, an dessen Eingangsklemmen das Fremdsignal  $v_f$  angelegt ist, und an dessen Ausgangsklemmen das synchronisierte Signal  $v_e$  abgenommen wird. Denken wir uns das Fremdsignal infolge der Modulation als Frequenzspektrum dargestellt, so wird jedes Signal des Spektrums je nach Frequenz durch die Filterwirkung des Generators in der Amplitude mit der Phase beein-

flußt. Das Spektrum des synchronisierten Signales weicht somit von jedem des Fremdsignales mehr oder weniger ab, wodurch die Modulation bei der Übertragung vom Fremdsignal auf das synchronisierte Signal verzerrt wird. Bei der Kenntnis der Filterkurven [Verstärkungs- und Phasenverlauf] sind wir in der Lage, einige allgemein wichtige Aussagen zu machen, und es wird möglich sein, die Filterkurven für einige speziell wichtige Fälle durch solche anzunähern, welche mathematisch eine viel einfachere Form besitzen. Mit diesen Annäherungen lassen sich dann auch die Modulationsverzerrungen berechnen.

Wir interessieren uns also vorerst für die Form der Filterkurve. Die Bestimmung einzelner Punkte ist ein rein statisches Problem, da wir den fertig eingeschwungenen Zustand betrachten und  $w_f$  als unmoduliert annehmen. Es sind dann

$w_\varrho$ ,  $w_f$ ,  $\varphi_\varrho$ ,  $\varphi_f$  und  $\sigma$  konstante Größen.

Differenzieren wir die Gleichung (108)—(111) und setzen die gleichwertigen Ausdrücke einander gleich, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} & -w_f \cdot \left\{ \left(1 - \frac{3}{4} w_g^2\right) \cdot \sin(\varphi_g - \varphi_f) \cdot (\cos \sigma - \sin \sigma) + \right. \\ & \quad \left. + \left(1 - \frac{1}{4} w_g^2\right) \cdot \cos(\varphi_g - \varphi_f) \cdot (\cos \sigma + \sin \sigma) \right\} \\ = & [1 - \varrho_0/\varrho - \frac{1}{2} w_g^2 + \frac{1}{4} w_g^2 \cdot \sin 2\sigma] \cdot w_\varrho \cdot \\ & \quad \cdot \left\{ \sin(\varphi_g - \varphi_\varrho) \cdot (\cos \sigma - \sin \sigma) + \cos(\varphi_g - \varphi_\varrho) (\cos \sigma + \sin \sigma) \right\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & -w_f \cdot \left\{ \left(1 - \frac{3}{4} w_g^2\right) \cdot \sin(\varphi_g - \varphi_f) \cdot (\cos \sigma + \sin \sigma) + \right. \\ & \quad \left. + \left(1 - \frac{1}{4} w_g^2\right) \cdot \cos(\varphi_g - \varphi_f) \cdot (\cos \sigma - \sin \sigma) \right\} \\ = & [1 - \varrho_0/\varrho - \frac{1}{2} w_g^2 - \frac{1}{4} w_g^2 \cdot \sin 2\sigma] \cdot w_\varrho \cdot \\ & \quad \cdot \left\{ \sin(\varphi_g - \varphi_\varrho) \cdot (\cos \sigma + \sin \sigma) + \cos(\varphi_g - \varphi_\varrho) (\cos \sigma - \sin \sigma) \right\} \end{aligned}$$

Ordnen wir nach  $\sin \sigma$ - und  $\cos \sigma$ -Gliedern, so resultieren daraus die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} & w_f \left(1 - \frac{1}{4} w_g^2\right) \cdot \cos(\varphi_g - \varphi_f) + w_\varrho \left(1 - \varrho_0/\varrho - \frac{1}{4} w_g^2\right) \cdot \\ & \quad \cdot \cos(\varphi_g - \varphi_\varrho) + w_\varrho \cdot \frac{1}{4} w_g^2 \cdot \sin(\varphi_g - \varphi_\varrho) \cdot \cos 2\sigma = 0 \\ & w_f \left(1 - \frac{1}{4} w_g^2\right) \cdot \sin(\varphi_g - \varphi_f) + w_\varrho \left(1 - \varrho_0/\varrho - \frac{3}{4} w_g^2\right) \cdot \\ & \quad \cdot \sin(\varphi_g - \varphi_\varrho) - w_\varrho \cdot \frac{1}{4} w_g^2 \cdot \cos(\varphi_g - \varphi_\varrho) \cdot \cos 2\sigma = 0 \end{aligned}$$

Eliminieren wir aus diesen beiden Gleichungen den Winkel  $\varphi_g$ , und entnehmen wir aus Gleichung (112) den Wert für  $\cos 2\sigma$ :



$$\cos 2\sigma = -\frac{\Delta\omega}{\frac{1}{8} \frac{\varrho \cdot S}{C} \cdot w_g^2}$$

so erhalten wir die beiden einfachen,  $w_\varrho$  und  $\varphi_\varrho$  bestimmenden Gleichungen:

$$w_f(1 - \frac{1}{4} w_g^2) \cdot \cos(\varphi_f - \varphi_\varrho) + w_\varrho \cdot (1 - \varrho_0/\varrho - \frac{1}{4} w_g^2) = 0 \quad (113)$$

$$w_f(1 - \frac{1}{4} w_g^2) \cdot \sin(\varphi_f - \varphi_\varrho) - w_\varrho \cdot \varrho_0/\varrho \cdot Q \cdot \eta = 0 \quad (114)$$

Darin bedeuten also:

- $w_\varrho$  die normierte Amplitude der rückgekoppelten Spannung,
- $w_f$  die normierte Amplitude der Fremdspannung,
- $\varphi_\varrho$  die Phase der rückgekoppelten Spannung,
- $\varphi_f$  die Phase der Fremdspannung,
- $\varrho_0$  kritischer Rückkopplungsfaktor, bei welchem gerade Selbst-  
erregung eintritt,
- $\varrho$  eingestellter Rückkopplungsfaktor,
- $w_g$  normierte Amplitude der Gitterspannung,
- $Q$  Kreisgüte,
- $\eta$  Verstimmung  $\cdot \frac{2\Delta\omega}{\omega}$

Die Bedingung für Synchronisation lautet:

$$-1 < \cos 2\sigma < 1$$

und in Verbindung mit (113), (114):

$$-\frac{1}{4} w_g^2 < Q \cdot \eta \cdot \varrho_0/\varrho < \frac{1}{4} w_g^2 \quad (115)$$

Bezeichnen wir mit:

$$V = Q \cdot \eta \text{ die relative Verstimmung}$$

und eliminieren wir aus Gleichungen (113), (114) die Phase  $(\varphi_f - \varphi_\varrho)$ , so erhalten wir eine Bestimmungsgleichung für die Amplitude  $w_\varrho$ :

$$w_\varrho^6 - w_\varrho^4 \cdot [8K_1 + 3w_f^2] + w_\varrho^2 \cdot [16K_2 + 8K_3 \cdot w_f^2 + 3w_f^4] - w_f^2 [4 - w_f^2]^2 = 0 \quad (116)$$

$$(w_\varrho^2 - w_f^2)^3 - 8K_1 \cdot w_\varrho^4 + 16K_2 \cdot w_\varrho^2 + 8K_3 \cdot w_\varrho^2 \cdot w_f^2 - 16w_f^2 + 8w_f^4 = 0$$

mit

$$\begin{aligned} K_1 &= 2V^2 + (1 - \varrho_0/\varrho)(1 - 3V^2) \\ K_2 &= V^2 \cdot (\varrho_0/\varrho)^2 + (1 - \varrho_0/\varrho)^2 \\ K_3 &= \frac{3 + V^2}{1 + V^2} - 3(1 - \varrho_0/\varrho) \end{aligned} \quad (117)$$

Eliminieren wir die Amplitude  $w_\varrho$  aus den Gleichungen (113), (114), so erhalten wir eine Bestimmungsgleichung für die Phase  $(\varphi_f - \varphi_\varrho)$ . Wir setzen:

$$(\varphi_f - \varphi_\varrho) = \varphi$$

$$\begin{aligned} (\sin \varphi)^6 \cdot \left(\frac{w_f}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1+V^2}{V^2}\right)^2 - (\sin \varphi)^4 \cdot \left(\frac{w_f}{2}\right)^2 \cdot (1 - \varrho_0/\varrho) \cdot 2 \cdot \frac{1+V^2}{V^2} \\ + (\sin \varphi)^2 \cdot \{(1 - \varrho_0/\varrho)^2 + V^2 \cdot (\varrho_0/\varrho)^2\} - (\varrho_0/\varrho)^2 \cdot V^2 = 0 \end{aligned} \quad (118)$$

oder

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin \varphi}{V}\right)^6 \cdot \left(\frac{w_f}{2}\right)^4 \cdot (1+V^2)^2 - \left(\frac{\sin \varphi}{V}\right)^4 \cdot \left(\frac{w_f}{2}\right)^2 \cdot (1 - \varrho_0/\varrho) \cdot 2(1+V^2) + \\ + \left(\frac{\sin \varphi}{V}\right)^2 \cdot \{(1 - \varrho_0/\varrho)^2 + V^2(\varrho_0/\varrho)^2\} - (\varrho_0/\varrho)^2 = 0 \end{aligned}$$

Die Gleichungen (116) und (118) beschreiben nun den Amplituden- und Phasenverlauf der rückgekoppelten Spannung  $v_\varrho$  in Funktion der Rückkopplung  $\varrho$ , der Verstimmung  $V$  und der Stärke des Fremdsignales  $w_f$ .  $w_\varrho$ ,  $w_f$  und  $V$  kommen nur in quadratischer Form vor. Dies bedeutet, daß die Kurven symmetrischen Verlauf haben in den vier Quadranten des kartesischen Koordinatensystems. Es kann aber durch eine einfache Stabilitätsbetrachtung gezeigt werden, daß nur diejenigen Fälle stabil sind, wo  $w_\varrho$  und  $w_f$  gleiches Vorzeichen haben, also  $\cos(\varphi_f - \varphi_\varrho) > 0$  ist.

Benützen wir  $V$  als unabhängige Variable und  $w_f$  wie  $\varrho$  als variable Parameterwerte, so liefern uns die Gleichungen (116) und (118) die gesuchten Filterkurven. Die implizite Form der Gleichungen erschwert die Diskussion des Kurvenverlaufs. So läßt sich aus der Gleichung für das Steigungsmaß der Tangente an der Filterkurve:

$$\frac{dw_\varrho}{dV} = -2V \cdot w_\varrho \cdot \frac{w_\varrho^2 \cdot \left[\frac{3}{2}(1 - \varrho_0/\varrho) - 1\right] + (\varrho_0/\varrho)^2 - \frac{w_f^2}{(1+V^2)^2}}{6(w_\varrho^2 - w_f^2)^2 - 32w_\varrho^2 \cdot K_1 + 32K_2 + 16w_f^2 \cdot K_3} \quad (119)$$

nur ablesen, daß für  $V = 0$   $w_\varrho$  einen Maximalwert besitzt und daß mit steigendem Betrag von  $w_j$  die Filterkurve flacher verläuft. Der Einfluß von  $\varrho_0/\varrho$  ist nicht so einfach feststellbar.

Gleichung (118) zeigt, daß für  $V = 0$  auch  $\sin \varphi$  und somit  $\varphi$  null sein muß. Die Kurven  $\varphi = F(V)$  gehen also alle durch den Nullpunkt des Koordinatensystems. Das Steigungsmaß der Tangente an diese Kurven im Nullpunkt genügt der Gleichung:

$$\left(\frac{d\varphi}{dV}\right)^3 \cdot \left(\frac{w_f}{2}\right)^2 - \left(\frac{d\varphi}{dV}\right) \cdot (1 - \varrho_0/\varrho) - (\varrho_0/\varrho) = 0 \quad (120)$$

Auch hier stellen wir fest, daß die Kurven umso flacher verlaufen, je größer  $w_j$  ist. Im weitern erkennen wir, daß stärkere Rückkopplung  $\varrho$  einen steileren Phasenverlauf im Nullpunkt bedingt. Dies läßt vermuten, daß in diesem Falle auch die Tangente an die Filterkurve steiler verläuft.

Von Interesse könnte noch die relative 45°-Verstimmung  $V_{45^0}$  sein. Wir setzen:

$$\sin \varphi = 1/\sqrt{2}$$

und erhalten die Bestimmungsgleichung:

$$\begin{aligned} -V_{45^0}^6 \cdot \frac{1}{2}(\varrho_0/\varrho)^2 + V_{45^0}^4 \cdot \left\{ \frac{w_f^4}{128} - \frac{w_f^2}{8}(1 - \varrho_0/\varrho) + \frac{1}{2}(1 - \varrho_0/\varrho)^2 \right\} \\ + V_{45^0}^2 \cdot \left\{ \frac{w_f^4}{64} - \frac{w_f^2}{8}(1 - \varrho_0/\varrho) \right\} + \frac{w_f^4}{128} = 0 \quad (121) \end{aligned}$$

Für schwache Rückkopplung  $\varrho_0/\varrho \cong 1$  gilt näherungsweise:

$$V_{45^0} = \pm \frac{1}{2} w_f^{2/3} \quad (122)$$

$V_{45^0}$  wächst mit  $w_j$ . Der Einfluß von  $\varrho_0/\varrho$  ist nicht leicht erkennbar, doch lassen die Aussagen über den Phasenverlauf im Nullpunkt die Vermutung zu, daß eine stärkere Rückkopplung eine kleinere  $V_{45^0}$  bedingt.

Wir erkennen nun auch, daß die im Abschnitt II<sub>b</sub> angeführte charakteristische Parameterfrequenz in engem Zusammenhang steht mit der Frequenz, welche durch die  $V_{45^0}$  bestimmt ist.

Einige gerechnete Kurven [Fig. 4, 5, 7] sollen die Vorstellung über den Verlauf der Kurven vervollständigen. [Für die Berechnung wurden die Daten des Experimentes, siehe Seite 65, benutzt].

