



Doctoral Thesis

## Calcul numérique des plaques et des parois minces

**Author(s):**

Dubas, Pierre

**Publication Date:**

1955

**Permanent Link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000089328> →

**Rights / License:**

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

Prom. N° 2365

# Calcul numérique des plaques et des parois minces

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE, ZURICH

POUR L'OBTENTION DU

GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES TECHNIQUES

PAR

**Pierre Dubas**

de Enney (Fribourg)

Rapporteur: Prof. Dr F. Stüssi

Corapporteur: Prof. Dr P. Lardy



Zurich 1955

Imprimerie Leemann S.A.

## Avant-propos

Les charpentes métalliques ont été longtemps formées presque uniquement de barres et de poutres, éléments *linéaires* dont la longueur est grande par rapport aux autres dimensions. Le développement de techniques nouvelles, en particulier de la soudure électrique, a permis l'emploi de tôles larges. Les ouvrages réalisés de cette manière diffèrent notablement des constructions classiques. Pensons notamment aux vannes à caisson<sup>1)</sup> ou aux tabliers métalliques des ponts récents<sup>2)</sup>.

En béton armé, à cause du monolithisme inhérent à ce matériau, on a utilisé très tôt des plaques et des voiles, sans d'ailleurs que le praticien disposât toujours de méthodes de calcul à la fois simples et précises.

Pensant répondre à un besoin, nous avons voué cette étude au *calcul numérique des plaques et des parois minces*, éléments *bidimensionnels*, qui sont les plus employés à part les poutres. La plaque ne diffère de la paroi mince que par le mode de sa sollicitation. Il s'agit dans les deux cas du „solide découpé„ dans un prisme ou un cylindre, par deux plans perpendiculaires aux arêtes et dont la distance, mesurant l'épaisseur de la plaque „ou de la paroi“, est petite par rapport aux autres dimensions“<sup>3)</sup>. Si les forces extérieures

---

<sup>1)</sup> Cf. *C. Prince*: Particularités du calcul des vannes du type à caisson, Schweizerische Bauzeitung, 4. Juli 1953.

<sup>2)</sup> A ce sujet on consultera notamment les ouvrages suivants. *W. Cornelius*: Die Berechnung der ebenen Flächentragwerke mit Hilfe der Theorie der orthogonalanisotropen Platten, Der Stahlbau, Februar, März und April 1952; *H. Homberg*: Über die Lastverteilung durch Schubkräfte, Theorie des Plattenkreuzwerks, Der Stahlbau, März, April und Mai 1952.

<sup>3)</sup> Cf. *Henry Favre*: Cours de Mécanique, Tome III, Chapitres choisis, Dunod, Paris, et Leemann, Zurich, 1949, p. 14 et 103.

s'exercent *normalement* aux faces, on parle de *plaque mince*; si leurs lignes d'action sont *dans le plan équidistant des faces*, on parle de *paroi mince*<sup>4)</sup>.

De nombreux auteurs se sont occupés des plaques et des parois minces et la théorie générale est bien au point. La solution de beaucoup de problèmes particuliers a été donnée, la plupart du temps par des méthodes de mathématiques supérieures, peu accessibles au praticien. Celui-ci en est souvent réduit à l'usage de tables incontrôlables. Bien plus, certains problèmes n'ont pas reçu de solution satisfaisante: pensons aux plaques continues et notamment aux parois. Dans ce domaine on a surtout étudié le demi-plan et la bande indéfinie, mais, pour prendre un cas apparemment simple, le problème du carré soumis à deux forces axiales n'a pas été résolu mathématiquement à notre connaissance.

Les méthodes utilisées se divisent en deux grands groupes: celles basées sur l'analyse mathématique d'une part, les procédés expérimentaux d'autre part. Parmi ces derniers relevons les divers emplois de la photo-élasticité, la méthode optique<sup>5)</sup> et les essais sur modèle réduit. Pour fécondes qu'elles soient, ces études ne sauraient cependant évincer l'analyse mathématique. A mi-chemin entre cette dernière et les procédés expérimentaux se situe la méthode graphomécanique du professeur *Ch. Massonnet*, méthode qui part d'états élastiques connus mathématiquement mais postule l'usage d'un sommateur idoine<sup>6)</sup>.

Les travaux mathématiques utilisent de préférence des séries doubles. Des méthodes spéciales (*Ritz*, énergie de déformation, etc.)

---

<sup>4)</sup> Le terme „paroi“ est pris comme l'équivalent de l'allemand „Scheibe“, de préférence à „disque“ ou „plaque“ qui prêtent à confusion. On a voulu éviter l'expression „élasticité plane“ qui serait trop générale dans notre cas (surfaces multiplement connexes par exemple).