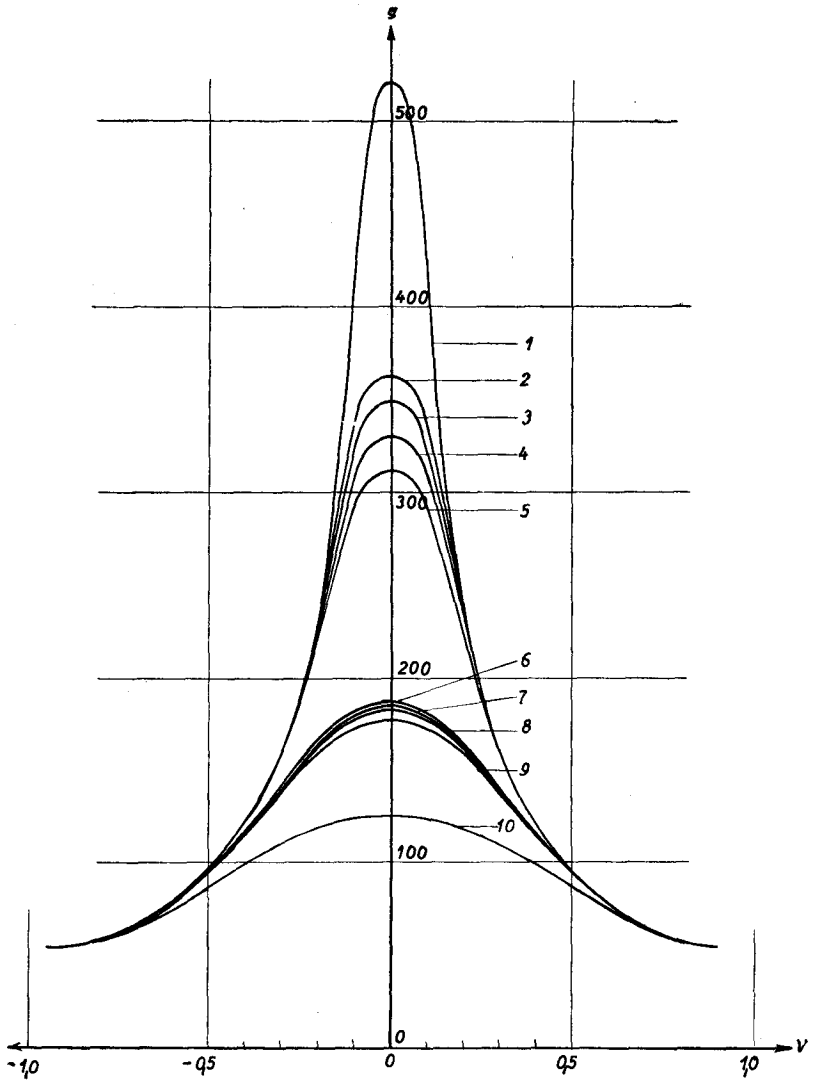


Fig. 4. Verstärkung  $g$  des Generators als Vierpol.

Variable = relative Verstimmung  $V$

Parameter = Rückkopplung und Amplitude des Fremdsignales  $U_f$

Kurve	$\kappa$	$U_f$	Kurve	$\kappa$	$U_f$
1	1,0	30 mV	6	0,85	120 mV
2	0,85	60 "	7	0,90	120 "
3	0,90	60 "	8	0,95	120 "
4	0,95	60 "	9	1,0	120 "
5	1,0	60 "	10	1,0	180 "

$$w_f = \frac{U_f}{U_s} = \frac{U_f}{600 \text{ mV}}$$

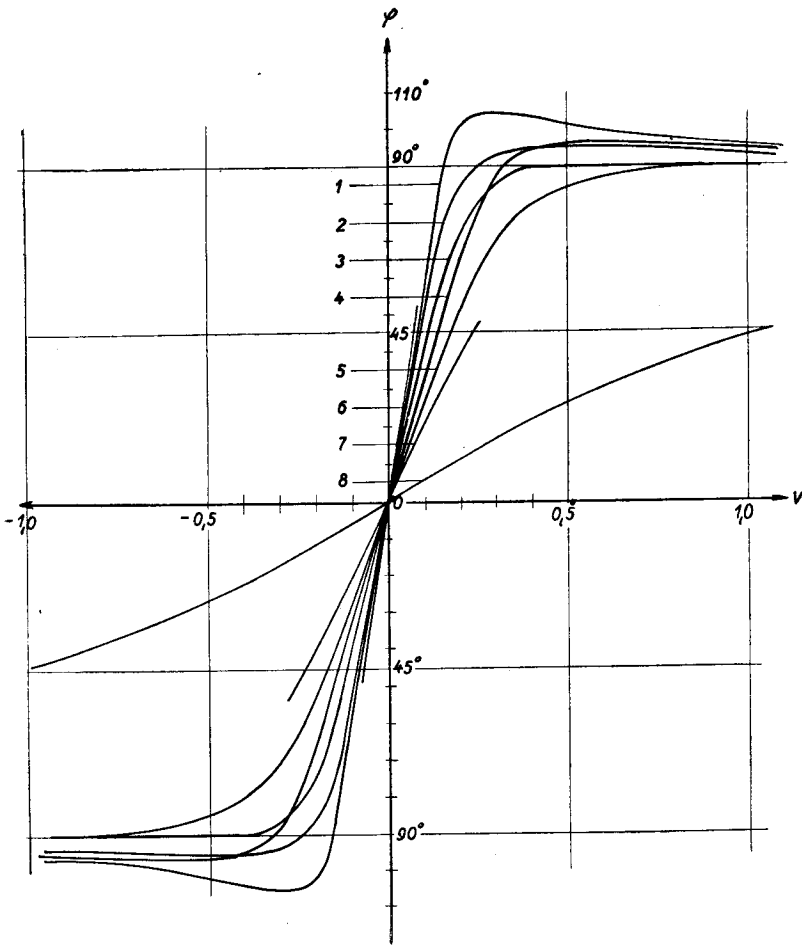


Fig. 5. Die Phase  $\varphi$  des Ausgangssignals gegenüber dem Eingangssignal beim Generator als Vierpol.

Variable = relative Verstimmung  $v$

Parameter = Rückkopplung  $\alpha$  und Amplitude  $U_f$  des Fremdsignales

Kurve	$\alpha$	$U_f$	Kurve	$\alpha$	$U_f$
1	0,90	60 mV	5	1,00	120 mV
2	0,95	60 "	6	1,00	30 "
3	1,00	60 "	7	1,00	180 "
4	0,90	120 "	8	keine Rückkopplung	

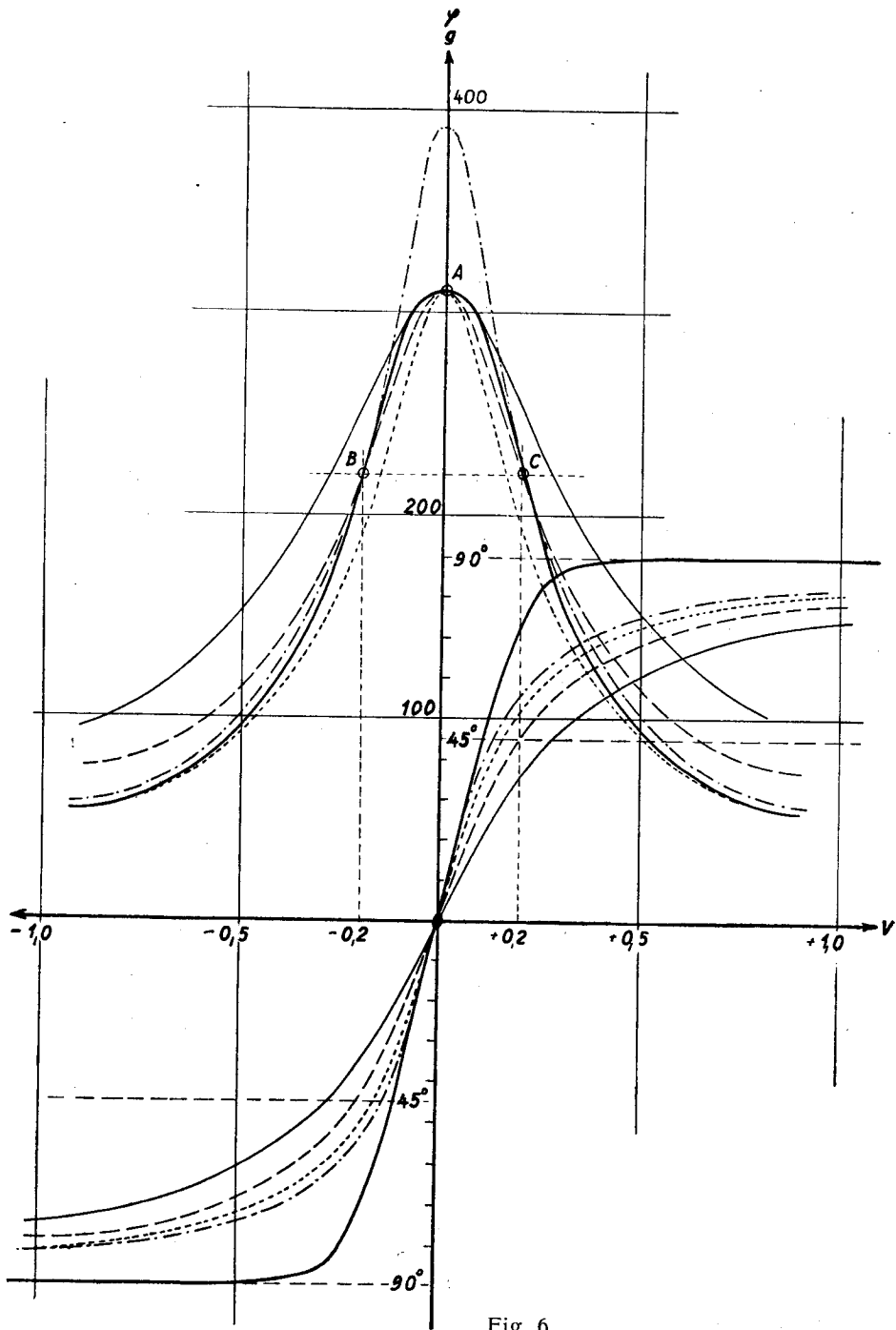


Fig. 6.

Wir erkennen den starken Einfluß von  $w_f$  auf den Verlauf der Resonanzkurve. Der Einfluß der Rückkopplung sinkt mit wachsendem  $w_f$ . Die Verstimmung,  $V_{\sqrt{2}}$ , bei welcher die Verstärkung auf den  $\sqrt{2}$ -ten Teil gesunken ist, ist nicht identisch mit der relativen  $45^\circ$ -Verstimmung  $V_{45^\circ}$ . Es besteht die Näherung

$$V_{\sqrt{2}} \sim 2 \cdot V_{45^\circ}$$

Wir wollen im weiteren die Filterbreite durch die  $V_{45^\circ}$  ausdrücken.

Wie Fig. 6 zeigt, wird versucht, die gerechnete Generatorfilterkurve [ $q/q_0 = 1,0$ ,  $w_f = 0,1$ ] durch eine solche eines einfachen Schwingkreises anzunähern. Wir nehmen also in der Ersatzschaltung an, daß die Rückkopplung null sei, die Steilheit der Röhre der Steilheit im Arbeitspunkt entspreche und der Schwingkreis wegen der Entdämpfung durch die Rückkopplung eine bessere Qualität besitze.  $Z$  und  $Q$  sind die charakteristischen Größen des Schwingkreises im Generator und  $Z^*$  und  $Q^*$  diejenigen des Schwingkreises der Ersatzschaltung. Wir beziehen nun nicht  $w_o$ , sondern  $w_a$  zu  $w_f$ , und erhalten durch  $\frac{w_a}{w_f}$  die Verstärkung des Fremdsignales durch den Generator. Es gilt somit:

$$\begin{aligned} \text{Verstärkung} \left( \frac{w_a}{w_f} \right)_{V=0} &= S \cdot z^* = S \cdot Q^* \cdot \omega L^* = S \cdot \frac{Q^*}{Q} \cdot \frac{L^*}{L} \cdot Q \cdot \omega \cdot L = g \\ g &= \frac{Q^*}{Q} \cdot \frac{L^*}{L} \cdot S \cdot z = \frac{Q^*}{Q} \cdot \frac{L^*}{L} \cdot \frac{1}{q_0} \end{aligned}$$

Bei der gestrichelten Kurve wurde die Forderung gestellt, daß sie durch die Punkte  $ABC$  gehe. Also:

$$Q \cdot v_{45^\circ}^* = V_{\sqrt{2}} = 0,2 = \frac{Q}{Q^*}; \quad Q^* = 5 \cdot Q$$

$$\frac{L^*}{L} = \left( \frac{w_a}{w_f} \right)_{V=0} \cdot q_0 \cdot \frac{Q}{Q^*} = 311 \cdot 2,05 \cdot 10^{-2} \cdot 0,2 = 1,275$$

Bei der punktierten Kurve wurde gefordert, daß  $\frac{L^*}{L} = 1$  sei. Also:

$$\frac{Q^*}{Q} = \left( \frac{w_a}{w_f} \right)_{V=0} \cdot q_0 = 311 \cdot 2,05 \cdot 10^{-2} = 6,37$$

Die strichpunktierte Kurve hat gleichen Phasenanstieg im Nullpunkt und geht durch die Punkte  $B, C$ .

$$\text{für } V < 0,05 : \frac{\sin \varphi}{V} \approx \frac{\text{tg } \varphi}{V} = \frac{Q^* \cdot \eta}{V} = \frac{Q^*/Q \cdot V}{V} = \frac{Q^*}{Q}$$

$$Q^*/Q = 7,37$$

$$\left(\frac{w_a}{w_f}\right)_{V=0,2} = \frac{\left(\frac{w_a}{w_f}\right)_{V=0}}{\left[1 + \left(\frac{Q^*}{Q} \cdot V\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(\frac{w_a}{w_f}\right)_{V=0}}{1,78} = 220; \quad \left(\frac{w_a}{w_f}\right)_{V=0} = 391$$

$$\frac{L^*}{L} = 391 \cdot 2,05 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{1}{7,37} = 1,09$$

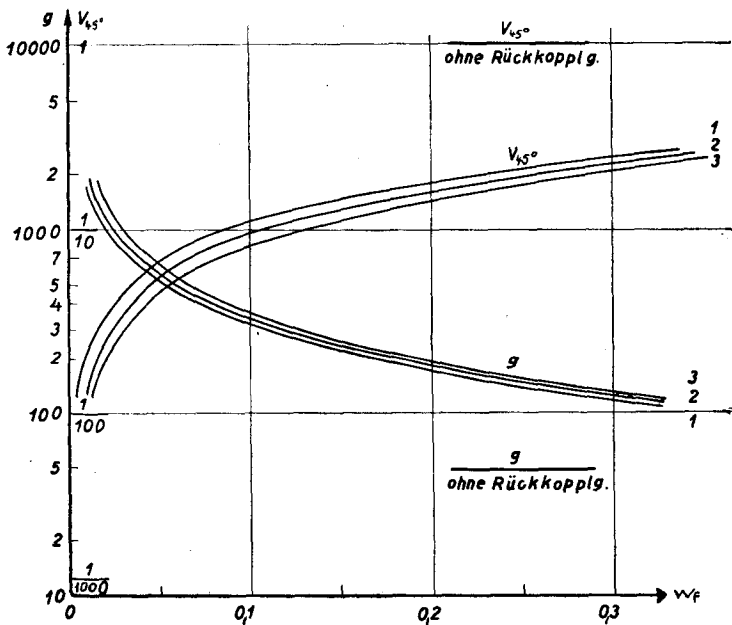


Fig. 7. Die Verstärkung  $g$  und die  $45^\circ$ -Verstimmung  $V_{45^\circ}$  des Generators als Vierpol.

Variable = Amplitude des Fremdsignales  $w_f$

Parameter = Rückkopplung  $\alpha$

Kurve	$\alpha$
1	1,00
2	0,95
3	0,90



Diese Versuche zeigen, daß eine Annäherung der Filterkurve durch eine solche eines einfachen Kreises über den gesamten Verlauf unmöglich ist. Dagegen können Teilstücke der Filterkurve genügend genau approximiert werden. So würde für starke Verstimmungen die punktierte Kurve einen befriedigenden Ersatz bieten. Hingegen wird der Kurvenverlauf in der näheren Umgebung der Resonanzstelle durch die drei Versuchskurven ungenügend genau dargestellt.

Es ist nun aber für das Problem der Synchronisierung des Generators durch ein frequenzmoduliertes Signal von ausschlaggebender Wichtigkeit, gerade die Resonanzspitze der Filterkurve durch eine mathematisch einfachere Kurve angenähert zu haben, damit man die Verzerrungen bei der Modulationsübertragung mit wenig Aufwand rechnen kann.

Für kleine Verstimmung  $V$  darf der Phasenverlauf als linear betrachtet werden. Dann hat die Steilheit des Phasenverlaufes keinen Einfluß auf die Modulationsverzerrung [Kulp 43]. Wir dürfen daher für kleine Verstimmungen die Resonanzspitze der Filterkurve durch jene eines Einkreisfilters annähern, wobei nur auf möglichst gleichen Verlauf der Verstärkung geachtet wird. Die Kreisgüte des Einkreis-Ersatzfilters wird besser sein als diejenige des Generatorkreises. Wir bezeichnen sie mit

$Q^*$  = Kreisgüte des Ersatz-Einkreisfilters.

Somit kann die Resonanzkurve des Ersatzfilters folgendermaßen dargestellt werden:

$$w_a = \left| \frac{w_{a_0}}{1 + jQ^* \eta} \right|; \quad w_{a_0} = (w_a)_{V=0}$$

Dabei ist  $w_{a_0}$  die Amplitude der Anodenspannung für einen bestimmten Betrag des Eingangssignales, bei der Verstimmung Null, und  $w_a$  entsprechend bei einer Verstimmung  $\eta$ . Multiplizieren wir noch mit  $q$  und führen den Quotienten

$$q = \frac{Q^*}{Q}$$

ein, so gilt:

$$w_q^2 = \frac{w_{q_0}^2}{1 + q^2 \cdot V^2}$$

Gehen wir mit diesem Ausdruck in die Gleichung (116) ein, und setzen wir voraus, daß die Verstimmung  $V$  sehr klein sei, so erhalten wir für  $q$  die Bestimmungsgleichung

$$q^2 = \frac{2 \cdot w_{20}^2 \cdot [(q_0/q)^2 - w_f^2] - w_{20}^4 (3 q_0/q - 1)}{w_{20}^4 (1 - q_0/q) - 2 w_{20}^2 \left[ 2(1 - q_0/q)^2 + 3 w_f^2 \cdot q_0/q + \frac{3}{8} w_f^4 \right] + \frac{3}{8} w_f^2 (4 - w_f^2)^2} \quad (123)$$

In Fig. 8 ist  $q = F(w_f)$  mit  $q_0/q$  als Kurvenparameter in einer Kurvenschar dargestellt. Wir erkennen deutlich die durch die amplitudenbegrenzende Nichtlinearität der Kennlinie bedingte Verflachung (Abplattung) der Filterkurve um die Resonanzstelle bei wachsendem Betrag der Fremdspannungsamplitude und der Rückkopplung. In der Figur 6 stellt die schwach ausgezogene Kurve jene Kurve mit dem entsprechenden  $q$  dar.

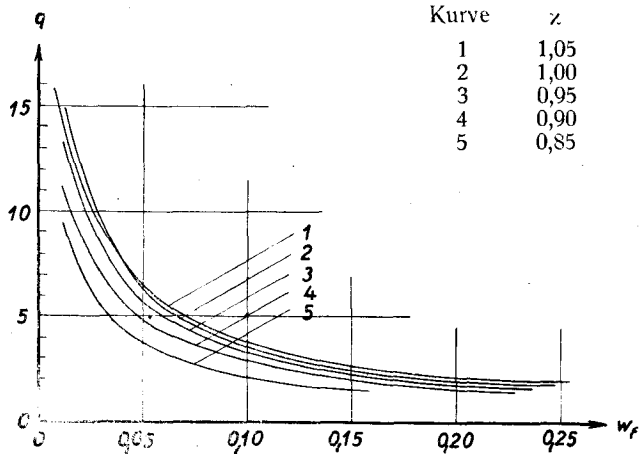


Fig. 8.

Nun bleibt uns noch übrig, die Verzerrungen zu bestimmen, die die Modulation eines frequenzmodulierten Signales beim Durchgang durch ein Einkreisfilter erleidet.

## 9. Die Verzerrungen der Modulation eines frequenzmodulierten Signales beim Durchgang durch ein Einkreisfilter

Das Signal wird nach dem Durchgang durch das Einkreisfilter auf einen idealen Gegentaktumformer gegeben, dessen elektrische Mitte stets der Trägerfrequenz angepaßt ist. Dadurch wird bei der Demodulation der Beitrag der durch die Verzerrungen bedingten Amplitudenmodulation reduziert. Bezeichnen wir mit

$$x = Q^* \cdot 2 \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = q \cdot V \quad (124)$$

und mit

$$x_t = Q^* \cdot 2 \frac{\omega_t - \omega_0}{\omega_0}$$

worin  $\omega_0$  die Resonanzfrequenz des Einkreisfilters,

$\omega_t$  die Trägerfrequenz des Signales,

und  $\omega$  die laufende Frequenz

bedeutet, so besteht zwischen Ausgangsspannung  $u_2$  und Eingangsspannung  $u_1$  des Einkreisfilters mit dem Leitwert  $G_{21}$  (für  $x=0$ ) und der Kreisgüte  $Q^*$  die Beziehung:

$$\frac{u_2}{u_1} = G_{21} \cdot \frac{1}{1 + jx}$$

Ist  $u_3$  die Spannung nach dem idealen Umformer, so läßt sich derselbe in die Form kleiden:

$$\frac{u_3}{u_2} = G_{32} \cdot j(x - x_t)$$

und wir erhalten:

$$\frac{u_3}{u_1} = G_{31} \cdot \frac{j(x - x_t)}{1 + jx} \quad (125)$$

$u_1$  ist ein rein frequenzmoduliertes Signal.  $u_3$  ist zusätzlich amplitudenmoduliert. Diese Amplitudenmodulation ist ein Abbild der Frequenzmodulation des Signales  $u_2$ . Sie enthält aber noch Anteile der durch die Verzerrung bedingten Amplitudenmodulation des Signales  $u_2$ . Ein idealer Amplitudenbegrenzer zwischen  $G_{21}$  und  $G_{32}$  geschaltet, würde diesen Anteil eliminieren. Da in den meisten Fällen kein idealer Begrenzer vorliegt, ziehen wir es vor, in der Rechnung diesen ganz wegzulassen. Legen wir der weiteren Rech-

nung die Theorie von *Vellat* [44] zugrunde, wobei wir Gleichung (125) benützen, so erhalten wir das Spektrum der verzerrten Modulation in beliebiger Genauigkeit.

Führen wir noch die Bezeichnung

$$y = Q^* \cdot 2 \cdot \frac{\Delta \omega}{\omega_0} = Q^* \cdot 2 \cdot h = 2q \cdot Q \cdot h \quad (126)$$

ein, worin  $h$  der relative Frequenzhub der Modulation bedeutet, und berücksichtigen wir in der Rechnung Glieder bis zur 5. Harmonischen, bei einem Frequenzhub  $\Delta \omega$ , der wesentlich größer ist als die höchste Modulationsfrequenz, so erhalten wir als Komponenten des Klirrfaktors für die

2. Harmonische:

$$d_2 \cong -\frac{1}{2} x \cdot y \cdot \left[ 1 - x^2 - \frac{9}{8} (1 - 2x^2) \right] \quad (127)$$

und für die

3. Harmonische:

$$d_3 \cong -\frac{1}{8} y^2 \cdot \left[ 1 - 3x^2 - \frac{9}{16} \cdot y^2 (1 - 14x^2) \right] \quad (128)$$

$x$  ist die auf  $Q^*$  normierte Verstimmung des Trägers von der Filtermitte und  $y$  der auf  $Q^*$  normierte Frequenzhub.

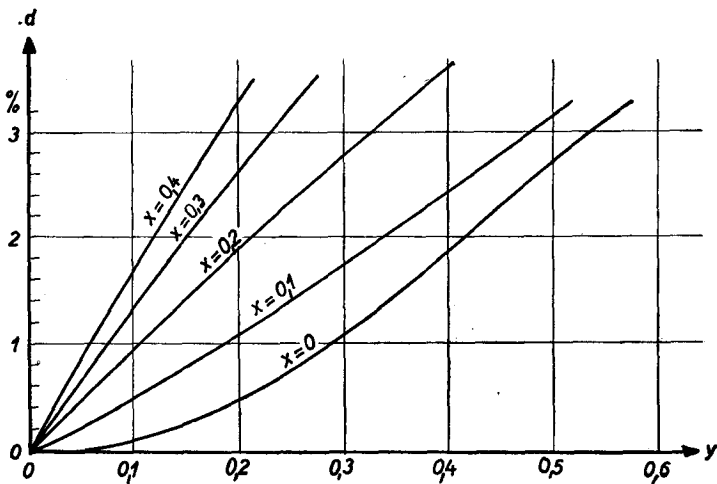


Fig. 9.

In den Fig. 9, 10 und 11 sind die Zusammenhänge zwischen  $x$ ,  $y$  und  $d$  dargestellt, wobei

$$d = \sqrt{d_2^2 + d_3^2}$$

ist. Fig. 11 gestattet die sofortige Ablesung der zulässigen Verformung bei gegebenem Hub und vorgeschriebenem Klirrfaktor.

Wir vergewissern uns, daß unsere Näherungsrechnung bis etwa

$$(x + y) \cong 0,3 - 0,5$$

zulässig ist. Diese engen Grenzen genügen aber vollständig, da ja die Gebiete großer Klirrfaktoren für unsere Probleme uninteressant sind.

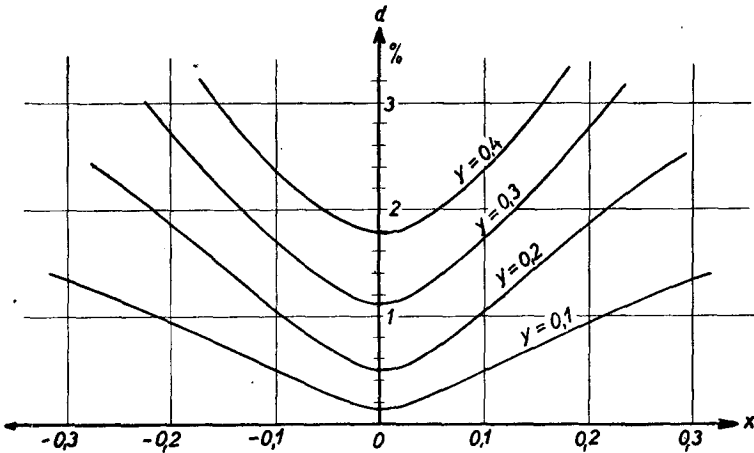


Fig. 10.

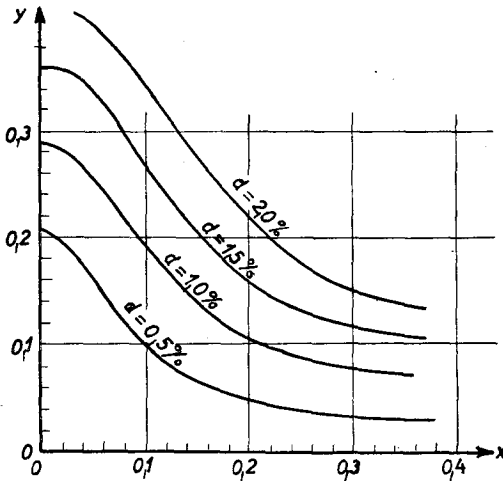


Fig. 11.