<sup>5)</sup> Cf. *P. Dantu*: Etude expérimentale des plaques par une méthode optique, Annales des Ponts et Chaussées, juin 1952; Application à une méthode nouvelle de détermination des contraintes en élasticité plane, Annales des Ponts et Chaussées, août 1952.

<sup>6)</sup> Cf. *Ch. Massonnet*: Résolution graphomécanique des problèmes généraux de l'élasticité plane, Bulletin du Centre d'Etudes, de Recherches et d'Essais scientifiques des Constructions du Génie civil et d'Hydraulique fluviale, Tome IV, 1949.

permettent des développements élégants, elles n'en exigent pas moins des connaissances très poussées, peu familières au praticien; elles ne conduisent même pas toujours au résultat. Ces inconvénients ont fait le succès de la méthode aux différences, méthode qui pêche malheureusement par manque de précision<sup>7)</sup>. Pour garantir des résultats corrects, il faudra serrer le réseau, ce qui ne va pas sans un surcroît de besogne, souvent incompatible avec les besoins de la pratique.

Il serait donc utile de posséder une méthode numérique, n'utilisant que des notions familières à tout ingénieur, et dont la précision serait élevée pour un calcul d'une étendue normale. Or cette méthode existe: elle est fondée sur les propriétés du *polygone funiculaire*. Son équation est l'équivalent d'une relation différentielle du deuxième degré, celle qui lie dans une poutre le moment de flexion à la charge qui le provoque. Cette méthode de statique appliquée a été mise au point par le professeur *F. Stüssi*<sup>8)</sup> qui l'a employée à la solution de nombreux problèmes régis par des équations

<sup>7)</sup> Pour la théorie générale et les applications aux plaques voir *H. Marcus*: Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten, Springer, Berlin, 1924.

Pour la précision dans l'application de la méthode aux parois minces, voir par exemple *H. Bay*: Über den Spannungszustand in hohen Trägern und die Bewehrung von Eisenbetontragwänden, Wittwer, Stuttgart, 1931, p. 30. Pour un réseau de six fois six mailles, il est impossible à l'auteur de donner même l'ordre de grandeur des contraintes extrêmes.

<sup>8)</sup> On consultera notamment:

*F. Stüssi*: Die Stabilität des auf Biegung beanspruchten Trägers, Abhandlungen I.V.B.H., dritter Band, 1935, p. 405 sqq. — Baustatische Methoden, Schweizerische Bauzeitung, 20. Juni 1936. — Vorlesungen über Baustatik, erster Band, Birkhäuser, Basel, 1946, p. 259. — Polygone funiculaire et équations différentielles, Bulletin de la Société royale des sciences de Liège, N° 6 et 7, 1949. — Numerische Lösung von Randwertproblemen mit Hilfe der Seilpolygongleichung, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, Vol. I, 1950, p. 53—70. — Berechnung der Beulspannungen gedrückter Rechteckplatten, Abhandlungen I.V.B.H., achter Band, 1947, p. 237—248. — Ausgewählte Kapitel aus der Theorie des Brückenbaues, Taschenbuch für Bauingenieure, herausgegeben von F. Schleicher, zweite Auflage, Springer, Berlin, 1955.

Les relations fondamentales données au chapitre deuxième, paragraphe 2<sup>o</sup>, sont tirées des ouvrages précités.

tions différentielles d'une seule variable. L'extension de la méthode aux problèmes à deux dimensions a été esquissée en principe<sup>9)</sup>.

Le présent travail se propose d'appliquer systématiquement la méthode du polygone funiculaire aux plaques et aux parois minces, en établissant les procédés de calcul et en montrant quelques exemples.

La théorie générale des plaques et des parois minces sera d'abord rappelée; elle sera ensuite traduite dans la langue du polygone funiculaire. Après quoi on passera en revue les principaux cas d'application aux plaques (librement appuyées, encastrées, continues, obliques, etc., voilement) et aux parois (répartition des forces qui sollicitent le pourtour, tensions de retrait, largeur utile des tables de compression des poutres).

Sans épuiser la question, ces exemples montreront les possibilités nombreuses de la méthode dont on examinera pour terminer la précision et les extensions futures à d'autres domaines.

## CHAPITRE PREMIER

### **Rappel de la théorie générale des plaques minces et de celle des parois minces**

#### **1<sup>o</sup> Objet de ce rappel. Définitions et notations**

Le présent chapitre n'apportera rien de nouveau au lecteur; celui qu'intéresse seule la solution numérique peut le sauter sans inconvénient. Il a paru cependant opportun de rappeler la théorie générale des plaques minces et celle des parois minces, de préciser les simplifications et les hypothèses qui en sont la base et d'établir brièvement les équations différentielles qui régissent ces problèmes.

---

<sup>9)</sup> Cf. *Ch. Dubas*: Contribution à l'étude du voilement des tôles raidies, Publication N<sup>o</sup> 23 de l'Institut de statique appliquée, Leemann, Zurich, 1948.