## 10. Aussagen der Theorie

Der synchronisierte Generator kann als Vierpol aufgefaßt werden, welcher den Charakter eines endämpften Schwingkreises hat. Die Frequenz des Eingangssignales (Synchronisierungssignal) darf in einem einfachen rationalen Verhältnis zur Generatorfrequenz stehen, weil wegen der Nichtlinearität der Kennlinie Kombinationsfrequenzen entstehen, welche ungefähr der Generatorfrequenz entsprechen. Ist das Eingangssignal moduliert, so sind die Seitenbänder der Filterwirkung des endämpften Schwingkreises unterworfen. Wird die Trägerfrequenz des Eingangssignales aus der Resonanzlage des Generators verschoben, so folgt ihr die Generatorfrequenz bis zur Synchronisierungsgrenze. Das Generatorsignal (synchronisiertes Signal) bekommt mit der Verstimmung eine entsprechende Phase gegenüber dem synchronisierenden Signal. Die Grenze der Synchronisation ist im wesentlichen eine Funktion von  $(\nu_0 + \nu_f) = \nu_g$ , also von der Gitterwechselspannung. Amplitude und Phase dieser Spannung sind bestimmten Gesetzen, den Rückkopplungsbedingungen, unterworfen. Ist das Eingangssignal  $\nu_f$  moduliert, und ist die Modulationsfrequenz so niedrig, daß die Seitenbänder noch innerhalb der Filterbreite ( $V_{450}$ ) liegen, so wirkt sich die Modulation ungedämpft auf die Synchronisierung aus, so daß letztere jeweils durch den Momentanwert des synchronisierenden Signals bedingt ist. Ist hingegen die Modulationsfrequenz so hoch, daß schon das erste Seitenbandpaar durch die Filterflanken stark gedämpft wird, so bekommt das synchronisierte Signal den Charakter eines Signales mit konstanter Amplitude und Phase. Da  $\nu_0$  zwangsläufig immer größer ist als  $\nu_f$ , vorausgesetzt, daß die Schwingröhre nicht übersteuert wird, wirkt sich somit die Modulation nur noch schwach aus auf die Synchronisierungsbreite.

### *Eigenschaften des synchronisierten Signales.*

a) Bei frequenzmoduliertem Fremdsignal.

Ist die Modulationsfrequenz klein gegenüber dem absoluten Frequenzhub, so besitzt das Signal mehrere Seitenbandpaare. Liegen diese ungefähr alle innerhalb der Filterbreite, so werden

sie alle gleichmäßig stark wie der Träger verstärkt. Das synchronisierte Signal besitzt somit denselben Frequenzhub wie das synchronisierende Signal. Liegen aber maßgebende Seitenbandpaare schon auf der Filterflanke, so wird das Modulationsspektrum des synchronisierten Signales verzerrt. Die Verzerrung des Modulationsspektrums zeigt sich in einer entstehenden Amplitudenmodulation. Liegt schon das erste Seitenbandpaar weit außerhalb der Filterbreite, so besitzt das synchronisierte Signal praktisch keine Seitenbänder mehr. Es ist in Amplitude und Phase konstant. Letztere ist bestimmt durch die Verstimmung der Trägerfrequenz gegenüber der Generatorresonanzfrequenz. Ist die Modulationsfrequenz groß gegenüber dem absoluten Frequenzhub, so besteht das Modulationsspektrum im wesentlichen nur noch aus dem Träger und seinem Seitenbandpaar. Die Dämpfung der Seitenbänder durch die Filterflanken hat dann keinen Klirrfaktor, sondern nur noch eine Hubverminderung zur Folge. Liegt das Modulationsspektrum unsymmetrisch zur Filtermitte, so werden die einzelnen Seitenbänder ungleich in Betrag und Phase beeinflusst, so daß die übertragene Modulation infolge Verstimmung zusätzlich verzerrt wird.

Wir erkennen also, daß für eine einigermaßen modulationsgetreue und klirrfaktorfreie Modulationsübernahme durch die Synchronisation, das gesamte Modulationsspektrum innerhalb der Filterbreite liegen muß. Letztere kann durch Schwächung der Rückkopplung oder Verstärkung des Fremdsignales verbreitert werden (Fig. 7).

Der Einfluß der Rückkopplung ist je nach der Wahl des Betrages des Fremdsignales und der Verstimmung verschieden. In der unmittelbaren Umgebung der Resonanzspitze wirkt eine kräftige Rückkopplung auf den Kurvenverlauf verflachend.

Das Verhältnis der Anodenwechselspannung zum Fremdsignal gibt uns die Verstärkung an, die man durch die Synchronisation erhält. Man berechnet (z. B. unser Spezialfall) aus Gleichung (116) (Fig. 7) die Größe  $w_{\varrho}$ , indem man zweckmäßig  $V = 0$  wählt. Da  $v_{\varrho} = -\varrho \cdot v_a$  ist, erhalten wir:

$$\text{Verstärkung} \quad \frac{w_{a_0}}{w_f} = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{w_{\varrho}}{w_f} = g \quad (129)$$

b) Bei amplitudenmoduliertem Fremdsignal.

Hier haben wir es im Prinzip immer nur mit einem Seitenbandpaar zu tun. Dieses liegt phasenmäßig symmetrisch zum Träger, so daß die resultierende Amplitude entsprechend der Modulation sich ständig ändert. Die beiden Seitenbänder werden auch mit wachsender Modulationsfrequenz mehr und mehr beschnitten, so daß das synchronisierte Signal an Modulationstiefe verliert und einem Wert zustrebt, der durch die Trägergröße des Fremdsignales bestimmt ist. Für das Bestehen der Synchronisation ist es notwendig, daß die Rückkopplungsbedingungen bei der aufgezungenen Frequenz erfüllt sind. Die Gitterwechselspannung  $v_g = (v_o + v_f)$  darf also bei einer bestimmten Phase einen Minimalwert der Amplitude nicht unterschreiten. Dieser Minimalwert steigt mit wachsender Verstimmung etwas über den Wert der selbsterregten Amplitude  $v_{o0}$  bei Abwesenheit der Fremdspannung. Da nun aber durch Einkoppeln von  $v_f$ ,  $v_o$  im Mittelwert umso mehr steigt, je größer der Träger des Fremdsignales ist, so darf  $(v_o + v_f)$  eine bestimmte Modulationstiefe aufweisen, ohne die Rückkopplungsbedingungen zu verletzen. Je höher die Modulationsfrequenz ist, umso geringer ist die Modulationstiefe von  $v_o$  und umso größer kann sie sein für  $v_f$ .  $v_f$  darf je nach Verstimmung und Modulationsfrequenz mehr oder weniger über 100 % hinaus moduliert sein.

Wird die Trägerfrequenz des Fremdsignales verstimmt, so werden die Seitenbänder unsymmetrisch gedämpft, und das synchronisierte Signal weist eine Phasenmodulation auf. Letztere nimmt mit wachsender Modulationsfrequenz ab.

Der synchronisierte Generator eignet sich nicht als Verstärker für amplitudenmodulierte Signale, da die Verstärkung von der angelegten Amplitude abhängt. Die Modulation des verstärkten Signales ist stark verzerrt und enthält hauptsächlich die zweite Harmonische (Fig. 30). Bei hohen Modulationsfrequenzen, für welche sich die Nichtlinearität weniger stark auswirkt [ $\sim$  konstantes  $v_o$ ], erhalten wir sehr kleine Modulationstiefen.

Hingegen kann das synchronisierte Signal dem Fremdsignal als Hilfsträger zugesetzt werden, mit dem Zwecke der Träger-



vergrößerung. Die Modulationsfrequenz muß nur so hoch gewählt werden, daß das synchronisierte Signal modulationsfrei erscheint. Allerdings bekommt letzteres eine bestimmte Phase je nach der Größe der Verstimmung. Das zusammengesetzte Signal erscheint dann als zusätzlich phasenmoduliert. Diese unerwünschte Phase kann aber korrigiert werden, indem man entweder den Generator nachstimmt oder eines der beiden Signale vor dem Zusammen-  
setzen in der Phase vorentzerzt.

### III. Experiment

#### 1. Bezeichnungen und Erklärungen

Die Messungen werden durchgeführt für frequenz- und amplitudenmoduliertes Fremdsignal. Die Modulation geschieht rein sinusförmig. Bei amplitudenmoduliertem Fremdsignal soll die Modulationsstufe über 100 % hinausgetrieben werden. Dies erreicht man, indem man einem normal, z. B. 30 % modulierten Signal den Träger reduziert, so daß die Seitenbänder relativ groß werden gegenüber dem Trägerwert. Empfangsseitig interessiert uns das Zusammenspiel dieses verstümmelten Signales mit dem synchronisierten Signal. Es werden also folgende Apparate benötigt:

- a) der zu synchronisierende Hilfsgenerator,
- b) die Trägerreduktionsstufe,
- c) die Trägerzusatzstufe,
- d) der frequenzmodulierte Sender,
- e) der Empfänger für frequenzmodulierte Signale.

Bezeichnungen:

$h_f = \frac{\Delta \omega}{\omega_0}$  = relativer Frequenzhub des frequenzmodulierten Fremdsignales in  $\%$ ,<sub>00</sub>,

$h_g$  = relativer Frequenzhub des synchronisierten Signales in  $\%$ ,<sub>00</sub>,

$m_f$  = Modulationstiefe des amplitudenmodulierten Fremdsignales,

$m_g$  = Modulationstiefe des synchronisierten Signales,

$p$  = Modulationsfrequenz in Hz,

$V = Q \cdot 2 \frac{m|n \cdot \omega - \omega_0}{\omega_0}$  = relative Verstimmung der Trägerfrequenz des Fremdsignales zur Resonanzfrequenz  $\omega_0$  des Hilfsgenerators,

- $d$  = Klirrfaktor der Modulation in %,  
 $\alpha = \varrho_0/\varrho$  = Rückkopplungsgrad,  
 $\varrho_0$  = Rückkopplung beim Einsatz der Selbsterregung,  
 $\varrho$  = eingestellte Rückkopplung,  
 $U_j$  = Amplitude des Trägers des Fremdsignales in Volteff.,  
 $\alpha = 2V_{max}$  = Synchronisierungsbreite,  
 $g$  = Verstärkung =  $\frac{\text{Ampl. des Anodenwechselspg.}}{\text{Ampl. des Fremdsignales}}$

## 2. Die Versuchsapparate

### a) Der Hilfsgenerator.

Damit die Resultate des Experimentes mit denjenigen der Theorie verglichen werden können, müssen u. a. die dort gestellten Bedingungen erfüllt sein. Es werden an den Hilfsgenerator die folgenden Forderungen gestellt:

1. relativ hohe Kreisgüte,
2. Schwingkreisimpedanz  $\ll$  innerer Widerstand der Schwingröhre,
3. exakt einstellbare Rückkopplung,
4. phasenreine Rückkopplung,
5. rückwirkungsfreie Rückkopplung,
6. leistungslose (rückwirkungsfreie) Einkopplung des Fremdsignales additiv zur rückgekoppelten Spannung,
7. Steigung der Tangente an die Schwingkennlinie monoton abnehmend bei wachsender Schwingamplitude,
8. Kennlinie der Schwingröhre über einen großen Bereich durch eine Gleichung 3. Grades darstellbar,
9. aus schalttechnischen Gründen sollen Einkopplungs- und Auskopplungsklemmen einseitig am Erdpotential liegen.

Es wurde ein Generator entwickelt, welcher diese Forderungen befriedigend erfüllte. Fig. 12 zeigt das Schaltschema.

Arbeitsweise:

Der Generator besteht aus zwei Stufen, einer Selektivverstärkerstufe I und einer Breitband-Kathodenverstärkerstufe II. Letztere wirkt als Phasenkehrer und dient als Rückkopplungs-

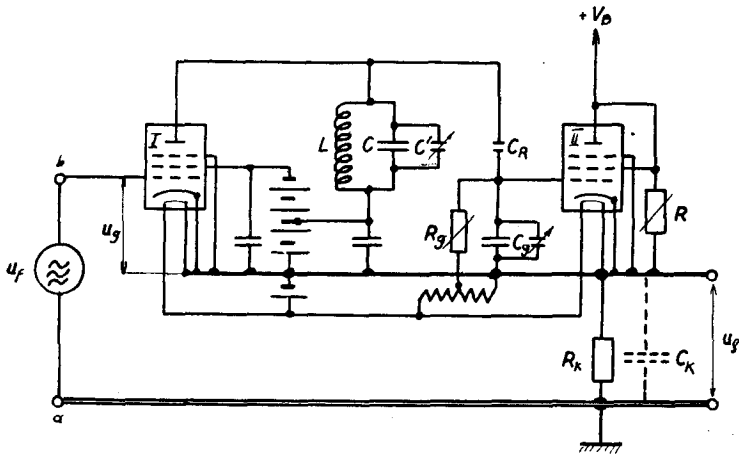


Fig. 12.

zweig. Die Anodenwechselspannung wird über den variablen Spannungsteiler  $C_R, C_g$  dem Gitter der Phasenkehreröhre zugeführt. Die erzeugte Kathodenwechselspannung über  $R_K$  hat umgekehrte Polarität, bezogen auf das Kathodenpotential. Legen wir nun die Fremdspannung  $u_f$  zwischen Erde und dem Gitter der Röhre I an, so liegen die rückgekoppelte Spannung  $u_o$  und die Fremdspannung  $u_f$  in Serie zwischen Gitter und Kathode der Schwingröhre I. Die Gittervorspannung von I und die Amplituden von  $u_o$  und  $u_f$  sind so gewählt, daß nie Gitterstrom auftritt. Die Innenwiderstände der Spannungsquellen von  $u_o$  und  $u_f$  sind niederohmig, und die Resonanzfrequenz des Generators ist so niedrig angesetzt, daß der Einfluß der Gitterkapazität vernachlässigt werden kann. Die Einkopplung von  $u_f$  geschieht daher praktisch leistungslos. Die Gittervorspannung von I ist gerade der Gleichspannungsabfall über  $R_K$ . Dieser kann nachgestellt werden mittelst  $R$ . Die Einstellung der Rückkopplung geschieht durch den genau eichbaren Spannungsteiler  $C_R, C_g$ . Da die Batterie und fast alle Schaltelemente auf Kathodenpotential liegen, haben sie gegen Erde eine bestimmte Kapazität, welche parallel zu  $R_K$  gedacht werden kann. Die dadurch hervorgerufene Phase im Rückkopplungszweig kompensiert man mittelst  $R_g, C_g$ .  $C_g$  wird in kleinen Grenzen variiert, so daß die Kompensation auch bei Regelung der Rückkopplung in zulässigen Grenzen gewährleistet ist.  $C, C_g$  und

$C_R$  sind so dimensioniert, daß bei maximaler Rückkopplungsänderung die Frequenzverwerfung des Generators  $< 10^{-5}$  ist, also noch innerhalb der Frequenzkonstanz des Generators liegt. Fig. 13 zeigt die Kennlinie der Schwingröhre I.

Daten des Hilfsgenerators:

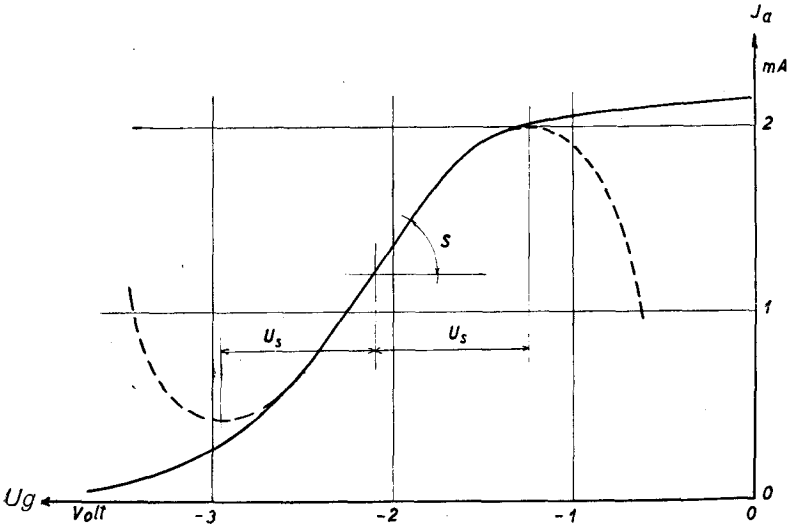


Fig. 13.

- Schwingröhre: Steilheit im Arbeitspunkt  $S = 1,42 \text{ mA/V}$   
 Angenäherte Darstellung der Kennlinie durch eine Gleichung dritten Grades  $J_a = U_g \cdot S \cdot [1 - U_g^2 / 3U_s^2]$   
 $U_s =$  Sättigungsspannung  $= 0,85 \text{ Voltspitze}$
- Schwingkreis:  $C = 1120 \text{ pF}$   
 $C' = 35 \text{ pF}$  (Mittelwert)  
 $Q = 125$  (Betriebswert)  
 $f_0 = 505 \text{ KHz}$   
 $z_0 = 34,4 \text{ K}\Omega$
- Rückkopplungsweig:  $C_R = 3,9 \text{ pF}$   
 $C_g = 150-200 \text{ pF}$   
 $R_K = 205 \Omega$   
 $C_K = 215 \text{ pF}$  (bei angeschlossenen Apparaten)  
 $S_{II} = 5,4 \text{ mA/V}$   
 Phase im Rückkopplungsweig ohne Kompensation:  
 $\varphi_R \approx 8^\circ$
- $q_0 = 2,05 \cdot 10^{-2}$ ;  $q_{max} = 3,06 \cdot 10^{-2}$  für kubischen Charakter der Kennlinie.

Der Einfachheit halber wird bei den Untersuchungen über den Einfluß der Verstimmung nicht die Frequenz des Fremdsignales, sondern die Resonanzfrequenz des Generators variiert. Diese Variation kann auch für sehr kleine Verstimmungen gut eichbar mittelst eines kleinen Trimmers  $C'$  parallel zum Kreiscondensator  $C$  vorgenommen werden. Für die Untersuchungen benützen wir immer das rückgekoppelte Signal  $u_o$ , das über dem niederohmigen Widerstand  $R_K$  abgegriffen wird. Bei bekannter Rückkopplung kennen wir dann auch  $u_a$ .

b) Die Trägerreduktionsstufe.

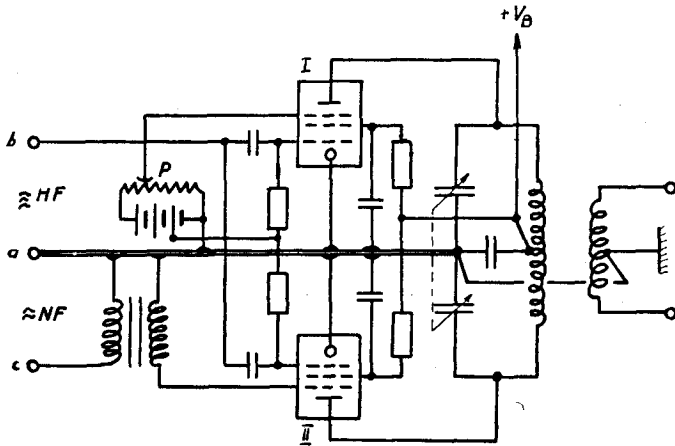


Fig. 14.

Die von einem Hochfrequenzgenerator gelieferte Spannung wird an die Klemmen  $a-b$  angelegt und gelangt gleichphasig an die Steuergitter der beiden Röhren I und II. Die beiden Anodenwechselströme arbeiten im Gegentakt auf einen abgestimmten Schwingungskreis. Die Verstärkung der Röhre II wird im Rhythmus der angelegten Niederfrequenzspannung variiert, wodurch der Anodenwechselstrom der Röhre II z. B. eine Modulationstiefe von 30 % erfährt mit einem Klirrfaktor  $< 1\%$ . Die Verstärkung der Röhre I wird mittelst dem Potentiometer  $P$  auf einen bestimmten

Wert eingestellt. Da sich die Wirkungen der beiden Anodenwechselströme im Schwingkreis subtrahieren, kann somit die Amplitude des Trägers beliebig verkleinert werden, wobei die Amplituden der Seitenbänder konstant bleiben. Es können somit alle möglichen Modulationstiefen von  $0-\infty\%$  eingestellt werden bei gleichbleibendem Modulationsklirrfaktor.

c) Die Trägerzusatzstufe.

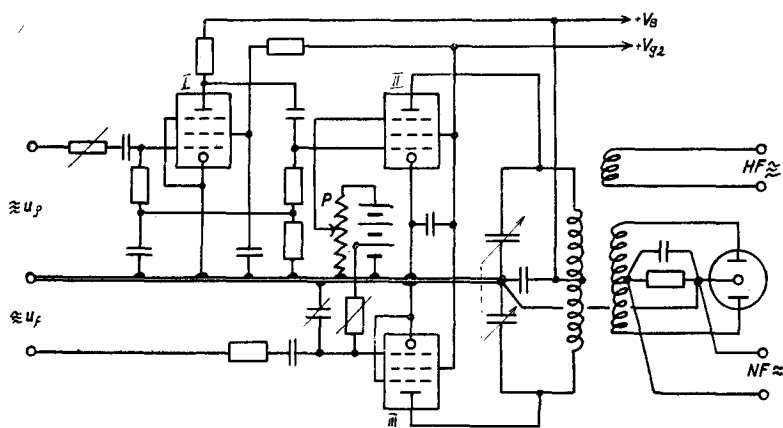


Fig. 15.

Der Verstärker für das Hilfssignal  $u_o$  liefert einen konstanten Anodenwechselstrom in den abgestimmten Schwingkreis. Allfällige Amplitudenmodulation des Hilfssignales  $u_o$  wird sauber ausreguliert. Die Zeitkonstante der Regelung beträgt  $2 \cdot 10^{-5} \cdot s^{-1}$ . Die Phase, die das Audioglied verursacht, wird kompensiert, indem der Längswiderstand in der Gitterleitung der Röhre I eine Phasenvorentzerrung ergibt. Sind  $u_o$  und  $u_f$  gleichphasig, so addieren sie sich phasenrichtig in der Endstufe. Besteht zwischen  $u_o$  und  $u_f$  eine konstante Phasendifferenz, so kann dieselbe durch das Phasenzerrungsglied im Gitterkreis der Röhre III kompensiert werden. Die Verstärkung der Röhre II ist regulierbar, so daß die Amplitude des Hilfsträgers günstig gewählt werden kann.

d) Der frequenzmodulierte Sender.

Anforderungen:

1. kleiner Hochfrequenzklirrfaktor,
2. kleinstmöglicher Modulationsklirrfaktor,
3. leicht eichbarer Frequenzhub,
4. leichter Frequenzbereichwechsel,
5. minimste Amplitudenmodulation, da kein Amplitudenbegrenzer verwendet werden will.

Es wurde ein Sender entwickelt, der befriedigend diese Forderungen erfüllte (Fig. 16). II ist die Schwingröhre. III arbeitet in Verbindung mit  $L$  und  $R$  als Reaktanzröhre, deren Steilheit über Gitter 1 moduliert wird. I ist als Breitbandverstärkerröhre geschaltet und dient als Rückkopplungsweig. Der Kennlinie wurde eine S-Form gegeben, so daß I zusätzlich die Aufgabe der Begrenzung der Schwingamplitude übernimmt. Durch Regelung der Verstärkung der Röhre II kann der gewünschte Rückkopplungsgrad eingestellt werden. Die Rückkopplungsphase beträgt  $20^\circ$ .

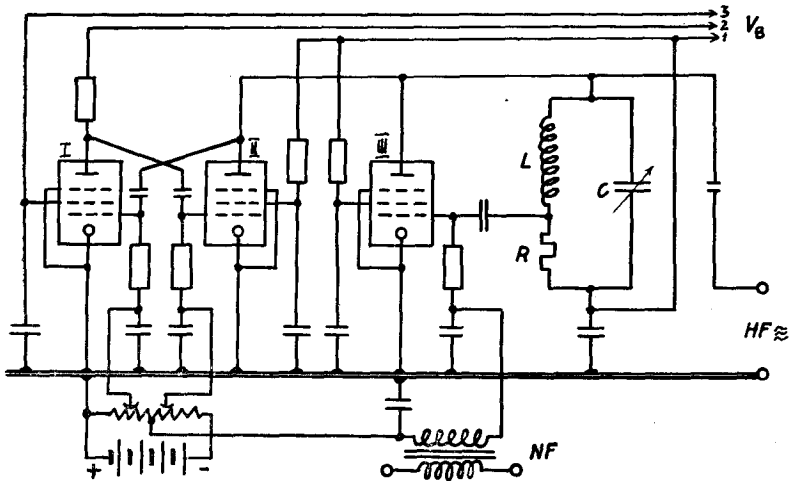


Fig. 16.

Wie aus Fig. 17 hervorgeht, werden für die Reaktanzröhrenschtaltung direkt die Elemente des Schwingkreises herangezogen.



Die daraus resultierenden Vorteile zeigt die Rechnung. Frequenzbestimmend ist folgende Schaltung:

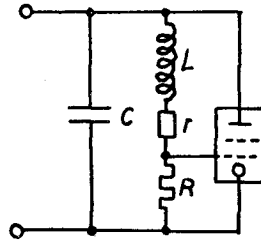


Fig. 17.

Der Leitwert dieses Zweipoles berechnet sich zu:

$$\eta = \frac{(R+r)(1+S \cdot R)}{(R+r)^2 + (\omega L)^2} + \frac{1}{R_i} + j \left\{ \omega C - \frac{\omega L(1+S \cdot R)}{(R+r)^2 + (\omega L)^2} \right\} \quad (130)$$

$S$  = Steilheit der Reaktanzröhre,

$R_i$  = Innenwiderstand der Reaktanzröhre.

Bei phasenreiner Rückkopplung erregt sich die Frequenz, welche wir berechnen können, aus:

$$\omega C - \frac{\omega L(1+S \cdot R)}{(R+r)^2 + (\omega L)^2} = 0$$

wir erhalten:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot \left\{ 1 - \frac{C(R+r)^2}{L} + S \cdot R \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Diese Frequenz eingesetzt in (130) ergibt:

$$\eta = \frac{(R+r) \cdot C}{L} + \frac{1}{R_i} \quad (131)$$

Nun gilt es,  $R$ ,  $L$  und  $C$  so zu wählen, daß

$$R_i \gg \frac{L}{(R+r) \cdot C} \text{ wird}$$

und doch die Kreisgüte nicht unter einen Minimalwert sinkt. Die Verhältnisse sind dann die folgenden:

1. Durch Modelung der Steilheit der Reaktanzröhre wird die Impedanz des Schwingkreises nicht beeinflußt. Es entsteht daher keine Amplitudenmodulation.

2. Der relative Frequenzhub ist nur eine Funktion von  $S$  und  $R$  und bleibt somit gleich auch bei Frequenzbereichwechsel. Bei bekanntem  $\frac{\partial S}{\partial u}$  und  $R$  kann der Hub direkt aus der angelegten Modulationsspannung abgelesen werden. Bei konstantem  $\frac{\partial S}{\partial u}$  geht der Modulationsklirrfaktor hervor aus der Taylorentwicklung:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cdot S \cdot R - \frac{1}{8} (S \cdot R)^2 + \frac{1}{16} (S \cdot R)^3 + \dots \right\} \quad (132)$$

indem man für  $S = S_0 + \Delta S \cdot \cos pt$  setzt. Die Amplitude der Grundharmonischen lautet:

$$\Delta \omega_1 = \omega \cdot \frac{1}{2} \frac{\Delta S \cdot R}{1 + \frac{1}{2} S_0 R} \approx \frac{1}{2} \Delta S \cdot R$$

In der Rechnung wurden die Röhrenkapazitäten vernachlässigt. Dies darf auch näherungsweise geschehen, wenn wir bedenken, daß  $R$  einige Ohm beträgt, und wir für  $L$  eine ausgezeichnete Spule voraussetzen.

*e) Der Empfänger für frequenzmodulierte Signale.*

Der Empfänger besitzt wie üblich eine Verstärkerstufe mit Amplitudenbegrenzer und einen Gegentaktumformer.

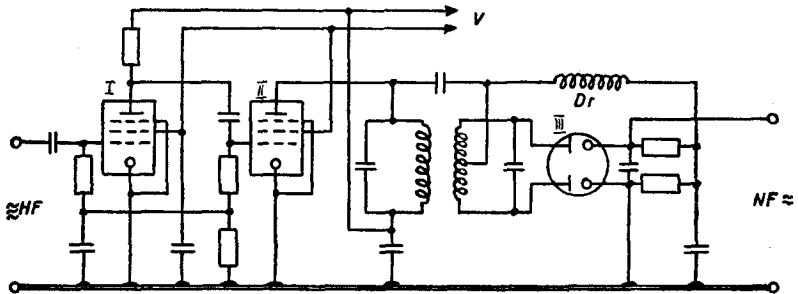


Fig. 18.

### 3. Messungen bei frequenzmoduliertem Fremdsignal

Meßanordnung:

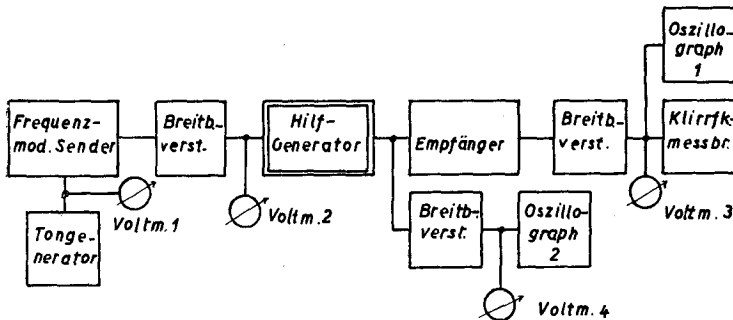


Fig. 19.

Das vom frequenzmodulierten Sender gelieferte Signal synchronisiert den Hilfsgenerator. Das synchronisierte Signal wird vom Empfänger demoduliert, und die so zurückgewonnene Modulationsspannung auf Betrag und Verzerrungen untersucht. Oszillograph 1 zeigt diese Modulationsspannung und Oszillograph 2 das Bild des synchronisierten Signales. Die Breitbandverstärker dienen als Entkopplungsstufen.

Bei den Messungen können wir nun einen der folgenden Parameterwerte variieren:

- Modulationsfrequenz  $p$
- Frequenzhub  $h_f$
- Amplitude des Fremdsignales  $U_f$
- Stärke der Rückkopplung  $\kappa$
- Verstimmung der Trägerfrequenzen  $V$
- Verhältnis der Trägerfrequenzen  $n/m$

Es interessieren uns:

1. Hervorgerufene Amplitudenmodulation des synchronisierten Signales im Hinblick auf die Dimensionierung des Amplitudenbegrenzers im Empfänger.

2. Übertragungsgüte der Modulation des Fremdsignales auf das synchronisierte Signal.

- a) Frequenzgang  $h_q = f(p)$
- b) Hubmäßige Aussteuerung  $d = f(h_f)$
- c) Einfluß der Verstimmung  $d = f(V)$

Die Untersuchungen werden bei verschiedenen Parameterwerten für die Trägerfrequenzverhältnisse

$$\frac{n}{m} = 1; \quad \frac{n}{m} = \frac{1}{2}; \quad \frac{n}{m} = 2$$

durchgeführt.

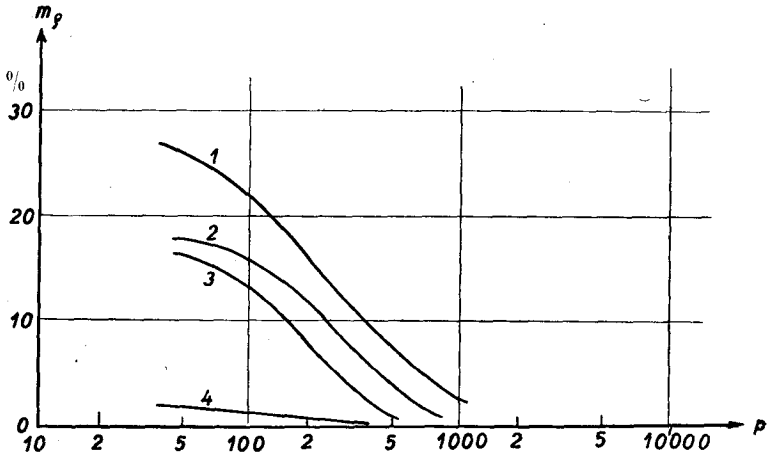


Fig. 20. Modulationstiefe  $m_q$  des synchr. Signales.

Variable = Modulationsfrequenz  $p$

Parameter = Amplitude  $U_f$  des Fremdsignales

abs. Frequenzhub  $h_f$  des Fremdsignales

Rückkopplung  $\alpha$

Kurve	$U_f$ mV	$h_f$ ‰	$\alpha$
1	50	1,25	0,95
2	50	0,85	0,95
3	50	0,85	0,90
4	100	0,85	0,95

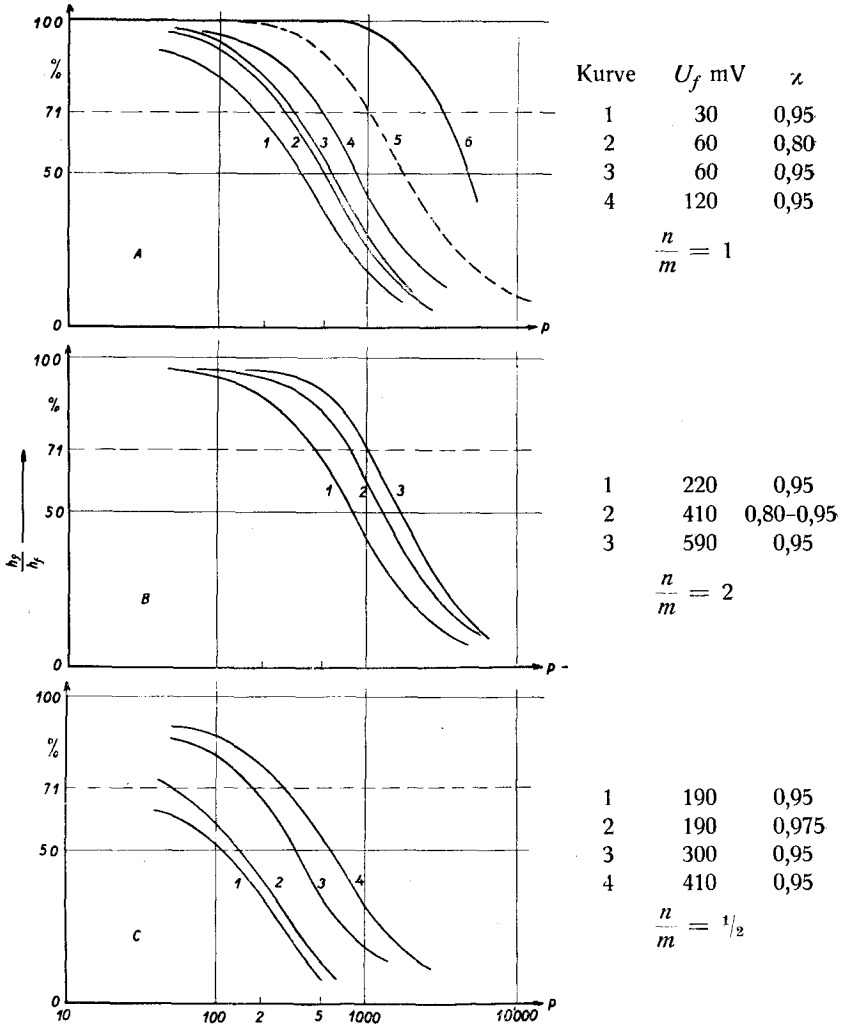


Fig. 21.  $\frac{\text{Frequenzhub des synchr. Signales}}{\text{Frequenzhub des Fremdsignales}}$

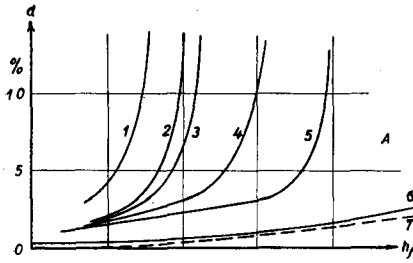
Variable = Modulationsfrequenz  $p$

Parameter = Amplitude des Fremdsignales  $U_f$   
Rückkopplung  $\alpha$

$V = 0$   $h_f = 0,2 - 1,2 \%$

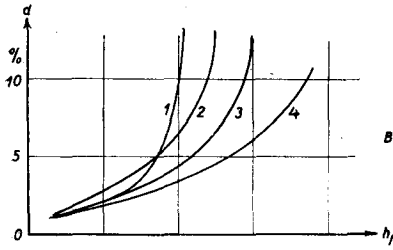
$$A5 \quad \frac{h_0}{h_f} = \frac{1000}{\sqrt{(\rho + 1000)^2}}$$

A6 = direkte Übertragung



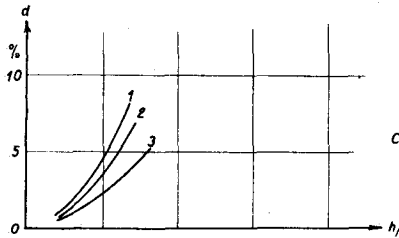
Kurve	$U_f$ mV	$\alpha$	$p$ (pps)
1	50	0,95	180
2	100	0,90	180
3	100	0,95	180
4	150	0,95	180
5	200	0,95	180

$\frac{n}{m} = 1$



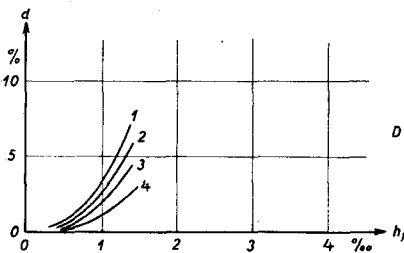
1	100	0,95	0-200
2	100	0,95	500
3	100	0,95	750
4	100	0,95	1000

$\frac{n}{m} = 1$



1	410	0,95	500
2	410	0,80	500
3	590	0,95	500

$\frac{n}{m} = 2$



1	330	0,95	500
2	470	0,80	500
3	470	0,95	500
4	610	0,95	500

$\frac{n}{m} = 1/2$

Fig. 22. Modulationsverzerrung.

Variable = Frequenz des Fremdsignales

Parameter = Amplitude des Fremdsignales

Rückkopplung

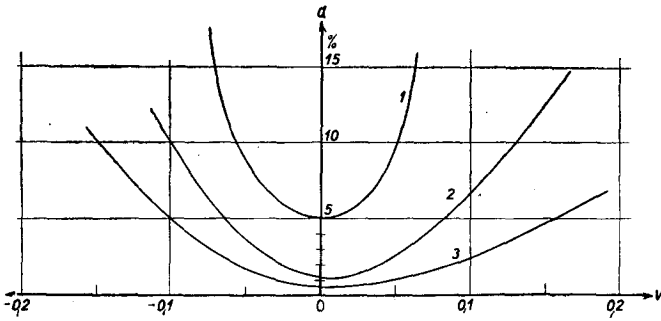
Modulationsfrequenz

direkte Übertragung

A6: gemessen

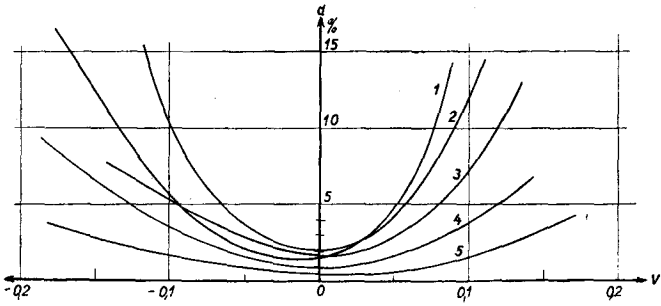
A7: gerechnet

$V = 0$



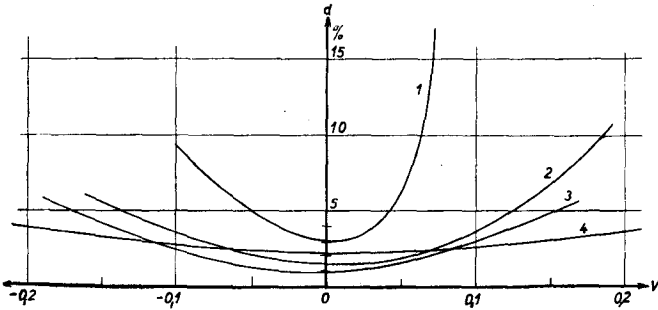
Kurve	$h_f^{0/100}$
1	2,54
2	1,27
3	0,63

$\frac{n}{m} = 1$   
 $U_f = 60 \text{ mV}$   
 $\chi = 0,95$   
 $p = 900 \text{ pps}$



Kurve	$U_f \text{ mV}$	$\chi$
1	75	0,80
2	75	0,95
3	75	0,99
4	150	0,80
5	225	0,80

$\frac{n}{m} = 1$   
 $h_f = 1,27^{0/100}$   
 $p = 900 \text{ pps}$

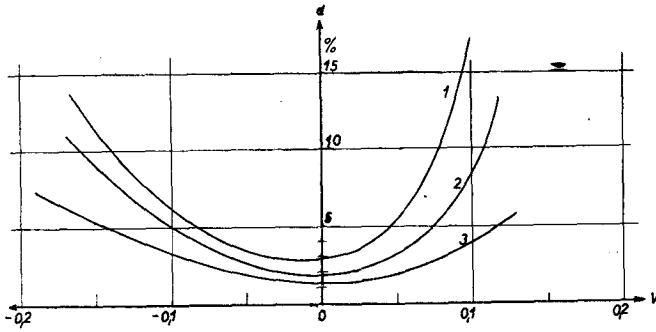


Kurve	$h_f^{0/100}$	$p \text{ (pps)}$
1	1,5	200
2	1,0	500
3	1,0	0-200
4	2,0	100

$U_f = 100 \text{ mV}$   
 $U_f = 200 \text{ mV}$   
 $\chi = 0,95$   
 $\frac{n}{m} = 1$

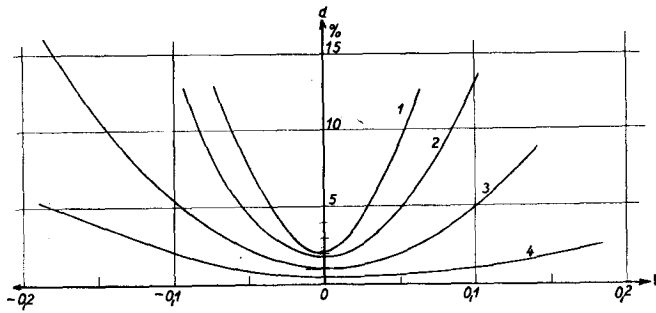
Fig. 23. Modulationsverzerrung.

Variable = relative Verstimmung  $V$   
 Parameter = Amplitude des Fremdsignales  $U_f$   
 Hub des Fremdsignales  $h_f$   
 Rückkopplung  $\chi$   
 Modulationsfrequenz  $p$



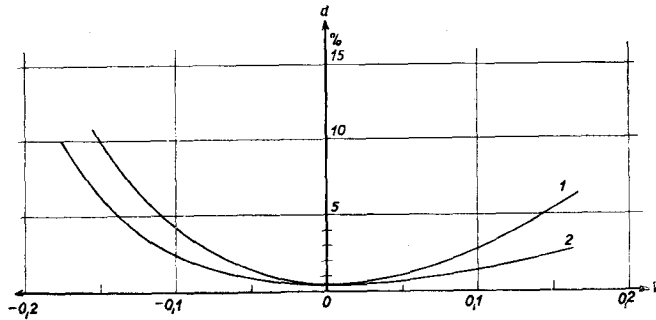
Kurve	$h_f$ ‰
1	1,12
2	0,84
3	0,56

$\frac{n}{m} = 1/2$   
 $U_f = 470$  mV  
 $\chi = 0,95$   
 $\rho = 500$  pps



Kurve	$U_f$ mV	$\chi$
1	330	0,95
2	470	0,80
3	470	0,95
4	610	0,95

$\frac{n}{m} = 1/2$   
 $h_f = 0,84$  ‰  
 $\rho = 450$  pps



Kurve	$U_f$ mV	$h_f$ ‰	$\chi$
1	410	0,42	0,95
	590	0,42	0,80
2	410	0,29	0,95

$\frac{n}{m} = 2$   
 $\rho = 450$  pps

Fig. 24. Modulationsverzerrung.

Variable = relative Verstimung  $V$   
 Parameter = Amplitude des Fremdsignales  
 Frequenzhub des Fremdsignales  
 Rückkopplung



#### 4. Messungen bei amplitudenmoduliertem Fremdsignal

Meßanordnung:

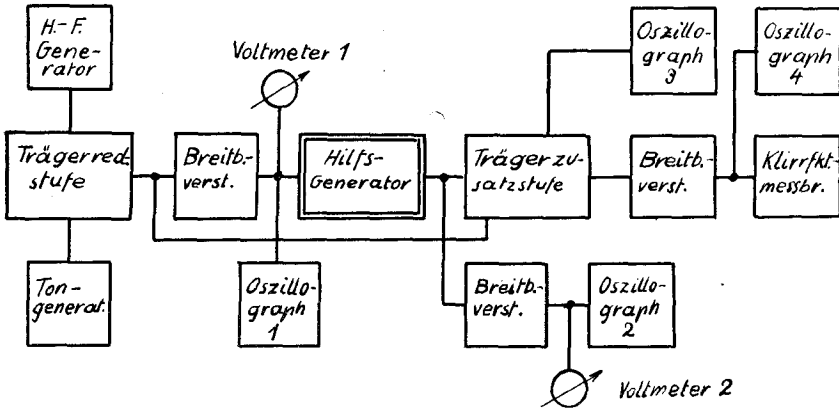


Fig. 25.

Das von der Trägerreduktionsstufe gelieferte amplitudenmodulierte Signal synchronisiert den Hilfsgenerator. Der dadurch erhaltene Hilfsträger wird in der Trägerzusatzstufe dem Signal der Trägerreduktionsstufe zugesetzt. Oszillograph 3 zeigt das zusammengesetzte Signal. Mit der Klirrfaktormessbrücke und dem Oszillograph 4 wird die übertragene Modulation untersucht. Oszillograph 1 und Voltmeter 1 dienen zur Messung des Fremdsignals und Oszillograph 2 mit Voltmeter 2 zur Messung des synchronisierten Signales. Die Breitbandverstärker sind wiederum zur Entkopplung der einzelnen Stufen notwendig.

Bei den Messungen können wir einen der folgenden Parameterwerte variieren:

- Amplitude des Fremdsignales  $U_f$
- Modulationstiefe des Fremdsignales  $m_f$
- Modulationsfrequenz  $p$
- Stärke der Rückkopplung  $x$
- Verstimmung  $V$

Es interessieren uns:

1. Modulationstiefe  $m_o$  des synchronisierten Signales im Hinblick auf die Dimensionierung des Amplitudenbegrenzers in der Trägerzusatzstufe.  $m_o = f(p)$ .
2. Synchronisierungsbreite in Funktion der Modulationstiefe des Fremdsignales.  $\alpha = f(m_f)$ .
3. Die durch die Verstimmung hervorgerufenen Verzerrungen.  $d = f(V)$ .

Die Untersuchungen werden nur für das Trägerfrequenzverhältnis  $\frac{n}{m} = 1$  durchgeführt, da nur dieses von Interesse ist.

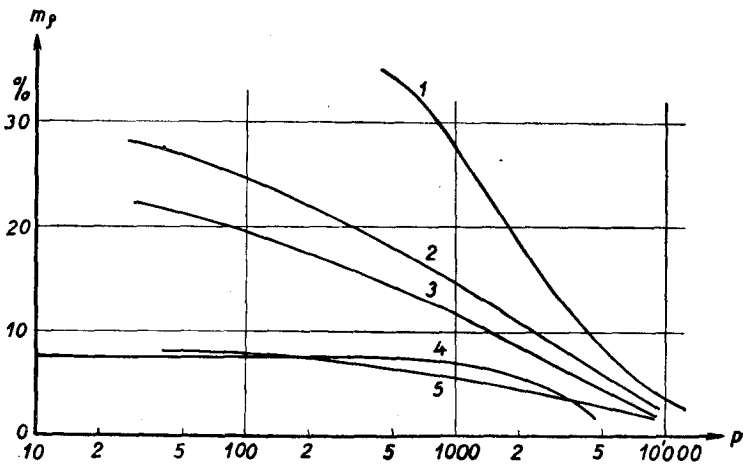


Fig. 26. Modulationstiefe  $m_o$  des synchr. Signales.

Variable = Modulationsfrequenz  $p$

Parameter = Amplitude des Fremdsignales  $U_f$

Modulationstiefe des Fremdsignales  $m_f$

Rückkopplung  $\alpha$

Kurve	$U_f$ mV	$m_f$ %	$\alpha$
1	50	200	0,95
2	100	100	0,95
3	50	100	0,95
4	50	50	0,95
5	50	100	0,90

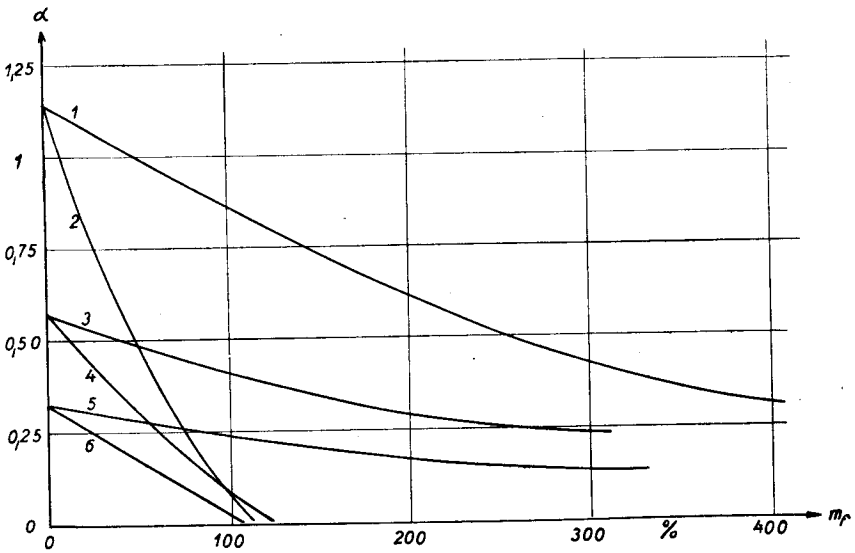


Fig. 27. Synchronisierungsbreite.

Variable = Modulationstiefe des Fremdsignales  
 Parameter = Amplitude des Fremdsignales  
 Modulationsfrequenz  
 Rückkopplung

Kurven	$U_f$ mV	$\alpha$	Kurven	$p$ (pps)
1, 2	100	0,95	1, 3, 5	5000
3, 4	50	0,95	2, 4, 6	120
5, 6	50	0,90		

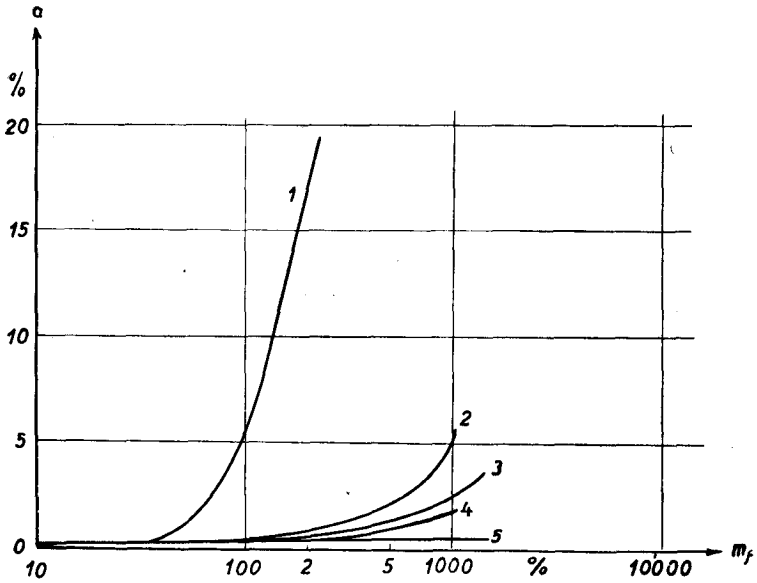


Fig. 28. Modulationsverzerrung.

Variable = Modulationstiefe des Fremdsignales  
 Parameter = Modulationsfrequenz

Der Hilfsträger wurde bei den Messungen 4 und 5 einer Amplitudenbegrenzung unterworfen.

Kurven	Hilfsträger Trägerrest	
1	Null	
2, 3, 4, 5	15	
	$p$ (pps)	
5	3000	mit Ampl. br.
3	3000	ohne "
4	900	mit "
2	900	ohne "

$U_f = 50 \text{ mV}$   
 $\alpha = 0,95$   
 $V = 0$

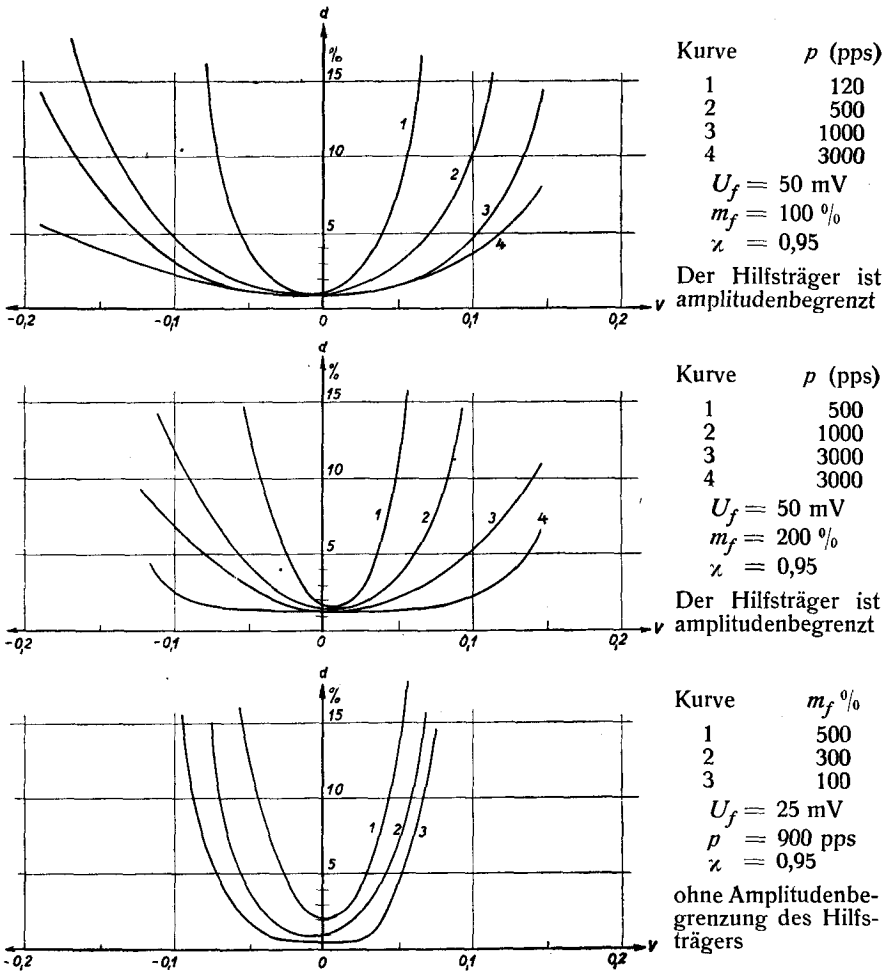


Fig. 29. Modulationsverzerrung.

Variable = relative Verstimmung  
 Parameter = Modulationsfrequenz  
 Modulationstiefe des Fremdsignales  
 Amplitude des Fremdsignales  
 Rückkopplung

Bei der Aufnahme der Kurve 4 (mittleres Bild) wurde jeweils die durch die Verstimmung bedingte Phase des Hilsträgers kompensiert.

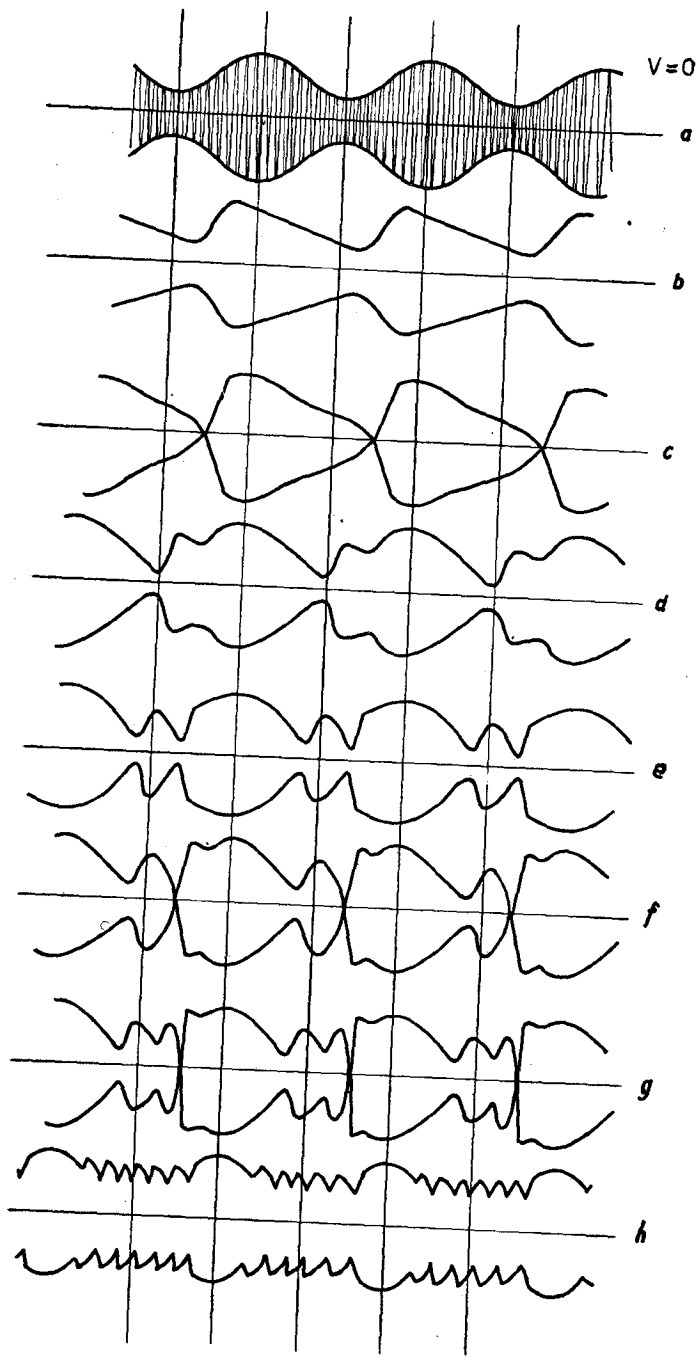


Fig. 30. Oszillogramm.

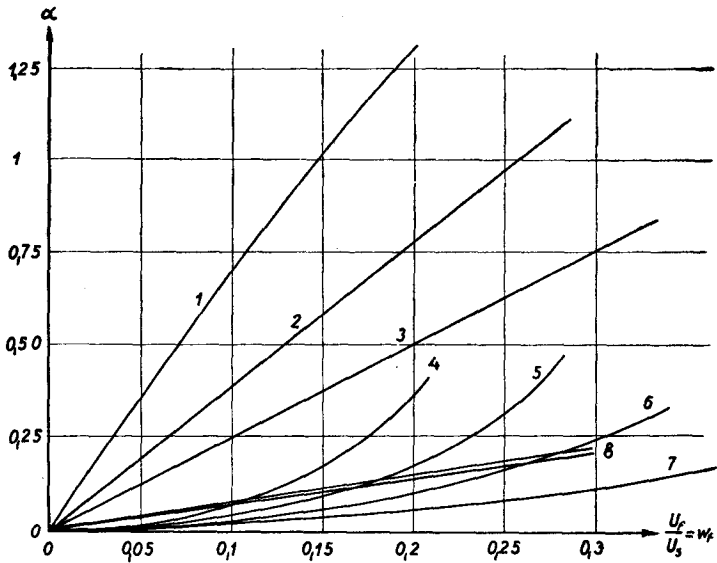


Fig. 31. Synchronisierungsbreite.

Variable = Amplitude des Fremdsignales  $U_f$

Parameter = Rückkopplung  $\kappa$

Trägerfrequenzverhältnis  $\frac{n}{m}$

Kurve	$\kappa$	$\frac{n}{m}$	Kurve	$\kappa$	$\frac{n}{m}$
1	0,95	1	5	0,95	$\frac{1}{2}$
2	0,90	1	6	0,90	$\frac{1}{2}$
3	0,80	1	7	0,80	$\frac{1}{2}$
4	0,975	$\frac{1}{2}$	8	0,95–0,80	2

## 5. Aussagen des Experimentes

Das Experiment bestätigt in allen Teilen die Aussagen der Theorie. Wir erkennen aus den Kurvenbildern die Filterwirkung des als Vierpol aufgefaßten Hilfsgenerators. Im weitem tritt klar der Einfluß der Stärke des Fremdsignales und der Stärke der Rückkopplung auf die Filterbreite hervor. Um das Vergleichen der Resultate des Experimentes mit jenen der Theorie zu erleichtern, wurden die aus Gleichung (121) berechneten Werte der  $V_{450}$  in Fig. 7 dargestellt.

Fig. 30 zeigt in einer Bilderfolge das Generatorsignal bei amplitudenmoduliertem Fremdsignal für schrittweise vergrößerte Verstimmung. Die Modulationsfrequenz ist sehr klein und beträgt 10 Hz. Wir erkennen aus Ort und Art der Ablösung der Schwebungen deutlich, daß die momentane Größe der Amplitude des Fremdsignales maßgebend ist für die Synchronisierung. Bild b zeigt die durch die Verstimmung hervorgerufene Verzerrung der Modulation, hauptsächlich bestehend aus der zweiten Harmonischen.

In Fig. 31 sind vollständigshalber noch die Synchronisationsbreiten in Funktion der angelegten unmodulierten Synchronisierungsspannung dargestellt.



## IV. Anwendung in der Technik

Wir greifen zurück auf die in der Einleitung aufgeführten zwei Beispiele, die heute von Interesse sind.

### *1. Übertragung amplitudenmodulierter Signale mit reduziertem Träger.*

Die Theorie und das Experiment bestätigen, daß man mit einem über 100prozentig modulierten Signal einen Hilfsgenerator synchronisieren kann, so daß dieser einen frequenzrichtigen Zusatzträger liefert. Vom letzteren wird weiter verlangt, daß er amplituden- und phasenmodulationsfrei und dazu noch phasenrichtig sei. Die beiden ersten Forderungen erfüllt er umso besser, je höher die Modulationsfrequenz über der charakteristischen Parameterfrequenz des Generators liegt. Das heißt also, daß die Modulationsfrequenz (eventuell durch Transponierung) so hoch gewählt werden muß, daß die Wirkung des Hilfsgenerators als Filter und zugleich als aktiver Zweipol voll zur Geltung kommt. Die Filtereigenschaften können um ein vielfaches besser sein als diejenigen eines einzelnen Schwingkreises (vergleiche Fig. 7 und 8), und zwar umso ausgeprägter, je schwächer das synchronisierende Signal gewählt wird.

Die Verstimmung zwischen der Resonanzfrequenz und der Trägerfrequenz des Fremdsignales hat eine unerwünschte Phase des Hilfsträgers zur Folge. Letztere verursacht bei der Demodulation des zusammengesetzten Signales Verzerrungen der Modulation. Diese Fehlphase ist umso größer, je schwächer das synchronisierende Signal und je größer die Verstimmung ist. Diese Verstimmung wird verursacht durch die Frequenzinkonstanz von Sender und Hilfsgenerator. Sie kann natürlich manuell oder mit bestimmtem Aufwand automatisch durch ständiges Nachstimmen des Hilfsgenerators ausreguliert werden.

Filterbreite und Fehlphasenanstieg sind zueinander reziproke Funktionen der Amplitude des Fremdsignales. Je kleiner letztere ist, umso höhere Anforderungen werden an die Frequenzkonstanz oder an das Nachstimmorgan gestellt.

## *2. Benutzung des Hilfsgenerators in Relaisstationen für die Frequenztransponierung frequenzmodulierter UKW-Signale.*

Die Möglichkeit der Synchronisation eines Hilfsgenerators mit Signalen, deren Frequenz ungefähr in einem einfachen rationalen Verhältnis zur Frequenz des Generators stehen, ist nur eine Frage der Art der Nichtlinearität der Kennlinie der Schwingröhre im Hilfsgenerator. Theorie und Experiment zeigen, daß sich die Modulation des Fremdsignales umso getreuer auf das synchronisierte Signal überträgt, je schmaler und symmetrischer das Modulationsspektrum zur Filterbreite des Hilfsgenerators ist. Im weiteren erkennen wir aus Fig. 7, daß sich durch die Synchronisation enorme Verstärkungen erzielen lassen. Die Verstärkung wird aber auf Kosten der Filterbreite erzielt.

Die Frequenzinkonstanz von Sender und Hilfsgenerator hat eine Verschiebung des Modulationsspektrums bezüglich der Filtermitte zur Folge, wodurch das Spektrum und somit die Modulation verzerrt wird.

Da bei Frequenzmodulation der Frequenzhub durch die höchste Modulationsfrequenz aus Gründen der Störfreiheit festgelegt und somit das Modulationsspektrum gegeben ist, muß ein Kompromiß zwischen zulässiger Verzerrung, Frequenzkonstanz und Verstärkung getroffen werden.

## V. Zusammenfassung

Die Synchronisierung von Röhrengeneratoren ist eines jener mannigfachen Probleme der gesteuerten Schwingung in einfachen Schwingkreisen. Es wird daher zuerst die allgemeine Differentialgleichung einer gesteuerten Schwingung auf die verschiedenen Steuerarten hin diskutiert und darauf gezeigt, daß der homogene Ausdruck der Differentialgleichung (abgesehen von jener der rein erzwungenen Schwingung) überführt werden kann in eine Hillsche Differentialgleichung. Diese Überführung, für welche bei Rückkopplungsproblemen ein Ansatz getroffen werden muß, hat den Vorteil, daß erstens praktische ausgearbeitete Näherungsverfahren für die Lösungen existieren und zweitens man einen guten Überblick über die mögliche Art der Lösung erhält. Nach diesen Ausführungen wird das Problem der Synchronisierung von Röhrengeneratoren durch modulierte Signale aufgegriffen und in allgemeiner Form [beliebige Nichtlinearität der Kennlinie, beliebige Modulationsart und einfaches rationales Verhältnis von Fremdsignal zur Generatorfrequenz] behandelt. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung wird dargestellt durch ein System von drei nichtlinearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit periodischen Koeffizienten.

Bei der Diskussion über die Bedingungen für Synchronisation stellt sich heraus, daß der synchronisierte Generator als Vierpol aufgefaßt werden kann, welcher den Charakter eines entdämpften Schwingungskreises besitzt. Die Filtereigenschaften werden für einen einfachen Fall näher untersucht.

Im Experiment werden Synchronisierungen mit amplituden- wie frequenzmodulierten Signalen durchgeführt und die Resultate in graphischen Darstellungen festgehalten. Das Experiment zeigt in allen Teilen Übereinstimmung mit der Theorie. Zum Schluß wird noch auf die Verwendbarkeit der Synchronisierung durch modulierte Signale in der Technik hingewiesen.

---

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1944—1946 am Institut für Hochfrequenztechnik an der E. T. H. Meinem sehr verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. *F. Tank*, möchte ich für die Anregung und wertvollen Ratschläge dazu herzlich danken.

### **Abriß des Lebens- und Bildungsganges**

Ich wurde am 30. Juni 1916 als Sohn des Hoteliers Fritz Diemer in Wohlen (Aargau) geboren. In Altstätten (St. G.) besuchte ich die Primar- und Sekundarschule und in Schiers (Prätigau) die Oberrealschule, wo ich im Jahre 1936 die Maturität bestand. Nach halbjährlichem Aufenthalt in Lausanne nahm ich im Herbst 1936 die Studien an der Abteilung IX an der E. T. H. auf. Nach einem Semester wechselte ich über in die Abteilung IIIb. Nach Abschluß der Diplomprüfung im Herbst 1940 trat ich in die Radiofabrik Sondyna AG. Zürich ein und kehrte nach 3 $\frac{1}{2}$  Jahren an die E. T. H. zurück zum Zwecke der Weiterbildung.